

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Model I

Pada sub bab ini dibahas model epidemi *SIR* (*Susceptible-Infected-Recovery*) untuk semua penduduk dengan adanya penduduk yang ter vaksin dan imigran. Diasumsikan bahwa imigran berinteraksi dengan semua orang dan jumlah penduduk disimbolkan oleh nilai konstan N .

3.1.1 Konstruksi Model

Model I diperoleh dengan mengkonstruksi model kompartemen pada Gambar 2.1 ke dalam model matematika. Laju perubahan dari masing-masing subpopulasi dinyatakan sebagai berikut.

3.1.1.1. Laju Perubahan Subpopulasi Individu yang Rentan

Bertambahnya jumlah subpopulasi individu yang rentan, dipengaruhi oleh kelahiran dan adanya imigrasi.

Misalkan warga dilahirkan ke populasi dengan tingkat kelahiran konstan (μ_1). Sebagian kecil dari warga divaksinasi dengan tingkat kelahiran σ_1 dan sisanya rentan, sehingga proporsi warga yang rentan adalah $(1 - \sigma_1)\mu_1$. Laju perubahan subpopulasi individu yang rentan berbanding lurus dengan proporsi warga yang rentan pada waktu t , yaitu

$$\frac{dS(t)}{dt} = (1 - \sigma_1)\mu_1 N(t).$$

Imigran masuk ke populasi dengan tingkat imigrasi (μ_2). Seorang individu dapat kebal penyakit sebelum mereka bermigrasi atau divaksinasi. Sebagian kecil dari imigran yang kebal tersebut masuk ke penduduk sebagai ter vaksinasi ditunjukkan dengan σ_2 , dan sisanya rentan. Dengan demikian, proporsi imigran yang rentan adalah $(1 - \sigma_2)\mu_2$. Laju perubahan subpopulasi individu yang rentan berbanding lurus dengan proporsi imigran yang rentan pada waktu t , yaitu

$$\frac{dS(t)}{dt} = (1 - \sigma_2)\mu_2 N(t).$$

Penyebaran penyakit terjadi dengan adanya kontak langsung antara individu rentan dengan individu terinfeksi dan menjadi kelompok terinfeksi. Keadaan ini menyebabkan berkurangnya

subpopulasi individu yang rentan dengan laju β , sedangkan subpopulasi individu yang terinfeksi bertambah. Oleh karena itu, laju perubahan subpopulasi individu yang rentan berbanding lurus dengan berkurangnya subpopulasi individu yang rentan karena kontak langsung dengan subpopulasi individu yang terinfeksi pada waktu t , yaitu

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\frac{\beta S(t)I(t)}{N(t)}.$$

Menurut Hethcote, tingkat kematian seimbang dengan kelahiran dan imigrasi sehingga ukuran populasi N konstan. Oleh karena itu, digunakan tingkat kematian $\Lambda = \mu_1 + \mu_2$ karena diasumsikan mortalitas rendah untuk setiap penyakit. Banyaknya individu yang rentan berkurang dengan adanya kematian, sehingga laju perubahan subpopulasi individu yang rentan pada waktu t , yaitu

$$\frac{dS(t)}{dt} = \Lambda S(t).$$

Dengan demikian, total laju perubahan subpopulasi individu yang rentan pada waktu t dapat dinyatakan dengan

$$\frac{dS(t)}{dt} = (1 - \sigma_1)\mu_1 N(t) + (1 - \sigma_2)\mu_2 N(t) - \frac{\beta S(t)I(t)}{N(t)} - \Lambda S(t) \quad (3.1)$$

3.1.1.2. Laju Perubahan Subpopulasi Individu yang Terinfeksi

Banyaknya individu rentan yang melakukan kontak langsung dengan individu terinfeksi menyebabkan bertambahnya subpopulasi individu yang terinfeksi. Laju perubahan subpopulasi individu yang terinfeksi pada waktu t dapat dinyatakan dengan

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\beta S(t)I(t)}{N(t)}.$$

Adanya individu yang sembuh mengurangi subpopulasi individu yang terinfeksi. Individu terinfeksi yang pulih memasuki kelompok sembuh dengan laju γ . Oleh karena itu, laju perubahan subpopulasi individu yang terinfeksi pada waktu t berbanding lurus dengan adanya individu yang sembuh dari infeksi, yaitu

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\gamma I(t).$$

Banyaknya individu yang terinfeksi berkurang dengan adanya kematian, sehingga laju perubahan subpopulasi individu yang terinfeksi pada waktu t , yaitu

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\lambda I(t).$$

Dengan demikian, total laju perubahan subpopulasi individu yang terinfeksi pada waktu t dapat dinyatakan dengan

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\beta S(t)I(t)}{N(t)} - \gamma I - \lambda I(t). \quad (3.2)$$

3.1.1.3. Laju Perubahan Subpopulasi Individu yang Sembuh

Kelompok sembuh adalah campuran dari warga negara dan imigran, dan juga berisi orang-orang yang akan divaksinasi. Oleh karena itu, tingkat kelahiran warga dan tingkat warga yang tervaksin menyebabkan bertambahnya subpopulasi individu yang sembuh. Jadi, laju perubahan subpopulasi individu yang sembuh pada waktu t , yaitu

$$\frac{dR(t)}{dt} = \sigma_1 \mu_1 N(t).$$

Tingkat imigrasi dan tingkat imigran yang kebal terhadap penyakit atau tervaksin juga menyebabkan bertambahnya subpopulasi individu yang sembuh. Laju perubahan subpopulasi individu yang sembuh pada waktu t , yaitu

$$\frac{dR(t)}{dt} = \sigma_2 \mu_2 N(t).$$

Berkurangnya subpopulasi individu yang terinfeksi karena adanya penyembuhan dengan laju γ mengakibatkan bertambahnya subpopulasi individu yang sembuh. Oleh karena itu, laju perubahan subpopulasi individu yang sembuh dapat dinyatakan dengan

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t).$$

Subpopulasi individu yang sembuh berkurang dengan adanya kematian, sehingga laju perubahan pada waktu t adalah

$$\frac{dR(t)}{dt} = -\lambda R(t).$$

Dengan demikian, total laju perubahan subpopulasi individu yang sembuh pada waktu t dapat dinyatakan dengan

$$\frac{dR(t)}{dt} = \sigma_1 \mu_1 N(t) + \sigma_2 \mu_2 N(t) + \gamma I(t) - \lambda R(t). \quad (3.3)$$

Diasumsikan N, μ_1, μ_2, γ dan β adalah semua parameter konstan positif, dan tingkat pemberian vaksinasi $0 \leq \sigma_1, \sigma_2 \leq 1$.

Dari persamaan (3.1)-(3.3) diperoleh sistem persamaan diferensial nonlinear untuk model I yaitu:

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= (1 - \sigma_1)\mu_1 N(t) + (1 - \sigma_2)\mu_2 N(t) - \frac{\beta S(t)I(t)}{N(t)} - \Lambda S(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \frac{\beta S(t)I(t)}{N(t)} - \gamma I(t) - \Lambda I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \sigma_1\mu_1 N(t) + \sigma_2\mu_2 N(t) + \gamma I(t) - \Lambda R(t).\end{aligned}\tag{3.4}$$

Sistem persamaan (3.4) dapat direduksi dengan menggunakan penskalaan $s = S/N, i = I/N$, dan $r = R/N$ menjadi,

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= (1 - \sigma_1)\mu_1 + (1 - \sigma_2)\mu_2 - \beta si - \Lambda s, \\ \frac{di}{dt} &= \beta si - \gamma i - \Lambda i, \\ \frac{dr}{dt} &= \sigma_1\mu_1 + \sigma_2\mu_2 + \gamma i - \Lambda r.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Pada sistem persamaan diatas, variabel r tidak muncul pada persamaan baris pertama dan kedua. Hal ini menunjukkan bahwa jumlah individu pada kelompok r tidak mempengaruhi laju perubahan jumlah individu pada kelompok s maupun i . Dengan demikian, untuk selanjutnya sistem persamaan (3.5) dapat diperhatikan sebagai sistem

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= (1 - \sigma_1)\mu_1 + (1 - \sigma_2)\mu_2 - \beta si - \Lambda s, \\ \frac{di}{dt} &= \beta si - \gamma i - \Lambda i.\end{aligned}\tag{3.6}$$

3.1.2 Titik Keseimbangan Sistem dan Angka Reproduksi Vaksinasi

Berdasarkan definisi 2.3, titik keseimbangan pada suatu sistem akan terjadi jika tidak ada perubahan lagi pada sistem sehingga model akan mengalami keseimbangan jika

$$(1 - \sigma_1)\mu_1 + (1 - \sigma_2)\mu_2 - \beta si - \Lambda s = 0, \quad (3.7)$$

$$\beta si - \gamma i - \Lambda i = 0. \quad (3.8)$$

Dari persamaan (3.8) diperoleh

$$i = 0$$

atau

$$s = \frac{\gamma + \Lambda}{\beta}.$$

Jika $i = 0$ maka persamaan (3.7) menjadi

$$(1 - \sigma_1)\mu_1 + (1 - \sigma_2)\mu_2 - \Lambda s = 0,$$

sehingga

$$s = \frac{(1 - \sigma_1)\mu_1 + (1 - \sigma_2)\mu_2}{\Lambda}.$$

Diperoleh titik keseimbangan $E_0 = (s_0, i_0) = \left(\frac{(1 - \sigma_1)\mu_1 + (1 - \sigma_2)\mu_2}{\Lambda}, 0 \right)$.

Jika $i \neq 0$ maka $s = \frac{\gamma + \Lambda}{\beta}$, sehingga persamaan (3.7) menjadi

$$(1 - \sigma_1)\mu_1 + (1 - \sigma_2)\mu_2 - (\gamma + \Lambda)i - \frac{\Lambda(\gamma + \Lambda)}{\beta} = 0.$$

Dengan memindahkan suku yang memuat i ke ruas kiri diperoleh

$$i = \frac{(1 - \sigma_1)\mu_1 + (1 - \sigma_2)\mu_2}{(\gamma + \Lambda)} - \frac{\Lambda}{\beta},$$

sehingga didapatkan titik keseimbangan

$$E_e = (s_e, i_e) = \left(\frac{(\gamma + \Lambda)}{\beta}, \frac{(1 - \sigma_1)\mu_1 + (1 - \sigma_2)\mu_2}{\gamma + \Lambda} - \frac{\Lambda}{\beta} \right).$$

Jadi, dengan menyelesaikan persamaan (3.7) dan (3.8), diperoleh dua titik keseimbangan.

1. Titik keseimbangan bebas penyakit yaitu

$$E_0 = (s_0, i_0) = \left(\frac{(1 - \sigma_1)\mu_1 + (1 - \sigma_2)\mu_2}{\Lambda}, 0 \right). \quad (3.9)$$

2. Titik keseimbangan endemik yaitu

$$E_e = (s_e, i_e) = \left(\frac{(\gamma + \Lambda)}{\beta}, \frac{(1 - \sigma_1)\mu_1 + (1 - \sigma_2)\mu_2}{\gamma + \Lambda} - \frac{\Lambda}{\beta} \right). \quad (3.10)$$

Nilai i yang tidak nol menunjukkan bahwa terdapat individu yang terinfeksi penyakit dan menyebabkan endemik.

Untuk mengetahui tingkat penyebaran suatu penyakit diperlukan suatu parameter tertentu. Parameter yang biasa digunakan dalam masalah penyebaran penyakit adalah angka reproduksi vaksinasi dan dinotasikan sebagai R_v .

Dari persamaan (3.8) diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \beta si - \gamma i - \Lambda i \\ &= -(\gamma + \Lambda)i \left(1 - \frac{\beta s}{\gamma + \Lambda}\right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Berdasarkan persamaan (3.11), rasio reproduksi vaksinasi dapat dituliskan sebagai

$$R_v = \frac{\beta s}{(\gamma + \Lambda)}. \quad (3.12)$$

Jika $R_v < 1$ maka $\frac{di}{dt} < 0$ untuk $t > 0$, yang berarti bahwa jumlah individu terinfeksi semakin berkurang sehingga penyakit akan menghilang dari populasi dan tidak terjadi endemik. Jika $R_v > 1$ maka $\frac{di}{dt} > 0$ untuk $t > 0$, yang berarti jumlah individu terinfeksi semakin bertambah sehingga penyakit akan meluas dan menjadi endemik.

Berdasarkan definisi titik kesetimbangan, nilai s pada persamaan (3.12) didekati dengan titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu s_0 . Sehingga nilai R_v dapat dituliskan

$$\begin{aligned} R_v &= \frac{\beta s}{(\gamma + \Lambda)} \text{ dengan } s = \frac{(1 - \sigma_1)\mu_1 + (1 - \sigma_2)\mu_2}{\Lambda}, \\ R_v &= \frac{\beta((1 - \sigma_1)\mu_1 + (1 - \sigma_2)\mu_2)}{\Lambda(\gamma + \Lambda)}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.1.3 Analisis Kestabilan

Analisis kestabilan ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks Jacobi yang diperoleh melalui linearisasi. Matriks Jacobi sistem (3.6) adalah

$$J = \begin{pmatrix} -\beta i - \Lambda & -\beta s \\ \beta i & \beta s - (\gamma + \Lambda) \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Kestabilan titik-titik kesetimbangan E_0 dan E_e ditentukan berdasarkan nilai eigen matriks Jacobi di titik-titik tersebut.

3.1.3.1 Kestabilan Titik Kesetimbangan E_0

Matriks Jacobi di titik $E_0 = (s_0, i_0)$ adalah

$$J = \begin{pmatrix} -\Lambda & -\beta s_0 \\ 0 & \beta s_0 - (\gamma + \Lambda) \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

dengan $s_0 = \frac{(1-\sigma_1)\mu_1 + (1-\sigma_2)\mu_2}{\Lambda}$, dan nilai eigen $\lambda_1 = -\Lambda$ dan $\lambda_2 = \beta s_0 - (\gamma + \Lambda)$. Berdasarkan Tabel 2.1, E_0 akan stabil asimtotik jika $\beta s_0 < (\gamma + \Lambda)$, yang mengakibatkan

$$\frac{\beta s_0}{(\gamma + \Lambda)} = R_v < 1.$$

Oleh karena itu, titik E_0 akan stabil asimtotik untuk $R_v < 1$. Namun, jika $R_v > 1$ maka titik E_0 tidak stabil.

Untuk menganalisa kestabilan global di titik kesetimbangan bebas penyakit, digunakan Kriteria Dulac dan Teorema Poincare seperti dalam Teorema 2.3 dan Teorema 2.4. Dalam bahasan ini titik kesetimbangan bebas penyakit untuk $R_v < 1$ berada dalam suatu daerah R^2 . Jika di sekitar titik kesetimbangan tidak terdapat orbit periodik, maka titik kesetimbangan bersifat stabil global. Keberadaan orbit periodik dapat ditunjukkan dengan menggunakan Kriteria Dulac, dengan suatu fungsi Dulac yang berada di daerah R^2 adalah

$$b(s, i) = \frac{1}{si}$$

Pada Teorema 2.3, fungsi f dan g adalah ruas kanan persamaan $\frac{ds}{dt}$ dan $\frac{di}{dt}$ pada sistem (3.6), sehingga

$$\begin{aligned} bf &= \frac{(1 - \sigma_1)\mu_1 + (1 - \sigma_2)\mu_2 - \beta si - (\mu_1 + \mu_2)s}{si} \\ &= \frac{(1 - \sigma_1)\mu_1 + (1 - \sigma_2)\mu_2}{si} - \beta - \frac{(\mu_1 + \mu_2)}{i} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} bg &= \frac{\beta si - \gamma i - (\mu_1 + \mu_2)i}{si} \\ &= \beta - \frac{(\gamma + \mu_1 + \mu_2)}{s} \end{aligned}$$

dengan demikian, diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial s}(bf) + \frac{\partial}{\partial i}(bg) = -\frac{(1 - \sigma_1)\mu_1 + (1 - \sigma_2)\mu_2}{s^2 i}$$

Karena $0 < \sigma_1, \sigma_2 < 1$, $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$, $s > 0$, dan $i > 0$ maka $\frac{\partial}{\partial s}(bf) + \frac{\partial}{\partial i}(bg) \neq 0$ dan tidak berubah tanda. Sehingga dapat disimpulkan bahwa tidak terdapat orbit periodik pada sistem (3.6). Jadi, titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil global untuk $R_v < 1$.

3.1.3.2 Kestabilan Titik Kesetimbangan E_e

Matriks Jacobi di titik $E_e = (s_e, i_e)$ adalah

$$J = \begin{pmatrix} -\beta i_e - \Lambda & -(\gamma + \Lambda) \\ \beta i_e & 0 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Titik kesetimbangan endemik E_e pada persamaan (3.10) dapat ditulis dengan menggunakan rasio reproduksi vaksinasi sebagai berikut

$$E_e = (s_e, i_e) = \left(\frac{((1 - \sigma_1)\mu_1 + (1 - \sigma_2)\mu_2)}{R_v \Lambda}, \frac{\Lambda}{\beta}(R_v - 1) \right). \quad (3.17)$$

Nilai eigen dari matriks Jacobi (3.16) diperoleh dengan menyelesaikan

$$|J(E_e) - \lambda I| = 0,$$

yaitu

$$\begin{vmatrix} -\beta i_e - \Lambda - \lambda & -(\gamma + \Lambda) \\ \beta i_e & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Dengan menggunakan i_e pada persamaan (3.17) diperoleh

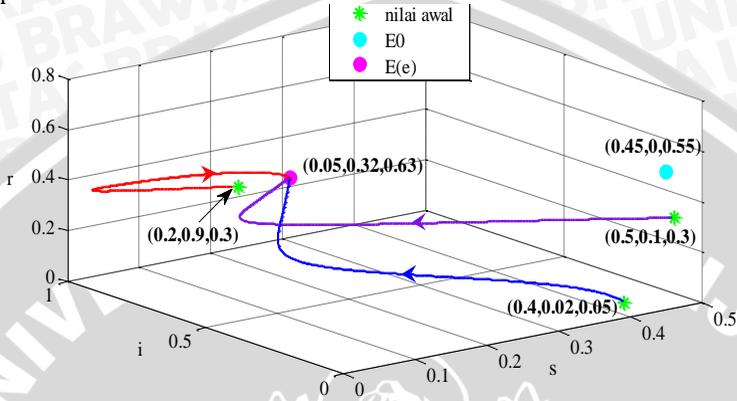
$$\lambda_{1,2} = \frac{-\Lambda R_v \pm \sqrt{\Lambda^2 R_v^2 - 4\Lambda(R_v - 1)(\gamma + \Lambda)}}{2}. \quad (3.18)$$

Dari persamaan (3.17), titik endemik hanya akan muncul jika $R_v > 1$ sedangkan nilai eigen $\lambda_{1,2}$ akan berupa bilangan real negatif atau bilangan kompleks dengan real bernilai negatif untuk

$$1 < R_v < \frac{4(\gamma + \Lambda)}{\Lambda}. \quad (3.19)$$

Kondisi ini menyebabkan titik kesetimbangan E_e akan stabil asimtotik spiral. Untuk mengecek kestabilan titik kesetimbangan E_e saat $R_v > \frac{4(\gamma + \Lambda)}{\Lambda}$, digunakan parameter $\sigma_1 = 0.6$, $\sigma_2 = 0.5$, $\beta = 0.8$, $\gamma = 0.008$, $\mu_1 = 0.015$, dan $\mu_2 = 0.015$. Kestabilan titik kesetimbangan E_e untuk $R_v > \frac{4(\gamma + \Lambda)}{\Lambda}$ ditunjukkan pada Gambar 3.1.

Berdasarkan Gambar 3.1 dapat disimpulkan bahwa untuk $R_v > \frac{4(\gamma+\Lambda)}{\Lambda}$, titik kesetimbangan E_e bersifat stabil asimtotik.



Gambar 3.1 Kestabilan titik E_e untuk $R_v > \frac{4(\gamma+\Lambda)}{\Lambda}$

3.2 Model II

3.2.1 Konstruksi Model

Pada subbab ini dibahas model *SIR* dengan memisahkan antara subpopulasi warga negara dengan subpopulasi imigran. Jumlah penduduk disimbolkan oleh $N_T = N_1 + N_2$, dengan $N_1 =$ populasi warga negara dan $N_2 =$ populasi imigran.

Laju perubahan dari masing-masing subpopulasi dinyatakan sebagai berikut.

3.2.1.1 Laju Perubahan Subpopulasi Warga Negara yang Rentan

Bertambahnya jumlah subpopulasi warga negara yang rentan, dipengaruhi oleh kelahiran dan adanya kontak dengan imigran.

Warga dilahirkan ke populasi pada tingkat kelahiran konstan (μ_1). Sebagian kecil dari warga divaksinasi dengan laju σ_1 dan sisanya rentan, sehingga proporsi warga yang rentan adalah $(1 - \sigma_1) \mu_1$. Laju perubahan subpopulasi individu yang rentan berbanding lurus dengan proporsi warga yang rentan pada waktu t , yaitu

$$\frac{dS_1(t)}{dt} = (1 - \sigma_1) \mu_1 N_1(t).$$

Penyebaran penyakit terjadi karena adanya kontak langsung antara individu rentan dengan individu terinfeksi dan menjadi kelompok terinfeksi. Orang-orang di kedua kelompok berinteraksi dalam kelompok menggunakan laju kontak β_{11} dan β_{22} . Tingkat kontak diluar kelompok adalah β_{12} dan β_{21} . Keadaan ini menyebabkan berkurangnya subpopulasi individu yang rentan, sedangkan subpopulasi individu yang terinfeksi bertambah. Oleh karena itu, laju perubahan subpopulasi individu yang rentan berbanding lurus dengan berkurangnya subpopulasi individu yang rentan karena kontak langsung dengan subpopulasi individu yang terinfeksi pada waktu t , yaitu

$$\frac{dS_1(t)}{dt} = -\frac{\beta_{11}S_1(t)I_1(t)}{N_1(t)} - \frac{\beta_{21}I_2(t)S_1(t)}{N_1(t)}$$

Menurut Hethcote, tingkat kematian seimbang dengan kelahiran dan imigrasi sehingga ukuran populasi N konstan. Oleh karena itu, digunakan tingkat kematian $\Lambda = \mu_1 + \mu_2$. Banyaknya individu yang rentan berkurang dengan adanya kematian, sehingga laju perubahan subpopulasi individu yang rentan pada waktu t , yaitu

$$\frac{dS_1(t)}{dt} = \Lambda S_1(t)$$

Dengan demikian, total laju perubahan subpopulasi individu yang rentan pada waktu t dapat dinyatakan dengan

$$\frac{dS_1(t)}{dt} = (1 - \sigma_1)\mu_1 N_T(t) - \frac{\beta_{11}I_1(t)S_1(t)}{N_1(t)} - \frac{\beta_{21}I_2(t)S_1(t)}{N_1(t)} - \Lambda S_1(t) \quad (3.20)$$

3.2.1.2 Laju Perubahan Subpopulasi Warga Negara yang Terinfeksi

Banyaknya individu rentan yang melakukan kontak langsung dengan individu terinfeksi menyebabkan bertambahnya subpopulasi individu yang terinfeksi. Laju perubahan subpopulasi individu yang terinfeksi pada waktu t dapat dinyatakan dengan

$$\frac{dI_1(t)}{dt} = \frac{\beta_{11}I_1(t)S_1(t)}{N_1} + \frac{\beta_{21}I_2(t)S_1(t)}{N_1}$$

Adanya individu yang sembuh mengurangi subpopulasi individu yang terinfeksi. Individu terinfeksi yang pulih memasuki kelompok sembuh dengan laju γ . Oleh karena itu, laju perubahan

subpopulasi individu yang terinfeksi pada waktu t berbanding lurus dengan adanya individu yang sembuh dari infeksi, yaitu

$$\frac{dI_1(t)}{dt} = -\gamma I_1(t).$$

Banyaknya individu yang terinfeksi berkurang dengan adanya kematian, sehingga laju perubahan subpopulasi individu yang terinfeksi pada waktu t , yaitu

$$\frac{dI_1(t)}{dt} = -\Lambda I_1(t).$$

Dengan demikian, total laju perubahan subpopulasi individu yang terinfeksi pada waktu t dapat dinyatakan dengan

$$\frac{dI_1(t)}{dt} = \frac{\beta_{11}I_1(t)S_1(t)}{N_1(t)} + \frac{\beta_{21}I_2(t)S_1(t)}{N_1(t)} - \gamma I_1(t) - \Lambda I_1(t) \quad (3.21)$$

3.2.1.3 Laju Perubahan Subpopulasi Warga Negara yang Sembuh

Kelompok ini berisi warga negara yang sembuh, dan juga berisi orang-orang yang akan divaksinasi. Oleh karena itu, tingkat kelahiran warga dan tingkat warga yang tervaksin menyebabkan bertambahnya subpopulasi individu yang sembuh. Jadi, laju perubahan subpopulasi individu yang sembuh pada waktu t , yaitu

$$\frac{dR_1(t)}{dt} = \sigma_1 \mu_1 N_T(t)$$

Berkurangnya subpopulasi individu yang terinfeksi karena adanya penyembuhan dengan laju γ mengakibatkan bertambahnya subpopulasi individu yang sembuh. Oleh karena itu, laju perubahan subpopulasi individu yang sembuh dapat dinyatakan dengan

$$\frac{dR_1(t)}{dt} = \gamma I_1(t).$$

Subpopulasi individu yang sembuh berkurang dengan adanya kematian, sehingga laju perubahan pada waktu t adalah

$$\frac{dR_1(t)}{dt} = -\Lambda R_1(t).$$

Dengan demikian, total laju perubahan subpopulasi individu yang sembuh pada waktu t dapat dinyatakan dengan

$$\frac{dR_1(t)}{dt} = \sigma_1 \mu_1 N_T(t) + \gamma I_1(t) - \Lambda R_1(t). \quad (3.22)$$

3.2.1.4 Laju Perubahan Subpopulasi Imigran yang Rentan

Bertambahnya jumlah subpopulasi individu yang rentan, dipengaruhi oleh kelahiran dan adanya imigrasi.

Imigran masuk ke populasi pada tingkat imigrasi (μ_2). Seorang individu dapat menjadi kebal penyakit sebelum mereka berimigrasi atau divaksinasi. Sebagian kecil dari imigran yang kebal tersebut masuk ke penduduk sebagai tervaksinasi ditunjukkan dengan σ_2 , dan sisanya rentan. Dengan demikian, proporsi imigran yang rentan adalah $(1 - \sigma_2)\mu_2$. Laju perubahan subpopulasi individu yang rentan berbanding lurus dengan proporsi imigran yang rentan pada waktu t , yaitu

$$\frac{dS_2(t)}{dt} = (1 - \sigma_2)\mu_2 N_T(t).$$

Penyebaran penyakit terjadi karena adanya kontak langsung antara individu rentan dengan individu terinfeksi dan menjadi kelompok terinfeksi. Orang-orang di kedua kelompok berinteraksi dalam kelompok dengan laju kontak β_{11} dan β_{22} . Tingkat kontak diluar kelompok adalah β_{12} dan β_{21} . Keadaan ini menyebabkan berkurangnya subpopulasi individu yang rentan, sedangkan subpopulasi individu yang terinfeksi bertambah. Oleh karena itu, laju perubahan subpopulasi individu yang rentan berbanding lurus dengan berkurangnya subpopulasi individu yang rentan karena kontak langsung dengan subpopulasi individu yang terinfeksi pada waktu t , yaitu

$$\frac{dS_2(t)}{dt} = -\frac{\beta_{12}I_1(t)S_2(t)}{N_2(t)} - \frac{\beta_{22}I_2(t)S_2(t)}{N_2(t)}.$$

Menurut Hethcote, tingkat kematian seimbang dengan kelahiran dan imigrasi sehingga ukuran populasi N konstan. Oleh karena itu, digunakan tingkat kematian $\Lambda = \mu_1 + \mu_2$. Banyaknya individu yang rentan berkurang dengan adanya kematian, sehingga laju perubahan subpopulasi individu yang rentan pada waktu t , yaitu

$$\frac{dS_2(t)}{dt} = \Lambda S_2(t).$$

Dengan demikian, total laju perubahan subpopulasi individu yang rentan pada waktu t dapat dinyatakan dengan

$$\frac{dS_2(t)}{dt} = (1 - \sigma_2)\mu_2 N_T(t) - \frac{\beta_{12}I_1(t)S_2(t)}{N_2(t)} - \frac{\beta_{22}I_2(t)S_2(t)}{N_2(t)} - \Lambda S_2(t), \quad (3.23)$$

3.2.1.5 Laju Perubahan Subpopulasi Imigran yang Terinfeksi

Banyaknya individu rentan yang melakukan kontak langsung dengan individu terinfeksi menyebabkan bertambahnya subpopulasi individu yang terinfeksi. Laju perubahan subpopulasi individu yang terinfeksi pada waktu t dapat dinyatakan dengan

$$\frac{dI_2(t)}{dt} = \frac{\beta_{12}S_2(t)I_1(t)}{N_2(t)} + \frac{\beta_{21}I_2(t)S_2(t)}{N_2(t)}.$$

Adanya individu yang sembuh mengurangi subpopulasi individu yang terinfeksi. Individu terinfeksi yang pulih memasuki kelompok sembuh dengan laju γ . Oleh karena itu, laju perubahan subpopulasi individu yang terinfeksi pada waktu t berbanding lurus dengan adanya individu yang sembuh dari infeksi, yaitu

$$\frac{dI_2(t)}{dt} = -\gamma I_2(t).$$

Banyaknya individu yang terinfeksi berkurang dengan adanya kematian, sehingga laju perubahan subpopulasi individu yang terinfeksi pada waktu t , yaitu

$$\frac{dI_2(t)}{dt} = -\lambda I_2(t).$$

Dengan demikian, total laju perubahan subpopulasi individu yang terinfeksi pada waktu t dapat dinyatakan dengan

$$\frac{dI_2(t)}{dt} = \frac{\beta_{12}S_2(t)I_1(t)}{N_2(t)} + \frac{\beta_{21}I_2(t)S_2(t)}{N_2(t)} - \gamma - \lambda I_2(t). \quad (3.24)$$

3.2.1.6 Laju Perubahan Subpopulasi Imigran yang Sembuh

Kelompok sembuh adalah campuran dari warga negara dan imigran, dan juga berisi orang-orang yang akan divaksinasi. Oleh karena itu, tingkat imigrasi dan tingkat imigran yang kebal terhadap penyakit atau tervaksin juga menyebabkan bertambahnya subpopulasi individu yang sembuh. Laju perubahan subpopulasi individu yang sembuh pada waktu t , yaitu

$$\frac{dR_2(t)}{dt} = \sigma_2 \mu_2 N_T(t)$$

Berkurangnya subpopulasi individu yang terinfeksi karena adanya penyembuhan dengan laju γ mengakibatkan bertambahnya subpopulasi individu yang sembuh. Oleh karena itu, laju perubahan subpopulasi individu yang sembuh dapat dinyatakan dengan

$$\frac{dR_2(t)}{dt} = \gamma I_2(t).$$

Subpopulasi individu yang sembuh berkurang dengan adanya kematian, sehingga laju perubahan pada waktu t adalah

$$\frac{dR_2(t)}{dt} = -\Lambda R_2(t).$$

Dengan demikian, total laju perubahan subpopulasi individu yang sembuh pada waktu t dapat dinyatakan dengan

$$\frac{dR_2(t)}{dt} = \sigma_2 \mu_2 N_T(t) + \gamma I_2(t) - \Lambda R_2(t). \quad (3.25)$$

Dari persamaan (3.20)-(3.25) diperoleh sistem persamaan diferensial nonlinear untuk model II yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{dt} &= (1 - \sigma_1) \mu_1 N_T - \frac{\beta_{11} I_1 S_1}{N_1} - \frac{\beta_{21} I_2 S_1}{N_1} - \Lambda S_1, \\ \frac{dI_1}{dt} &= \frac{\beta_{11} I_1 S_1}{N_1} + \frac{\beta_{21} I_2 S_1}{N_1} - \gamma I_1 - \Lambda I_1, \\ \frac{dR_1}{dt} &= \sigma_1 \mu_1 N_T + \gamma I_1 - \Lambda R_1, \\ \frac{dS_2}{dt} &= (1 - \sigma_2) \mu_2 N_T - \frac{\beta_{12} I_1 S_2}{N_2} - \frac{\beta_{22} I_2 S_2}{N_2} - \Lambda S_2, \\ \frac{dI_2}{dt} &= \frac{\beta_{12} I_1 S_2}{N_2} + \frac{\beta_{22} I_2 S_2}{N_2} - \gamma I_2 - \Lambda I_2, \\ \frac{dR_2}{dt} &= \sigma_2 \mu_2 N_T + \gamma I_2 - \Lambda R_2. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Keterangan

- $S_1 = S_1(t)$: kelompok warga negara yang rentan pada waktu t ,
- $S_2 = S_2(t)$: kelompok imigran yang rentan pada waktu t ,
- $I_1 = I_1(t)$: kelompok warga negara yang terinfeksi pada waktu t ,
- $I_2 = I_2(t)$: kelompok imigran yang terinfeksi pada waktu t ,
- $R_1 = R_1(t)$: kelompok warga negara yang sembuh pada waktu t ,
- $R_2 = R_2(t)$: kelompok imigran yang sembuh pada waktu t ,
- $N_1 = N_1(t)$: banyaknya populasi warga negara pada waktu t ,
- $N_2 = N_2(t)$: banyaknya populasi imigran pada waktu t ,
- $N_T = N_T(t)$: banyaknya penduduk pada waktu t ,
- μ_1 : tingkat kelahiran warga,
- μ_2 : tingkat imigrasi,
- σ_1 : tingkat warga yang ter vaksin,

- σ_2 : tingkat imigran yang tervaksin,
 β_{11} : laju kontak antar warga
 β_{12} : laju kontak warga dengan imigran
 β_{22} : laju kontak antar imigran
 β_{21} : laju kontak imigran dengan warga
 γ : laju penyembuhan,
 $\Lambda = \mu_1 + \mu_2$: laju kematian.

Dilakukan penskalaan dengan menggunakan koefisien β untuk menyederhanakan model tersebut, yaitu

$$\beta_{11} = \frac{\bar{\beta}_{11}N_1}{N_T}, \quad \beta_{22} = \frac{\bar{\beta}_{22}N_2}{N_T}, \quad \beta_{12} = \frac{\bar{\beta}_{12}N_1}{N_T}, \quad \beta_{21} = \frac{\bar{\beta}_{21}N_2}{N_T}.$$

Misalkan $s_j = S_j/N_T$, $i_j = I_j/N_T$, $r_j = R_j/N_T$, dan jumlah populasi $(s_1 + i_1 + r_1) + (s_2 + i_2 + r_2) = 1$. Dengan menggunakan penskalaan dan pemisalan tersebut, sistem persamaan (3.26) menjadi

$$\begin{aligned}
 \frac{ds_1}{dt} &= (1 - \sigma_1)\mu_1 - \bar{\beta}_{11}i_1s_1 - \bar{\beta}_{21}i_2s_1 - \Lambda s_1, \\
 \frac{di_1}{dt} &= \bar{\beta}_{11}i_1s_1 + \bar{\beta}_{21}i_2s_1 - (\gamma + \Lambda)i_1, \\
 \frac{dr_1}{dt} &= \sigma_1\mu_1 + \gamma i_1 - \Lambda r_1. \\
 \frac{ds_2}{dt} &= (1 - \sigma_2)\mu_2 - \bar{\beta}_{12}i_1s_2 - \bar{\beta}_{22}i_2s_2 - \Lambda s_2, \\
 \frac{di_2}{dt} &= \bar{\beta}_{12}i_1s_2 + \bar{\beta}_{22}i_2s_2 - (\gamma + \Lambda)i_2, \\
 \frac{dr_2}{dt} &= \sigma_2\mu_2 + \gamma i_2 - \Lambda r_2.
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Pada sistem (3.27), variabel r_1 dan r_2 tidak muncul pada persamaan $\frac{ds_1}{dt}$, $\frac{di_1}{dt}$, $\frac{ds_2}{dt}$, dan $\frac{di_2}{dt}$. Hal ini menunjukkan bahwa jumlah individu pada kelompok r tidak mempengaruhi laju perubahan jumlah individu pada kelompok s maupun i , sehingga untuk selanjutnya cukup dibahas 4 persamaan dari sistem persamaan (3.27), yaitu

$$\begin{aligned}
\frac{ds_1}{dt} &= (1 - \sigma_1)\mu_1 - \bar{\beta}_{11}i_1s_1 - \bar{\beta}_{21}i_2s_1 - \Lambda s_1, \\
\frac{di_1}{dt} &= \bar{\beta}_{11}i_1s_1 + \bar{\beta}_{21}i_2s_1 - (\gamma + \Lambda)i_1, \\
\frac{ds_2}{dt} &= (1 - \sigma_2)\mu_2 - \bar{\beta}_{12}i_1s_2 - \bar{\beta}_{22}i_2s_2 - \Lambda s_2, \\
\frac{di_2}{dt} &= \bar{\beta}_{12}i_1s_2 + \bar{\beta}_{22}i_2s_2 - (\gamma + \Lambda)i_2.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

3.2.2 Titik Kesetimbangan Sistem dan Angka Reproduksi Vaksinasi

Berdasarkan definisi 2.3, titik kesetimbangan pada suatu sistem akan terjadi jika tidak ada perubahan lagi pada sistem sehingga model akan mengalami kesetimbangan jika

$$(1 - \sigma_1)\mu_1 - \bar{\beta}_{11}i_1s_1 - \bar{\beta}_{21}i_2s_1 - \Lambda s_1 = 0, \tag{3.29}$$

$$\bar{\beta}_{11}i_1s_1 + \bar{\beta}_{21}i_2s_1 - (\gamma + \Lambda)i_1 = 0, \tag{3.30}$$

$$(1 - \sigma_2)\mu_2 - \bar{\beta}_{12}i_1s_2 - \bar{\beta}_{22}i_2s_2 - \Lambda s_2 = 0, \tag{3.31}$$

$$\bar{\beta}_{12}i_1s_2 + \bar{\beta}_{22}i_2s_2 - (\gamma + \Lambda)i_2 = 0. \tag{3.32}$$

Dari persamaan (3.30) diperoleh

$$\begin{aligned}
(\bar{\beta}_{11}s_1 - (\gamma + \Lambda))i_1 + \bar{\beta}_{21}i_2s_1 &= 0 \\
(\bar{\beta}_{11}s_1 - (\gamma + \Lambda))i_1 &= -\bar{\beta}_{21}i_2s_1 \\
i_1 &= -\frac{\bar{\beta}_{21}i_2s_1}{(\bar{\beta}_{11}s_1 - (\gamma + \Lambda))}
\end{aligned}$$

Substitusi $i_1 = -\frac{\bar{\beta}_{21}i_2s_1}{(\bar{\beta}_{11}s_1 - (\gamma + \Lambda))}$ ke persamaan (3.32), diperoleh

$$\begin{aligned}
\bar{\beta}_{12}s_2 \left(-\frac{\bar{\beta}_{21}i_2s_1}{(\bar{\beta}_{11}s_1 - (\gamma + \Lambda))} \right) + (\bar{\beta}_{22}s_2 - (\gamma + \Lambda))i_2 &= 0 \\
(-\bar{\beta}_{12}\bar{\beta}_{21}s_1s_2i_2) + (\bar{\beta}_{22}s_2 - (\gamma + \Lambda))(\bar{\beta}_{11}s_1 - (\gamma + \Lambda))i_2 &= 0 \\
i_2 \left[(-\bar{\beta}_{12}\bar{\beta}_{21}s_1s_2) + (\bar{\beta}_{22}s_2 - (\gamma + \Lambda))(\bar{\beta}_{11}s_1 - (\gamma + \Lambda)) \right] &= 0 \\
i_2 &= 0
\end{aligned}$$

atau

$$\left[(-\bar{\beta}_{12}\bar{\beta}_{21}s_1s_2) + (\bar{\beta}_{22}s_2 - (\gamma + \Lambda))(\bar{\beta}_{11}s_1 - (\gamma + \Lambda)) \right] = 0$$

$$\begin{aligned}
(\bar{\beta}_{22}s_2 - (\gamma + \Lambda))(\bar{\beta}_{11}s_1 - (\gamma + \Lambda)) &= \bar{\beta}_{12}\bar{\beta}_{21}s_1s_2 \\
(\bar{\beta}_{22}s_2 - (\gamma + \Lambda)) &= \frac{\bar{\beta}_{12}\bar{\beta}_{21}s_1s_2}{(\bar{\beta}_{11}s_1 - (\gamma + \Lambda))} \\
\frac{(\bar{\beta}_{22}s_2 - (\gamma + \Lambda))}{s_2} &= \frac{\bar{\beta}_{12}\bar{\beta}_{21}s_1}{(\bar{\beta}_{11}s_1 - (\gamma + \Lambda))} \\
\bar{\beta}_{22} - \frac{(\gamma + \Lambda)}{s_2} &= \frac{\bar{\beta}_{12}\bar{\beta}_{21}s_1}{(\bar{\beta}_{11}s_1 - (\gamma + \Lambda))} \\
-\frac{(\gamma + \Lambda)}{s_2} &= \frac{\bar{\beta}_{12}\bar{\beta}_{21}s_1}{(\bar{\beta}_{11}s_1 - (\gamma + \Lambda))} - \bar{\beta}_{22} \\
s_2 &= -\frac{(\gamma + \Lambda)}{\frac{\bar{\beta}_{12}\bar{\beta}_{21}s_1}{(\bar{\beta}_{11}s_1 - (\gamma + \Lambda))} - \bar{\beta}_{22}}.
\end{aligned}$$

Jika $i_2 = 0$ maka $i_1 = 0$, sehingga persamaan (3.29) dan (3.31) menjadi

$$\begin{aligned}
(1 - \sigma_1)\mu_1 - \Lambda s_1 &= 0, \\
(1 - \sigma_2)\mu_2 - \Lambda s_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Dengan memindah suku yang tidak memuat s_1 dan s_2 ke ruas kanan diperoleh

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{(1 - \sigma_1)\mu_1}{\Lambda}, \\
s_2 &= \frac{(1 - \sigma_2)\mu_2}{\Lambda},
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit, yaitu

$$E_0 = (s_{10}, s_{20}, i_{10}, i_{20}) = \left(\frac{(1 - \sigma_1)\mu_1}{\Lambda}, \frac{(1 - \sigma_2)\mu_2}{\Lambda}, 0, 0 \right). \quad (3.32)$$

Diberikan parameter untuk mengetahui tingkat penyebaran suatu penyakit. Parameter yang dimaksud adalah angka reproduksi vaksinasi dan dinotasikan sebagai $R_{v(exp)}$, yaitu

$$R_{v(exp)} = \frac{\bar{\beta}_{11}s_{10} + \bar{\beta}_{22}s_{20} + \sqrt{(\bar{\beta}_{22}s_{20} - \bar{\beta}_{11}s_{10})^2 + 4\bar{\beta}_{12}\bar{\beta}_{21}s_{10}s_{20}}}{2(\gamma + \Lambda)}. \quad (3.34)$$

Untuk titik kesetimbangan endemik tidak dibahas karena terlalu panjang dan kompleks (Piccolo dan Billings, 2005).

3.3 Simulasi Numerik

Dinamika penyakit menular tipe *SIR* dapat diamati melalui simulasi numerik terhadap model I dan model II. Simulasi tersebut dibuat menggunakan *software* Matlab R2010a dengan metode Runge-Kutta orde empat (RK4). *Listing* program dari simulasi yang dibuat dijabarkan pada Lampiran 1 dan 2.

3.3.1 Model I

a. Simulasi Numerik untuk $R_v = 1$.

Untuk simulasi numerik saat kondisi $R_v = 1$, nilai parameter yang digunakan diberikan pada Tabel 3.1. Model disimulasikan saat kondisi awal pada kelas *susceptible*, *infected*, dan *recovery* berturut-turut adalah 0.8, 0.5, dan 0.1.

Tabel 3.1 Nilai parameter model I untuk $R_v = 1$

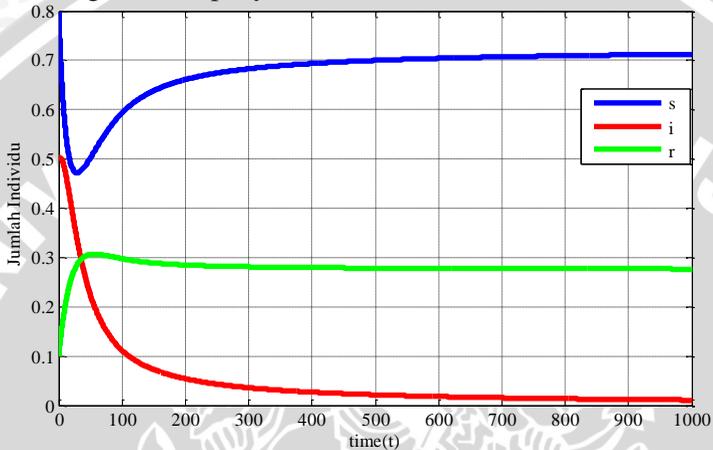
Parameter	Nilai
σ_1	0.4501
σ_2	0.2
β	0.08
γ	0.008
μ_1	0.015
μ_2	0.035

Proporsi individu *susceptible*, *infected*, dan *recovery* untuk $R_v = 1$ ditunjukkan pada Gambar 3.2. Garis biru menunjukkan proporsi individu *susceptible*. Seiring berjalannya waktu, proporsi individu *susceptible* mengalami penurunan. Hal ini dikarenakan individu *susceptible* terinfeksi penyakit dan memasuki kelompok *infected*. Pada waktu tertentu, proporsi individu *susceptible* mengalami kenaikan yang disebabkan oleh besarnya individu yang tidak tervaksinasi.

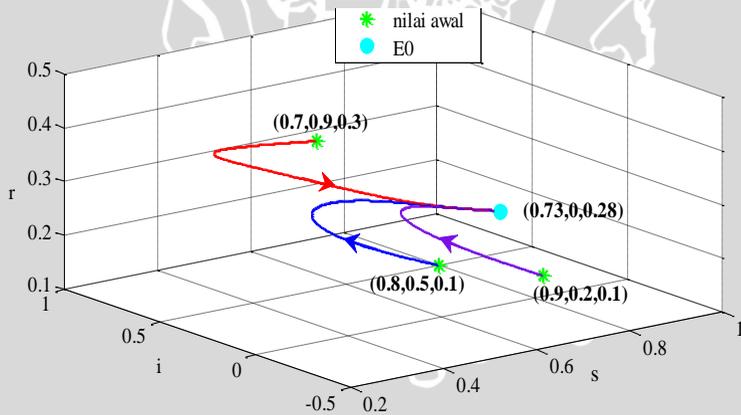
Proporsi individu *infected* ditunjukkan oleh garis merah. Pada keadaan awal, proporsi individu *infected* mengalami kenaikan. Hal ini dikarenakan adanya tambahan dari kelompok *susceptible* yang terinfeksi penyakit. Pada waktu tertentu, proporsi *infected* mengalami penurunan karena individu *infected* sembuh dan memasuki kelompok *recovery*, hingga lebih dari 1000 tahun penyakit akan menghilang dari populasi.

Proporsi individu *recovery* yang ditunjukkan oleh garis hijau mengalami kenaikan pada keadaan awal. Hal ini dikarenakan adanya tambahan dari kelompok *infected* yang sembuh.

Potret fase pada Gambar 3.3 menunjukkan bahwa untuk $R_v = 1$, hanya ada 1 titik kesetimbangan yang eksis dan stabil, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit.



Gambar 3.2 Simulasi model I untuk $R_v = 1$



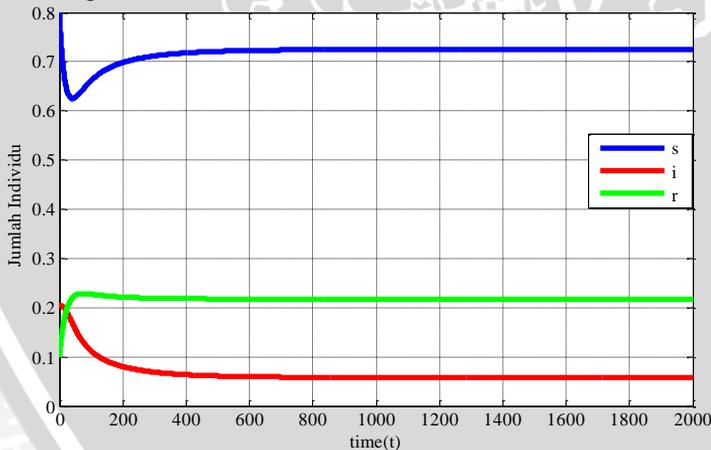
Gambar 3.3 Potret fase untuk $R_v = 1$

b. Simulasi numerik untuk $R_v > 1$.

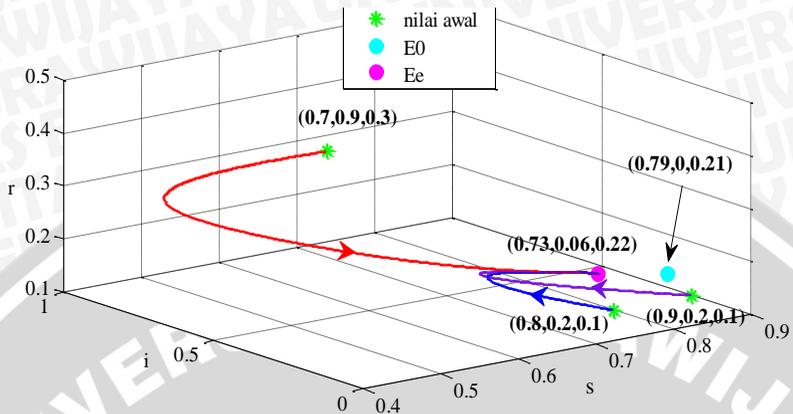
Untuk simulasi numerik saat kondisi $R_v > 1$, digunakan nilai parameter pada Tabel 3.1 dengan mengambil nilai σ yang lebih kecil yaitu $\sigma_1 = 0.32$ dan $\sigma_2 = 0.16$, besar rasio reproduksi vaksinasi adalah $R_v = 1.0924$. Model disimulasikan saat kondisi awal pada kelas *susceptible*, *infected*, dan *recovery* berturut-turut adalah 0.8, 0.2, dan 0.1. Proporsi individu *susceptible*, *infected*, dan *recovery* untuk $R_v > 1$ ditunjukkan pada Gambar 3.4.

Berdasarkan Gambar 3.4 dapat diketahui bahwa proporsi individu *infected* yang awalnya mengalami kenaikan dikarenakan adanya tambahan individu terinfeksi dari populasi *susceptible*. Selanjutnya grafik mengalami penurunan hingga pada waktu tertentu tidak mengalami perubahan yang berarti bahwa sistem berada pada kondisi setimbang. Penyakit tidak akan menghilang dari populasi, dan akan tetap ada sampai kurun waktu yang tak terbatas. Berdasarkan persamaan (3.9), titik kesetimbangan yang diperoleh adalah $E_e = (s_e, i_e) = (0.7250, 0.0578)$.

Potret fase pada Gambar 3.5 menunjukkan bahwa untuk $R_v > 1$, terdapat 2 titik kesetimbangan yang eksis, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Titik kesetimbangan bebas penyakit tidak stabil, sedangkan titik kesetimbangan endemik stabil.



Gambar 3.4 Simulasi model I untuk $R_v > 1$



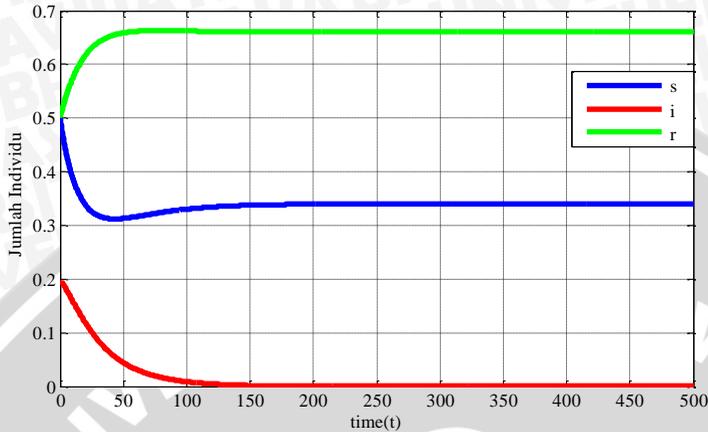
Gambar 3.5 Potret fase untuk $R_v > 1$

c. Simulasi Numerik untuk $R_v < 1$.

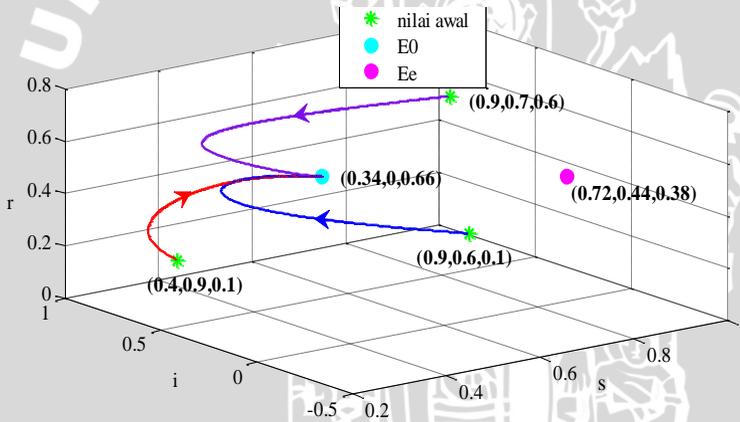
Untuk simulasi numerik saat kondisi $R_v < 1$, digunakan nilai parameter pada Tabel 3.1 dengan mengambil nilai σ yang lebih besar yaitu $\sigma_1 = 0.8$ dan $\sigma_2 = 0.6$, besar rasio reproduksi vaksinasi adalah $R_v = 0.469$. Model disimulasikan saat kondisi awal pada kelas *susceptible*, *infected*, dan *recovery* berturut-turut adalah 0.5, 0.2, dan 0.5. Proporsi individu *susceptible*, *infected*, dan *recovery* untuk $R_v < 1$ ditunjukkan pada Gambar 3.6.

Berdasarkan Gambar 3.6 dapat diketahui bahwa proporsi individu *infected* yang awalnya mengalami kenaikan dikarenakan adanya tambahan individu terinfeksi dari populasi *susceptible*. Selanjutnya grafik mengalami penurunan hingga pada waktu tertentu tidak mengalami perubahan yang berarti bahwa sistem berada pada kondisi setimbang. Penyakit akan menghilang dari populasi, kurang dari 150 tahun. Berdasarkan persamaan (3.9), titik kesetimbangan yang diperoleh adalah $E_0 = (s_0, i_0) = (0.34, 0)$.

Potret fase pada Gambar 3.7 menunjukkan bahwa untuk $R_v < 1$, terdapat 2 titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Titik kesetimbangan bebas penyakit stabil, sedangkan titik kesetimbangan endemik tidak stabil.



Gambar 3.6 Simulasi model I untuk $R_v < 1$



Gambar 3.7 Potret fase untuk $R_v < 1$

3.3.2 Model II

a. Simulasi Numerik untuk $R_{v(exp)} = 1$.

Untuk simulasi numerik saat kondisi $R_{v(exp)} = 1$, nilai parameter yang digunakan diberikan pada Tabel 3.2. Model disimulasikan saat kondisi awal pada kelas *susceptible1*, *susceptible2*, *infected1*, *infected2*, *recovery1*, dan *recovery2* berturut-turut adalah 0.3, 0.7, 0.05, 0.3, 0 dan 0.

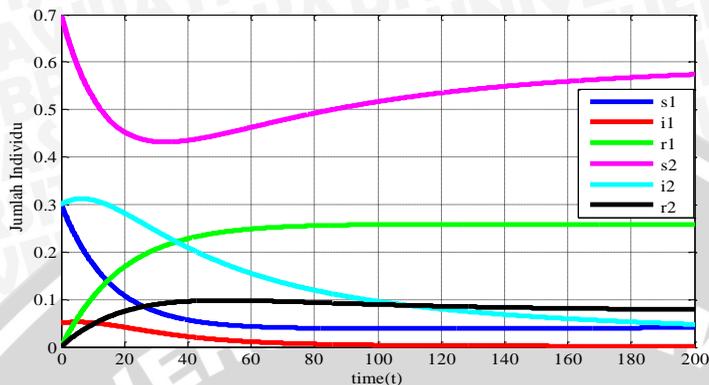
Tabel 3.2 Nilai parameter model II untuk $R_{v(exp)} = 1$

Parameter	Nilai
σ_1	0.8599
σ_2	0.1
β_{11}	0.02
β_{21}	0.04
β_{12}	0.07
β_{22}	0.09
γ	0.008
μ_1	0.015
μ_2	0.035

Proporsi individu *susceptible1*, *susceptible2*, *infected1*, *infected2*, *recovery1*, dan *recovery2* untuk $R_{v(exp)} = 1$ ditunjukkan pada Gambar 3.8. Garis biru dan merah muda menunjukkan proporsi individu *susceptible1* dan *susceptible2*. Seiring berjalannya waktu, proporsi individu *susceptible* mengalami penurunan. Hal ini dikarenakan individu *susceptible* terinfeksi penyakit dan memasuki kelompok *infected*. Pada waktu tertentu, proporsi individu *susceptible2* mengalami kenaikan yang disebabkan oleh besarnya individu yang tidak tervaksinasi.

Proporsi individu *infected1* dan *infected2* ditunjukkan oleh garis merah dan biru muda. Pada keadaan awal, proporsi individu *infected* mengalami kenaikan. Hal ini dikarenakan adanya tambahan dari kelompok *susceptible* yang terinfeksi penyakit. Pada waktu tertentu, proporsi *infected* mengalami penurunan karena individu *infected* sembuh dan memasuki kelompok *recovery*. Penyakit akan hilang dari populasi lebih dari 80 tahun untuk subpopulasi warga negara, dan lebih dari 200 tahun untuk subpopulasi imigran.

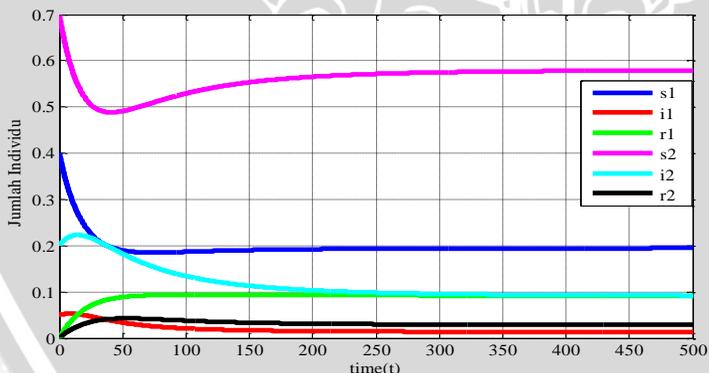
Proporsi individu *recovery1* dan *recovery2* yang ditunjukkan oleh garis hijau dan hitam mengalami kenaikan pada keadaan awal. Hal ini dikarenakan adanya tambahan dari kelompok *infected* yang sembuh.



Gambar 3.8 Simulasi model II untuk $R_{v(exp)} = 1$

b. Simulasi Numerik untuk $R_{v(exp)} > 1$.

Untuk simulasi numerik saat kondisi $R_{v(exp)} > 1$, digunakan nilai parameter pada Tabel 3.2 dengan mengambil nilai σ yang lebih kecil yaitu $\sigma_1 = 0.3$ dan $\sigma_2 = 0.02$, besar rasio vaksinasi adalah $R_{v(exp)} = 1.1734$. Model disimulasikan saat kondisi awal pada kelas *susceptible1*, *susceptible2*, *infected1*, *infected2*, *recovery1*, dan *recovery2* berturut-turut adalah 0.4, 0.7, 0.05, 0.2, 0 dan 0. Proporsi individu *susceptible1*, *susceptible2*, *infected1*, *infected2*, *recovery1*, dan *recovery2* untuk $R_{v(exp)} > 1$ ditunjukkan pada Gambar 3.9.



Gambar 3.9 Simulasi model II untuk $R_{v(exp)} > 1$

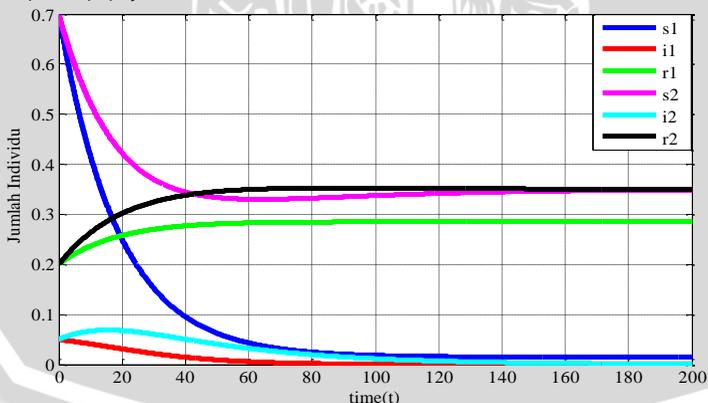
Berdasarkan Gambar 3.9 dapat diketahui bahwa proporsi individu *infected1* dan *infected2* yang awalnya mengalami kenaikan dikarenakan adanya tambahan individu terinfeksi dari populasi

susceptible. Selanjutnya grafik mengalami penurunan hingga pada waktu tertentu tidak mengalami perubahan yang berarti bahwa sistem berada pada kondisi setimbang. Penyakit tidak akan menghilang dari populasi, dan akan tetap ada sampai kurun waktu yang tak terbatas.

c. Simulasi Numerik untuk $R_{v(exp)} < 1$.

Untuk simulasi numerik saat kondisi $R_{v(exp)} < 1$, digunakan nilai parameter pada Tabel 3.2 dengan mengambil nilai σ yang lebih besar yaitu $\sigma_1 = 0.95$ dan $\sigma_2 = 0.5$, besar rasio reproduksi vaksinasi adalah $R_{v(exp)} = 0.5511$. Model disimulasikan saat kondisi awal pada kelas *susceptible1*, *susceptible2*, *infected1*, *infected2*, *recovery1*, dan *recovery2* berturut-turut adalah 0.7, 0.7, 0.05, 0.05, 0.2 dan 0.2. Proporsi individu *susceptible1*, *susceptible2*, *infected1*, *infected2*, *recovery1*, dan *recovery2* untuk $R_{v(exp)} < 1$ ditunjukkan pada Gambar 3.10.

Berdasarkan Gambar 3.10 dapat diketahui bahwa proporsi individu *infected* yang awalnya mengalami kenaikan dikarenakan adanya tambahan individu terinfeksi dari populasi *susceptible*. Selanjutnya grafik mengalami penurunan hingga pada waktu tertentu tidak mengalami perubahan yang berarti bahwa sistem berada pada kondisi setimbang. Penyakit akan menghilang dari populasi, kurang dari 80 tahun untuk subpopulasi warga, dan kurang dari 160 tahun untuk subpopulasi imigran. Berdasarkan persamaan (3.32), titik kesetimbangan yang diperoleh adalah $E_0 = (s_{10}, s_{20}, i_{10}, i_{20}) = (0.015, 0.35, 0, 0)$.



Gambar 3.10 Simulasi model II untuk $R_{v(exp)} < 1$

Berdasarkan simulasi numerik model I dan model II dapat disimpulkan bahwa penyakit akan menghilang dari populasi jika tingkat vaksinasi yang diberikan lebih dari atau sama dengan tingkat vaksinasi yang memenuhi $R_{v(exp)} = 1$. Semakin besar tingkat vaksinasi yang diberikan, maka penyakit akan lebih cepat menghilang dari populasi.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

