

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persoalan yang melibatkan model matematika banyak muncul dalam berbagai disiplin ilmu pengetahuan, seperti dalam bidang Fisika, Kimia, Ekonomi, atau pada persoalan *engineering* seperti Teknik Sipil, Teknik Mesin, Elektro, dan sebagainya. Seringkali model matematika tersebut muncul dalam bentuk yang tidak ideal atau rumit. Model matematika yang rumit ini ada kalanya tidak dapat diselesaikan dengan metode analitik yang sudah umum untuk mendapatkan solusi eksaknya (Munir, 2003).

Model matematika merupakan salah satu alat untuk mempermudah penyelesaian masalah terutama di bidang matematika dalam kehidupan sehari-hari. Ada banyak sekali permasalahan yang muncul dalam persoalan matematika, salah satunya adalah mencari akar untuk persamaan nonlinear. Salah satu permasalahan yang mendasar dalam matematika adalah menyelesaikan persamaan dalam bentuk $f(x) = 0$, dimana f adalah fungsi yang bernilai real dan x adalah akar dari persamaan tersebut. Persamaan yang paling sering dijumpai adalah yang berbentuk nonlinear dan sangat jarang sekali dapat diselesaikan dengan cara manual atau tanpa metode. Oleh karena itu, persamaan nonlinear lebih banyak diselesaikan dengan menggunakan analisis numerik untuk mendapatkan akar dari persamaan tersebut (Ahmad, 2010).

Dalam metode numerik, pencarian akar $f(x) = 0$ dilakukan secara iteratif. Sampai saat ini banyak ditemukan metode pencarian akar seperti metode Newton-Raphson, Titik Tetap, Biseksi, Regula Falsi, dan lain sebagainya. Dari beberapa metode tersebut, tingkat kecepatan metode Newton-Raphson dalam mencari akar lebih baik dibandingkan metode yang lainnya, sehingga metode ini paling sering dipakai dalam menyelesaikan masalah persamaan nonlinear (Atkinson, 1978).

Dalam skripsi ini akar persamaan nonlinear dicari dengan menggunakan metode Newton-Raphson, metode Basu, dan metode Orde-6, dimana metode Basu dan metode Orde-6 merupakan pengembangan dari metode Newton-Raphson. Metode Basu adalah

metode yang dibentuk dari dua skema, yaitu skema Weerakon-Fernando dan skema Homeier (Basu, 2008).

Metode Basu memiliki peranan penting untuk membangun metode Orde-6 sebagai prediktornya. Pada akhir pembahasan jumlah iterasi antara metode Newton-Raphson, metode Basu dan metode Orde-6 dibandingkan dengan menggunakan *software* MATLAB.

1.2 Rumusan Masalah

Setelah memperhatikan latar belakang diatas, dapat dirumuskan beberapa masalah sebagai berikut.

1. Bagaimana penurunan deret Taylor sehingga didapatkan langkah ketiga metode Orde-6?
2. Bagaimana perhitungan hasil akar dan perbandingan jumlah iterasi metode Newton-Raphson, metode Basu dan metode Orde-6 dengan menggunakan *software* MATLAB?

1.3 Tujuan

Setelah memperhatikan rumusan masalah di atas, didapatkan tujuan sebagai berikut.

1. Menurunkan deret Taylor sehingga didapatkan langkah ketiga metode Orde-6.
2. Menghitung hasil akar dan membandingkan jumlah iterasi metode Newton-Raphson, metode Basu dan metode Orde-6 dengan menggunakan *software* MATLAB.

1.3 Batasan Masalah

Pada pembahasan, penurunan metode Orde-6 hanya dilakukan pada langkah ketiga.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Teorema Rolle

Misalkan sebuah fungsi f adalah fungsi yang memenuhi dua kondisi berikut:

- (i) f kontinu pada interval $[a, b]$,
- (ii) f terdiferensialkan pada interval terbuka (a, b) .

Jika $f(a) = f(b) = 0$ maka terdapat suatu bilangan c dalam (a, b) sedemikian sehingga $f'(c) = 0$ (Anton, 1999).

Bukti.

Jika $f(x) = 0$ untuk $\forall x \in [a, b]$, maka $f'(x) = 0 \forall x \in (a, b)$ karena f bernilai konstan pada interval (a, b) . Oleh sebab itu, untuk sembarang nilai c pada (a, b) maka $f'(c) = 0$.

Jika $f(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$, maka terdapat titik x pada (a, b) dimana $f(x) > 0$ atau $f(x) < 0$. Karena f kontinu, nilai $f(a) = f(b) = 0$ dan $f(x) > 0$ maka f memiliki nilai maksimum pada titik c di antara interval $[a, b]$. Berdasarkan kondisi kedua bahwa f terdiferensialkan dimana-mana pada interval (a, b) , maka f terdiferensialkan pada titik c sehingga $f'(c) = 0$. ■

2.2 Teorema Nilai Rata-Rata

Misalkan sebuah fungsi f adalah fungsi yang memenuhi dua kondisi berikut:

- (i) f kontinu pada interval $[a, b]$,
- (ii) f terdiferensialkan pada interval terbuka (a, b) ,

maka terdapat suatu bilangan c dalam (a, b) sedemikian sehingga

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(Ahmad, 2004).

Bukti.

Misalkan fungsi ϕ didefinisikan sebagai

$$\phi(x) = f(x) + Ax,$$

dimana $x \in [a, b]$ dan A didefinisikan sebagai berikut

$$A = -\frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

sehingga $\phi(a) = \phi(b)$. Fungsi $\phi(x)$ adalah penjumlahan dari dua fungsi yang kontinu dan terdiferensiabel, sehingga $\phi(x)$:

- (i) kontinu pada interval $[a, b]$,
- (ii) terdiferensialkan pada interval (a, b) ,
- (iii) $\phi(a) = \phi(b)$.

Oleh sebab itu, terdapat $c \in (a, b)$ sehingga $\phi'(c) = 0$ dimana turunan pertama dari fungsi $\phi(x)$ adalah

$$\phi'(x) = f'(x) + A,$$

karena f terdiferensialkan dimana-mana pada interval (a, b) , maka f terdiferensialkan pada titik c sehingga

$$\begin{aligned} \phi'(c) &= f'(c) + A, \\ 0 &= f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \\ f'(c) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \blacksquare \end{aligned}$$

2.3 Teorema Taylor

Misalkan turunan dari $f', f'', f''', \dots, f^{(n-1)}$ ada dan kontinu pada interval $[a, a + h]$, maka terdapat suatu bilangan $\theta (0 < \theta < 1)$ sehingga

$$\begin{aligned} f(a + h) &= f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots \\ &+ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) \\ &+ \frac{h^n (1 - \theta)^{n-p}}{p(n-1)!} f^{(n)}(a + \theta h), \end{aligned} \tag{2.1}$$

dengan p adalah bilangan bulat positif yang diberikan (Ahmad, 2004).

Bukti.

Misal fungsi ϕ didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} \phi(x) = & f(x) + (a+h-x)f'(x) + \frac{(a+h-x)^2}{2!}f''(x) + \dots \\ & + \frac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x) + A(a+h-x)^p, \end{aligned}$$

dimana $x \in [a, a+h]$ dan A adalah konstanta yang ditentukan sehingga $\phi(a) = \phi(a+h)$, maka

$$\begin{aligned} f(a+h) = & f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \dots \\ & + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + Ah^p, \end{aligned} \quad (2.2)$$

hal ini menimbulkan tiga kondisi seperti berikut,

- (i) karena fungsi $f', f'', f''', \dots, f^{(n-1)}$ kontinu pada interval $[a, a+h]$, maka fungsi $\phi(x)$ juga kontinu pada interval $[a, a+h]$,
- (ii) karena fungsi $f', f'', f''', \dots, f^{(n-1)}$ dan $(a+h-x), (a+h-x)^2, \dots, (a+h-x)^{n-1}, (a+h-x)^p$ terdiferensialkan di $(a+h-x)$, maka $\phi(x)$ juga terdiferensialkan di $(a+h-x)$,
- (iii) $\phi(a) = \phi(a+h)$.

Oleh sebab itu, paling tidak terdapat satu nilai real $\theta (0 < \theta < 1)$ sehingga $\phi'(a+\theta h) = 0$. Turunan pertama dari $\phi(x)$ adalah

$$\phi'(x) = \frac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x) - Ap(a+h-x)^{p-1},$$

sehingga

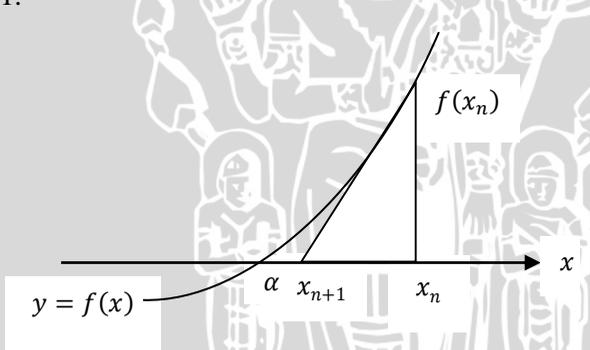
$$\begin{aligned} \phi'(a+\theta h) = & \frac{h^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(a+\theta h) \\ & - Aph^{p-1}(1-\theta)^{p-1}, \\ 0 = & \frac{h^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(a+\theta h) \\ & - Aph^{p-1}(1-\theta)^{p-1}, \\ A = & \frac{h^{n-p}(1-\theta)^{n-p}}{p(n-p)!}f^{(n)}(a+\theta h). \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan nilai A ke dalam persamaan (2.2) diperoleh rumus deret Taylor sebagai berikut

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n(1-\theta)^{n-p}}{p(n-1)!}f^{(n)}(a + \theta h) \blacksquare.$$

2.4 Newton-Raphson

Metode Newton-Raphson memerlukan sebuah nilai pendekatan awal, dan memerlukan perhitungan turunan fungsi $f(x)$ dalam setiap iterasi. Nilai pendekatan berikutnya diperoleh dengan cara menarik garis singgung kurva pada titik yang mempunyai absis hampiran sebelumnya hingga memotong sumbu- x . Titik potong garis singgung tersebut dengan sumbu- x merupakan hampiran berikutnya. Proses berlanjut sampai hampiran yang diperoleh memenuhi syarat keakuratan yang ditentukan. Misalkan x_n adalah nilai pendekatan awal untuk akar α dari fungsi $f(x) = 0$ yang ditunjukkan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Iterasi Newton-Raphson

Karena $f(x)$ terdiferensialkan di x_n , maka $f(x)$ memiliki garis singgung di x_n . Dengan mengasumsikan bahwa gradiennya tidak sama dengan nol, maka garis singgung tersebut akan memotong sumbu- x , misal x_{n+1} . Andaikan persamaan dari garis singgung itu adalah $y = mx + d$ maka garis singgung yang melewati titik $(x_n, f(x_n))$, menjadi

$$f(x_n) = f'(x_n)x_n + d,$$

dimana $d = f(x_n) - f'(x_n)x_n$. Dengan memasukkan nilai d ke dalam persamaan garis singgung maka didapat

$$y = f'(x_n)x + (f(x_n) - f'(x_n)x_n). \quad (2.3)$$

Kemudian, untuk perhitungan selanjutnya yaitu nilai x_{n+1} adalah titik potong dari sumbu- x dan garis singgung pada kurva $f(x)$. Dengan memasukkan nilai $y = 0$ ke dalam persamaan (2.3) diperoleh

$$0 = f'(x_n)x_{n+1} + f(x_n) - f'(x_n)x_n,$$

atau

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (2.4)$$

Dimana persamaan (2.4) disebut skema Newton-Raphson (Ahmad, 2010).

Cara lain untuk mencari skema Newton-Raphson adalah dengan mengekspansikan deret Taylor $f(x_{n+1})$ di sekitar x_n sebagai berikut

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + \frac{(x_{n+1} - x_n)}{1!} f'(x_n) + \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{2!} f''(x_n) + \dots$$

Apabila dipotong dari suku orde-2 maka persamaannya menjadi

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f'(x_n),$$

karena dalam hal persoalan mencari akar, maka $f(x_{n+1}) = 0$, sehingga

$$0 = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f'(x_n)$$

atau

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad f'(x_n) \neq 0.$$

(Munir, 2003).

2.4.1 Syarat Konvergensi Newton-Raphson

Diberikan persamaan nonlinear

$$f(x) = 0, \quad (2.5)$$

yang akan diselesaikan. Misalkan g adalah suatu fungsi. Bilangan x pada domain g dikatakan merupakan titik tetap g jika memenuhi

$$x = g(x), \tag{2.6}$$

selanjutnya, iterasi

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{2.7}$$

disebut iterasi titik tetap. Nilai-nilai dari $x_0, x_1, x_2 \dots$ konvergen menuju α dan secara otomatis memenuhi persamaan (2.6). Karena persamaan (2.6) dibentuk oleh persamaan (2.5) maka α adalah akar dari $f(x) = 0$ (Ahmad, 2010).

Teorema 2.4.1.1

Misal $g(x), g'(x)$ kontinu pada interval $[a, b]$ dan memenuhi

$$g([a, b]) \subset [a, b], \tag{2.8}$$

selanjutnya misalkan

$$\lambda = \max_{a \leq x \leq b} |g'(x)| < 1, \tag{2.9}$$

maka

- (i) terdapat sebuah akar tunggal $\alpha \in [a, b]$ yang memenuhi $x = g(x)$,
- (ii) untuk setiap nilai pendekatan awal $x_0 \in [a, b]$ dengan $x_{n+1} = g(x_n)$, maka

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \alpha, \\ \text{(iii)} \quad |\alpha - x_n| &\leq \lambda^n |\alpha - x_0| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} |x_1 - x_0| \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} &= g'(\alpha), \end{aligned}$$

(Atkinson, 1978).

Bukti.

Dari (2.8) untuk setiap hampiran awal $x_0 \in [a, b]$, nilai-nilai x_n yang dihasilkan oleh iterasi $g(x_n) = x_{n+1}$ juga terletak pada interval $[a, b]$. Selanjutnya, dengan menggunakan Teorema Nilai Rata-rata diperoleh

$$\alpha - x_{n+1} = g(\alpha) - g(x_n) = g'(c)(\alpha - x_n), \quad (2.10)$$

untuk suatu nilai c antara α dan x_n . Karena $\alpha, x_n \in [a, b]$ maka nilai $c \in [a, b]$, sehingga dari (2.9) diketahui bahwa untuk semua nilai n berlaku

$$\begin{aligned} |\alpha - x_{n+1}| &\leq \lambda |\alpha - x_n| \leq \lambda^2 |\alpha - x_{n-1}| \leq \dots \\ &\leq \lambda^{n+1} |\alpha - x_0|. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Karena nilai $\lambda < 1$, maka ruas kanan (2.11) konvergen ke 0 yang berakibat x_n konvergen menuju α . Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga dan ketaksamaan (2.11) diperoleh

$$\begin{aligned} |\alpha - x_0| &\leq |\alpha - x_1| + |x_1 - x_0|, \\ |\alpha - x_0| &\leq \lambda |\alpha - x_0| + |x_1 - x_0|, \\ (1 - \lambda) |\alpha - x_0| &\leq |x_1 - x_0|, \\ |\alpha - x_0| &\leq \frac{1}{1 - \lambda} |x_1 - x_0|, \end{aligned}$$

sehingga

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} |x_1 - x_0|.$$

Oleh karena x_n konvergen menuju α , maka c juga konvergen menuju α dengan c berada di antara α dan x_n , sehingga

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} g'(c) = g'(\alpha).$$

Untuk mengetahui fungsi hipotesis (2.9) pada nilai $g'(x)$, dimisalkan $|g'(\alpha)| > 1$ maka barisan dari iterasi $g(x_n) = x_{n+1}$ dan $\alpha = g(\alpha)$ diperoleh (2.10). jika nilai x_n bernilai cukup dekat dengan α maka $|g'(c)| > 1$ dan nilai eror $|\alpha - x_{n+1}|$ akan lebih besar dari $|\alpha - x_n|$, sehingga konvergensi $|g'(\alpha)| > 1$ tidaklah mungkin, dan kemungkinan yang paling tepat adalah $|g'(\alpha)| < 1$. ■

Teorema 2.4.1.2

Jika f'' kontinu pada interval $[\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, maka x_n konvergen ke α jika $f'(\alpha) \neq 0$ dan x_0 bernilai cukup dekat dengan α (Ahmad, 2010).

Bukti.

Misalkan fungsi f mempunyai turunan pertama f' . Barisan $x_0, x_1, x_2 \dots$ yang diperoleh dari iterasi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0, 1, 2, \dots$$

disebut barisan iterasi Newton-Raphson. Fungsi g yang didefinisikan sebagai

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (2.12)$$

disebut fungsi iterasi Newton-Raphson. Dengan mensubstitusikan (2.7) ke dalam (2.4) maka dapat ditulis

$$g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Terdapat hubungan antara akar persamaan $f(x) = 0$ dan titik tetap fungsi g . Dari (2.8) dilihat bahwa jika $f(\alpha) = 0$ maka $\alpha = g(\alpha)$. Metode Newton-Raphson dapat dipandang sebagai contoh khusus metode Titik Tetap. Dengan menurunkan $g(x)$ terhadap x maka

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \\ &= \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Karena f, f' , dan f'' kontinu, maka g' juga kontinu. Jika $x = \alpha$ dan $f(\alpha) = 0$ maka $g'(\alpha)$ bernilai nol. Dikarenakan f'' kontinu, maka $x \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ dengan $\delta > 0$, sedemikian sehingga $|g'(x)| < 1$. Hal ini berarti barisan x_n konvergen jika x_0 berada pada $[\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, dengan kata lain barisan x_n konvergen jika x_0 bernilai cukup dekat dengan α . ■

2.5 Diagram Cobweb

Diagram Cobweb merupakan suatu metode grafikal yang digunakan untuk menganalisis stabilitas dari titik-titik setimbang suatu persamaan. Langkah-langkah membuat diagram Cobweb merupakan satu prosedur yang berulang. Diagram Cobweb disebut

juga diagram *Stair Step* karena bentuknya yang menyerupai tangga atau jaring laba-laba (Devaney, 1992).

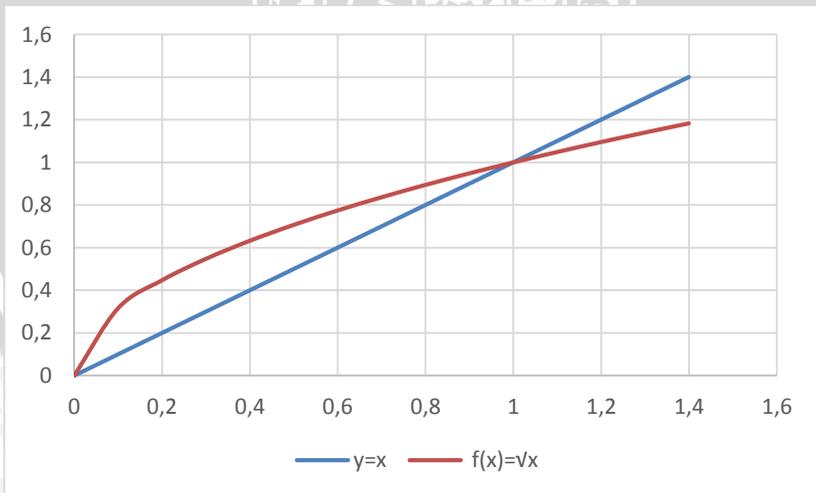
Langkah-langkah membuat diagram Cobweb dimulai dengan menggambarkan grafik fungsi f dan garis diagonal bersudut 45° yaitu $y = x$ yang merupakan titik setimbang dari fungsi f . Kemudian, dengan menentukan nilai $x(0)$, dapat ditunjukkan dengan tepat nilai $x(1)$ dengan menggambar sebuah garis vertikal melalui $x(0)$ sehingga garis ini juga berpotongan dengan grafik f pada $(x(0), x(1))$. Langkah selanjutnya adalah menggambar sebuah garis horisontal dari $(x(0), x(1))$ sehingga bertemu dengan garis diagonal $y = x$ pada titik $(x(1), x(1))$. Berikutnya, sebuah garis vertikal yang digambarkan dari titik $(x(1), x(1))$ akan bertemu dengan grafik f pada titik $(x(1), x(2))$. Dengan melanjutkan proses ini, akan didapatkan nilai $x(n)$ untuk semua $n > 0$. Proses iterasi pada diagram Cobweb dapat memberikan hasil yang konvergen atau divergen (Elaydi, 2005).

Contoh 2.5.1: (Devaney, 1992)

Gambarkan diagram Cobweb untuk $f(x) = \sqrt{x}$.

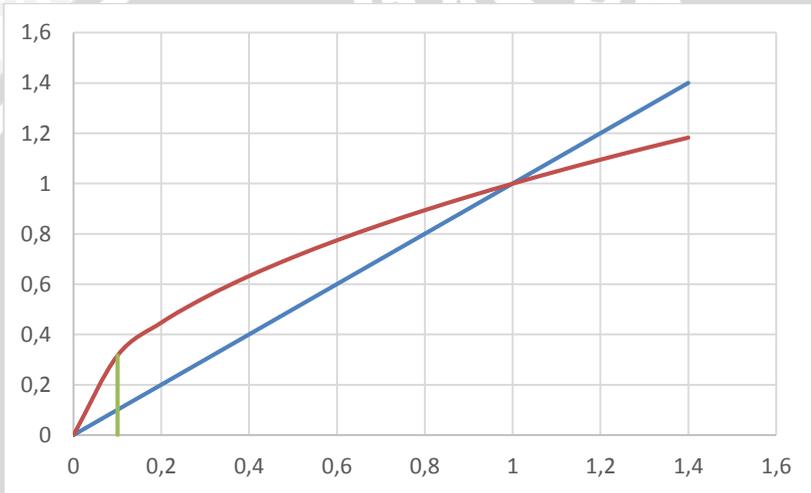
Penyelesaian:

Langkah 1: Menggambar fungsi $f(x) = \sqrt{x}$ dan garis $y = x$ pada bidang $(x(n), x(n + 1))$.



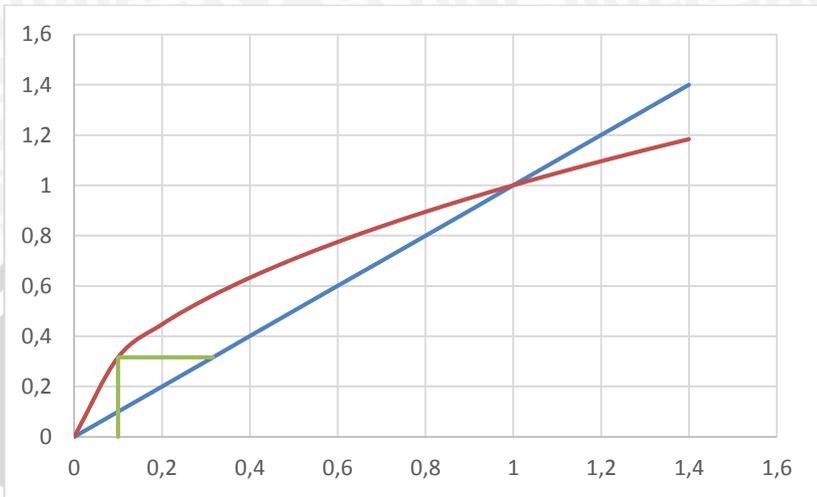
Gambar 2.2 Langkah 1 dalam menggambar diagram Cobweb untuk $f(x) = \sqrt{x}$

Langkah 2: Misalkan diambil nilai awal $x(0) = 0.1$ maka dengan menggambar sebuah garis vertikal melalui $x(0)$ dapat ditunjukkan dengan tepat nilai $x(1)$ sehingga garis ini berpotongan dengan grafik f pada $(x(0), x(1))$.



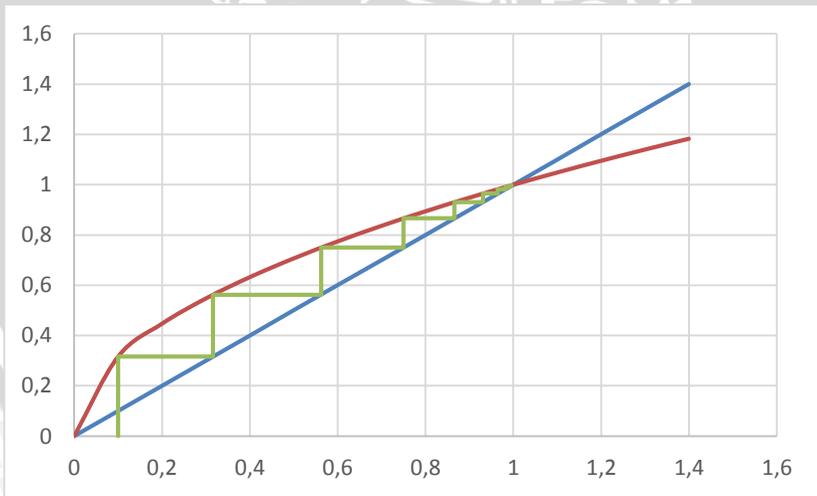
Gambar 2.3 Langkah 2 dalam menggambar diagram Cobweb untuk $f(x) = \sqrt{x}$

Langkah 3: Selanjutnya menggambar sebuah garis horizontal dari $(x(0), x(1))$ sehingga bertemu dengan garis diagonal $y = x$ pada titik $(x(1), x(1))$.



Gambar 2.4 Langkah 3 dalam menggambar diagram Cobweb untuk $f(x) = \sqrt{x}$

Langkah 4: Sebuah garis vertikal yang digambarkan dari titik $(x(1), x(1))$ akan bertemu dengan grafik f pada titik $(x(1), x(2))$. Dengan melanjutkan proses ini, didapatkan nilai $x(n)$ untuk semua $n > 0$.



Gambar 2.5 Langkah 4 dalam menggambar diagram Cobweb untuk $f(x) = \sqrt{x}$

Berdasarkan hasil pada diagram Cobweb di atas dapat dilihat bahwa fungsi $f(x) = \sqrt{x}$ konvergen.

2.6 Prediktor-Korektor

Prediktor-korektor adalah metode yang membutuhkan beberapa nilai fungsi berturut-turut $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots$ untuk memprediksi nilai fungsi pada x_{n+1} . Selanjutnya nilai yang telah diprediksi ini dikoreksi untuk memperbaiki nilai x_{n+1} (Ahmad, 2010).

2.7 Metode Basu

Metode Basu dibentuk dari kombinasi Skema Weerakon-Fernando (WF) dan Skema Homeier (HM) (Basu, 2008).

Skema Weerakon-Fernando (WF) dinyatakan dalam bentuk

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{Kf'(x_n) + Lf' \left(x_n - \gamma \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right)},$$

dimana $K = 1 - \frac{1}{2\gamma}$ dan $L = \frac{1}{2\gamma}$, $\gamma \neq 0$, dan skema Homeier dinyatakan pula dalam bentuk sebagai berikut

$$x_{n+1} = x_n - P \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - Q \frac{f(x_n)}{f' \left(x_n - \gamma \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right)},$$

dimana $P = 1 - \frac{1}{2\gamma}$ dan $Q = \frac{1}{2\gamma}$, $\gamma \neq 0$.

Skema Weerakon Fernando dan Homeier dapat dikombinasikan untuk memperoleh metode Basu, dimana metode Basu didefinisikan dalam bentuk

$$x_{n+1} = \theta[WF] - (1 - \theta)[HM]. \quad (2.14)$$

Dengan mensubstitusikan skema Weerakon-Fernando dan Skema Homeier ke dalam (2.14) maka didapatkan

$$x_{n+1} = x_n - \theta \left[\frac{f(x_n)}{\left(1 - \frac{1}{2\gamma}\right)f'(x_n) + \frac{1}{2\gamma}f'(x_n - \gamma \frac{f(x_n)}{f'(x_n)})} \right] - (1 - \theta) \left[\left(1 - \frac{1}{2\gamma}\right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2\gamma} \frac{f(x_n)}{f'(x_n - \gamma \frac{f(x_n)}{f'(x_n)})} \right], \quad (2.15)$$

karena metode Basu adalah kasus khusus untuk nilai $\gamma = 2/3$ dan $\theta = -2$ maka dengan mensubstitusikan nilai $\gamma = 2/3$ dan $\theta = -2$ ke dalam (2.15) diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - \left[\frac{9 \left(f'(x_n - \frac{2f(x_n)}{3f'(x_n)}) \right)^2 - 2f'(x_n - \frac{2f(x_n)}{3f'(x_n)})f'(x_n) + 9(f'(x_n))^2}{12 \left(f'(x_n - \frac{2f(x_n)}{3f'(x_n)}) \right)^2 + 4f'(x_n - \frac{2f(x_n)}{3f'(x_n)})f'(x_n)} \right] \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (2.16)$$

2.8 Big O

Fungsi $f(h)$ dikatakan *big O*(h) dari $g(h)$, ditulis $f(h) = O(g(h))$, jika terdapat konstanta C dan c sehingga

$$|f(h)| \leq C|g(h)|, \text{ untuk } h \leq c$$

(Mathews dan Fink, 1999).

Untuk mengilustrasikan bagaimana diperoleh hasil perhitungan yang akurat, diperlukan ekspansi deret Taylor menggunakan konsep orde. Jika $y(x)$ adalah fungsi yang kontinu di sepanjang p dengan interval $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, maka hampiran $y(x)$ dengan deret Taylor di sekitar x_0 adalah

$$y(x) = y(x_0) + \delta y'(x_0) + \dots + \frac{\delta^{p-1}}{(p-1)!} y^{(p-1)}(x_0) + R(\delta), \quad (2.17)$$

dengan $\delta = x - x_0$ dan $R(\delta)$ adalah suku sisa dari (2.17). Suku sisa ini didefinisikan sebagai

$$R(\delta) = \frac{\delta^p}{p!} y^{(p)}(\xi_x) = O(\delta^p),$$

dimana $\xi_x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ (Shampine, 1994).

2.9 Little o

Fungsi $f(h)$ dikatakan *little o*(h) dari $g(h)$, ditulis $f(h) = o(g(h))$ untuk $h \rightarrow h_0$, sehingga

$$\lim_{h \rightarrow h_0} \frac{|f(h)|}{|g(h)|} = 0$$

(Evans, 1994)

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB III PEMBAHASAN

3.1 Metode Orde-6

Metode Orde-6 dinyatakan dalam bentuk tiga langkah dimana langkah pertama dan kedua adalah metode Basu. Metode Basu merupakan prediktor dari metode Orde-6 dan kemudian ditambahkan langkah ketiga untuk iterasi metode Orde-6 sebagai korektor, dimana langkah ketiga ini merupakan ekspansi deret Taylor $f(x_{n+1})$ di sekitar z_n dalam bentuk sebagai berikut

$$f(x_{n+1}) = f(z_n) + f'(z_n)(x_{n+1} - z_n) + O((x_{n+1} - z_n)^2).$$

Karena dalam hal persoalan mencari akar maka $f(x_{n+1}) = 0$, sehingga

$$0 = f(z_n) + f'(z_n)(x_{n+1} - z_n) + O((x_{n+1} - z_n)^2),$$

apabila suku orde kedua diabaikan dan dengan memindahruaskan persamaan tersebut maka didapat

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}, \quad (3.1)$$

dengan $f(z_n)$ adalah prediktor yang merupakan metode Basu. Untuk mendapatkan langkah ketiga metode Orde-6, fungsi $f(z_n)$ diekspansikan di sekitar y_n seperti berikut

$$f(z_n) = f(y_n) + f'(y_n)(z_n - y_n) + \frac{1}{2}f''(y_n)(z_n - y_n)^2 + O((z_n - y_n)^3), \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{2}f''(y_n)(z_n - y_n)^2 = f(z_n) - f(y_n) - f'(y_n)(z_n - y_n) + O((z_n - y_n)^3),$$

sehingga dengan mengabaikan suku orde ketiga didapat

$$f''(y_n) = 2 \frac{(f(z_n) - f(y_n) - f'(y_n)(z_n - y_n))}{(z_n - y_n)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \frac{f(z_n) - f(y_n)}{(z_n - y_n)(z_n - y_n)} - 2 \frac{f'(y_n)(z_n - y_n)}{(z_n - y_n)(z_n - y_n)} \\
&= 2 \frac{f[z_n, y_n]}{(z_n - y_n)} - 2 \frac{f'(y_n)}{(z_n - y_n)} \\
&= 2 \frac{f[z_n, y_n] - f'(y_n)}{(z_n - y_n)} \\
&= 2 \frac{\frac{f(z_n) - f(y_n)}{(z_n - y_n)} - \frac{f'(y_n) - f'(z_n)}{(z_n - y_n)}}{(z_n - y_n)} \\
&= 2f[z_n, y_n, y_n]. \tag{3.3}
\end{aligned}$$

Turunan pertama dari $f(z_n)$ adalah

$$f'(z_n) = f'(y_n) + f''(y_n)(z_n - y_n) + O((z_n - y_n)^2), \tag{3.4}$$

dengan mensubstitusikan (3.3) ke dalam (3.4) maka di dapat

$$f'(z_n) = f'(y_n) + 2f[z_n, y_n, y_n](z_n - y_n). \tag{3.5}$$

Kemudian untuk memperoleh langkah ketiga metode Orde-6 di substistusikan persamaan (3.5) ke dalam persamaan (3.1), sehingga diperoleh langkah ketiga metode Orde-6 sebagai berikut

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(y_n) + 2f[z_n, y_n, y_n](z_n - y_n)}. \tag{3.6}$$

Dengan menambahkan persamaan (3.6) untuk langkah ketiga dimana langkah pertama dan kedua adalah persamaan (2.16), maka bentuk dari metode Orde-6 adalah

$$\left\{ \begin{array}{l}
y_n = x_n - \frac{2f(x_n)}{3f'(x_n)} \\
z_n = x_n - \left[\frac{9(f'(y_n))^2 - 2f'(y_n)f'(x_n) + 9(f'(x_n))^2}{12(f'(y_n))^2 + 4f'(y_n)f'(x_n)} \right] \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(y_n) + 2f[z_n, y_n, y_n](z_n - y_n)},
\end{array} \right. \tag{3.7}$$

dengan x_n adalah nilai pendekatan awal, y_n adalah nilai pada langkah pertama, z_n adalah nilai pada langkah kedua, dan x_{n+1} adalah akar.

3.1.1 Orde Metode Orde-6

Teorema 3.1.1.1

Jika dimisalkan $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi yang kontinu dan terdiferensiabel serta mempunyai akar tunggal α di dalam interval D , maka metode Orde-6 ditentukan oleh persamaan (3.7) dan berorde 6.

Bukti:

Misalkan $e_n = x_n - \alpha$ adalah nilai error per-iterasi dimana x_n merupakan nilai pendekatan awal dan α adalah akar, maka deret Taylor $f(x_n)$ di sekitar α adalah

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{f''(\alpha)(x_n - \alpha)^2}{2!} + \frac{f'''(\alpha)(x_n - \alpha)^3}{3!} + \dots + O((x_n - \alpha)^7),$$

atau

$$\begin{aligned} f(x_n) &= \left(\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} + \frac{f'(\alpha)(e_n)}{f'(\alpha)} + \frac{f''(\alpha)(e_n)^2}{2! f'(\alpha)} + \frac{f'''(\alpha)(e_n)^3}{3! f'(\alpha)} + \dots + \frac{O((e_n)^7)}{f'(\alpha)} \right) f'(\alpha), \\ &= f'(\alpha)[e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + c_4 e_n^4 + c_5 e_n^5 + c_6 e_n^6 + O(e_n^7)], \end{aligned} \quad (3.8)$$

dengan c_k adalah

$$c_k = \left(\frac{1}{k!} \right) \frac{f^{(k)}(\alpha)}{f'(\alpha)}, \quad k \geq 2,$$

dimana turunan pertama dari $f(x_n)$ adalah sebagai berikut

$$f'(x_n) = f'(\alpha)[1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + 4c_4 e_n^3 + 5c_5 e_n^4 + 6c_6 e_n^5 + O(e_n^6)].$$

Selanjutnya $f(x_n)$ digunakan untuk menghitung nilai pada masing-masing langkah. Dengan mensubstitusi $f(x_n)$ ke dalam persamaan (3.7), maka didapatkan nilai langkah pertama, kedua, dan ketiga. Dalam hal ini orde dicari dengan menggunakan *software Mathematica 8* dimana *source code*-nya diberikan pada Tabel 3.1.

Tabel 3.1 *Source Code* Program *Mathematica 8*

Input	<pre>f[e_]:=dfa(e+c₂ e²+c₃ e³+c₄ e⁴+c₅ e⁵+c₆ e⁶) fe=f[e]; f1e=f'[e]; u=e-(2/3)Series[fe/f1e,{e,0,5}] f1u=f'[u]; v=e-((9 f1e²-2 f1e f1u+9 f1u²) fe)/((4 f1e f1u+12 f1u²)f1e) fv=f[v]; z=f1u+2((((fv-fe)/(v-e))-f1e)/(v-e))(v-e); eFinal=v-fv/z</pre>
-------	---

Berdasarkan Tabel 3.1 diperoleh hasil langkah pertama, kedua, dan ketiga, dengan $f[e_]$ merupakan $f(x_n)$, u merupakan y_n , v merupakan z_n , dan $eFinal$ merupakan x_{n+1} . Fungsi $f(x_n)$ dan $f'(x_n)$ disubstitusikan ke dalam persamaan (3.7) untuk langkah pertama. Kemudian nilai y_n disubstitusikan ke dalam z_n . Pada langkah ketiga yaitu x_{n+1} didapat hasil pada Lampiran 1 bahwa metode ini berorde 6. ■

3.2 Syarat Konvergensi Metode Orde-6

Pada subbab ini ditunjukkan syarat konvergensi metode Orde-6 dimana langkah pertama dan kedua pada persamaan (3.7) adalah

$$z_n = x_n - \frac{\left[9 \left(f' \left(x_n - \frac{2f(x_n)}{3f'(x_n)} \right) \right)^2 - 2f' \left(x_n - \frac{2f(x_n)}{3f'(x_n)} \right) f'(x_n) + 9 \left(f'(x_n) \right)^2 \right] \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}{12 \left(f' \left(x_n - \frac{2f(x_n)}{3f'(x_n)} \right) \right)^2 + 4f' \left(x_n - \frac{2f(x_n)}{3f'(x_n)} \right) f'(x_n)}$$

Selanjutnya, untuk langkah ketiga persamaan (3.7) adalah

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

Karena metode Orde-6 merupakan pengembangan dari metode Newton-Raphson, maka perhitungan syarat konvergensi metode Orde-6 dilakukan seperti syarat konvergensi metode Newton-Raphson. Menurut Teorema 2.4.1.2, metode Newton-Raphson akan konvergen jika

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1,$$

hal ini juga berlaku untuk metode Orde-6 yang akan konvergen apabila nilai $\left| \frac{f(z_n)f''(z_n)}{(f'(z_n))^2} \right| < 1$.

3.3 Simulasi Numerik

Pada subbab ini dibahas simulasi untuk menghitung akar dari persamaan nonlinear serta membandingkan jumlah iterasi dari metode Newton-Raphson, metode Basu, dan metode Orde-6. Simulasi ini bertujuan untuk memperoleh akar dari persamaan nonlinear dengan menggunakan *software* MATLAB (*source code* terdapat pada Lampiran 2) dan membandingkan jumlah iterasi dari ketiga metode (hasil perbandingan iterasi dapat dilihat pada Lampiran 4).

Dalam perhitungan akar pada *software* MATLAB, iterasi akan berhenti apabila $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ dimana $\varepsilon = 10^{-15}$. Agar proses iterasi berhenti, maka diperlukan syarat yaitu nilai $f(x_n) < \varepsilon$. Apabila nilai $f(x_n) < \varepsilon$ maka nilai $f(x_n)$ cukup dekat dengan nol sehingga $x_{n+1} = x_n$ dimana x_{n+1} adalah akar yang dicari.

Berdasarkan hasil pada Tabel 3.4 diperoleh bahwa persamaan nonlinear dari nomor 1 sampai 5 konvergen menuju akar, akan tetapi pada persamaan terakhir yaitu $f(x) = \tan(x) - x$ hasil solusinya adalah divergen. Pada perhitungan konvergensi metode Orde-6, dibutuhkan beberapa nilai yaitu $f(x_n)$, $f'(x_n)$, $f''(x_n)$, $f(z_n)$, $f'(z_n)$, $f''(z_n)$. Perhitungan nilai fungsi $f(x_n)$ dan $f(z_n)$ beserta turunan pertama dan kedua dengan nilai awal $x_n = -2$ diberikan pada Tabel 3.2 dan Tabel 3.3.

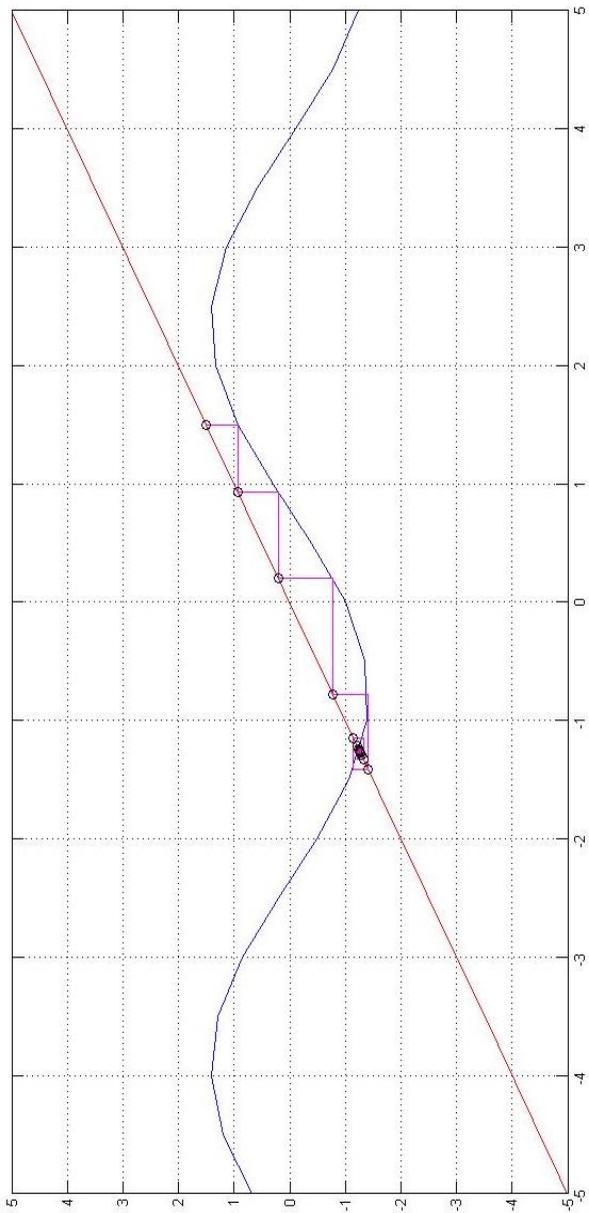
Tabel 3.2 Perhitungan Nilai $f(x_n)$

$f(x_n)$ $= \tan(x_n) - x_n$ 4.1850	$f'(x_n)$ $= (\tan(x_n))^2$ 4.7742	$f''(x_n)$ $= 2 \tan(x_n) (\sec(x_n))^2$ 25.2347
---	--	--

Tabel 3.3 Perhitungan Nilai $f(z_n)$

$f(z_n)$ $= \tan(z_n) - z_n$ 22.1443	$f'(z_n)$ $= (\tan(z_n))^2$ 0.7534	$f''(z_n)$ $= 2 \tan(z_n) (\sec(z_n))^2$ 3.0439
--	--	---

Berdasarkan perhitungan pada Lampiran 5 diperoleh hasil $\left| \frac{f(z_n)f''(z_n)}{(f'(z_n))^2} \right| = 118.7$. Dapat dilihat bahwa $\left| \frac{f(z_n)f''(z_n)}{(f'(z_n))^2} \right| > 1$, hal ini menunjukkan bahwa $f(x_n) = \tan(x_n) - x_n$ divergen dengan nilai awal $x_n = -2$. Pada perhitungan dengan menggunakan diagram Cobweb dapat dihasilkan solusi yang konvergen atau divergen. Perhitungan secara grafis pada Gambar 3.1 dengan menggunakan diagram Cobweb untuk fungsi $f(x) = \sin(x) - \cos(x)$ menunjukkan bahwa hasil solusinya adalah konvergen dengan nilai awal $x_n = 1.5$ (source code terdapat pada Lampiran 3).



Gambar 3.1 Diagram Cobweb fungsi $f(x) = \sin(x) - \cos(x)$

Tabel 3.4 Hasil perhitungan akar dan perbandingan jumlah iterasi

No.	Fungsi $f(x) = 0$	Nilai awal	Solusi Eksak	Solusi Numerik	Galat	Iterasi			
						Newton-Raphson	Basu	Orde-6	
1.	$\cos(x) - \frac{1}{2} = 0$	1	1.0471975511 96598	1.047197551 196598	0	5	3	3	
2.	$\sin(x) = 0$	7	6.2831853071 79586	6.283185307 79586	0	5	4	3	
3.	$x^5 - 5x^3 + 2x = 0$	3	2.1357792050 69857	2.135779205 069857	0	8	5	4	
4.	$x^6 - 3x^4 + 7x^2 - 2 = 0$	-3	-1.71346999 1393383	-1.713469 991393383	0	9	5	4	
5.	$\sin(x) - \cos(x) = 0$	1.5	0.7853981633 97448	0.785398163 397448	0	5	4	3	
6.	$\tan(x) - x = 0$	-2	0	divergen	divergen	divergen	divergen	divergen	

BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dalam skripsi ini diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Dengan menggunakan deret Taylor, langkah ketiga dari metode Orde-6 adalah

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(y_n) + 2f[z_n, y_n, y_n](z_n - y_n)}$$

2. Berdasarkan hasil simulasi numerik dengan menggunakan *software* MATLAB seperti yang ditampilkan pada Tabel 3.4, dapat dilihat bahwa metode Orde-6 memiliki jumlah iterasi paling sedikit. Hal ini menunjukkan bahwa metode Orde-6 lebih efisien dibandingkan metode Newton-Raphson dan metode Basu.

4.2 Saran

Pada skripsi selanjutnya disarankan untuk mengembangkan metode yang memiliki orde lebih tinggi dari metode Orde-6 untuk menyelesaikan suatu persamaan nonlinear.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR PUSTAKA

- Ahmad, K. 2004. *Differential Calculus*. Anamaya Publishers. New Delhi.
- Ahmad, N. 2010. *Fundamental Numerical Analysis and Error Estimation*. Anamaya Publishers. New Delhi.
- Anton, H. 1999. *Calculus A New Horizon Sixth Edition*. John Wiley and Sons Inc. New York.
- Atkinson, K. E. 1989. *An Introduction to Numerical Analysis*. John Wiley and Sons, Inc. Canada.
- Basu, D. 2008. Composite Fourth Order Newton Type Method for Simple Roots. *Int. J. Comput. Methods Eng. Sci. Mechanics*, Vol. 9, (2008), 201-210.
- Devaney, R. 1992. *A First Course in Chaotic Dynamical Systems*. Perseus Books Publishing, L.L.C. United States of America.
- Elaydi, S. 2005. *An Introduction to Difference Equations*. Springer Science Business Media, Inc. United States of America.
- Evans, L. C. 1997. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society. Berkeley.
- Mathews, J. H dan K. D Fink.. 1999. *Numerical Methods Using MATLAB Third Edition*. Prentice Hall Div College. UK.
- Munir, R. 2003. *Metode Numerik*. Informatika Bandung. Bandung.
- Shampine, L. F. 1994. *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*. Chapman and Hall, Inc. Newyork.
- Soleymani, F. 2011. A Novel and Precise Sixth-Order Method for Solving Nonlinear Equations. *Int. J. Math. Models Meth. Appl. Sci.*, Vol. 5, (2011), 730 - 737.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

