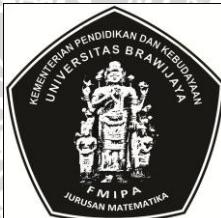


**ANALISIS KESTABILAN MODEL EPIDEMI DENGAN  
PENGOBATAN DAN VAKSINASI TIDAK LENGKAP**

**SKRIPSI**

oleh  
**GUNAWAN**  
**0810940041-94**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
MALANG  
2013**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



# **ANALISIS KESTABILAN MODEL EPIDEMI DENGAN PENGOBATAN DAN VAKSINASI TIDAK LENGKAP**

## **SKRIPSI**

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh  
**GUNAWAN**  
**0810940041-94**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
MALANG  
2013**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

ANALISIS KESTABILAN MODEL EPIDEMI DENGAN  
PENGOBATAN DAN VAKSINASI TIDAK LENGKAP

Oleh:

GUNAWAN

0810940041-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Pengaji  
pada tanggal 31 Januari 2013

dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Sains dalam bidang matematika

Dosen Pembimbing I

Dosen Pembimbing II

Dr. Wuryansari M.K., M.Si  
NIP. 196607281993032001

Drs. M. Muslih, M.Si  
NIP. 195910311989121001

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika  
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc  
NIP. 196709071992031001

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : GUNAWAN

NIM : 0810940041-94

Jurusan : Matematika

Penulis skripsi berjudul : ANALISIS KESTABILAN MODEL  
EPIDEMI DENGAN PENGOBATAN DAN VAKSINASI  
TIDAK LENGKAP

dengan ini menyatakan bahwa:

1. isi skripsi yang saya buat benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka skripsi ini.
2. Apabila di kemudian hari ternyata skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala risiko yang akan saya terima.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 31 Januari 2013

Yang menyatakan,

(Gunawan)

NIM. 0810940041

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



# ANALISIS KESTABILAN MODEL EPIDEMI DENGAN PENGOBATAN DAN VAKSINASI TIDAK LENGKAP

## ABSTRAK

Pada skripsi ini dibahas konstruksi dan analisis model epidemi dengan pengobatan dan vaksinasi tidak lengkap. Model ini merupakan pengembangan dari model SIR dengan memperhitungkan subpopulasi tervaksin ( $V$ ), subpopulasi *latent* ( $E$ ) dan mengganti subpopulasi *recovery* ( $R$ ) menjadi subpopulasi *treatment* ( $T$ ). Konstruksi model tersebut menggunakan analisis kompartemen dan diformulasikan dalam sistem persamaan diferensial biasa nonlinier dengan lima variabel. Skripsi ini membahas titik kesetimbangan yang terdapat pada model dan syarat eksistensinya. Terdapat dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan endemi dan titik kesetimbangan nonendemi. Kestabilan lokal kedua titik tersebut dikaji menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Pada bagian akhir dilakukan simulasi numerik untuk mengilustrasikan hasil analisis yang telah diperoleh.

**Kata kunci:** Epidemi, pengobatan tidak lengkap, vaksinasi tidak lengkap, analisis kestabilan, titik kesetimbangan.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



# STABILITY OF AN EPIDEMIC MODEL WITH INCOMPLETE TREATMENT AND VACCINATION

## ABSTRACT

This paper discuss the construction and the analysis of epidemic model with incomplete treatment and vaccination. This model is a modification of *SIR* model by considering vaccination subpopulation (*V*), latent subpopulation (*E*), and replacing the recovery subpopulation (*R*) by the treatment subpopulation (*T*). The construction of model uses compartment analysis and formulates as nonlinear differential equation system with five variables. This paper also discuss the equilibrium point and the existence condition of equilibrium point. Local stability of the equilibrium points is analyzed using Routh-Hurwitz Criteria. Numerical simulation is carried out to illustrate the analytical findings.

**Keywords:** Epidemic, incomplete treatment, incomplete vaccination, stability analysis, equilibrium point.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur bagi Allah SWT atas hidayah dan petunjuk-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **“Analisis Kestabilan Model Epidemi dengan Pengobatan dan Vaksinasi Tidak Lengkap”** dengan baik.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan serta motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada:

1. Dr. Wuryansari M.K., M.Si. , selaku pembimbing I atas segala bimbingan, motivasi serta kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini,
2. Drs. M. Muslih, M.Si., selaku pembimbing II sekaligus pembimbing akademik atas segala bimbingan, motivasi serta kesabaran yang telah diberikan dari semester awal hingga semester akhir ini,
3. Dr. Ratno Bagus E.W., M.Si. , selaku dosen penguji atas segala saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini,
4. semua bapak/ibu dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya,
5. HMI komisariat MIPA Brawijaya, Fordi Mapelar UB, dan TEGAZS UB yang telah memberikan keluarga baru, pengalaman, dan hal yang tidak didapatkan di bangku kuliah,
6. bapak, ibu, dan semua anggota keluarga besarku atas segala yang telah diberikan berupa dukungan spiritual dan material,
7. teman-teman yang ada di Jurusan Matematika khususnya Matematika 2008 atas bantuan yang telah diberikan dan kebersamaannya selama ini, dan
8. semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat banyak kekurangan. Untuk itu penulis sangat mengharapkan kritik dan saran melalui email penulis Goenaa@gmail. com. Akhir kata, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak.

Malang, 31 Januari 2013

Penulis

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## DAFTAR ISI

Halaman

<b>HALAMAN JUDUL .....</b>	i
<b>LEMBAR PENGESAHAN .....</b>	iii
<b>LEMBAR PERNYATAAN .....</b>	v
<b>ABSTRAK .....</b>	vii
<b>ABSTRACT .....</b>	ix
<b>KATA PENGANTAR .....</b>	xi
<b>DAFTAR ISI .....</b>	xiii
<b>DAFTAR TABEL .....</b>	xv
<b>DAFTAR GAMBAR .....</b>	xvii
<b>DAFTAR LAMPIRAN .....</b>	xix
<b>DAFTAR SIMBOL .....</b>	xxi
<b>BAB I PENDAHULUAN .....</b>	1
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	2
1.3 Tujuan Penulisan .....	2
<b>BAB II KAJIAN PUSTAKA .....</b>	3
2.1 Persamaan Diferensial .....	3
2.2 Sistem Dinamik .....	4
<b>BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN .....</b>	9
3.1 Model Kompartemen .....	9
3.2 Konstruksi Model .....	10
3.3 Titik Kesetimbangan Model .....	14
3.4 Kestabilan Titik Kesetimbangan .....	17
3.5 Simulasi Numerik .....	20
<b>BAB IV PENUTUP .....</b>	25
4.1 Kesimpulan .....	25
4.2 Saran .....	25
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>	27
<b>LAMPIRAN .....</b>	29

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## DAFTAR TABEL

Halaman

Tabel 3.1	Syarat eksistensi dan kestabilan .....	20
Tabel 3.2	Parameter untuk simulasi pertama.....	20
Tabel 3.3	Parameter untuk simulasi ke dua.....	22
Tabel 3.4	Parameter untuk simulasi ke tiga.....	23



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## DAFTAR GAMBAR

Halaman

Gambar 3.1	Model kompartemen sistem epidemi dengan perawatan dan vaksinasi tidak lengkap .....	9
Gambar 3.2	Hasil simulasi numerik untuk $R_0 = 0.3479 < 1$ ....	21
Gambar 3.3	Hasil simulasi numerik untuk $R_0 = 1$ .....	22
Gambar 3.4	Hasil simulasi numerik untuk $R_0 = 3.2899 > 1$ . ....	23



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## DAFTAR LAMPIRAN

### Lampiran

### Halaman

Lampiran 1	Perhitungan titik kesetimbangan model .....	29
Lampiran 2	Perhitungan titik kesetimbangan nonendemi.....	35
Lampiran 3	Perhitungan titik kesetimbangan endemi.....	37
Lampiran 4	Perhitungan kestabilan titik kesetimbangan nonendemi .....	43
Lampiran 5	Perhitungan kestabilan titik kesetimbangan endemi .....	45
Lampiran 6	<i>Listing program</i> .....	49



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## DAFTAR SIMBOL

<u>Simbol</u>	<u>Keterangan</u>
$S$	subpopulasi rentan ( <i>susceptibles</i> ).
$V$	subpopulasi tervaksin ( <i>vaccinated</i> ).
$E$	subpopulasi <i>latent</i> .
$I$	subpopulasi terinfeksi ( <i>infectious</i> ).
$T$	subpopulasi <i>treatment</i> .
$\mu_A$	laju kelahiran alami.
$\mu$	laju kematian alami.
$q$	laju kelahiran alami individu tidak tervaksin.
$1 - q$	laju kelahiran alami individu tervaksin.
$p$	tingkat vaksinasi untuk individu rentan.
$\varepsilon$	koefisien laju kehilangan kekebalan dari individu tervaksin.
$\beta$	koefisien transmisi infeksi dari individu rentan.
$\beta\sigma$	koefisien transmisi infeksi dari individu tervaksin.
$\gamma$	laju perpindahan dari tersembunyi ke terinfeksi.
$\xi$	laju perpindahan dari terinfeksi ke perawatan.
$\delta$	laju perpindahan dari perawatan.
$\alpha_1$	tingkat kematian yang disebabkan penyakit, untuk individu dalam kompartemen $I$ .
$\alpha_2$	tingkat kematian yang disebabkan penyakit, untuk individu dalam kompartemen $T$ .
$k$	individu yang resisten terhadap obat.
$P_0$	titik kesetimbangan bebas endemi.
$P^*$	titik kesetimbangan endemi.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## BAB I

### PENDAHULUAN

#### 1.1 Latar Belakang

Model matematika merupakan sekumpulan persamaan atau pertidaksamaan yang mengungkapkan perilaku suatu situasi nyata. Model matematika dibuat berdasarkan asumsi-asumsi. Model epidemi adalah model yang menggambarkan penyebaran virus atau bakteri dalam populasi tertutup, yang terdiri dari *S*, *I*, dan *R*. *Susceptibles* (*S*) adalah subpopulasi individu yang rentan, *infectives* (*I*) adalah subpopulasi individu yang terinfeksi, dan *recoverers* (*R*) adalah subpopulasi individu yang sembuh. Hal ini telah dibahas oleh Kermack dan Mckendrick. Dalam perkembangannya menurut Michael Y. LI, Hal L. Smith, dan Liancheng Wan (2011), pada beberapa penyakit seperti Influenza, Hepatitis B, dan TBC, jika ada interaksi antara subpopulasi *S* dan subpopulasi *I*, maka akan ada individu yang terinfeksi namun belum cukup kuat untuk menularkan virus atau bakteri tersebut. Hal ini akan berakibat terbentuknya subpopulasi baru, yaitu subpopulasi *latent* yang dilambangkan dengan *E*. Oleh karena itu akan lebih realistik jika dimunculkan subpopulasi *E* dalam model SIR, sehingga terbentuk model *SEIR*.

Dewasa ini, vaksin merupakan hal yang cukup diperhatikan. Vaksin dapat meningkatkan sistem kekebalan tubuh. Dosis dan interval waktu pemberian vaksin berbeda pada masing-masing penyakit. Perbedaan dosis dan interval waktu tersebut mengakibatkan terdapat individu yang terinfeksi sebelum tervaksin, dan individu yang terinfeksi setelah tervaksin. Individu yang terinfeksi sebelum tervaksin nantinya akan masuk dalam subpopulasi *S*, sedangkan individu yang terinfeksi setelah tervaksin akan masuk di subpopulasi *V*. Dengan demikian dapat diasumsikan bahwa individu yang baru lahir dapat masuk dalam subpopulasi *S* atau subpopulasi *V*.

Jika melakukan interaksi langsung dengan individu dalam subpopulasi *I*, maka individu pada subpopulasi *S* ataupun subpopulasi *V* dapat tertular virus atau bakteri. Dalam beberapa kasus tertentu seperti TB, jika TB diobati maka akan tetap ada bakteri TB yang masih tersisa, artinya tidak akan ada individu yang sembuh secara total. Hal ini akan memunculkan subpopulasi baru yang menggantikan subpopulasi *R*, yaitu subpopulasi individu yang

mengalami proses perawatan yang disebut dengan subpopulasi  $T$ . Individu dari subpopulasi  $T$  dapat kembali ke subpopulasi  $E$  karena telah terjadi perawatan, sehingga jumlah bakterinya berkurang dan belum kuat untuk menyebarluaskan bakteri. Jika terjadi kegagalan pengobatan individu dari subpopulasi  $T$  kembali ke subpopulasi  $I$ .

Dalam tulisan Huo dan Feng (2011) telah dibahas analisis model *SVEIT*. Analisis model tersebut menghasilkan dua titik kesetimbangan beserta kestabilannya. Namun dalam tulisan tersebut kestabilan lokalnya ditentukan dengan menggunakan sifat *matrix next generation*, sedangkan dalam tulisan ini dibahas dengan melakukan linearisasi di setiap titik kesetimbangannya dan menggunakan metode kriteria Routh-Hurwitz.

## 1.2 Rumusan Masalah

Dari latar belakang tersebut, berikut dirumuskan masalah yang dikaji dalam skripsi ini.

1. Bagaimana cara mengkonstruksi model tersebut?
2. Bagaimana kestabilan titik kesetimbangan model?
3. Bagaimana simulasi dan interpretasi hasil analisis model?

## 1.3 Tujuan Penulisan

Adapun tujuan yang akan dicapai adalah sebagai berikut.

1. Mengkonstruksi model tersebut.
2. Mengetahui kestabilan titik kesetimbangan model.
3. Menyimulasikan dan menginterpretasikan hasil analisis model.

## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1 Persamaan Diferensial

##### Definisi 2.1.1 (Persamaan Diferensial)

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat hubungan antara suatu fungsi yang tidak diketahui dengan satu atau lebih turunannya (Boyce dan DiPrima, 2000).

##### Definisi 2.1.2 (Persamaan Diferensial Biasa)

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang hanya memuat satu variabel bebas (Boyce dan DiPrima, 2000).

##### Definisi 2.1.3 (Orde Persamaan Diferensial)

Orde persamaan diferensial adalah tingkat turunan tertinggi dalam suatu persamaan diferensial (Boyce dan DiPrima, 2000).

##### Definisi 2.1.4 (Persamaan Diferensial Biasa Linear)

Suatu persamaan diferensial biasa dengan variabel bebas  $x$  dan variabel tak bebas  $y$  disebut linear dengan orde  $n$ , jika persamaan tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x)$$

dengan  $a_0 \neq 0$  (Boyce dan DiPrima, 2000).

##### Definisi 2.1.5 (Persamaan Diferensial Biasa Nonlinear)

Persamaan diferensial biasa nonlinear adalah persamaan diferensial biasa yang variabel tak bebas atau turunannya berderajat lebih dari satu atau memuat perkalian antara variabel tak bebas dan turunannya (Boyce dan DiPrima, 2000).

##### Definisi 2.1.6 (Sistem Persamaan Diferensial Biasa)

Sistem persamaan diferensial biasa linear berdimensi  $n$  adalah suatu sistem yang terdiri dari  $n$  persamaan diferensial biasa linear dengan  $n$  variabel yang tidak diketahui. Bentuk umum sistem

persamaan diferensial biasa linear orde satu berdimensi  $n$  dengan koefisien konstan adalah

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + f_n(t)\end{aligned}\quad (2.1)$$

dengan  $a_{i,j}$  adalah konstanta riil dan  $i, j = 1, \dots, n$  (Robinson, 2004).

## 2.2 Sistem Dinamik

### Definisi 2.2.1 (Sistem Dinamik)

Sistem dinamik adalah suatu sistem yang dapat diketahui nilainya di masa yang akan datang jika diberikan suatu kondisi awal pada masa sekarang atau di masa yang telah lalu (Nagle dan Saff, 1993).

### Definisi 2.2.2 (Sistem Otonomus)

Suatu sistem persamaan diferensial yang berbentuk

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}\quad (2.2)$$

dengan fungsi  $f_i$  tidak bergantung secara eksplisit terhadap waktu  $t, \forall i = 1, \dots, n$  disebut sistem persamaan diferensial yang bersifat otonomus (Boyce dan DiPrima, 2000).

### Definisi 2.2.3 (Titik Kesetimbangan)

Pandang sistem otonomus (2.2). Titik  $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  yang memenuhi  $f_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0, \forall i = 1, \dots, n$  disebut titik kritis sistem otonomus (2.2). Titik kritis  $\vec{x}^*$  merupakan solusi sistem (2.2) yang bernilai konstan, sebab  $\frac{dx_i}{dt} = 0, \forall i = 1, \dots, n$ . Kondisi  $\frac{dx_i}{dt} = 0$ , disebut dengan kondisi setimbang dan titik yang memenuhinya disebut titik kesetimbangan.

Bentuk umum sistem otonomus linear adalah

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n\end{aligned}\tag{2.3}$$

dengan  $a_{ij}$  adalah konstanta riil, untuk  $i, j = 1, \dots, n$ . Persamaan (2.3) dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$$

dimana  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  dan  $A = [a_{ij}]$ .

### Teorema 1

Misalkan  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  adalah nilai eigen matriks  $A$  dari sistem otonomus linear (2.3) dengan  $\det(A) \neq 0$ . Titik kesetimbangan sistem (2.3) bersifat

1. stabil asimtotik jika  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  memiliki bagian riil negatif,
2. stabil jika semua  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  memiliki bagian riil tak positif,
3. tidak stabil jika sedikitnya satu nilai eigen memiliki bagian riil yang positif (Boyce dan DiPrima, 2000).

#### 2.2.1 Kriteria Routh-Hurwitz

Jika suatu sistem linear mempunyai persamaan karakteristik berbentuk

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,\tag{2.4}$$

maka kestabilan titik kesetimbangannya dapat ditentukan dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz tanpa harus menentukan nilai eigennya.

Routh-Hurwitz menggunakan koefisien-koefisien persamaan (2.4) untuk membangun  $n$  matriks Routh-Hurwitz  $D_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  yaitu

$$D_1 = [a_1], D_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{bmatrix},$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix}, \dots, D_k = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & \dots \\ \vdots & 1 & a_2 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_k \end{bmatrix}.$$

## Teorema 2

Titik kesetimbangan sistem linear bersifat stabil jika dan hanya jika determinan matriks Routh-Hurwitz positif, yakni

$$\det(D_i) > 0 \text{ untuk } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

(Murray, 2002).

### 2.2.2 Sistem Otonomus NonLinear

Misalkan sistem otonomus (2.2) adalah sistem otonomus nonlinear. Jika diasumsikan  $F_1, F_2, F_3, F_4$  dan  $F_5$  mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik  $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*)$ , maka deret Taylor fungsi  $F_1, F_2, F_3, F_4$  dan  $F_5$  di sekitar  $\vec{x}^*$  adalah

$$F_i = F_i(\vec{x}^*) + \sum_{j=1}^5 \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\vec{x}^*)(x_j - x_j^*) + \eta_i(\vec{x})$$

dengan  $\eta_i(\vec{x})$  adalah suku sisa,  $\forall i = 1, 2, 3, 4, 5$

Karena  $\frac{dx_i}{dt} = \frac{d}{dt}(x_i - x_i^*), \forall i = 1, 2, 3, 4, 5$ . Maka persamaan (2.2) dapat dituliskan dalam bentuk

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \\ x_3 - x_3^* \\ x_4 - x_4^* \\ x_5 - x_5^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(\vec{x}^*) \\ F_2(\vec{x}^*) \\ F_3(\vec{x}^*) \\ F_4(\vec{x}^*) \\ F_5(\vec{x}^*) \end{bmatrix} + J(\vec{x}^*) \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \\ x_3 - x_3^* \\ x_4 - x_4^* \\ x_5 - x_5^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(\vec{x}) \\ \eta_2(\vec{x}) \\ \eta_3(\vec{x}) \\ \eta_4(\vec{x}) \\ \eta_5(\vec{x}) \end{bmatrix}$$

dengan

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_3} & \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_4} & \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_5} \\ \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_3} & \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_4} & \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_5} \\ \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2} & \frac{\partial x_3}{\partial x_3} & \frac{\partial x_4}{\partial x_4} & \frac{\partial x_5}{\partial x_5} \\ \frac{\partial F_3(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \frac{\partial F_3(\vec{x}^*)}{\partial x_3} & \frac{\partial F_3(\vec{x}^*)}{\partial x_4} & \frac{\partial F_3(\vec{x}^*)}{\partial x_5} \\ \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2} & \frac{\partial x_3}{\partial x_3} & \frac{\partial x_4}{\partial x_4} & \frac{\partial x_5}{\partial x_5} \\ \frac{\partial F_4(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_4(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \frac{\partial F_4(\vec{x}^*)}{\partial x_3} & \frac{\partial F_4(\vec{x}^*)}{\partial x_4} & \frac{\partial F_4(\vec{x}^*)}{\partial x_5} \\ \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2} & \frac{\partial x_3}{\partial x_3} & \frac{\partial x_4}{\partial x_4} & \frac{\partial x_5}{\partial x_5} \\ \frac{\partial F_5(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_5(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \frac{\partial F_5(\vec{x}^*)}{\partial x_3} & \frac{\partial F_5(\vec{x}^*)}{\partial x_4} & \frac{\partial F_5(\vec{x}^*)}{\partial x_5} \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, matriks  $J$  disebut matriks Jacobi atau *partial derivative matrix*. Jika dimisalkan  $\hat{x}_i = x_i - x_i^*$ , serta mengingat bahwa  $F_i(x^*) = 0, \forall i = 1, \dots, 5$  maka persamaan (2.2) dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} \frac{d\hat{x}_1}{dt} \\ \frac{d\hat{x}_2}{dt} \\ \frac{d\hat{x}_3}{dt} \\ \frac{d\hat{x}_4}{dt} \\ \frac{d\hat{x}_5}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} & \frac{\partial F_1}{\partial x_4} & \frac{\partial F_1}{\partial x_5} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} & \frac{\partial F_2}{\partial x_4} & \frac{\partial F_2}{\partial x_5} \\ \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2} & \frac{\partial x_3}{\partial x_3} & \frac{\partial x_4}{\partial x_4} & \frac{\partial x_5}{\partial x_5} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2} & \frac{\partial F_3}{\partial x_3} & \frac{\partial F_3}{\partial x_4} & \frac{\partial F_3}{\partial x_5} \\ \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2} & \frac{\partial x_3}{\partial x_3} & \frac{\partial x_4}{\partial x_4} & \frac{\partial x_5}{\partial x_5} \\ \frac{\partial F_4}{\partial x_1} & \frac{\partial F_4}{\partial x_2} & \frac{\partial F_4}{\partial x_3} & \frac{\partial F_4}{\partial x_4} & \frac{\partial F_4}{\partial x_5} \\ \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2} & \frac{\partial x_3}{\partial x_3} & \frac{\partial x_4}{\partial x_4} & \frac{\partial x_5}{\partial x_5} \\ \frac{\partial F_5}{\partial x_1} & \frac{\partial F_5}{\partial x_2} & \frac{\partial F_5}{\partial x_3} & \frac{\partial F_5}{\partial x_4} & \frac{\partial F_5}{\partial x_5} \end{bmatrix}_{(x^*)} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \\ \hat{x}_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \\ \eta_5 \end{bmatrix}.$$

Bentuk di atas dapat ditulis sebagai

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w} + \vec{\eta}$$

dengan  $\vec{w} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4, \hat{x}_5)^T$  dan  $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)^T$ . Bila  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  cukup dekat dengan  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*)$ , maka  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4, \hat{x}_5)$  bernilai kecil, sehingga  $\|\vec{\eta}\| \leq \|\vec{w}\|$ . Oleh karena itu,  $\vec{\eta}$  dapat diabaikan dan sistem nonlinear (2.2) dapat dihampiri oleh sistem linear

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w}.$$

Hubungan antara sifat kestabilan titik kesetimbangan sistem otonomus nonlinear dan sifat kestabilan titik kesetimbangan sistem yang dilinearakan dinyatakan dalam teorema berikut.

### Teorema 3

1. Titik kesetimbangan sistem otonomus nonlinear bersifat **stabil asimtotik lokal** jika titik kesetimbangan sistem yang dilinearakan stabil asimtotik.
2. Titik kesetimbangan sistem otonomus nonlinear bersifat **tak stabil** jika titik kesetimbangan sistem yang dilinearakan tidak stabil (Robinson, 2004).

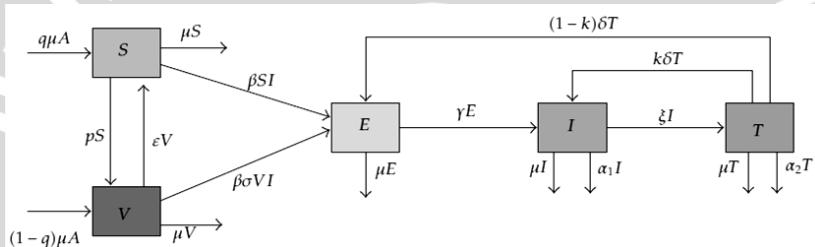


## BAB III

### HASIL DAN PEMBAHASAN

#### 3.1 Model Kompartemen

Populasi dibagi menjadi 5 subpopulasi, yang masing-masing diwakili oleh suatu kompartemen. Kompartemen  $S$  mewakili subpopulasi rentan (*susceptibles*), kompartemen  $V$  mewakili subpopulasi yang telah tervaksin (*vaccinated*), kompartemen  $E$  mewakili subpopulasi *latent*, kompartemen  $I$  mewakili subpopulasi terinfeksi (*infectives*), dan kompartemen  $T$  mewakili subpopulasi *treatment*.



Gambar 3.1 Model kompartemen

dengan

- |         |   |  |
|---------|---|--|
| $S$     | : | subpopulasi rentan ( <i>susceptibles</i> ).                  |
| $V$     | : | subpopulasi tervaksin ( <i>vaccinated</i> ).                 |
| $E$     | : | subpopulasi <i>latent</i> .                                  |
| $I$     | : | subpopulasi terinfeksi ( <i>infectives</i> ).                |
| $T$     | : | subpopulasi <i>treatment</i> .                               |
| $μA$    | : | laju kelahiran alami.  |
| $μ$     | : | laju kematian alami.   |
| $q$     | : | laju kelahiran alami individu tidak tervaksin.               |
| $1 - q$ | : | laju kelahiran alami individu tervaksin.                     |
| $p$     | : | tingkat vaksinasi untuk individu rentan.                     |
| $ε$     | : | koefisien laju kehilangan kekebalan dari individu tervaksin. |
| $β$     | : | koefisien transmisi infeksi dari individu rentan.            |
| $βσ$    | : | koefisien transmisi infeksi dari individu tervaksin.         |
| $γ$     | : | laju perpindahan dari tersembunyi ke terinfeksi.             |
| $ξ$     | : | laju perpindahan dari terinfeksi ke perawatan.               |

- $\delta$  : laju perpindahan dari perawatan.
- $\alpha_1$  : tingkat kematian yang disebabkan penyakit, untuk individu dalam kompartemen  $I$ .
- $\alpha_2$  : tingkat kematian yang disebabkan penyakit, untuk individu dalam kompartemen  $T$ .
- $k$  : individu yang resisten terhadap obat.

### 3.2 Konstruksi Model

Model epidemi dengan perawatan dan vaksinasi tidak lengkap diperoleh dengan menerjemahkan kompartemen pada Gambar 3.1 ke dalam model matematika.  $S, V, E, I, T$  menyatakan subpopulasi sehingga mengakibatkan  $S, V, E, I, T \geq 0$  dan  $S + V + E + I + T > 0$ . Laju perubahan dari subpopulasi *susceptibles*, subpopulasi *vaccinated*, subpopulasi *latent*, subpopulasi *infectives* dan subpopulasi *treatment* diperoleh sebagai berikut.

#### 3.2.1 Laju Perubahan Subpopulasi *Susceptibles*

$\mu A$  menyatakan banyaknya individu yang baru lahir alami. Individu yang baru lahir alami dan belum mengalami vaksinasi akan masuk dalam subpopulasi *susceptibles* sebesar  $q$ . Individu yang telah tervaksin sebesar  $(1-q)$  akan masuk dalam subpopulasi *vaccinated*, sehingga laju perubahan subpopulasi *susceptibles* per satuan waktu adalah

$$\frac{dS}{dt} = q\mu A.$$

Pada subpopulasi *susceptibles*, yang selanjutnya akan ditulis subpopulasi  $S$  mengalami penurunan jumlah individu. Ini diakibatkan karena beberapa individu dalam subpopulasi  $S$  divaksinasi sebesar  $p$  dan kematian sejumlah  $\mu$ , sehingga

$$\frac{dS}{dt} = q\mu A - (\mu + p)S.$$

Subpopulasi  $S$  mengalami penambahan individu, Hal ini dikarenakan individu dalam subpopulasi *vaccinated* mengalami kehilangan imun sebanyak  $\varepsilon$ , maka persamaan yang ada menjadi

$$\frac{dS}{dt} = q\mu A - (\mu + p)S + \varepsilon V.$$

Jika individu dalam subpopulasi  $S$  berinteraksi dengan individu yang berada di dalam subpopulasi *infectives*, maka akan ada individu dalam subpopulasi  $S$  yang terinfeksi, namun dikarenakan jumlah virus yang belum cukup, sehingga individu ini akan dimasukkan ke dalam subpopulasi *latent*. Hal ini berakibat berkurangnya subpopulasi  $S$  sejumlah  $I$  (individu terinfeksi) dikalikan  $\beta S$  (koefisien transmisi infeksi dari individu  $S$ ), sehingga akan merubah persamaan menjadi

$$\frac{dS}{dt} = q\mu A - (\mu + p)S + \varepsilon V - \beta SI.$$

Atau dapat ditulis

$$\frac{dS}{dt} = q\mu A - (\mu + p)S - \beta SI + \varepsilon V. \quad (3.1)$$

### 3.2.2 Laju Perubahan Subpopulasi *Vaccinated*

Seperi yang dijelaskan pada laju perubahan subpopulasi  $S$ , bahwa ada individu yang telah tervaksin sebesar  $(1-q)$  sehingga persamaan awal untuk laju perubahan subpopulasi *vaccinated* (selanjutnya kata *vaccinated* akan ditulis  $V$ ) adalah

$$\frac{dV}{dt} = (1-q)\mu A.$$

Subpopulasi  $V$  akan mendapatkan penambahan jumlah sebesar  $pS$ . Hal ini disebabkan karena ada individu dari  $S$  yang divaksinasi sebesar  $p$ , ini mengubah persamaan menjadi

$$\frac{dV}{dt} = (1-q)\mu A + pS.$$

Subpopulasi ini, mengalami pengurangan karena kematian individu sebesar  $\mu V$  dan juga mengalami pengurangan karena individu-individu yang berada pada  $V$  kehilangan imun sebanyak  $\varepsilon V$ , sehingga persamaan menjadi

$$\frac{dV}{dt} = (1-q)\mu A + pS - \mu V - \varepsilon V.$$

Atau supaya lebih ringkas persamaan dapat dituliskan

$$\frac{dV}{dt} = (1 - q)\mu A + pS - (\mu + \varepsilon)V.$$

Sama halnya seperti subpopulasi  $S$ , individu dalam subpopulasi  $V$  yang terinfeksi namun virusnya belum mampu menularkan akan masuk ke *latent*, sehingga hal ini akan mengurangi jumlah subpopulasi  $V$ . Subpopulasi  $V$  ini akan berkurang sejumlah  $I$  (individu terinfeksi) dikalikan  $\beta\sigma V$  (koefisien transmisi infeksi dari individu tervaksinasi dikalikan  $V$ ), sehingga akan mengubah persamaan menjadi

$$\frac{dV}{dt} = (1 - q)\mu A + pS - (\mu + \varepsilon)V - \beta\sigma VI.$$

Atau dapat dituliskan

$$\frac{dV}{dt} = (1 - q)\mu A + pS - \beta\sigma VI - (\mu + \varepsilon)V. \quad (3.2)$$

### 3.2.3 Laju Pertumbuhan Subpopulasi *Latent*

Perpindahan individu dari  $S$  sebanyak  $\beta SI$  dan  $V$  sebanyak  $\beta\sigma VI$  ke *latent* (berikutnya hanya akan dituliskan  $E$ ) mengakibatkan perubahan jumlah subpopulasi pada  $E$ , sehingga persamaan awal adalah

$$\frac{dE}{dt} = \beta SI + \beta\sigma VI$$

atau dapat dituliskan

$$\frac{dE}{dt} = \beta I(S + \sigma V)$$

Subpopulasi di  $E$  akan mengalami pengurangan individu karena kematian sebanyak  $\mu E$  dan subpopulasi  $E$  juga akan berkurang karena perpindahan individu yang terinfeksi dan sudah mampu untuk menularkan virus sebesar  $\gamma E$  ini mengakibatkan persamaan menjadi

$$\frac{dE}{dt} = \beta I(S + \sigma V) - \mu E - \gamma E$$

atau dapat dituliskan

$$\frac{dE}{dt} = \beta I(S + \sigma V) - (\mu + \gamma)E.$$

Subpopulasi ini akan mengalami penambahan jumlah, karena ada individu yang berada di *treatment* yang berpindah ke *E* sebesar  $(1 - k)\delta T$ . Ini mengakibatkan perubahan persamaan menjadi

$$\frac{dE}{dt} = \beta I(S + \sigma V) - (\mu + \gamma)E + (1 - k)\delta T \quad (3.3).$$

### 3.2.4 Laju Pertumbuhan Subpopulasi *Infectives*

Masuknya individu dari subpopulasi *E* ke subpopulasi *infectives* (berikutnya hanya akan dituliskan *I*) sebesar  $\gamma E$  mengakibatkan penambahan pada subpopulasi *I*, sehingga persamaan awal adalah

$$\frac{dI}{dt} = \gamma E.$$

Jumlah subpopulasi *I* mengalami penurunan yang disebabkan kematian alami sebesar  $\mu I$ , kematian yang tidak alami sebesar  $\alpha_1 I$  dan perpindahan ke *treatment* sebesar  $\xi I$ , sehingga mengakibatkan persamaan berubah menjadi

$$\frac{dI}{dt} = \gamma E - \mu I - \alpha_1 I - \xi I = \gamma E - (\mu + \alpha_1 + \xi)I$$

Karena ada individu yang berada di *Treatment* yang berpindah ke *I* sebesar  $k\delta T$ , sehingga mengakibatkan subpopulasi ini mengalami penambahan jumlah. Ini mengakibatkan perubahan persamaan *I* menjadi

$$\frac{dI}{dt} = \gamma E - (\mu + \alpha_1 + \xi)I + k\delta T. \quad (3.4)$$

### 3.2.5 Laju Perubahan Populasi *Treatment*

Subpopulasi *treatment* (selanjutnya akan ditulis *T*) pada awalnya hanya mendapatkan nilai dari *I* sebesar  $\xi I$  sehingga persamaan awalnya adalah

$$\frac{dT}{dt} = \xi I.$$

Kemudian populasi ini akan mengalami pengurangan jumlah karena kematian alami sebesar  $\mu T$ , kematian yang tidak alami

sebesar  $\alpha_2 T$ , perpindahan ke  $E$  sebesar  $(1 - k)\delta T$ , perpindah ke  $I$  sebesar  $k\delta T$ , sehingga menyebabkan persamaan menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= \xi I - \mu T - \alpha_2 T - (1 - k)\delta T - k\delta T \\ \frac{dT}{dt} &= \xi I - (\mu + \alpha_2 + \delta)T.\end{aligned}\quad (3.5)$$

Dengan demikian dari persamaan (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), dan (3.5) diperoleh persamaan untuk mengetahui laju perubahan populasi  $S$ ,  $V$ ,  $E$ ,  $I$ , dan  $T$  adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= q\mu A - (\mu + p)S - \beta SI + \varepsilon V \\ \frac{dV}{dt} &= (1 - q)\mu A + pS - \beta\sigma VI - (\mu + \varepsilon)V \\ \frac{dE}{dt} &= \beta I(S + \sigma V) - (\mu + \gamma)E + (1 - k)\delta T \\ \frac{dI}{dt} &= \gamma E - (\mu + \alpha_1 + \xi)I + k\delta T \\ \frac{dT}{dt} &= \xi I - (\mu + \alpha_2 + \delta)T\end{aligned}\quad (3.6)$$

dimana  $S(t), V(t), E(t), I(t), T(t) \geq 0$  dan  $S(t) + V(t) + E(t) + I(t) + T(t) > 0$ .

### 3.3 Titik Kesetimbangan Model

Titik kesetimbangan sistem diperoleh ketika nilai  $\frac{dS}{dt}, \frac{dV}{dt}, \frac{dE}{dt}, \frac{dI}{dt}, \frac{dT}{dt}$  sama dengan nol, atau dapat dituliskan

$$0 = q\mu A - (\mu + p)S - \beta SI + \varepsilon V \quad (3.7)$$

$$0 = (1 - q)\mu A + pS - \beta\sigma VI - (\mu + \varepsilon)V \quad (3.8)$$

$$0 = \beta I(S + \sigma V) - (\mu + \gamma)E + (1 - k)\delta T \quad (3.9)$$

$$0 = \gamma E - (\mu + \alpha_1 + \xi)I + k\delta T \quad (3.10)$$

$$0 = \xi I - (\mu + \alpha_2 + \delta)T. \quad (3.11)$$

Berdasarkan perhitungan di Lampiran 1 diperoleh

$$S = \frac{((1-q)\varepsilon + (\beta\sigma I + \mu + \varepsilon)q)\mu A}{(\mu + p + \beta I)(\beta\sigma I + \mu + \varepsilon) - p\varepsilon}. \quad (3.12)$$

$$V = \frac{\mu A((1-q)(\mu + p + \beta I) + pq)}{(p + \mu + \beta I)(\mu + \varepsilon + \beta\sigma I) - p\varepsilon}. \quad (3.13)$$

$$E = \left[ \frac{(\mu + \alpha_1 + \xi)(\mu + \alpha_2 + \delta) - k\delta\xi}{\gamma(\mu + \alpha_2 + \delta)} \right] I. \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} H(I) \\ = & \frac{\beta\sigma I + (\varepsilon + q\mu) + \sigma[p + (1-q)\mu]}{(p + \mu + \beta I)(\mu + \varepsilon + \beta\sigma I) - p\varepsilon} \\ - & \frac{(\mu + \gamma)[(\mu + \alpha_1 + \xi)(\mu + \alpha_2 + \delta) - k\delta\xi] - (1-k)\delta\xi\gamma}{\beta\gamma(\mu + \alpha_2 + \delta)\mu A} \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$T = \frac{\xi}{(\mu + \alpha_2 + \delta)} I \quad (3.16)$$

### 3.3.1 Titik Kesetimbangan Nonendemi ( $P_0$ )

Jika  $I = 0$ , yaitu situasi ketika tidak terjadi endemi dalam populasi tersebut, maka titik kesetimbangan nonendemi dapat dicari dengan mensubstitusikan nilai  $I = 0$ , ke persamaan (3.12), (3.13), (3.14), dan (3.16).

Perhitungan dilakukan di Lampiran 2, hasil dari perhitungan tersebut menghasilkan titik kesetimbangan nonendemi yaitu  $P_0(S_0, V_0, 0, 0, 0)$ , dengan

$$S_0 = \frac{A(\varepsilon + q\mu)}{p + \mu + \varepsilon}, V_0 = \frac{A[p + (1-q)\mu]}{p + \mu + \varepsilon}$$

### 3.3.2 Titik Kesetimbangan Endemi ( $P^*$ )

Berikutnya adalah titik kesetimbangan endemi, artinya sudah terjadi endemi dalam populasi, ini mengakibatkan nilai dalam kompartemen  $I \neq 0$ . Untuk mendapatkan nilai titik kesetimbangan endemi, maka substitusikan  $I^*$  kedalam (3.12), (3.13), (3.14), (3.15), dan (3.16).

Berdasarkan perhitungan di Lampiran 3 diperoleh titik kesetimbangan endemi adalah  $P^*(S^*, V^*, E^*, I^*, T^*)$ , dengan

$$S^* = \frac{((1-q)\varepsilon + (\beta\sigma I^* + \mu + \varepsilon)q)\mu A}{(\mu + p + \beta I^*)(\beta\sigma I^* + \mu + \varepsilon) - p\varepsilon},$$

$$V^* = \frac{\mu A((1-q)(\mu + p + \beta I^*) + pq)}{(p + \mu + \beta I^*)(\mu + \varepsilon + \beta\sigma I^*) - p\varepsilon},$$

$$E^* = \left[ \frac{(\mu + a_1 + \xi)(\mu + a_2 + \delta) - k\delta\xi}{\gamma(\mu + a_2 + \delta)} \right] I^*,$$

$$T^* = \frac{\xi}{(\mu + a_2 + \delta)} I^*.$$

$I^*$  adalah akar positif persamaan  $H(I) = 0$ , dengan  $H(I) = \frac{\beta\sigma I + (\varepsilon + q\mu) + \sigma[p + (1-q)\mu]}{(\mu + \gamma)[(\mu + a_1 + \xi)(\mu + a_2 + \delta) - k\delta\xi] - (1-k)\delta\xi\gamma} - \frac{(\mu + \gamma)[(\mu + a_1 + \xi)(\mu + a_2 + \delta) - k\delta\xi] - (1-k)\delta\xi\gamma}{\beta\gamma(\mu + a_2 + \delta)\mu A}$ .

Dapat diperiksa bahwa  $H'(I) < 0$  sehingga  $H(I)$  adalah fungsi yang monoton turun untuk  $0 < I < A$ . Agar terdapat  $I^* \in (0, A]$  sedemikian sehingga  $H(I^*) = 0$  haruslah  $H(0) > 0$ , dengan  $H(0) = \frac{(\mu + \gamma)[(\mu + a_1 + \xi)(\mu + a_2 + \delta) - k\delta\xi] - (1-k)k\delta\xi}{\beta\gamma(\mu + a_2 + \delta)\mu A} (R_0 - 1)$ . Karena

$\frac{(\mu + \gamma)[(\mu + a_1 + \xi)(\mu + a_2 + \delta) - k\delta\xi] - (1-k)k\delta\xi}{\beta\gamma(\mu + a_2 + \delta)\mu A} > 0$ , maka  $H(0) > 0$  jika

$R_0 > 1$ , dengan  $R_0 = \frac{\beta\gamma(\mu + a_2 + \delta)(S_0 + \sigma V_0)}{(\mu + \gamma)[(\mu + a_1 + \xi)(\mu + a_2 + \delta) - k\delta\xi] - (1-k)\delta\xi\gamma}$ . Jadi titik  $P_0$  selalu eksis, sedangkan titik  $P^*$  hanya eksis jika  $R_0 > 1$ .

### 3.4 Kestabilan Titik Kesetimbangan

Melalui sistem otonomus nonlinear yang dijelaskan pada subbab 2.2 diperoleh matriks Jacobi untuk sistem (3.6), yaitu

$$\begin{bmatrix} -(\mu + p) - \beta I & \varepsilon & 0 & -\beta S & 0 \\ p & -\beta \sigma I - (\mu + \varepsilon) & 0 & -\beta \sigma V & 0 \\ \beta I & \beta \sigma I & -(\mu + \gamma) & \beta(S + \sigma V) & (1-k)\delta \\ 0 & 0 & \gamma & -(\mu + \alpha_1 + \xi) & k\delta \\ 0 & 0 & 0 & \xi & -(\mu + \alpha_2 + \delta) \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Untuk mencari nilai eigennya yaitu  $|J - \lambda I| = 0$ , sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} -(\mu + p) - \beta I - \lambda & \varepsilon & 0 & -\beta S & 0 \\ p & -\beta \sigma I - (\mu + \varepsilon) - \lambda & 0 & -\beta \sigma V & 0 \\ \beta I & \beta \sigma I & -(\mu + \gamma) - \lambda & \beta(S + \sigma V) & (1-k)\delta \\ 0 & 0 & \gamma & -(\mu + \alpha_1 + \xi) - \lambda & k\delta \\ 0 & 0 & 0 & \xi & -(\mu + \alpha_2 + \delta) - \lambda \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Selanjutnya akan dijelaskan kestabilan disetiap titik kesetimbangan dengan mensubstitusikan setiap kasus pada titik kesetimbangan pada  $|J - \lambda I| = 0$ .

### 3.4.1 Kestabilan Titik Kesetimbangan $P_0$

Untuk titik kesetimbangan  $P_0$ , diperoleh persamaan karakteristik

$$\begin{vmatrix} -(\mu + p) - \lambda & \varepsilon & 0 & -\beta S_0 & 0 \\ p & -(\mu + \varepsilon) - \lambda & 0 & -\beta \sigma V_0 & 0 \\ 0 & 0 & -A_a - \lambda & \beta(S_0 + \sigma V_0) & (1-k)\delta \\ 0 & 0 & \gamma & -B - \lambda & k\delta \\ 0 & 0 & 0 & \xi & -C - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3.19)$$

dengan

$$A_a = (\mu + \gamma),$$

$$B = (\mu + \alpha_1 + \xi),$$

$$C = (\mu + \alpha_2 + \delta).$$

Menggunakan metode ekspansi kofaktor, bentuk (3.19) dapat disederhanakan menjadi

$$(\lambda^2 + (2\mu + p + \varepsilon)\lambda + \mu^2 + \mu\varepsilon + p\mu)(\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda^1 + a_3) = 0 \quad (3.20)$$

dengan

$$a_1 = A_a + B + C,$$

$$a_2 = A_a C + A_a B + BC - k\delta\xi - \gamma\beta(S_0 + \sigma V_0),$$

$$a_3 = A_a BC - A_a k\delta\xi - (S_0 + \sigma V_0)\gamma\beta C - (1-k)\delta\gamma\xi.$$

Berdasarkan persamaan (3.20), diperoleh

$$(\lambda^2 + (2\mu + p + \varepsilon)\lambda + \mu^2 + \mu\varepsilon + p\mu) = 0 \text{ atau}$$

$$(\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda^1 + a_3) = 0.$$

Berdasarkan uraian di Lampiran 4,  $\lambda$  dari persamaan  $(\lambda^2 - (2\mu + p + \varepsilon)\lambda + \mu^2 + \mu\varepsilon + p\mu) = 0$  adalah  $\lambda_1 = -\mu$  dan  $\lambda_2 = -(\mu + p + \varepsilon)$ . Syarat kestabilan akan terpenuhi jika nilai dari semua  $\lambda$  adalah negatif, sehingga untuk mengetahui nilai  $\lambda$  selanjutnya menggunakan Routh-Hurwitz, yaitu:

$$D_1 = a_1 > 0$$

$$D_1 = A_a + B + C > 0$$

$$D_1 = 3\mu + \gamma + a_1 + \xi + a_2 + \delta > 0$$

Sehingga jelas nilai dari  $a_1 > 0$ . Kemudian untuk kondisi Routh-Hurwitz kedua yaitu

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0$$

$$D_2 = a_1 a_2 - a_3 > 0$$

$$(A_a + B + C)(A_a C + A_a B + BC - k\delta\xi - \gamma\beta(S_0 + \sigma V_0) - (A_a BC - A_a k\delta\xi - (S_0 + \sigma V_0)\gamma\beta C - (1 - k)\delta\gamma\xi)) > 0.$$

Karena rumitnya ekspresi persamaan di atas maka hanya dapat disimpulkan bahwa  $P_0$  stabil jika persamaan  $a_1 a_2 - a_3 > 0$  terpenuhi.

### 3.4.2 Kestabilan Titik Kesetimbangan $P^*$

Untuk titik kesetimbangan  $P^*$ , diperoleh persamaan karakteristik

$$\begin{vmatrix} -D - \lambda & \varepsilon & 0 & -\beta S & 0 \\ p & -F - \lambda & 0 & -\beta\sigma V & 0 \\ \beta I & \beta\sigma I & -A_a - \lambda & \beta(S + \sigma V) & (1 - k)\delta \\ 0 & 0 & \gamma & -B - \lambda & k\delta \\ 0 & 0 & 0 & \xi & -C - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Dengan

$$D = \mu + p + \beta I,$$

$$F = \mu + \varepsilon + \beta\sigma I.$$

Dengan menggunakan aturan ekspansi kofaktor, bentuk persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi

$$\lambda^5 + b_1\lambda^4 + b_2\lambda^3 + b_3\lambda^2 + b_4\lambda + b_5 = 0,$$

dengan

$$b_1 = D + F + A_a + B + C,$$

$$b_2 = (CB + A_aB + AC - k\xi\delta - \gamma\beta(S + \sigma V) + (D + F)(C + B + A_a) + (DF - p\varepsilon),$$

$$b_3 = A_aBC - \gamma\beta(S + \sigma V)C - (1 - k)\delta\xi\gamma - A_ak\xi\delta + (D + F)(CB + A_aB + A_aC - k\xi\delta - \gamma\beta(S + \sigma V)) + (DF - p\varepsilon)(C + B + A_a) + \gamma\beta S\beta I + \gamma\beta\sigma V\beta\sigma I,$$

$$b_4 = [(D + F)(A_aBC - \gamma\beta(S + \sigma V)C - (1 - k)\delta\xi\gamma - A_ak\xi\delta + (DF - p\varepsilon)(CB + A_aB + A_aC - k\xi\delta - \gamma\beta(S + \sigma V)) + \gamma\beta SC\beta I + (p\beta\sigma I + \beta IF)\gamma\beta S + C\gamma\beta\sigma V\beta\sigma I + \gamma\beta\sigma V(D\beta\sigma I + \beta I\varepsilon))],$$

$$b_5 = (DF - p\varepsilon)(A_aBC - \gamma\beta(S + \sigma V)C - (1 - k)\delta\xi\gamma - A_ak\xi\delta) + \gamma\beta SC(p\beta\sigma I + \beta IF) + C\gamma\beta\sigma V(D\beta\sigma I + \beta I\varepsilon).$$

Titik kesetimbangan  $P^*$  stabil jika memenuhi kondisi Routh-Hurwitz, yaitu

$$D_1 = b_1 > 0,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ 1 & b_2 \end{vmatrix} > 0,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_5 \\ 1 & b_2 & b_4 \\ 0 & b_1 & b_3 \end{vmatrix} > 0.$$

Sehingga diperoleh nilai dari  $D_1 = b_1$  adalah

$$D + F + A_a + B + C > 0$$

$$5\mu + p + \beta I + \varepsilon + \beta\sigma I + \gamma + \mu + a_1 + \xi + a_2 + \delta > 0.$$

Nilai dari semua parameter adalah positif sehingga jelas nilai dari  $b_1 > 0$ . Kemudian untuk kondisi Routh-Hurwitz kedua dan ketiga yaitu  $b_1b_2 - b_3 > 0$ , dan  $(b_1b_2b_3 + b_1b_5) - (b_1b_1b_4 + b_3b_3) > 0$  perhitungan dilakukan di Lampiran 5.

Tabel 3.1 Syarat eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan

Titik tetap	Syarat Eksistensi	Syarat Kestabilan
$P_0$	-	$a_1 a_2 - a_3 > 0$
$P^*$	$R_0 > 1$	$R_0 > 1$ $b_1 b_2 - b_3 > 0$ $(b_1 b_2 b_3 + b_1 b_5) - (b_1 b_1 b_4 + b_3 b_3) > 0$

### 3.5 Simulasi Numerik

Simulasi numerik dilakukan untuk 3 kasus, yaitu  $R_0 < 1$ ,  $R_0 = 1$ , dan  $R_0 > 1$ . Parameter-parameter yang digunakan pada ketiga kasus tersebut berturut-turut diberikan pada Tabel 3.2, Tabel 3.3, dan Tabel 3.4. *Listing program* dapat dilihat pada Lampiran 6.

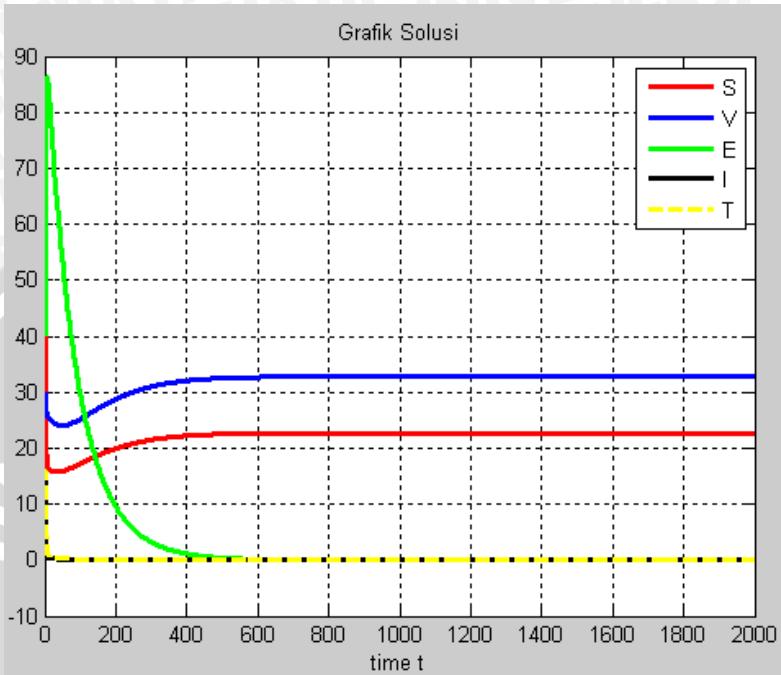
#### 3.5.1 Simulasi untuk Model dengan $R_0 < 1$

Pada simulasi ini agar diperoleh nilai  $R_0 = 0.3479 < 1$  dan terpenuhinya  $a_1 a_2 - a_3 = 0.9709 > 0$ , maka digunakan nilai parameter sesuai dengan Tabel 3.2.

Tabel 3.2 Nilai parameter untuk simulasi pertama

Parameter	Nilai	Parameter	Nilai	Parameter	Nilai
$A$	55.496	$\sigma$	0.2	$\delta$	0.5
$\mu$	0.0143	$p$	0.05	$\alpha_1$	0.3
$q$	0.6	$\varepsilon$	0.03	$\alpha_2$	0.05
$\beta$	0.05	$\gamma$	0.00368	$\xi = 0.9$	, $k = 0.3$

Dengan menggunakan parameter-parameter tersebut diperoleh kurva solusi yang dapat dilihat pada Gambar 3.2.



**Gambar 3.2** Hasil simulasi numerik untuk  $R_0 = 0.3479 < 1$ .

Pada Gambar 3.2, nilai  $S_0$  adalah 22.7045 dan nilai  $V_0$  adalah 32.7915. Pada Gambar 3a dapat diketahui bahwa kurva solusi  $S(t)$ ,  $V(t)$ ,  $E(t)$ ,  $I(t)$ , dan  $T(t)$  dengan nilai awal (50,30,40,15,15) akan menuju ke titik kesetimbangan  $P_0(22.7045, 32.7915, 0, 0, 0)$ . Dengan kata lain, titik  $P_0(22.7045, 32.7915, 0, 0, 0)$  stabil. Hal ini ditunjukkan dengan kurva subpopulasi  $E$ ,  $I$ , dan  $T$  yang menuju nol atau habis, sedangkan subpopulasi  $S$  dan subpopulasi  $V$  jumlahnya menuju ke 22.7045 dan ke 32.7915. Pada kondisi nyata dapat dikatakan bahwa tidak terdapat penyebaran penyakit pada populasi tersebut.

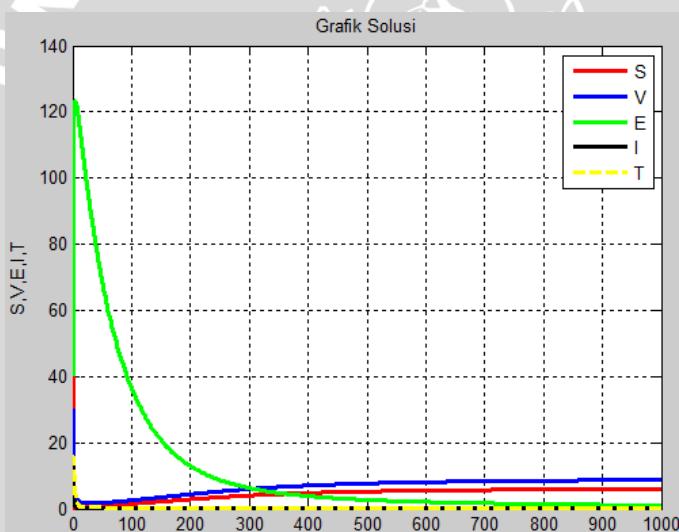
### 3.5.2 Simulasi untuk Model dengan $R_0 = 1$

Untuk mendapatkan nilai  $R_0 = 1$  dan  $a_1a_2 - a_3 = 1.0182 > 0$  diambil parameter sesuai dengan Tabel 3.3.

Tabel 3.3 Nilai parameter untuk simulasi ke dua

Parameter	Nilai	Parameter	Nilai	Parameter	Nilai
$A$	15,952446	$\sigma$	0.2	$\delta$	0.5
$\mu$	0.0143	$p$	0.05	$\alpha_1$	0.3
$q$	0.6	$\varepsilon$	0.03	$\alpha_2$	0.05
$\beta$	0.05	$\gamma$	0.00368	$\xi = 0.9, k = 0.3$	

Parameter di atas menghasilkan nilai  $S_0 = 6.52646$  dan nilai dari  $V_0 = 9.42598$  nilai awal yang dipilih yaitu  $S(0) = 50, V(0) = 30, E(0) = 40, I(0) = 15$ , dan  $T(0) = 15$  diperoleh hasil simulasinya sebagai berikut.



Gambar 3.3 Hasil simulasi numerik untuk  $R_0 = 1$ .

Pada Gambar 3.3 yaitu  $R_0 = 1$ , nilai  $H(0) = 0$ . Karena  $H(I)$  monoton turun, maka tidak terdapat  $I^*$  yang memenuhi  $H(I^*) = 0$ . Jadi pada kasus ini hanya terdapat titik kesetimbangan  $P_0(22.7045, 32.7915, 0, 0, 0)$ .

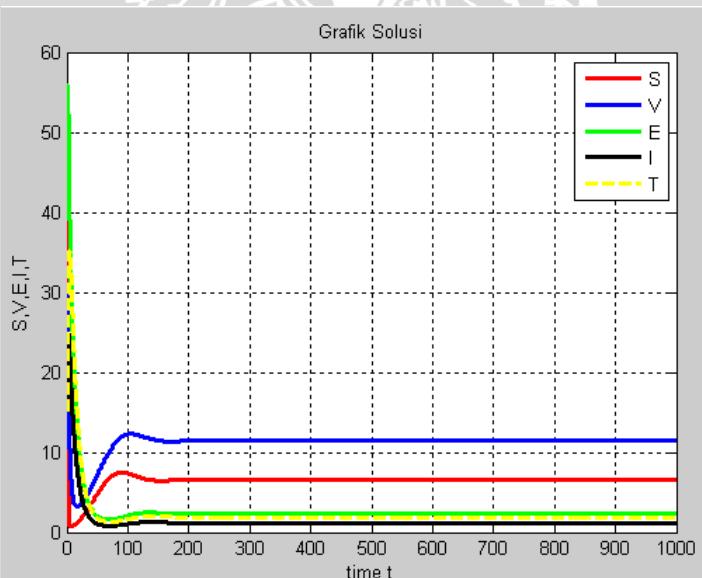
### 3.5.3 Simulasi untuk Model dengan $R_0 > 1$

Untuk mendapatkan nilai  $R_0 > 1$ ,  $b_1 b_2 - b_3 = 3.977724 > 0$ , dan  $(b_1 b_2 b_3 + b_1 b_5) - (b_1 b_1 b_4 + b_3 b_3) = 0.45772 > 0$  maka diambil parameter sesuai dengan Tabel 3.4.

Tabel 3.4 Nilai parameter untuk simulasi ke tiga

Parameter	Nilai	Parameter	Nilai	Parameter	Nilai
$A$	55.496	$\sigma$	0.2	$\delta$	0.5
$\mu$	0.0143	$p$	0.05	$\alpha_1$	0.3
$q$	0.6	$\varepsilon$	0.03	$\alpha_2$	0.05
$\beta$	0.05	$\gamma$	0.5	$\xi = 0.9, k = 0.3$	

Dengan menggunakan parameter-parameter tersebut diperoleh kurva solusi yang dapat dilihat pada Gambar 3.4.



Gambar 3.4 Hasil simulasi numerik untuk  $R_0 = 3.2899 > 1$ .

Kestabilan titik kesetimbangan  $P^*$  dapat dilihat pada Gambar 3.4. Kurva solusi  $S(t)$ ,  $V(t)$ ,  $E(t)$ ,  $I(t)$ , dan  $T(t)$  dengan nilai awal  $(50,30,40,15,15)$  menuju ke titik kesetimbangan  $P^*(6.59658, 11.49098, 2.34566, 1.20282, 1.91837)$ . Dengan kata lain, titik  $P^*(6.59658, 11.49098, 2.34566, 1.20282, 1.91837)$  stabil. Pada kondisi nyata dapat dikatakan bahwa terdapat penyebaran penyakit pada populasi tersebut. Hal ini dapat dilihat dari subpopulasi  $E$ ,  $I$ , dan  $T$  yang menuju titik  $2.34566$ ,  $1.20282$ , dan  $1.91837$



## BAB IV PENUTUP

### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dalam skripsi ini dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut.

1. Model epidemi dengan vaksinasi dan pengobatan tidak lengkap berupa sistem otonomus nonlinear dengan 5 variabel dan 13 parameter.
2. Pada model tersebut terdapat dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan nonendemi dan titik kesetimbangan endemi.
3. Titik kesetimbangan endemi bersifat stabil jika  $R_0 > 1$ ,  $b_1 b_2 - b_3 > 0$ , dan  $(b_1 b_2 b_3 + b_1 b_5) - (b_1 b_1 b_4 + b_3 b_3) > 0$ . Sedangkan titik kesetimbangan nonendemi stabil jika  $a_1 a_2 - a_3 > 0$ .
4. Simulasi numerik yang dilakukan menunjukkan hasil yang sesuai dengan hasil analisis.

### 4.2 Saran

Skripsi ini dapat dilanjutkan dengan melakukan analisis kestabilan global.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## DAFTAR PUSTAKA

- Boyce, W.E. dan R.C. DiPrima. 2000. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Seventh Edition. John Wiley & Sons. New York.
- Huo, H. dan L. Feng. 2011. *Global Stability of an Epidemic Model with Incomplete Treatment and Vaccination*. Hindawi Publishing Corporation. China. 2012:1-14.
- Li, M.Y., H.L. Smith, dan L. Wang. 2001. *Global Dynamic of an SEIR Epidemic Model With Vertical Transmission*. Society for Industrial and Applied Mathematics. 62(1):58–69.
- Murray, J.D. 2002. *Mathematical Biology I: An Introduction Third Edition*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Nagle, R.K. dan E.B. Saff. 1993. *Fundamentals of Differential Equation and Boundary Value Problems*. New York : Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- Robinson, R.C. 2004. *An Introduction to Dynamical Systems: Continous and Discrete*. Prentice Hall Education. USA.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## LAMPIRAN

### Lampiran 1 Perhitungan titik kesetimbangan model

$$0 = q\mu A - (\mu + p)S - \beta SI + \varepsilon V \quad L1. 1$$

$$0 = (1 - q)\mu A + pS - \beta \sigma VI - (\mu + \varepsilon)V \quad L1. 2$$

$$0 = \beta I(S + \sigma V) - (\mu + \gamma)E + (1 - k)\delta T \quad L1. 3$$

$$0 = \gamma E - (\mu + \alpha_1 + \xi)I + k\delta T \quad L1. 4$$

$$0 = \xi I - (\mu + \alpha_2 + \delta)T. \quad L1. 5$$

Dari persamaan *L1. 1* diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= q\mu A - (\mu + p)S - \beta SI + \varepsilon V \\ \varepsilon V &= -q\mu A + (\mu + p)S + \beta SI \\ V &= \frac{-q\mu A + (\mu + p)S + \beta SI}{\varepsilon} \end{aligned} \quad L1. 6$$

sedangkan persamaan *L1. 2* diubah menjadi

$$\begin{aligned} 0 &= (1 - q)\mu A + pS - \beta \sigma VI - (\mu + \varepsilon)V \\ (1 - q)\mu A + pS &= \beta \sigma VI + (\mu + \varepsilon)V \\ (1 - q)\mu A + pS &= (\beta \sigma I + (\mu + \varepsilon))V \\ \frac{(1 - q)\mu A + pS}{(\beta \sigma I + \mu + \varepsilon)} &= V \\ V &= \frac{(1 - q)\mu A + pS}{(\beta \sigma I + \mu + \varepsilon)} \end{aligned} \quad L1. 7$$

kemudian substitusikan persamaan *L1. 6*, ke persamaan *L1. 7*

$$\begin{aligned} V &= \frac{(1 - q)\mu A + pS}{(\beta \sigma I + \mu + \varepsilon)} \\ \frac{-q\mu A + (\mu + p)S + \beta SI}{\varepsilon} &= \frac{(1 - q)\mu A + pS}{(\beta \sigma I + \mu + \varepsilon)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{-q\mu A + ((\mu + p) + \beta I)S}{\varepsilon} &= \frac{(1-q)\mu A + pS}{(\beta\sigma I + \mu + \varepsilon)} \\
 \frac{-q\mu A}{\varepsilon} + \frac{(\mu + p + \beta I)S}{\varepsilon} &= \frac{(1-q)\mu A}{(\beta\sigma I + \mu + \varepsilon)} + \frac{pS}{(\beta\sigma I + \mu + \varepsilon)} \\
 \frac{(\mu + p + \beta I)S}{\varepsilon} - \frac{pS}{(\beta\sigma I + \mu + \varepsilon)} &= \frac{(1-q)\mu A}{(\beta\sigma I + \mu + \varepsilon)} + \frac{q\mu A}{\varepsilon} \\
 \left[ \frac{(\mu + p + \beta I)}{\varepsilon} - \frac{p}{(\beta\sigma I + \mu + \varepsilon)} \right] S &= \left[ \frac{(1-q)}{(\beta\sigma I + \mu + \varepsilon)} + \frac{q}{\varepsilon} \right] \mu A \\
 \left[ \frac{(\mu + p + \beta I)(\beta\sigma I + \mu + \varepsilon) - p\varepsilon}{(\beta\sigma I + \mu + \varepsilon)\varepsilon} \right] S &= \left[ \frac{(1-q)\varepsilon + (\beta\sigma I + \mu + \varepsilon)q}{(\beta\sigma I + \mu + \varepsilon)\varepsilon} \right] \mu A \\
 S &= \frac{\left[ \frac{(1-q)\varepsilon + (\beta\sigma I + \mu + \varepsilon)q}{(\beta\sigma I + \mu + \varepsilon)\varepsilon} \right] \mu A}{\left[ \frac{(\mu + p + \beta I)(\beta\sigma I + \mu + \varepsilon) - p\varepsilon}{(\beta\sigma I + \mu + \varepsilon)\varepsilon} \right]} \\
 S &= \frac{((1-q)\varepsilon + (\beta\sigma I + \mu + \varepsilon)q)\mu A}{(\mu + p + \beta I)(\beta\sigma I + \mu + \varepsilon) - p\varepsilon}.
 \end{aligned}$$

L1. 8

Berdasarkan persamaan L1. 1 diperoleh

$$q\mu A + \varepsilon V = (\mu + p)S + \beta SI$$

$$q\mu A + \varepsilon V = ((\mu + p) + \beta I)S$$

$$q\mu A + \varepsilon V = (\mu + p + \beta I)S$$

$$\frac{q\mu A + \varepsilon V}{(\mu + p + \beta I)} = S$$

$$S = \frac{q\mu A + \varepsilon V}{(\mu + p + \beta I)}$$

L1. 9

dan berdasarkan persamaan L1. 2 diperoleh

$$pS = -(1-q)\mu A + \beta\sigma VI + (\mu + \varepsilon)V$$

$$S = \frac{-(1-q)\mu A + \beta\sigma VI + (\mu + \varepsilon)V}{p}$$

L1. 10

kemudian substitusikan persamaan L1. 9 ke persamaan L1. 10,

sehingga

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{-(1-q)\mu A + \beta\sigma VI + (\mu + \varepsilon)V}{p} \\
 \frac{q\mu A + \varepsilon V}{(\mu + p + \beta I)} &= \frac{-(1-q)\mu A + \beta\sigma VI + (\mu + \varepsilon)V}{p} \\
 \frac{q\mu A}{(\mu + p + \beta I)} + \frac{\varepsilon V}{(\mu + p + \beta I)} &= \frac{-(1-q)\mu A}{p} + \frac{\beta\sigma VI + (\mu + \varepsilon)V}{p} \\
 \frac{q\mu A}{(\mu + p + \beta I)} + \frac{(1-q)\mu A}{p} &= \frac{\beta\sigma VI + (\mu + \varepsilon)V}{p} - \frac{\varepsilon V}{(\mu + p + \beta I)} \\
 \left( \frac{q}{(\mu+p+\beta I)} + \frac{(1-q)}{p} \right) \mu A &= \left( \frac{\beta\sigma I + (\mu+\varepsilon)}{p} - \frac{\varepsilon}{(\mu+p+\beta I)} \right) V \\
 \left( \frac{q}{(\mu+p+\beta I)} + \frac{(1-q)}{p} \right) \mu A &= \left( \frac{\beta\sigma I + (\mu+\varepsilon)}{p} - \frac{\varepsilon}{(\mu+p+\beta I)} \right) V \\
 \left( \frac{qp+(1-q)(\mu+p+\beta I)}{(\mu+p+\beta I)p} \right) \mu A &= \left( \frac{(\beta\sigma I + \mu + \varepsilon)(\mu + p + \beta I) - \varepsilon p}{p(\mu + p + \beta I)} \right) V \\
 V &= \frac{\left( \frac{qp+(1-q)(\mu+p+\beta I)}{(\mu+p+\beta I)p} \right) \mu A}{\left( \frac{(\beta\sigma I + \mu + \varepsilon)(\mu + p + \beta I) - \varepsilon p}{p(\mu + p + \beta I)} \right)} \\
 V &= \frac{\mu A((1-q)(\mu + p + \beta I) + pq)}{(p + \mu + \beta I)(\mu + \varepsilon + \beta\sigma I) - p\varepsilon} \tag{L1. 11}
 \end{aligned}$$

Persamaan L1. 5 dapat diubah menjadi

$$T = \frac{\xi}{(\mu + \alpha_2 + \delta)} I \tag{L1. 12}$$

substuisikan persamaan L1. 12 ke persamaan L1. 4

$$\begin{aligned}
 \gamma E &= (\mu + \alpha_1 + \xi)I - k\delta T \\
 \gamma E &= (\mu + \alpha_1 + \xi)I - k\delta \left( \frac{\xi}{(\mu + \alpha_2 + \delta)} I \right) \\
 \gamma E &= \left[ \frac{(\mu + \alpha_1 + \xi)(\mu + \alpha_2 + \delta) - k\delta\xi}{(\mu + \alpha_2 + \delta)} \right] I \\
 E &= \left[ \frac{(\mu + \alpha_1 + \xi)(\mu + \alpha_2 + \delta) - k\delta\xi}{\gamma(\mu + \alpha_2 + \delta)} \right] I \tag{L1. 13}
 \end{aligned}$$

Substitusikan persamaan L1. 12 dan L1. 13 ke persamaan L1. 3 sehingga

$$0 = \beta I(S + \sigma V) - (\mu + \gamma)E + (1 - k)\delta T$$

$$\beta I(S + \sigma V) = (\mu + \gamma)E - (1 - k)\delta T$$

$$(S + \sigma V) = \left( \frac{1}{\beta I} \right) \left( (\mu + \gamma) \left[ \frac{(\mu + \alpha_1 + \xi)(\mu + \alpha_2 + \delta) - k\delta\xi}{\gamma(\mu + \alpha_2 + \delta)} \right] I - (1 - k)\delta \frac{\xi}{(\mu + \alpha_2 + \delta)} I \right)$$

$$(S + \sigma V) = \left( \frac{1}{\beta} \right) \left( \frac{(\mu + \gamma)[(\mu + \alpha_1 + \xi)(\mu + \alpha_2 + \delta) - k\delta\xi]}{\gamma(\mu + \alpha_2 + \delta)} - \frac{(1 - k)\delta\xi}{(\mu + \alpha_2 + \delta)} \right)$$

$$S + \sigma V = \frac{1}{\beta} \frac{(\mu + \gamma)[(\mu + \alpha_1 + \xi)(\mu + \alpha_2 + \delta) - k\delta\xi] - (1 - k)\delta\xi\gamma}{(\mu + \alpha_2 + \delta)\gamma}$$

L1. 14

Substitusikan persamaan L1. 8 dan L1. 11 ke persamaan L1. 14 sehingga

$$\begin{aligned} & \frac{((1 - q)\varepsilon + (\beta\sigma I + \mu + \varepsilon)q)\mu A}{(\mu + p + \beta I)(\beta\sigma I + \mu + \varepsilon) - p\varepsilon} \\ & + \sigma \frac{\mu A((1 - q)(\mu + p + \beta I) + pq)}{(p + \mu + \beta I)(\mu + \varepsilon + \beta\sigma I) - p\varepsilon} \\ & = \frac{1}{\beta} \frac{(\mu + \gamma)[(\mu + \alpha_1 + \xi)(\mu + \alpha_2 + \delta) - k\delta\xi] - (1 - k)\delta\xi\gamma}{(\mu + \alpha_2 + \delta)\gamma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{((1 - q)\varepsilon + (\beta\sigma I + \mu + \varepsilon)q)}{(\mu + p + \beta I)(\beta\sigma I + \mu + \varepsilon) - p\varepsilon} \\ & + \frac{\sigma((1 - q)(\mu + p + \beta I) + pq)}{(p + \mu + \beta I)(\mu + \varepsilon + \beta\sigma I) - p\varepsilon} \\ & = \frac{(\mu + \gamma)[(\mu + \alpha_1 + \xi)(\mu + \alpha_2 + \delta) - k\delta\xi] - (1 - k)\delta\xi\gamma}{\beta\gamma(\mu + \alpha_2 + \delta)\mu A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(\varepsilon - q\varepsilon + q\beta\sigma I + q\mu + q\varepsilon) + \sigma(\mu + p + \beta I - q\mu - qp - q\beta I + pq)}{(p + \mu + \beta I)(\mu + \varepsilon + \beta\sigma I) - p\varepsilon} \\
&= \frac{(\mu + \gamma)[(\mu + \alpha_1 + \xi)(\mu + \alpha_2 + \delta) - k\delta\xi] - (1 - k)\delta\xi\gamma}{\beta\gamma(\mu + \alpha_2 + \delta)\mu A} \\
& \frac{(\varepsilon + q\mu) + \sigma(\mu + p + \beta I - q\mu)}{(p + \mu + \beta I)(\mu + \varepsilon + \beta\sigma I) - p\varepsilon} \\
&= \frac{(\mu + \gamma)[(\mu + \alpha_1 + \xi)(\mu + \alpha_2 + \delta) - k\delta\xi] - (1 - k)\delta\xi\gamma}{\beta\gamma(\mu + \alpha_2 + \delta)\mu A} \\
& \frac{\beta\sigma I + (\varepsilon + q\mu) + \sigma[p + (1 - q)\mu]}{(p + \mu + \beta I)(\mu + \varepsilon + \beta\sigma I) - p\varepsilon} \\
&= \frac{(\mu + \gamma)[(\mu + \alpha_1 + \xi)(\mu + \alpha_2 + \delta) - k\delta\xi] - (1 - k)\delta\xi\gamma}{\beta\gamma(\mu + \alpha_2 + \delta)\mu A}
\end{aligned}$$

diperoleh sebuah fungsi dari  $I$ , kita sebut dengan  $H(I)$  adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
& H(I) \\
&= \frac{\beta\sigma I + (\varepsilon + q\mu) + \sigma[p + (1 - q)\mu]}{(p + \mu + \beta I)(\mu + \varepsilon + \beta\sigma I) - p\varepsilon} \\
&\quad - \frac{(\mu + \gamma)[(\mu + \alpha_1 + \xi)(\mu + \alpha_2 + \delta) - k\delta\xi] - (1 - k)\delta\xi\gamma}{\beta\gamma(\mu + \alpha_2 + \delta)\mu A}
\end{aligned}$$

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## Lampiran 2 Perhitungan titik kesetimbangan nonendemi

Di Lampiran sebelumnya, perhatikan persamaan  $L1. 8$ , kemudian substitusikan  $I = 0$ , kedalam **persamaan** tersebut, sebut dengan  $S_0$ , diperoleh

$$S = \frac{((1 - q)\varepsilon + (\beta\sigma I + \mu + \varepsilon)q)\mu A}{(\mu + p + \beta I)(\beta\sigma I + \mu + \varepsilon) - p\varepsilon}$$

$$S_0 = \frac{((1 - q)\varepsilon + (\mu + \varepsilon)q)\mu A}{(\mu + p)(\mu + \varepsilon) - p\varepsilon}$$

$$S_0 = \frac{((\varepsilon - q\varepsilon) + (\mu q + q\varepsilon))\mu A}{(\mu^2 + \mu p + \mu\varepsilon + p\varepsilon) - p\varepsilon}$$

$$S_0 = \frac{(\varepsilon + \mu q)\mu A}{\mu(\mu + p + \varepsilon)}$$

$$S_0 = \frac{(\varepsilon + \mu q)A}{(\mu + p + \varepsilon)}$$

Berikutnya masih perhatikan Lampiran 1, substitusi  $I = 0$ , kedalam persamaan  $L1. 11$  dan sebut dengan  $V_0$

$$V = \frac{\mu A((1 - q)(\mu + p + \beta I) + pq)}{(p + \mu + \beta I)(\mu + \varepsilon + \beta\sigma I) - p\varepsilon}$$

$$V_0 = \frac{\mu A((1 - q)(\mu + p) + pq)}{(p + \mu)(\mu + \varepsilon) - p\varepsilon}$$

$$V_0 = \frac{\mu A(\mu + p - q\mu - qp + pq)}{\mu^2 + \mu p + \mu\varepsilon + p\varepsilon - p\varepsilon}$$

$$V_0 = \frac{\mu A(p + \mu - q\mu)}{\mu^2 + \mu p + \mu\varepsilon}$$

$$V_0 = \frac{\mu A(p + (1 - q)\mu)}{\mu(\mu + p + \varepsilon)}$$

$$V_0 = \frac{A(p + (1 - q)\mu)}{(\mu + p + \varepsilon)}.$$

Sedangkan untuk mengetahui nilai  $E_0$ , perhatikan Lampiran 1 pada persamaan  $L1. 13$  diubah menjadi

$$E = \left[ \frac{(\mu + \alpha_1 + \xi)(\mu + \alpha_2 + \delta) - k\delta\xi}{\gamma(\mu + \alpha_2 + \delta)} \right] I$$

$$E_0 = \left[ \frac{(\mu + \alpha_1 + \xi)(\mu + \alpha_2 + \delta) - k\delta\xi}{\gamma(\mu + \alpha_2 + \delta)} \right] 0 = 0$$

Untuk mencari nilai  $T_0$ , maka substitusikan  $I=0$  pada persamaan L1.  
12 sehingga

$$T = \frac{\xi}{(\mu + \alpha_2 + \delta)} I$$

$$T_0 = \frac{\xi}{(\mu + \alpha_2 + \delta)} 0 = 0.$$

Untuk  $I_0$  jelas nilainya adalah nol.



### Lampiran 3 Perhitungan titik kesetimbangan endemi

Dengan cara yang sama untuk mengetahui nilai dari  $S^*$ , berdasarkan persamaan L1. 8 dengan nilai  $I = I^*$

$$S = \frac{((1-q)\varepsilon + (\beta\sigma I + \mu + \varepsilon)q)\mu A}{(\mu + p + \beta I)(\beta\sigma I + \mu + \varepsilon) - p\varepsilon}$$

$$S^* = \frac{((1-q)\varepsilon + (\beta\sigma I^* + \mu + \varepsilon)q)\mu A}{(\mu + p + \beta I^*)(\beta\sigma I^* + \mu + \varepsilon) - p\varepsilon}.$$

Dan untuk nilai dari  $V^*$ , diperoleh dari persamaan L1. 11 yaitu

$$V = \frac{\mu A((1-q)(\mu + p + \beta I) + pq)}{(\mu + p + \beta I)(\mu + \varepsilon + \beta\sigma I) - p\varepsilon}$$

$$V^* = \frac{\mu A((1-q)(\mu + p + \beta I^*) + pq)}{(\mu + p + \beta I^*)(\mu + \varepsilon + \beta\sigma I^*) - p\varepsilon}.$$

Sedangkan untuk mendapatkan nilai  $E^*$ , persamaan L1. 13 diubah menjadi

$$E = \left[ \frac{(\mu + \alpha_1 + \xi)(\mu + \alpha_2 + \delta) - k\delta\xi}{\gamma(\mu + \alpha_2 + \delta)} \right] I$$

$$E^* = \left[ \frac{(\mu + \alpha_1 + \xi)(\mu + \alpha_2 + \delta) - k\delta\xi}{\gamma(\mu + \alpha_2 + \delta)} \right] I^*$$

Untuk  $T^*$  dari persamaan L1. 12 maka

$$T = \frac{\xi}{(\mu + \alpha_2 + \delta)} I$$

$$T^* = \frac{\xi}{(\mu + \alpha_2 + \delta)} I^*.$$

Nilai  $I$ , berselang antara  $[0, A]$  sehingga diperoleh

$$H(0) = \frac{(\varepsilon + q\mu) + \sigma[p + (1-q)\mu]}{(p + \mu)(\mu + \varepsilon) - p\varepsilon} - \frac{(\mu + \gamma)[(\mu + \alpha_1 + \xi)(\mu + \alpha_2 + \delta) - k\delta\xi] - (1-k)\delta\xi\gamma}{\beta\gamma(\mu + \alpha_2 + \delta)\mu A}$$

$$H(0) = \frac{(\varepsilon + q\mu) + \sigma[p + (1-q)\mu]}{(p\mu + p\varepsilon + \mu\mu + \mu\varepsilon) - p\varepsilon} \left( \frac{\frac{(\mu + \gamma)[(\mu + \alpha_1 + \xi)(\mu + \alpha_2 + \delta) - k\delta\xi] - (1-k)\delta\xi\gamma}{\beta\gamma(\mu + \alpha_2 + \delta)\mu A}}{\frac{(\mu + \gamma)[(\mu + \alpha_1 + \xi)(\mu + \alpha_2 + \delta) - k\delta\xi] - (1-k)\delta\xi\gamma}{\beta\gamma(\mu + \alpha_2 + \delta)\mu A}} \right) - \frac{(\mu + \gamma)[(\mu + \alpha_1 + \xi)(\mu + \alpha_2 + \delta) - k\delta\xi] - (1-k)\delta\xi\gamma}{\beta\gamma(\mu + \alpha_2 + \delta)\mu A}$$

$$H(0) = \left( \frac{\frac{(\varepsilon + q\mu) + \sigma[p + (1-q)\mu]}{(p\mu + p\varepsilon + \mu\mu + \mu\varepsilon)}}{\frac{(\mu + \gamma)[(\mu + \alpha_1 + \xi)(\mu + \alpha_2 + \delta) - k\delta\xi] - (1-k)\delta\xi\gamma}{\beta\gamma(\mu + \alpha_2 + \delta)\mu A}} \right) \frac{(\mu + \gamma)[(\mu + \alpha_1 + \xi)(\mu + \alpha_2 + \delta) - k\delta\xi] - (1-k)\delta\xi\gamma}{\beta\gamma(\mu + \alpha_2 + \delta)\mu A} - \frac{(\mu + \gamma)[(\mu + \alpha_1 + \xi)(\mu + \alpha_2 + \delta) - k\delta\xi] - (1-k)\delta\xi\gamma}{\beta\gamma(\mu + \alpha_2 + \delta)\mu A}$$

$$H(0) = \frac{\frac{(\varepsilon+q\mu)+\sigma[p+(1-q)\mu]}{\mu(p+\mu+\varepsilon)} - \frac{\beta\gamma(\mu+\alpha_2+\delta)\mu A}{(\mu+\gamma)[(\mu+\alpha_1+\xi)(\mu+\alpha_2+\delta)-k\delta\xi]-(1-k)\delta\xi\gamma}}{\frac{(\mu+\gamma)[(\mu+\alpha_1+\xi)(\mu+\alpha_2+\delta)-k\delta\xi]-(1-k)k\delta\xi}{(\mu+\gamma)[(\mu+\alpha_1+\xi)(\mu+\alpha_2+\delta)-k\delta\xi]-(1-k)k\delta\xi}}$$

$$\frac{\beta\gamma(\mu+\alpha_2+\delta)\mu A}{(\mu+\gamma)[(\mu+\alpha_1+\xi)(\mu+\alpha_2+\delta)-k\delta\xi]-(1-k)\delta\xi\gamma}$$

$$H(0) = \left( \frac{\beta\gamma(\mu+\alpha_2+\delta)\mu A}{(\varepsilon+q\mu)+\sigma[p+(1-q)\mu]} \right) \frac{\beta\gamma(\mu+\alpha_2+\delta)A}{(\mu+\gamma)[(\mu+\alpha_1+\xi)(\mu+\alpha_2+\delta)-k\delta\xi]-(1-k)\delta\xi\gamma} \\ \frac{(\mu+\gamma)[(\mu+\alpha_1+\xi)(\mu+\alpha_2+\delta)-k\delta\xi]-(1-k)\delta\xi\gamma}{(p+\mu+\varepsilon)} \right)$$

$$\frac{\beta\gamma(\mu+\alpha_2+\delta)\mu A}{(\mu+\gamma)[(\mu+\alpha_1+\xi)(\mu+\alpha_2+\delta)-k\delta\xi]-(1-k)\delta\xi\gamma}$$

$$H(0) =$$

$$\begin{aligned} H(\beta) = & \left( \frac{\left( \frac{(\varepsilon + q\mu)}{(p + \mu + \varepsilon)} + \frac{\sigma[p + (1-q)\mu]}{(p + \mu + \varepsilon)} \right) \frac{\beta\gamma(\mu + \alpha_2 + \delta)A}{(\mu + \gamma)[(\mu + \alpha_1 + \xi)(\mu + \alpha_2 + \delta) - k\delta\xi] - (1-k)\delta\xi\gamma}}{(\mu + \gamma)[(\mu + \alpha_1 + \xi)(\mu + \alpha_2 + \delta) - k\delta\xi] - (1-k)\delta\xi\gamma} - \right. \\ & \left. \frac{\frac{\beta\gamma(\mu + \alpha_2 + \delta)\mu A}{(\mu + \gamma)[(\mu + \alpha_1 + \xi)(\mu + \alpha_2 + \delta) - k\delta\xi] - (1-k)\delta\xi\gamma}}{\beta\gamma(\mu + \alpha_2 + \delta)\mu A} \right) \end{aligned}$$

$$H(0) =$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\left( \frac{A(\varepsilon+q\mu)}{(p+\mu+\varepsilon)} + \frac{A\sigma[p+(1-q)\mu]}{(p+\mu+\varepsilon)} \right) \frac{\beta\gamma(\mu+a_2+\delta)}{(\mu+\gamma)[(\mu+a_1+\xi)(\mu+a_2+\delta)-k\delta\xi]-(1-k)\delta\xi\gamma}}{(\mu+\gamma)[(\mu+a_1+\xi)(\mu+a_2+\delta)-k\delta\xi]-(1-k)k\delta\xi} - \right. \\ & \left. \frac{\beta\gamma(\mu+a_2+\delta)\mu A}{(\mu+\gamma)[(\mu+a_1+\xi)(\mu+a_2+\delta)-k\delta\xi]-(1-k)\delta\xi\gamma} \right. \\ & \left. - \frac{\beta\gamma(\mu+a_2+\delta)\mu A}{\beta\gamma(\mu+a_2+\delta)\mu A} \right) \end{aligned}$$

$$H(0) = \left( (S_0 + V_0) \frac{\beta\gamma(\mu+\alpha_2+\delta)}{(\mu+\gamma)[(\mu+\alpha_1+\xi)(\mu+\alpha_2+\delta)-k\delta\xi]-(1-k)\gamma\delta\xi} \right) - \frac{\beta\gamma(\mu+\alpha_2+\delta)\mu A}{(\mu+\gamma)[(\mu+\alpha_1+\xi)(\mu+\alpha_2+\delta)-k\delta\xi]-(1-k)\delta\xi\gamma} - \frac{\beta\gamma(\mu+\alpha_2+\delta)\mu A}{\beta\gamma(\mu+\alpha_2+\delta)\mu A}$$

$$H(0) = \left( \frac{\beta\gamma(\mu+\alpha_2+\delta)(S_0+V_0)}{(\mu+\gamma)[(\mu+\alpha_1+\xi)(\mu+\alpha_2+\delta)-k\delta\xi]-(1-k)\delta\xi\gamma} \right)$$

$$\frac{(\mu+\gamma)[(\mu+\alpha_1+\xi)(\mu+\alpha_2+\delta)-k\delta\xi]-(1-k)\delta\xi}{(\mu+\gamma)[(\mu+\alpha_1+\xi)(\mu+\alpha_2+\delta)-k\delta\xi]-(1-k)\delta\xi\gamma} -$$

$$\frac{\beta\gamma(\mu+\alpha_2+\delta)\mu A}{\beta\nu(\mu+\alpha_2+\delta)\mu A}$$

dimisalkan

$$R_0 = \frac{\beta\gamma(\mu + \alpha_2 + \delta)(S_0 + \sigma V_0)}{(\mu + \gamma)[(\mu + \alpha_1 + \xi)(\mu + \alpha_2 + \delta) - k\delta\xi] - (1 - k)\delta\xi\gamma}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} H(0) &= (R_0) \frac{(\mu + \gamma)[(\mu + \alpha_1 + \xi)(\mu + \alpha_2 + \delta) - k\delta\xi] - (1 - k)k\delta\xi}{\beta\gamma(\mu + \alpha_2 + \delta)\mu A} \\ &\quad - \frac{(\mu + \gamma)[(\mu + \alpha_1 + \xi)(\mu + \alpha_2 + \delta) - k\delta\xi] - (1 - k)\delta\xi\gamma}{\beta\gamma(\mu + \alpha_2 + \delta)\mu A} \end{aligned}$$

persamaan  $H(0)$  dapat diubah menjadi

$$H(0) = \frac{(\mu + \gamma)[(\mu + \alpha_1 + \xi)(\mu + \alpha_2 + \delta) - k\delta\xi] - (1 - k)k\delta\xi}{\beta\gamma(\mu + \alpha_2 + \delta)\mu A} (R_0 - 1).$$

Bukti  $H(I)$  adalah fungsi monoton turun.

$$H(I) =$$

$$\frac{\beta\sigma I + (\varepsilon + q\mu) + \sigma[p + (1 - q)\mu]}{(p + \mu + \beta I)(\mu + \varepsilon + \beta\sigma I) - p\varepsilon} - \frac{(\mu + \gamma)[(\mu + \alpha_1 + \xi)(\mu + \alpha_2 + \delta) - k\delta\xi] - (1 - k)\delta\xi\gamma}{\beta\gamma(\mu + \alpha_2 + \delta)\mu A}$$

Misal

$$U = \beta\sigma I + (\varepsilon + q\mu) + \sigma[p + (1 - q)\mu], U' = \beta\sigma$$

$$V = (p + \mu + \beta I)(\mu + \varepsilon + \beta\sigma I) - p\varepsilon, V' = \beta(\mu + \varepsilon + \beta\sigma I) + \beta\sigma(p + \mu + \beta I)$$

$$H'(I) = \frac{U'V - V'U}{V^2}$$

$$H'(I) = \frac{(\beta\sigma)((p + \mu + \beta I)(\mu + \varepsilon + \beta\sigma I) - p\varepsilon) - (\beta(\mu + \varepsilon + \beta\sigma I) + \beta\sigma(p + \mu + \beta I))(\beta\sigma I + (\varepsilon + q\mu) + \sigma[p + (1 - q)\mu])}{((p + \mu + \beta I)(\mu + \varepsilon + \beta\sigma I) - p\varepsilon)^2} - 0$$

Untuk pembilang

$$(\beta\sigma)((p + \mu + \beta I)(\mu + \varepsilon + \beta\sigma I) - p\varepsilon) - (\beta(\mu + \varepsilon + \beta\sigma I) + \beta\sigma(p + \mu + \beta I))(\beta\sigma I + (\varepsilon + q\mu) + \sigma[p + (1 - q)\mu])$$

$$(\beta\sigma)((p\mu + \mu\mu + \beta\mu I + p\varepsilon + \mu\varepsilon + \beta\varepsilon I + p\beta\sigma I + \mu\beta\sigma I + \beta\beta\sigma II) - p\varepsilon) - (\beta\mu + \beta\varepsilon + \beta\beta\sigma I + \beta\sigma p + \beta\sigma\mu + \beta\beta\sigma I)(\beta\sigma I + (\varepsilon + q\mu) + \sigma[p + (1 - q)\mu])$$

$$(\beta\sigma)(\beta\mu I + \beta\varepsilon I + p\beta\sigma I + \mu\beta\sigma I + \beta\beta\sigma II + p\mu + \mu\mu + p\varepsilon + \mu\varepsilon - p\varepsilon) - (\beta\mu\beta\sigma I + \beta\varepsilon\beta\sigma I + \beta\beta\sigma I\beta\sigma I + \beta\sigma p\beta\sigma I + \beta\sigma\mu\beta\sigma I + \beta\beta\sigma I\beta\sigma I + \beta\mu(\varepsilon + q\mu) + \beta\varepsilon(\varepsilon + q\mu) + \beta\beta\sigma(\varepsilon + q\mu)I + \beta\sigma p(\varepsilon + q\mu) + \beta\sigma\mu(\varepsilon + q\mu) + \beta\beta\sigma(\varepsilon + q\mu)I + \beta\mu\sigma[p + (1 - q)\mu] + \beta\varepsilon\sigma[p + (1 - q)\mu] + \beta\beta\sigma I\sigma[p + (1 - q)\mu] + \beta\sigma p\sigma[p + (1 - q)\mu] + \beta\sigma\mu\sigma[p + (1 - q)\mu] + \beta\beta\sigma\sigma[p + (1 - q)\mu]I)$$

$$(\beta\sigma\beta\mu I + \beta\sigma\beta\varepsilon I + \beta\sigma p\beta\sigma I + \beta\sigma\mu\beta\sigma I + \beta\sigma\beta\beta\sigma II + \beta\sigma p\mu + \beta\sigma\mu\mu + \beta\sigma p\varepsilon + \beta\sigma\mu\varepsilon - \beta\sigma p\varepsilon) - (\beta\mu\beta\sigma I + \beta\varepsilon\beta\sigma I + \beta\beta\sigma I\beta\sigma I + \beta\sigma p\beta\sigma I + \beta\sigma\mu\beta\sigma I + \beta\beta\sigma I\beta\sigma I + \beta\mu(\varepsilon + q\mu) + \beta\varepsilon(\varepsilon + q\mu) + \beta\beta\sigma(\varepsilon + q\mu)I + \beta\sigma p(\varepsilon + q\mu) + \beta\sigma\mu(\varepsilon + q\mu) + \beta\beta\sigma(\varepsilon + q\mu)I + \beta\mu\sigma[p + (1 - q)\mu] + \beta\varepsilon\sigma[p + (1 - q)\mu] + \beta\beta\sigma I\sigma[p + (1 - q)\mu] + \beta\sigma p\sigma[p + (1 - q)\mu] + \beta\sigma\mu\sigma[p + (1 - q)\mu] + \beta\beta\sigma\sigma[p + (1 - q)\mu]I)$$

$$(\beta\sigma\beta\mu I + \beta\sigma\beta\varepsilon I + \beta\sigma p\beta\sigma I + \beta\sigma\mu\beta\sigma I + \beta\sigma\beta\beta\sigma II + \beta\sigma p\mu + \beta\sigma\mu\mu + \beta\sigma p\varepsilon + \beta\sigma\mu\varepsilon - \beta\sigma p\varepsilon) - (\beta\mu\beta\sigma I + \beta\varepsilon\beta\sigma I + \beta\beta\sigma I\beta\sigma I + \beta\sigma p\beta\sigma I + \beta\sigma\mu\beta\sigma I + \beta\beta\sigma I\beta\sigma I + \beta\mu(\varepsilon + q\mu) + \beta\varepsilon(\varepsilon + q\mu) + \beta\beta\sigma(\varepsilon + q\mu)I + \beta\sigma p(\varepsilon + q\mu) + \beta\sigma\mu(\varepsilon + q\mu) + \beta\beta\sigma(\varepsilon + q\mu)I + \beta\mu\sigma[p + (1 - q)\mu] + \beta\varepsilon\sigma[p + (1 - q)\mu] + \beta\beta\sigma I\sigma[p + (1 - q)\mu] + \beta\sigma p\sigma[p + (1 - q)\mu] + \beta\sigma\mu\sigma[p + (1 - q)\mu] + \beta\beta\sigma\sigma[p + (1 - q)\mu]I)$$

$$\beta[(\sigma p\mu + \sigma\mu\mu + \sigma\mu\varepsilon) - ((\beta\sigma I)^2 + 2\beta\sigma I(\varepsilon + q\mu) + \mu(\varepsilon + q\mu) + \varepsilon(\varepsilon + q\mu) + \sigma p(\varepsilon + q\mu) + \sigma\mu(\varepsilon + q\mu) + \mu\sigma[p + (1 - q)\mu] + \varepsilon\sigma[p + (1 - q)\mu] + \beta\sigma I\sigma[p + (1 - q)\mu] + \sigma p\sigma[p + (1 - q)\mu] + \sigma\mu\sigma[p + (1 - q)\mu] + \beta\sigma\sigma[p + (1 - q)\mu]I)]$$

$$\beta[-(\beta\sigma I)^2 - 2\beta\sigma I(\varepsilon + q\mu) - 2\beta\sigma I\sigma[p + (1 - q)\mu] + (\sigma p\mu + \sigma\mu\mu + \sigma\mu\varepsilon) - (\mu(\varepsilon + q\mu) + \varepsilon(\varepsilon + q\mu) + \sigma p(\varepsilon + q\mu) + \sigma\mu(\varepsilon + q\mu) + \mu\sigma[p + (1 - q)\mu] + \varepsilon\sigma[p + (1 - q)\mu] + \sigma p\sigma[p + (1 - q)\mu] + \sigma\mu\sigma[p + (1 - q)\mu])]$$

$$\beta[-(\beta\sigma I)^2 - 2\beta\sigma I(\varepsilon + q\mu) - 2\beta\sigma I\sigma[p + (1 - q)\mu] - ((\mu\varepsilon + \mu q\mu) + (\varepsilon\varepsilon + \varepsilon q\mu) + (\varepsilon\sigma\mu + q\mu\sigma\mu) + [\sigma p\varepsilon + \sigma p q\mu] + [-q\mu\mu\sigma] + [p\varepsilon\sigma - q\mu\varepsilon\sigma] + \sigma p\sigma[p + (1 - q)\mu] + \sigma\mu\sigma[p + (1 - q)\mu])]$$

$$\beta[-(\beta\sigma I)^2 - 2\beta\sigma I((\varepsilon + q\mu) + \sigma[p + (1 - q)\mu]) - ((\mu + \varepsilon)(\varepsilon + q\mu) + \sigma[p(\varepsilon + q\mu) + \varepsilon(p + (1 - q)\mu)] + (p + \mu)[p + (1 - q)\mu]\sigma^2)$$

Maka

$$H'(I) = \beta \left( -\frac{((p+\mu)[p+(1-q)\mu]\sigma^2 + \sigma[p(\varepsilon+q\mu)+\varepsilon(p+(1-q)\mu)] + (\mu+\varepsilon)(\varepsilon+q\mu))}{((p+\mu+\beta I)(\mu+\varepsilon+\beta\sigma I)-p\varepsilon)^2} \right)$$

Karena nilai  $H'(I)$  negatif, sehingga jelas bahwa  $H(I)$  adalah sebuah fungsi yang monoton turun

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



#### Lampiran 4 Perhitungan kestabilan titik kesetimbangan nonendemi

$$\begin{vmatrix} -(\mu + p) - \lambda & \varepsilon & 0 & -\beta S_0 & 0 \\ p & -(\mu + \varepsilon) - \lambda & 0 & -\beta \sigma V_0 & 0 \\ 0 & 0 & -A - \lambda & \beta(S_0 + \sigma V_0) & (1-k)\delta \\ 0 & 0 & \gamma & -B - \lambda & k\delta \\ 0 & 0 & 0 & \xi & -C - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

lakukan ekspansi kofaktor baris pertama sehingga menghasilkan

$$-(\mu + p) - \lambda \begin{vmatrix} -(\mu + \varepsilon) - \lambda & 0 & -\beta \sigma V_0 & 0 \\ 0 & -A - \lambda & \beta(S_0 + \sigma V_0) & (1-k)\delta \\ 0 & \gamma & -B - \lambda & k\delta \\ 0 & 0 & \xi & -C - \lambda \end{vmatrix} - p \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 & -\beta \sigma S_0 & 0 \\ 0 & -A_a - \lambda & \beta(S_0 + \sigma V_0) & (1-k)\delta \\ 0 & \gamma & -B - \lambda & k\delta \\ 0 & 0 & \xi & -C - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

lakukan ekspansi pada baris pertama pada masing-masing matriks sehingga

$$-(\mu + p) - \lambda(-(\mu + \varepsilon) - \lambda) \begin{vmatrix} -A_a - \lambda & \beta(S_0 + \sigma V_0) & (1-k)\delta \\ \gamma & -B - \lambda & k\delta \\ 0 & \xi & -C - \lambda \end{vmatrix} - p\varepsilon \begin{vmatrix} -A_a - \lambda & \beta(S_0 + \sigma V_0) & (1-k)\delta \\ \gamma & -B - \lambda & k\delta \\ 0 & \xi & -C - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

lakukan perhitungan biasa diperoleh

$$[(\mu + p)(\mu + \varepsilon) + \lambda((\mu + \varepsilon) + (\mu + p)) + \lambda^2 - p\varepsilon] \begin{vmatrix} -A_a - \lambda & \beta(S_0 + \sigma V_0) & (1-k)\delta \\ \gamma & -B - \lambda & k\delta \\ 0 & \xi & -C - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda^2 - (2\mu + p + \varepsilon)\lambda + \mu^2 + \mu\varepsilon + p\mu)(\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda^1 + a_3) = 0$$

$$(\lambda^2 + (2\mu + p + \varepsilon)\lambda + \mu^2 + \mu\varepsilon + p\mu) = 0$$

dengan menggunakan aturan a, b, c sehingga diperoleh

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-b \pm \sqrt[2]{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-(2\mu + p + \varepsilon) \pm \sqrt[2]{(2\mu + p + \varepsilon)^2 - 4(1)(\mu^2 + \mu\varepsilon + p\mu)}}{2}$$

$$\lambda_1, \lambda_2$$

$$= \frac{(2\mu + p + \varepsilon) \pm \sqrt[2]{4\mu^2 + 4\mu p + 4\mu\varepsilon + 2p\varepsilon + p^2 + \varepsilon^2 - 4\mu^2 - 4\mu\varepsilon - 4p\mu}}{2}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{(2\mu + p + \varepsilon) \pm \sqrt[2]{2p\varepsilon + p^2 + \varepsilon^2}}{2}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{(2\mu + p + \varepsilon) \pm \sqrt[2]{(p + \varepsilon)^2}}{2}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{(2\mu + p + \varepsilon) \pm (p + \varepsilon)}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{-(2\mu + p + \varepsilon) + (p + \varepsilon)}{2} \quad \lambda_2 = \frac{-(2\mu + p + \varepsilon) - (p + \varepsilon)}{2}$$

$$\lambda_1 = -\frac{(2\mu)}{2}$$

$$\lambda_1 = -\mu$$

$$\lambda_2 = \frac{-(2\mu + 2p + 2\varepsilon)}{2}$$

$$\lambda_2 = -(\mu + p + \varepsilon)$$

## Lampiran 5 Perhitungan kestabilan titik kesetimbangan endemi

$$\begin{vmatrix} -D - \lambda & \varepsilon & 0 & -\beta S & 0 \\ p & -F - \lambda & 0 & -\beta \sigma V & 0 \\ \beta I & \beta \sigma I & -A_a - \lambda & \beta(S + \sigma V) & (1-k)\delta \\ 0 & 0 & \gamma & -B - \lambda & k\delta \\ 0 & 0 & 0 & \xi & -C - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

lakukan ekspansi kofaktor pada kolom ke lima, sehingga

$$-\xi \begin{vmatrix} -D - \lambda & \varepsilon & 0 & 0 \\ p & -F - \lambda & 0 & 0 \\ \beta I & \beta \sigma I & -A_a - \lambda & (1-k)\delta \\ 0 & 0 & \gamma & k\delta \end{vmatrix} - (C + \lambda) \begin{vmatrix} -D - \lambda & \varepsilon & 0 & -\beta S \\ p & -F - \lambda & 0 & -\beta \sigma V \\ \beta I & \beta \sigma I & -A_a - \lambda & \beta(S + \sigma V) \\ 0 & 0 & \gamma & -B - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

lakukan ekspansi kofaktor pada kolom keempat, sehingga

$$\begin{aligned} & -\xi \gamma \begin{vmatrix} -D - \lambda & \varepsilon & 0 \\ p & -F - \lambda & 0 \\ \beta I & \beta \sigma I & (1-k)\delta \end{vmatrix} + \\ & k\xi \delta \begin{vmatrix} -D - \lambda & \varepsilon & 0 \\ p & -F - \lambda & 0 \\ \beta I & \beta \sigma I & -A_a - \lambda \end{vmatrix} - \\ & (C\gamma + \gamma\lambda) \begin{vmatrix} -D - \lambda & \varepsilon & -\beta S \\ p & -F - \lambda & -\beta \sigma V \\ \beta I & \beta \sigma I & \beta(S + \sigma V) \end{vmatrix} - (C + \lambda)(B + \lambda) \begin{vmatrix} -D - \lambda & \varepsilon & 0 \\ p & -F - \lambda & 0 \\ \beta I & \beta \sigma I & -A_a - \lambda \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

lakukan ekspansi kofaktor pada baris ke tiga, sehingga

$$\begin{aligned} & -(1-k)\delta\xi\gamma \begin{vmatrix} -D - \lambda & \varepsilon \\ p & -F - \lambda \end{vmatrix} - \\ & (A_a + \lambda)k\xi\delta \begin{vmatrix} -D - \lambda & \varepsilon \\ p & -F - \lambda \end{vmatrix} + (C + \lambda)(B + \lambda)(A_a + \lambda) \begin{vmatrix} -D - \lambda & \varepsilon \\ p & -F - \lambda \end{vmatrix} + (C + \lambda)\gamma\beta S \begin{vmatrix} p & -F - \lambda \\ \beta I & \beta \sigma I \end{vmatrix} - \end{aligned}$$

$$(C + \lambda)\gamma\beta\sigma V \begin{vmatrix} -D - \lambda & \varepsilon \\ \beta I & \beta\sigma I \end{vmatrix} -$$

$$(C + \lambda)\gamma\beta(S + \sigma V) \begin{vmatrix} -D - \lambda & \varepsilon \\ p & -F - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$[-(1 - k)\delta\xi\gamma - (A_a + \lambda)k\xi\delta + (C + \lambda)(B + \lambda)(A_a + \lambda) -$$

$$(C + \lambda)\gamma\beta(S + \sigma V)] \begin{vmatrix} -D - \lambda & \varepsilon \\ p & -F - \lambda \end{vmatrix} +$$

$$(C + \lambda)\gamma\beta S \begin{vmatrix} p & -F - \lambda \\ \beta I & \beta\sigma I \end{vmatrix} - (C + \lambda)\gamma\beta\sigma V \begin{vmatrix} -D - \lambda & \varepsilon \\ \beta I & \beta\sigma I \end{vmatrix} = 0$$

$$[-(1 - k)\delta\xi\gamma - A_a k\xi\delta - k\xi\delta \lambda + (\lambda^2 + (C + B)\lambda + CB)(A_a + \lambda) - \gamma\beta(S + \sigma V)C - \gamma\beta(S + \sigma V)\lambda][(D + \lambda)(F + \lambda) - p\varepsilon] +$$

$$[(C + \lambda)\gamma\beta S][p\beta\sigma I + \beta I(F + \lambda)] + [-C\gamma\beta\sigma V - \gamma\beta\sigma V\lambda][-(D + \lambda)\beta\sigma I - \beta I\varepsilon] = 0$$

$$[-(1 - k)\delta\xi\gamma - A_a k\xi\delta - k\xi\delta \lambda + (\lambda^3 + (C + B)\lambda^2 + CB\lambda + A_a\lambda^2 + (C + B)A_a\lambda + CBA_a) - \gamma\beta(S + \sigma V)C - \gamma\beta(S + \sigma V)\lambda][(DF + (D + F)\lambda + \lambda^2) - p\varepsilon] + [C\gamma\beta S + \gamma\beta S\lambda][Fp\beta\sigma I + F\beta I + (p\beta\sigma I + \beta I)\lambda] + [-C\gamma\beta\sigma V - \gamma\beta\sigma V\lambda][-(D + \lambda)\beta\sigma I - \beta I\varepsilon] = 0$$

$$[\lambda^3 + (C + B + A_a)\lambda^2 + (CB + A_a B + A_a C - k\xi\delta - \gamma\beta(S + \sigma V))\lambda + (A_a BC - \gamma\beta(S + \sigma V)C - (1 - k)\delta\xi\gamma - A_a k\xi\delta)][\lambda^2 + (D + F)\lambda + (DF - p\varepsilon)] + [\gamma\beta SC + \gamma\beta S\lambda][(p\beta\sigma I + \beta IF) + \beta I\lambda] + [C\gamma\beta\sigma V + \gamma\beta\sigma V\lambda][(D\beta\sigma I + \beta I\varepsilon) + \beta\sigma I\lambda] = 0$$

$$[\lambda^3 + (C + B + A_a)\lambda^2 + (CB + A_a B + A_a C - k\xi\delta - \gamma\beta(S + \sigma V))\lambda + (A_a BC - \gamma\beta(S + \sigma V)C - (1 - k)\delta\xi\gamma - A_a k\xi\delta)][\lambda^2 + (D + F)\lambda + (DF - p\varepsilon)] + [\gamma\beta SC + \gamma\beta S\lambda][(p\beta\sigma I + \beta IF) + \beta I\lambda] + [C\gamma\beta\sigma V + \gamma\beta\sigma V\lambda][(D\beta\sigma I + \beta I\varepsilon) + \beta\sigma I\lambda] = 0$$

$$\lambda^5 + [C + B + A_a + D + F]\lambda^4 + [CB + A_a B + A_a C - k\xi\delta - \gamma\beta(S + \sigma V) + (D + F)(C + B + A_a) + (DF - p\varepsilon)]\lambda^3 +$$

$$[A_a BC - \gamma\beta(S + \sigma V)C - (1 - k)\delta\xi\gamma - Ak\xi\delta + (D + F)(CB + A_a B + A_a C - k\xi\delta - \gamma\beta(S + \sigma V)) + (DF - p\varepsilon)(C + B + A_a) + \gamma\beta S\beta I + \gamma\beta\sigma V\beta\sigma I]\lambda^2 + [(D + F)(A_a BC - \gamma\beta(S + \sigma V)C - (1 - k)\delta\xi\gamma - A_a k\xi\delta + (DF - p\varepsilon)(CB + A_a B + A_a C - k\xi\delta -$$

$$\gamma\beta(S + \sigma V) + \gamma\beta SC\beta I + (p\beta\sigma I + \beta IF)\gamma\beta S + C\gamma\beta\sigma V\beta\sigma I + \gamma\beta\sigma V(D\beta\sigma I + \beta I\varepsilon)]\lambda + (DF - p\varepsilon)(A_a BC - \gamma\beta(S + \sigma V)C - (1 - k)\delta\xi\gamma - A_a k\xi\delta) + \gamma\beta SC(p\beta\sigma I + \beta IF) + C\gamma\beta\sigma V(D\beta\sigma I + \beta I\varepsilon) = 0$$

Perhitungan Routh-Hurwitz ke dua

$$b_1 b_2 - b_3 > 0$$

$$(C + B + A_a + D + F)(CB + A_a B + A_a C - k\xi\delta - \gamma\beta(S + \sigma V) + (D + F)(C + B + A_a) + (DF - p\varepsilon)) - (A_a BC - \gamma\beta(S + \sigma V)C - (1 - k)\delta\xi\gamma - Ak\xi\delta + (D + F)(CB + A_a B + A_a C - k\xi\delta - \gamma\beta(S + \sigma V)) + (DF - p\varepsilon)(C + B + A_a) + \gamma\beta S\beta I + \gamma\beta\sigma V\beta\sigma I) > 0$$

Karena pembuktian di atas sulit untuk dibuktikan secara eksak, maka dibuktikan menggunakan perhitungan numerik yang dilakukan di Lampiran 6

Routh-Hurwitz ke tiga

$$D_3 = \begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_5 \\ 1 & b_2 & b_4 \\ 0 & b_1 & b_3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$(b_1 b_2 b_3 + b_1 b_5) - (b_1 b_1 b_4 + b_3 b_3) > 0$$

Perhitungan Routh-Hurwitz ke tiga, sangat panjang jika dijabarkan, oleh karena itu, perhitungan Routh-Hurwitz ke tiga ini dilakukan menggunakan perhitungan numerik.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## Lampiran 6 Listing program

Listing program  $R_0 < 1$

```
function SVEIT = fungsil(t, y)
b =0.05;
d =0.5;
e =0.03;
k =0.3;
m =0.0143;
o =0.2;
p =0.05;
q =0.6;
ye =0.00368;
A =55.496;
a1 =0.3;
a2 =0.05;
ei =0.9;

so=A*(e+q*m) / (p+m+e)
vo=A*(p+(1-q)*m) / (p+m+e)

X=b*ye*(m+a2+d)*(so+o*vo);
Y=(m+ye)*(m+a1+ei)*(m+a2+d);
Z=d*ei*((1-k)*ye+(m+ye)*k);
Ro=X/(Y-Z)

SVEIT= [q*m*A-(m+p)*y(1)-b*y(1)*y(4)+e*y(2);
        (1-q)*m*A+p*y(1)-b*o*y(2)*y(4)-
        (m+e)*y(2);
        b*y(4)*(y(1)+o*y(2))-(m+ye)*y(3)+(1-
        k)*d*y(5);
        ye*y(3)-(m+a1+ei)*y(4)+k*d*y(5);
        ei*y(4)-(m+a2+d)*y(5)];
```

Ini akan mengakibatkan  $R_0 = 0,3479$   
dan menghasilkan  $S_0 = 22,7045$   
serta  $V_0 = 32.7915$

```
function fungsii
options = odeset('RelTol', 1e-4, 'AbsTol', 1e-
7);
figure(1);
```

```
[t, y] = ode23(@fungsil, [0 2000], [50 30 40
15 15], options);
plot(t, y(:, 1), 'r', t, y(:, 2), 'b', t, y(:, 3),
'g', t, y(:, 4), 'k', t, y(:, 5), 'y--',
'LineWidth', 2.5);
title('Grafik Solusi');
xlabel('time t');
ylabel('S, V, E, I, T');grid;
legend('S', 'V', 'E', 'I', 'T');
```

pada fungsi ini nilainya akan memunculkan grafik solusi yang dapat dilihat di Gambar 3.2

#### *Listing program $R_0 = 1$*

```
function SVEIT = fungsil(t, y)
b =0.5;
d =0.5;
e =0.03;
k =0.3;
m =0.0143;
o =0.2;
p =0.05;
q =0.6;
ye =0.00368;
A =(20642539309417149500/1294004656699539433);
a1 =0.3;
a2 =0.05;
ei =0.9;

so=A*(e+q*m) / (p+m+e)
vo=A*(p+(1-q)*m) / (p+m+e)

X=b*ye*(m+a2+d)*(so+o*vo);
Y=(m+ye)*(m+a1+ei)*(m+a2+d);
Z=d*ei*((1-k)*ye+(m+ye)*k);
Ro=X/(Y-Z)

SVEIT= [q*m*A-(m+p)*y(1)-b*y(1)*y(4)+e*y(2);
        (1-q)*m*A+p*y(1)-b*o*y(2)*y(4)-
        (m+e)*y(2);
        b*y(4)*(y(1)+o*y(2))-(m+ye)*y(3)+(1-
        k)*d*y(5);
```

```

ye*y(3)-(m+a1+ei)*y(4)+k*d*y(5);
ei*y(4)-(m+a2+d)*y(5)];

```

Ini akan mengakibatkan  $R_0 = 1,0000$   
dan menghasilkan  $S_0 = 6.526461969127205$   
serta  $V_0 = 9.425983953337687$

```

function fungsii
options = odeset('RelTol', 1e-4, 'AbsTol', 1e-7);
figure(1);
[t, y] = ode23(@fungsil, [0 600], [50 30 40 15 15],
options);
plot(t, y(:, 1), 'r', t, y(:, 2), 'b', t, y(:, 3),
'g', t, y(:, 4), 'k', t, y(:, 5), 'y--',
'LineWidth', 2.5);
title('Grafik Solusi');
xlabel('time t');
ylabel('S, V, E, I, T');grid;
legend('S', 'V', 'E', 'I', 'T');

```

pada fungsi ini nilainya akan memunculkan grafik solusi yang dapat dilihat pada Gambar 3.3

*Listing program  $R_0 > 1$*

```

function SVEIT = fungsil(t, y)
b = 0.05;
d = 0.5;
e = 0.03;
k = 0.3;
m = 0.0143;
o = 0.2;
p = 0.05;
q = 0.6;
ye = 0.5;
A = 55.496;
a1 = 0.3;
a2 = 0.05;
ei = 0.9;

so=A*(e+q*m)/(p+m+e)
vo=A*(p+(1-q)*m)/(p+m+e)
X=b*ye*(m+a2+d)*(so+o*vo);
Y=(m+ye)*(m+a1+ei)*(m+a2+d);

```

```
Z=d*ei*( (1-k)*ye+ (m+ye)*k);
```

```
Ro=X/(Y-Z)
```

```
SVEIT= [q*m*A-(m+p)*y(1)-b*y(1)*y(4)+e*y(2);  
       (1-q)*m*A+p*y(1)-b*o*y(2)*y(4)-  
(m+e)*y(2);  
       b*y(4)*(y(1)+o*y(2))-(m+ye)*y(3)+(1-  
k)*d*y(5);  
       ye*y(3)-(m+a1+ei)*y(4)+k*d*y(5);  
       ei*y(4)-(m+a2+d)*y(5)];
```

Ini akan mengakibatkan  $R_0 = 3.28988805108136$

```
function fungsii2  
options = odeset('RelTol', 1e-4, 'AbsTol', 1e-7);  
figure(1);  
[t, y] = ode23(@fungsi1, [0 600], [50 30 40 15 15],  
options);  
plot(t, y(:, 1), 'r', t, y(:, 2), 'b', t, y(:, 3),  
'g', t, y(:, 4), 'k', t, y(:, 5), 'y--',  
'LineWidth', 2.5);  
title('Grafik Solusi');  
xlabel('time t');  
ylabel('S, V, E, I, T');grid;  
legend('S', 'V', 'E', 'I', 'T');
```

pada fungsi ini nilainya akan memunculkan grafik solusi yang dapatdilihat pada Gambar 3.4,

*Listing program* untuk mencari akar persamaan  $H(I)$  dan membutukan bahwa variabel memehuni kriteria Routh-Hurwitz

```
Clc  
clear all;  
syms 'I' positive  
b =0.5;  
d =0.5;  
e =0.03;  
k =0.3;  
m =0.0143;  
o =0.2;  
p =0.05;  
q =0.6;  
ye =0.00368;  
A =55.496;
```

```

a1 =0.3;
a2 =0.05;
ei =0.9;

H1=(q* (m+e+b*o*I(1))+e* (1-q))+o* ((1-
q)* (p+m+b*I(1))+p*q);
H2=(p+m+b*I(1))* (m+e+b*o*I(1))-p*e;
H3=(m+ye)* ((m+a1+ei)*(m+a2+d)-k*d*ei)-(1-
k)*d*ei*ye;
H4=b*ye*(m+a2+d)*m*A;
H=H1/H2-H3/H4;
ii=solve(H, I);

Ai= m+ye;
B= m+a1+ei;
C= m+a2+d;
D= m+p+b*ii;
F= m+e+b*o*ii;

se =m*A* (q*F+e* (1-q))/ (D*F-p*e)
ve =m*A* ((1-q)*D+p*q)/ (D*F-p*e)
ee =ii* (B*C-k*d*ei)/ (C*ye)
ii
te =(ei*ii/C)

B1=D+F+Ai+B+C;
B2=(C*B+Ai*B+Ai*C-k*ei*d-
ye*b* (se+o*ve)+(D+F)* (C+B+Ai)+D*F-p*e);
B3=Ai*B*C- ye*b* (se+o*ve)*C-(1-k)*d*ei*ye-
Ai*k*ei*d+(D+F)* (C*B+Ai*B+Ai*C-Ai*B-k*ei*d-
ye*b* (se+o*ve))+(D*F-
p*e)* (C+B+Ai)+ye*b*se*b*ii+ye*b*o*ve*b*o*ii;
B4=(D+F)* (Ai*B*C-ye*b* (se+o*ve)*C-(1-k)*d*ei*ye-
Ai*k*ei*d)+(D*F-p*e)* (C*B+Ai*B+Ai*C-k*ei*d-
ye*b* (se+o*ve))+ye*b*se*C*b*ii+(p*b*o*ii+b*ii*F)*ye
*b*se+C*ye*b*o*ve*b*o*ii+ye*b*o*ve*(D*b*o*ii+b*ii*e
);
B5=(D*F-p*e)* (Ai*B*C-ye*b* (se+o*ve)*C-(1-
k)*d*ei*ye-
Ai*k*ei*d)+ye*b*se*C*(p*b*o*ii+b*ii*F)+C*ye*b*o*ve*
(D*b*o*ii+B*ii*e);

RH1=B1

```

$$RH2=B1*B2-B3$$

$$RH3=B1*B2*B3+B1*B5-B1*B1*B4-B3*B3$$

Berdasarkan *listing program* di atas, dapat diketahui bahwa

$$S^* = 6.59657886442657$$

$$V^* = 11.4909765646295$$

$$E^* = 2.34565731979162$$

$$I^* = 1.20282032280605$$

$$T^* = 1.9183737205838$$

$$D_1 = 2.47366921936836 > 0$$

$$D_2 = 3.97772442110182 > 0$$

$$D_3 = 0.457722203493536 > 0$$

$$R_0 = 3.28988805108136 > 0$$

