BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Model Regresi Linier

Analisis regresi adalah analisis untuk mengetahui hubungan dan model matematis antara peubah respon (y) dan satu atau lebih peubah penjelas (X). Secara umum hubungan tersebut dinyatakan sebagai berikut:

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j X_{ij} + \varepsilon_i \qquad (2.1)$$

i = 1,...,n , j = 1,...,k
n = banyaknya unit pengamatan
k = banyaknya peubah penjelas

di mana β_0, β_j merupakan parameter regresi dan ε_i merupakan galat regresi dengan asumsi $\varepsilon_i \sim NIID(0, \sigma^2)$. Persamaan (2.1) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad (2.2)$$

di mana **y** = vektor peubah respon berukuran n x 1
X = matriks peubah penjelas berukuran n x (k+1)
$\boldsymbol{\beta}$ = vektor parameter regresi berukuran (k+1) x 1
$\boldsymbol{\varepsilon}$ = vektor galat berukuran n x 1

Nilai parameter regresi $\boldsymbol{\beta}$ diduga oleh $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$ berlandaskan beberapa asumsi, yakni:

1. $E(\varepsilon_i) = 0$
2. $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$
3. $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$, untuk $i \neq j$

(Draper dan Smith, 1992).

2.2 Model Regresi Spasial

Model regresi spasial adalah model yang terbentuk dari regresi umum yang mendapatkan pengaruh spasial (lokasi). Pada model ini nilai respon pada lokasi tetangga diduga dapat mempengaruhi model akibat adanya pengaruh spasial.

Data spasial adalah hasil pengukuran yang memuat informasi tentang lokasi yang berasal dari lokasi berbeda dan mengindikasikan dependensi antara hasil pengukuran dengan lokasi (Cressie, 1993).

Anselin (1988), menyajikan dua tipe dependensi yaitu dependensi spasial pada nilai respon dan nilai galat. Dependensi didasarkan pada hukum I Tobler (1979) "*everything is related to everything else, but near things are more related than distant things*" yang menjelaskan bahwa segala sesuatu saling berhubungan satu sama lain, tetapi sesuatu yang dekat berpengaruh lebih besar daripada sesuatu yang jauh. Hukum I Tobler ini menjadi dasar dalam pembahasan permasalahan yang berhubungan dengan pengaruh spasial. Model spasial dependensi umum dikembangkan menggunakan data *cross section* :

$$y_i = \rho \sum_{j=1}^{n} W_{ij} y_j + \sum_{t=1}^{k} X_{it}\beta_t + u_i$$

$$u_i = \lambda \sum_{j=1}^{n} W_{ij} u_j + \varepsilon_i$$

i, j = 1,...,n , t = 1,...,k
i, j = banyaknya unit pengamatan
k = banyaknya peubah penjelas

atau dapat dinyatakan dalam bentuk matriks:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{y} = \rho \boldsymbol{W_1} \boldsymbol{y} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u} \\ &\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{W_2} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\varepsilon} \\ &\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\boldsymbol{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I}) \end{aligned} \qquad (2.3)$$

di mana **y** = vektor peubah respon berukuran *n x* 1
X = matriks peubah penjelas berukuran *n x (k*+1*)*
$\boldsymbol{\beta}$ = vektor parameter berukuran *(k*+1*) x* 1
ρ = parameter skalar (koefisien) *spatial autoregressive*
λ = parameter skalar (koefisien) *spatial autoregressive disturbance* (*spatial error*)
$\boldsymbol{W_1}$ dan $\boldsymbol{W_2}$ = matriks penimbang spasial terstandarisasi berordo *n*
$\boldsymbol{u}$ = vektor *disturbance* (galat) model *spatial autoregressive* berukuran *n x* 1
$\boldsymbol{\varepsilon}$ = vektor inovasi (galat model *spatial error)* berukuran *n x*1

Beberapa model yang dapat dibentuk dari model regresi spasial umum (2.3) adalah:

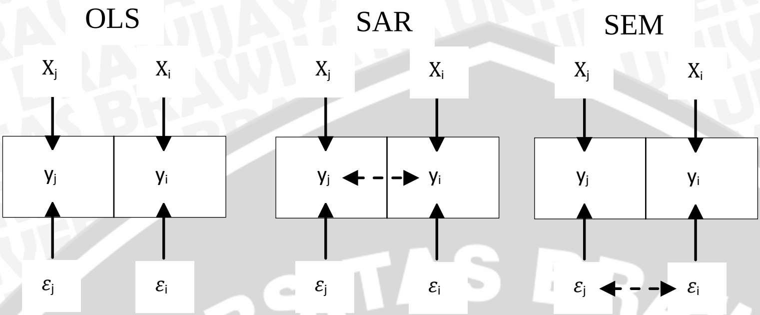
1. Jika $\rho = 0$ dan $\lambda = 0$, persamaan (2.3) menjadi:
   $$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{u}\,, \qquad (2.4)$$
   yang merupakan model regresi linier klasik tanpa pengaruh spasial.
2. Jika $\rho \neq 0$ dan $\lambda = 0$, persamaan (2.3) menjadi:
   $$\boldsymbol{y} = \rho \boldsymbol{W_1 y} + \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{u}\,, \qquad (2.5)$$
   yaitu model *spatially lagged dependent variable* atau spasial lag atau biasa juga disebut model SAR.

   Spatial autoregressive terjadi akibat adanya dependensi nilai respon antar lokasi. Jika lokasi i berhubungan dengan lokasi j maka nilai respon pada lokasi i adalah fungsi dari nilai respon pada lokasi j di mana i ≠ j atau $y_i = f(y_j)$, i ≠ j

3. Jika $\rho = 0$ dan $\lambda \neq 0$, maka persamaan (2.3) menjadi:
   $$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \lambda \boldsymbol{W_2 u} + \boldsymbol{\varepsilon}\,, \qquad (2.6)$$
   model *spatial autoregressive disturbance* atau biasa disebut model SEM.

   Spasial error terjadi akibat adanya dependensi nilai galat pada suatu lokasi dengan nilai galat di lokasi lain. Hal ini terjadi jika terdapat peubah-peubah yang mempengaruhi peubah respon namun tidak dimasukkan ke dalam model. Jika lokasi i berhubungan dengan lokasi j maka nilai galat pada lokasi i adalah fungsi dari nilai galat pada lokasi j di mana i ≠ j atau $\boldsymbol{u}_i = f(\boldsymbol{u}_j)$, i ≠ j.

4. Jika $\rho \neq 0$ dan $\lambda \neq 0$, maka persamaan (2.3) menjadi:
   $$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \rho \boldsymbol{W_1 y} + \lambda \boldsymbol{W_2 u} + \boldsymbol{\varepsilon}\,, \qquad (2.7)$$
   yang merupakan model gabungan antara model SAR dan SEM disebut model SARAR. Model ini terbentuk jika terdapat dua tipe dependensi yaitu dependensi antar lokasi pada respon dan galat. Dengan kata lain model ini mengandung dependensi antar lokasi pada respon sekaligus galat.



Gambar 2.1. Ilustrasi Model Spasial

Berdasarkan penjelasan di atas maka model yang dapat dibentuk berdasarkan persamaan (2.3) adalah:

Tabel 2.1. Beragam Model Berdasarkan Koefisien *Spatial Autoregressive* dan *Spatial Error*

Model	$\boldsymbol{y} = \rho \boldsymbol{W_1 y} + \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{u}$ $\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{W_2 u} + \boldsymbol{\varepsilon}$	
1. OLS	$\rho = 0$, $\lambda = 0$	$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{u}$
2. SAR	$\rho \neq 0$, $\lambda = 0$	$\boldsymbol{y} = \rho \boldsymbol{W_1 y} + \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{u}$
3. SEM	$\rho = 0$, $\lambda \neq 0$	$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \lambda \boldsymbol{W_2 u} + \boldsymbol{\varepsilon}$
4. SARAR	$\rho \neq 0$, $\lambda \neq 0$	$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \rho \boldsymbol{W_1 y} + \lambda \boldsymbol{W_2 u} + \boldsymbol{\varepsilon}$

2.3 Uji Lagrange Multiplier

Dependensi antar lokasi adalah pembeda antara model regresi umum dan model regresi spasial. Jika unit pengamatan pada peubah respon saling berhubungan, atau galat antar lokasi tidak bebas, maka model regresi spasial dapat dibentuk (Kelejian dan Prucha, 1998).

Dalam analisis regresi (dependensi) spasial, terdapat tahapan penting yang harus dilakukan yaitu pengujian terhadap pengaruh spasial menggunakan statistik uji Lagrange multiplier (LM). Apabila tahap ini diabaikan akan menghasilkan penduga bersifat tidak efisien dan kesimpulan yang dihasilkan tidak tepat.

Uji LM adalah suatu uji yang didasarkan pada pendugaan di bawah kebenaran hipotesis nol. Sebaran yang mengandung *k* parameter yang tidak diketahui, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_k)'$ mempunyai fungsi *likelihood* $L(\boldsymbol{\theta})$ dan fungsi *ln likelihood* $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})$. Misalkan pengujian hipotesis akan dilakukan terhadap *p* parameter di mana $p < k$, yaitu:

$H_0: h_j(\boldsymbol{\theta}) = 0, \quad j = 1,2, \dots, p$

maka akan diperoleh suatu fungsi Lagrangian berikut:

$\mathbb{L} = \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) - \sum_{j=1}^{p} \omega_j h_j(\boldsymbol{\theta})$

Turunan pertama fungsi Lagrangian terhadap parameter θ dan ω_j adalah:

$$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \widetilde{\boldsymbol{D}} - \widetilde{\boldsymbol{H}}\widetilde{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{0}$$

$$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \omega} = h_j(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}) = 0$$

di mana $\widetilde{\boldsymbol{D}}$ = vektor berukuran *k x 1*, $\left[\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \theta}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}})\right]$.

$\widetilde{\boldsymbol{H}}$ = matriks berukuran *k x p* ,$\left[\frac{\partial h_j}{\partial \theta}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}})\right]$.

$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}$ = vektor *Lagrange multiplier* berukuran *p x 1*.

Jika H_0benar statistik uji LM didefinisikan (Breusch dan Pagan, 1980) adalah:

$$\boldsymbol{LM} = \widetilde{\boldsymbol{D}}'\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{\theta}^{\;-1}\widetilde{\boldsymbol{D}} \sim \chi^2_{(p)} \tag{2.8}$$

di mana $\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{\theta}$ adalah matriks informasi berordo *k* yang unsur-unsurnya merupakan turunan kedua fungsi *ln likelihood* terhadap setiap parameter:

$$\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{\theta} = E\left[-\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{\boldsymbol{\partial\theta\partial\theta}}\right] \tag{2.9}$$

Persamaan (2.3) dapat ditulis:

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W_1})^{-1}\boldsymbol{X\beta} + (\boldsymbol{I} - \lambda\boldsymbol{W_2})^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}$$

didapatkan dari penguraian

$$\begin{gathered}\boldsymbol{y} = \rho \boldsymbol{W_1}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} - \rho \boldsymbol{W_1}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{u} \\ (\boldsymbol{I} - \rho \boldsymbol{W_1})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{I} - \rho \boldsymbol{W_1})^{-1}\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{u}\end{gathered} \tag{2.10}$$

dan

$$\begin{gathered}\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{W_2}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{u} - \lambda \boldsymbol{W_2}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\varepsilon} \\ (\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W_2})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{u} = (\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W_2})^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}\end{gathered} \tag{2.11}$$

Substitusikan persamaan (2.11) ke persamaan (2.10), sehingga diperoleh:

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{I} - \rho \boldsymbol{W_1})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + (\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W_2})^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} \\ (\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W_2})^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{I} - \rho \boldsymbol{W_1})\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}\end{gathered}$$

Mengalikan kedua ruas dengan $(\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W_2})$, menghasilkan:

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W_2})(\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W_2})^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W_2})[(\boldsymbol{I} - \rho \boldsymbol{W_1})\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}] \\ \boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W_2})[(\boldsymbol{I} - \rho \boldsymbol{W_1})\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}]\end{gathered} \tag{2.12}$$

Jacobian untuk persamaan (2.12) adalah:

$$J = \left|\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right| = |\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W_2}||\boldsymbol{I} - \rho \boldsymbol{W_1}| \tag{2.13}$$

Dengan fungsi *Gaussian* diperoleh fungsi *likelihood* untuk galat:

$$L(\sigma^2, \boldsymbol{\varepsilon}) = c(\boldsymbol{\varepsilon})|\boldsymbol{V}|^{-1/2} exp\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}\right] \tag{2.14}$$

di mana **V** adalah matriks ragam-peragam dari $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathbf{V} = \sigma^2\boldsymbol{I}$. Nilai $|\boldsymbol{V}| = \sigma^{2n}|\boldsymbol{I}|$, sedangkan $\mathbf{V}^{-1} = \sigma^{-2}\boldsymbol{I}$, sehingga:

$$L(\sigma^2, \boldsymbol{\varepsilon}) = c(\boldsymbol{\varepsilon})(\sigma^{2n})^{-\frac{1}{2}} exp\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}'\sigma^{-2}\boldsymbol{\varepsilon}\right]$$

$$L(\sigma^2, \boldsymbol{\varepsilon}) = c(\boldsymbol{\varepsilon})(\sigma^{2n})^{-\frac{1}{2}} exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}\right] \tag{2.15}$$

Fungsi *likelihood* diperoleh dengan mensubstitusikan $\boldsymbol{\varepsilon}$ pada persamaan (2.12) ke persamaan (2.15) dan mengalikan dengan *Jacobian*, menghasilkan:

$$\begin{gathered}L(\rho, \lambda, \sigma^2, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{y}) = c(\boldsymbol{y})(\sigma^{2n})^{-\frac{1}{2}}|\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W_2}||\boldsymbol{I} - \rho \boldsymbol{W_1}| \\ exp\Big[-\frac{1}{2\sigma^2}\{(\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W_2})[(\boldsymbol{I} - \rho \boldsymbol{W_1})\boldsymbol{y} - \\ \boldsymbol{X\beta}]\}'\{(\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W_2})[(\boldsymbol{I} - \rho \boldsymbol{W_1})\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}]\}\Big]\end{gathered} \tag{2.16}$$

Sedangkan fungsi *ln likelihoood* adalah:

$$\mathcal{L}(\rho,\lambda,\sigma^2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y}) = c(\boldsymbol{y}) - \frac{n}{2}ln(\sigma^2) + ln|\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W_2}| + \boldsymbol{ln}|\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W_1}| + - \frac{1}{2\sigma^2}\{(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W_2})[(\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W_1})\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta}]\}' \{(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W_2})[(\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W_1})\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta}]\} \quad (2.17)$$

i) Pengujian *Spatial Autoregressive* dengan LM

Model SAR pada persamaan (2.5):

$$\boldsymbol{y} = \rho\boldsymbol{W_1 y} + \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{u}$$

di mana $\boldsymbol{u} \sim N(\boldsymbol{0},\sigma^2\boldsymbol{I})$ adalah galat, yang dapat ditulis sebagai:

$$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W_1})\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}$$

Jacobian untuk persamaan galat adalah:

$$J = \left|\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{y}}\right| = |\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W_1}|$$

maka diperoleh fungsi *likelihood*:

$$L(\rho,\sigma^2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y}) = c(\sigma^{2n})^{-\frac{1}{2}}|\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W_1}| \; exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\{[(\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W_1})\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta}]'[(\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W_1})\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta}]\}\right] \quad (2.18)$$

Sedangkan fungsi *ln likelihood* adalah:

$$\mathcal{L}(\rho,\sigma^2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y}) = c - \frac{n}{2}ln(\sigma^2) + \boldsymbol{ln}|\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W_1}| + - \frac{1}{2\sigma^2}\{[(\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W_1})\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta}]'[(\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W_1})\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta}]\} \quad (2.19)$$

Hipotesis yang melandasi pengujian adalah:

$H_0: \rho = 0$ (tidak terdapat pengaruh *spatial autoregressive*)

$H_1: \rho \neq 0$ (terdapat pengaruh *spatial autoregressive*)

Fungsi Lagrangian yang terbentuk adalah:

$$\mathbb{L} = \mathcal{L}(\rho,\sigma^2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y}) - \omega h(\rho)$$

$$\frac{\partial\mathbb{L}}{\partial\rho} = \frac{\partial\mathcal{L}(\rho,\sigma^2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y})}{\partial\rho} - \frac{\partial\big(\omega h(\rho)\big)}{\partial\rho}$$

Berdasarkan turunan pertama fungsi Lagrangian dengan batasan (*constraint*) $h(\rho) = \rho$,

$$\frac{\partial\mathbb{L}}{\partial\rho} = \frac{\partial\mathcal{L}(\rho,\sigma^2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y})}{\partial\rho} - \widetilde{\omega} = 0$$

didapatkan

$$\widetilde{\omega} = \frac{\partial \mathcal{L}(\rho, \sigma^2, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{y})}{\partial \rho}$$
$$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \omega} = -h(\rho) = -\rho = 0$$

maka diperoleh *Lagrange multiplier* :

$$\widetilde{D}_\rho = \widetilde{\omega} = \frac{\partial \mathcal{L}(\rho, \sigma^2, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{y})}{\partial \rho}$$

Turunan pertama fungsi *ln likelihood* $\partial \mathcal{L}(\rho, \sigma^2, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{y})$ terhadap setiap parameter:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\rho, \sigma^2, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{y})}{\partial \rho} = -tr(\boldsymbol{I} - \rho \boldsymbol{W_1})^{-1}\boldsymbol{W_1} + \frac{1}{\sigma^2}[(\boldsymbol{I} - \rho \boldsymbol{W_1})\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}]' \boldsymbol{W_1 y}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}(\rho, \sigma^2, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \frac{1}{\sigma^2}(\boldsymbol{X'}[(\boldsymbol{I} - \rho \boldsymbol{W_1})\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}])$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}(\rho, \sigma^2, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{y})}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}([(\boldsymbol{I} - \rho \boldsymbol{W_1})\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}]'[(\boldsymbol{I} - \rho \boldsymbol{W_1})\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}])$$

Magnus (1978) membentuk matriks formulasi dengan unsur-unsur berupa turunan kedua fungsi *ln likelihood* terhadap setiap parameter $\partial^2 \mathcal{L}(\rho, \sigma^2, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{y})$, yaitu:

$$\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_\theta = E\left[-\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}}\right]$$
$$\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_\theta = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \rho \partial \rho} & -\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \rho \partial \boldsymbol{\beta}} & -\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \rho \partial \sigma^2} \\ -\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \rho} & -\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}} & -\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \sigma^2} \\ -\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma^2 \partial \rho} & -\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma^2 \partial \boldsymbol{\beta}} & -\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma^2 \partial \sigma^2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\rho,\sigma^2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y})}{\partial\rho\partial\rho} = \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial \mathcal{L}(\rho,\sigma^2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y})}{\partial\rho}\right)$$

$$= -tr(\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W_1})^{-2}\boldsymbol{W_1}^{\boldsymbol{2}} - \frac{1}{\sigma^2}(\boldsymbol{W_1}\boldsymbol{y})'\boldsymbol{W_1}\boldsymbol{y}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\rho,\sigma^2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\rho} = -\frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{y}'\boldsymbol{W_1}'\boldsymbol{X}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\rho,\sigma^2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y})}{\partial\sigma^2\partial\rho} = -\frac{1}{\sigma^4}\left(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{W_1}\boldsymbol{y} - \rho\boldsymbol{y}'\boldsymbol{W}_1'\boldsymbol{W_1}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'\boldsymbol{W}_1'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\rho,\sigma^2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}} = -\frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\rho,\sigma^2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y})}{\partial\rho\partial\boldsymbol{\beta}} = -\frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W_1}\boldsymbol{y}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\rho,\sigma^2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y})}{\partial\sigma^2\partial\boldsymbol{\beta}} = -\frac{1}{\sigma^4}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}'\rho\boldsymbol{W_1}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\rho,\sigma^2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y})}{\partial\sigma^2\partial\sigma^2}$$

$$= -\frac{n}{2\sigma^4}$$
$$-\frac{1}{\sigma^6}([(\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W_1})\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}]'[(\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W_1})\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}])$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\rho,\sigma^2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y})}{\partial\rho\partial\sigma^2} = -\frac{1}{\sigma^4}\left(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{W_1}\boldsymbol{y} - \rho\boldsymbol{y}'\boldsymbol{W}_1'\boldsymbol{W_1}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'\boldsymbol{W}_1'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\rho,\sigma^2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\sigma^2} = -\frac{1}{\sigma^4}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}'\rho\boldsymbol{W_1}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})$$

Unsur-unsur matriks informasi yang diperoleh adalah:

$$\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{\rho\rho} = E\left[-\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\rho,\sigma^2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y})}{\partial\rho\partial\rho}\right]$$
$$= tr(\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W_1})^{-2}\boldsymbol{W_1}^{\boldsymbol{2}}$$
$$+ tr\left((\boldsymbol{W_1}(\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W_1})^{-1})'(\boldsymbol{W_1}(\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W_1})^{-1})\right)$$
$$+ \left[\frac{1}{\sigma^2}(\boldsymbol{W_1}(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W_1})^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{W_1}'((\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W_1})^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})')\right]$$

Lambangkan $\boldsymbol{W_A} = \boldsymbol{W_1}(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W_1})^{-1}$, maka unsur (1,1) matriks informasi adalah:

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{\rho\rho} = tr\,(\boldsymbol{W_A})^2 + tr(\boldsymbol{W_A}'\boldsymbol{W_A}) + \frac{1}{\sigma^2}(\boldsymbol{W_A X\beta})'(\boldsymbol{W_A X\beta})$$

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}\rho} = \tilde{\boldsymbol{\psi}}_{\rho\boldsymbol{\beta}} = E\left[-\frac{\partial^2\mathcal{L}(\rho,\sigma^2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y})}{\partial\rho\partial\boldsymbol{\beta}}\right] = \frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W_1}(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W_1})^{-1}\boldsymbol{X\beta}$$

Lambangkan $\boldsymbol{W_A} = \boldsymbol{W_1}(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W_1})^{-1}$, maka unsur (1,2) dan (2,1) matriks informasi adalah: $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}\rho} = \tilde{\boldsymbol{\psi}}_{\rho\boldsymbol{\beta}} = \frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W_A X\beta}$

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{\sigma^2\rho} = \tilde{\boldsymbol{\psi}}_{\rho\sigma^2} = E\left[-\frac{\partial^2\mathcal{L}(\rho,\sigma^2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y})}{\partial\rho\partial\sigma^2}\right] = \frac{1}{\sigma^2}tr(\boldsymbol{W_1}(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W_1})^{-1})$$

Lambangkan $\boldsymbol{W_A} = \boldsymbol{W_1}(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W_1})^{-1}$, maka unsur (1,3) dan (3,1) matriks informasi adalah: $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{\sigma^2\rho} = \tilde{\boldsymbol{\psi}}_{\rho\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}tr(\boldsymbol{W_A})$

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta\beta}} = E\left[-\frac{\partial^2\mathcal{L}(\rho,\sigma^2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}}\right] = \frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$$

sehingga unsur (2,2) matriks informasi adalah: $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta\beta}} = \frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{\sigma^2\boldsymbol{\beta}} = \tilde{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}\sigma^2} = E\left[-\frac{\partial^2\mathcal{L}(\rho,\sigma^2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\sigma^2}\right] = \frac{1}{\sigma^4}\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{X\beta} - \boldsymbol{X\beta}) = 0$$

sehingga unsur (2,3) dan (3,2) matriks informasi adalah: $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{\sigma^2\boldsymbol{\beta}} = \tilde{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}\sigma^2} = 0$

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{\sigma^2\sigma^2} = E\left[-\frac{\partial^2\mathcal{L}(\rho,\sigma^2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y})}{\partial\sigma^2\partial\sigma^2}\right]$$

$$= \frac{n}{2\sigma^4} + \frac{1}{\sigma^6}[(\boldsymbol{X\beta} - \boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{X\beta} - \boldsymbol{X\beta})] = \frac{n}{2\sigma^4}$$

sehingga unsur (3,3) matriks informasi adalah: $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{\sigma^2\sigma^2} = \frac{n}{2\sigma^4}$

Unsur-unsur matriks informasi ini membentuk matriks informasi :

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{\theta} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} tr\,(\boldsymbol{W_A})^2 + tr(\boldsymbol{W_A}'\boldsymbol{W_A}) \\ + \frac{1}{\sigma^2}(\boldsymbol{W_A X\beta})'(\boldsymbol{W_A X\beta}) \end{matrix} & \frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W_A X\beta} & \frac{1}{\sigma^2}tr(\boldsymbol{W_A}) \\ \frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W_A X\beta} & \frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} & 0 \\ \frac{1}{\sigma^2}tr(\boldsymbol{W_A}) & 0 & \frac{n}{2\sigma^4} \end{pmatrix}$$

di mana $\boldsymbol{W_A} = \boldsymbol{W_1}(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W_1})^{-1}$

Unsur matriks informasi (2,3) dan (3,2) bernilai 0 sehingga cukup memperhatikan kebalikan untuk:

$$\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{\theta}^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} tr\,(\boldsymbol{W_A})^2 + tr(\boldsymbol{W_A}'\boldsymbol{W_A}) \\ +\frac{1}{\sigma^2}(\boldsymbol{W_A X\beta})'(\boldsymbol{W_A X\beta}) \end{matrix} & \frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W_A X\beta} \\ \frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W_A X\beta} & \frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{X'X} \end{pmatrix}^{-1}$$

Karena $\boldsymbol{W_A} = \boldsymbol{W_1}(\boldsymbol{I} - \rho \boldsymbol{W_1})^{-1}$ dan ρ = 0, maka $\boldsymbol{W_A} = \boldsymbol{W_1}$ sehingga dihasilkan:

$$\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{\theta}^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} tr\,(\boldsymbol{W_1})^2 + tr(\boldsymbol{W_1}'\boldsymbol{W_1}) \\ +\frac{1}{\sigma^2}(\boldsymbol{W_1 X\beta})'(\boldsymbol{W_1 X\beta}) \end{matrix} & \frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W_1 X\beta} \\ \frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W_1 X\beta} & \frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{X'X} \end{pmatrix}^{-1}$$

Unsur yang bersesuaian dengan ρ yaitu $\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{\rho\rho}^{-1}$ menghasilkan:

$$\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{\rho\rho}^{-1} = \frac{\frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{X'X}}{\left(tr\,(\boldsymbol{W_1})^2 + tr(\boldsymbol{W_1}'\boldsymbol{W_1}) + \frac{1}{\sigma^2}(\boldsymbol{W_1 X\beta})'(\boldsymbol{W_1 X\beta})\right)\frac{1}{\sigma^2}X'X - \frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W_1 X\beta}\frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W_1 X\beta}}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{\rho\rho}^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{\sigma^2}\left(\sigma^2\left(tr\,(\boldsymbol{W_1})^2 + tr(\boldsymbol{W_1}'\boldsymbol{W_1})\right) + (\boldsymbol{W_1 X\beta})'(\boldsymbol{W_1 X\beta}) - (\boldsymbol{W_1 X\beta})(\boldsymbol{W_1 X\beta})'\right)}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{\rho\rho}^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{\sigma^2}\left(\sigma^2\left(tr\,(\boldsymbol{W_1})^2 + tr(\boldsymbol{W_1}'\boldsymbol{W_1})\right) + (\boldsymbol{W_1 X\beta})'(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X}')(\boldsymbol{W_1 X\beta})\right)}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{\rho\rho}^{-1} = \frac{1}{\left[(\boldsymbol{W_1 X\beta})'(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X}')(\boldsymbol{W_1 X\beta}) + \left(tr\,(\boldsymbol{W_1})^2 + tr(\boldsymbol{W_1}'\boldsymbol{W_1})\right)\sigma^2\right]/\sigma^2}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{\rho\rho}^{-1} = \frac{1}{\left[(\boldsymbol{W_1 X\beta})'(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X}')(\boldsymbol{W_1 X\beta}) + tr\left[(\boldsymbol{W_1'} + \boldsymbol{W_1})\,\boldsymbol{W_1}\right]\sigma^2\right]/\sigma^2}$$

Dengan melambangkan
$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X}'$ dan $\boldsymbol{T} = tr\left[(\boldsymbol{W_1'} + \boldsymbol{W_1})\,\boldsymbol{W_1}\right]$ akan dihasilkan:

$$\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{\rho\rho}^{-1} = \frac{1}{[(\boldsymbol{W_1 X\beta})'\boldsymbol{M}(\boldsymbol{W_1 X\beta}) + \boldsymbol{T}\,\sigma^2]/\sigma^2}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{\rho\rho}^{-1} = \frac{1}{[\boldsymbol{A} + \boldsymbol{T}]}$$

di mana $\boldsymbol{A} = \sigma^{-2}(\boldsymbol{W_1 X\beta})'\boldsymbol{M}(\boldsymbol{W_1 X\beta})$

Pengujian terhadap hipotesis $H_0: \rho = 0$ lawan $H_1: \rho \neq 0$, dilandasi pada nilai $\widetilde{D}_\rho$:

$$\widetilde{D}_\rho = -tr(\boldsymbol{I} - 0\boldsymbol{W_1})^{-1}\boldsymbol{W_1} + \frac{1}{\sigma^2}[(\boldsymbol{I} - 0\boldsymbol{W_1})\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}]'\boldsymbol{W_1 y}$$

$$\widetilde{D}_\rho = -tr(\boldsymbol{W_1}) + \frac{1}{\sigma^2}[\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}]'\boldsymbol{W_1 y}$$

Karena unsur-unsur diagonal utama matriks penimbang $\boldsymbol{W_1}$ bernilai nol, maka $tr(\boldsymbol{W_1}) = \boldsymbol{0}$, sedangkan $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\hat{\beta}}$ adalah nilai vektor galat dari model regresi OLS, maka diperoleh :

$$\widetilde{D}_\rho = \frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{e}'\boldsymbol{W_1 y}$$

Dengan demikian statistik uji LM untuk model SAR sebagai berikut:

$$LM_\rho = \widetilde{D}_\rho{}' \widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{\rho\rho}{}^{-1}\widetilde{D}_\rho$$

$$LM_\rho = \left(\frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{e}'\boldsymbol{W_1 y}\right)'(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{T})^{-1}\left(\frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{e}'\boldsymbol{W_1 y}\right)$$

$$LM_\rho = \left(\frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{e}'\boldsymbol{W_1 y}\right)^2(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{T})^{-1} \sim \chi^2_{(1)} \qquad (2.20)$$

di mana $A = \sigma^{-2}(\boldsymbol{W_1 X\beta})'\boldsymbol{M}(\boldsymbol{W_1 X\beta})$

$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'$

H_0 akan ditolak jika LM > $\chi^2_{(1)}$, maka terdapat pengaruh *spatial autoregressive*. Keputusan juga dapat dibuat dengan membandingkan *p-value* = $P(\chi^2_{(1)} > LM)$ dan α. Jika $p - value < \alpha$ maka H_0ditolak sehingga disimpulkan terdapat pengaruh *spatial autoregressive*.

ii) Pengujian *Spatial Error* dengan LM

Model SEM pada persamaan (2.6) dapat ditulis ulang:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{W_2 u} + \boldsymbol{\varepsilon}$$
$$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{I} - \lambda\boldsymbol{W_2})^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}$$

Dengan demikian: $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + (\boldsymbol{I} - \lambda\boldsymbol{W_2})^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})(\boldsymbol{I} - \lambda\boldsymbol{W_2})$$

Karena galat $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I})$, fungsi *Jacobian* untuk persamaan galat adalah:

$$J = \left|\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{y}}\right| = |\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W_2}|$$

maka diperoleh fungsi *likelihood*:

$$L(\lambda, \sigma^2, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{y}) = c(\sigma^{2n})^{-\frac{1}{2}} |\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W_2}| \; exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\{[(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})(\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W_2})]'[(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})(\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W_2})]\}\right] \tag{2.21}$$

Sedangkan fungsi *ln likelihoood* adalah:

$$\mathcal{L}(\lambda, \sigma^2, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{y}) = c - \frac{n}{2} ln(\sigma^2) + ln|\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W_2}| + - \frac{1}{2\sigma^2}\{[(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})(\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W_2})]'[(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})(\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W_2})]\} \tag{2.22}$$

Hipotesis yang melandasi pengujian adalah:

$H_0 : \lambda = 0$ (tidak terdapat pengaruh *spatial error*)

$H_1 : \lambda \neq 0$ (terdapat pengaruh *spatial error*)

Fungsi Lagrangian yang akan terbentuk adalah:

$\mathbb{L} = \mathcal{L}(\lambda, \sigma^2, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{y}) - \omega h(\lambda)$

Berdasarkan turunan pertama fungsi Lagrangian dengan batasan (*constraint*) $h(\lambda) = \lambda$,

$$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \lambda} = \frac{\partial \mathcal{L}(\lambda, \sigma^2, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{y})}{\partial \lambda} - \tilde{\omega} = 0$$

didapatkan

$$\tilde{\omega} = \frac{\partial \mathcal{L}(\lambda, \sigma^2, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{y})}{\partial \lambda}$$

$$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \omega} = -h(\lambda) = -\lambda = 0$$

maka diperoleh *Lagrange multiplier* :

$$\tilde{D}_\lambda = \tilde{\omega} = \frac{\partial \mathcal{L}(\lambda, \sigma^2, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{y})}{\partial \lambda}$$

Turunan pertama fungsi *ln likelihood* $\partial\mathcal{L}(\lambda,\sigma^2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y})$ terhadap setiap parameter:

$$\frac{\partial\mathcal{L}(\lambda,\sigma^2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y})}{\partial\lambda} = -tr(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W_2})^{-1}\boldsymbol{W_2} + \frac{1}{\sigma^2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W_2})'\boldsymbol{W_2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}(\lambda,\sigma^2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\beta}} = \frac{1}{\sigma^2}\big(\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W_2})'(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W_2})\boldsymbol{y} - \big(\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W_2})'(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W_2})\boldsymbol{X}\big)\boldsymbol{\beta}\big)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}(\lambda,\sigma^2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y})}{\partial\sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}((\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W_2})'(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W_2})(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}))$$

Magnus (1978) membentuk matriks formulasi dengan unsur-unsur berupa turunan kedua fungsi *ln likelihood* terhadap setiap parameter $\partial^2\mathcal{L}(\lambda,\sigma^2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y})$, yaitu:

$$\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_\theta = E\left[-\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}\partial\boldsymbol{\theta}}\right]$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_\theta = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial\lambda\partial\lambda} & -\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial\lambda\partial\boldsymbol{\beta}} & -\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial\lambda\partial\sigma^2} \\ -\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\lambda} & -\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}} & -\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\sigma^2} \\ -\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial\sigma^2\partial\lambda} & -\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial\sigma^2\partial\boldsymbol{\beta}} & -\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial\sigma^2\partial\sigma^2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}(\lambda,\sigma^2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y})}{\partial\lambda\partial\lambda} = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial\mathcal{L}(\lambda,\sigma^2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y})}{\partial\lambda}\right) = -tr(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W_2})^{-2}\boldsymbol{W_2}^{\boldsymbol{2}} - \frac{1}{\sigma^2}\left(\big(\boldsymbol{W_2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})\big)'\boldsymbol{W_2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})\right)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\lambda,\sigma^2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\lambda} = \frac{1}{\sigma^2}\Big(-\big((\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W_2})\boldsymbol{X}\big)'\boldsymbol{W_2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta}) - \big((\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W_2})(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})\big)'\boldsymbol{W_2X}\Big)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\lambda,\sigma^2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y})}{\partial\sigma^2\partial\lambda} = -\frac{1}{\sigma^4}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W_2})'\boldsymbol{W_2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\lambda,\sigma^2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}} = \frac{1}{\sigma^2}\left(-\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W_2})'(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W_2})\boldsymbol{X}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\lambda,\sigma^2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y})}{\partial\lambda\partial\boldsymbol{\beta}} = \frac{1}{\sigma^2}\Big(-\big((\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W_2})\boldsymbol{X}\big)'\boldsymbol{W_2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta}) - \big((\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W_2})(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})\big)'\boldsymbol{W_2X}\Big)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\lambda,\sigma^2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y})}{\partial\sigma^2\partial\boldsymbol{\beta}} = -\frac{1}{\sigma^4}\Big(\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W_2})'(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W_2})\boldsymbol{y} - \big(\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W_2})'(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W_2})\boldsymbol{X}\big)\boldsymbol{\beta}\Big)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\lambda,\sigma^2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y})}{\partial\sigma^2\partial\sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6}\left((\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W_2})'(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W_2})(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})\right)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\lambda,\sigma^2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y})}{\partial\lambda\partial\sigma^2} = -\frac{1}{\sigma^4}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W_2})'\boldsymbol{W_2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\lambda,\sigma^2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\sigma^2} = -\frac{1}{\sigma^4}\Big(\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W_2})'(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W_2})\boldsymbol{y} - \big(\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W_2})'(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W_2})\boldsymbol{X}\big)\boldsymbol{\beta}\Big)$$

Unsur-unsur matriks informasi adalah:

$$\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{\lambda\lambda} = E\left[-\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\lambda,\sigma^2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y})}{\partial\lambda\partial\lambda}\right]$$

$$= tr(\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W_2})^{-2}\boldsymbol{W_2}^{\boldsymbol{2}} + \frac{1}{\sigma^2} tr(\sigma^2(\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W_2})^{-1}\boldsymbol{W_2}\boldsymbol{W_2}'((\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W_2})^{-1})')$$

Lambangkan $\boldsymbol{W_B} = \boldsymbol{W_2}(\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W_2})^{-1}$, maka unsur (1,1) matriks informasi adalah:

$$\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{\lambda\lambda} = tr\,(\boldsymbol{W_B})^2 + tr(\boldsymbol{W_B}'\boldsymbol{W_B})$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}\lambda} = \widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{\lambda\boldsymbol{\beta}} = E\left[-\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\lambda, \sigma^2, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{y})}{\partial\lambda\partial\boldsymbol{\beta}}\right]$$
$$= \frac{1}{\sigma^2}\Big(-\big((\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W_2})\boldsymbol{X}\big)'\boldsymbol{W_2}(\boldsymbol{X\beta} - \boldsymbol{X\beta}) - \big((\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W_2})(\boldsymbol{X\beta} - \boldsymbol{X\beta})\big)'\boldsymbol{W_2}\boldsymbol{X}\Big) = 0$$

sehingga unsur (1,2) dan (2,1) matriks informasi adalah: $\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}\lambda} = \widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{\lambda\boldsymbol{\beta}} = 0$

$$\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{\sigma^2\lambda} = \widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{\lambda\sigma^2} = E\left[-\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\lambda, \sigma^2, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{y})}{\partial\lambda\partial\sigma^2}\right] = \frac{1}{\sigma^2} tr(\boldsymbol{W_2}(\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W_2})^{-1})$$

Lambangkan $\boldsymbol{W_B} = \boldsymbol{W_2}(\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W_2})^{-1}$, maka unsur (1,3) dan (3,1) matriks informasi adalah: $\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{\sigma^2\lambda} = \widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{\lambda\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} tr(\boldsymbol{W_B})$

$$\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta\beta}} = E\left[-\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\lambda, \sigma^2, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}}\right] = \frac{1}{\sigma^2}\big(-\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W_2})'(\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W_2})\boldsymbol{X}\big)$$

sehingga unsur (2,2) matriks informasi adalah:

$$\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta\beta}} = \frac{1}{\sigma^2}\big(-\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W_2})'(\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W_2})\boldsymbol{X}\big)$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{\sigma^2\boldsymbol{\beta}} = \widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}\sigma^2} = E\left[-\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\lambda, \sigma^2, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\sigma^2}\right]$$
$$= \frac{1}{\sigma^4}\Big(\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W_2})'(\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W_2})\boldsymbol{X\beta} - \big(\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W_2})'(\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W_2})\boldsymbol{X\beta}\big)\Big) = 0$$

sehingga unsur (2,3) dan (3,2) matriks informasi adalah: $\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{\sigma^2\boldsymbol{\beta}} = \widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}\sigma^2} = 0$

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{\sigma^2\sigma^2} = E\left[-\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\lambda,\sigma^2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y})}{\partial\sigma^2\partial\sigma^2}\right] = \frac{n}{2\sigma^4} + \frac{1}{\sigma^6}\left((\boldsymbol{X\beta}-\boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W_2})'(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W_2})(\boldsymbol{X\beta}-\boldsymbol{X\beta})\right) = \frac{n}{2\sigma^4}$$

sehingga unsur (3,3) matriks informasi adalah: $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{\sigma^2\sigma^2} = \frac{n}{2\sigma^4}$

Unsur-unsur matriks informasi ini membentuk matriks informasi:

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{\theta} = \begin{pmatrix} tr\,(\boldsymbol{W_B})^2 + tr(\boldsymbol{W_B}'\boldsymbol{W_B}) & 0 & \frac{1}{\sigma^2}tr(\boldsymbol{W_B}) \\ 0 & \frac{1}{\sigma^2}(-\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W_2})'(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W_2})\boldsymbol{X}) & 0 \\ \frac{1}{\sigma^2}tr(\boldsymbol{W_B}) & 0 & \frac{n}{2\sigma^4} \end{pmatrix}$$

di mana $\boldsymbol{W_B} = \boldsymbol{W_2}(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W_2})^{-1}$

Unsur matriks informasi (1,2), (2,1), (2,3) dan (3,2) bernilai 0 sehingga cukup memperhatikan kebalikan untuk:

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{\theta}^{\;\boldsymbol{-1}} = \begin{pmatrix} tr\,(\boldsymbol{W_B})^2 + tr(\boldsymbol{W_B}'\boldsymbol{W_B}) & \frac{1}{\sigma^2}tr(\boldsymbol{W_B}) \\ \frac{1}{\sigma^2}tr(\boldsymbol{W_B}) & \frac{n}{2\sigma^4} \end{pmatrix}^{\boldsymbol{-1}}$$

Karena $\boldsymbol{W_B} = \boldsymbol{W_2}(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W_2})^{-1}$ dan $\lambda = 0$, maka $\boldsymbol{W_B} = \boldsymbol{W_2}$, sehingga diperoleh:

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{\theta}^{\;\boldsymbol{-1}} = \begin{pmatrix} tr\,(\boldsymbol{W_2})^2 + tr(\boldsymbol{W_2}'\boldsymbol{W_2}) & \frac{1}{\sigma^2}tr(\boldsymbol{W_2}) \\ \frac{1}{\sigma^2}tr(\boldsymbol{W_2}) & \frac{n}{2\sigma^4} \end{pmatrix}^{\boldsymbol{-1}}$$

Untuk unsur yang bersesuaian dengan λ yaitu $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{\lambda\lambda}^{\;\boldsymbol{-1}}$ akan diperoleh:

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{\lambda\lambda}^{\;\boldsymbol{-1}} = \frac{\frac{n}{2\sigma^4}}{\frac{n}{2\sigma^4}\left(tr\,(\boldsymbol{W_2})^2 + tr(\boldsymbol{W_2}'\boldsymbol{W_2})\right) - \frac{1}{\sigma^2}tr(\boldsymbol{W_2})\frac{1}{\sigma^2}tr(\boldsymbol{W_2})}$$

Nilai $tr(\boldsymbol{W_2}) = 0$ karena diagonal utama matriks penimbang spasial bernilai 0, sehingga:

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{\lambda\lambda}{}^{-1} = \frac{\frac{n}{2\sigma^4}}{\frac{n}{2\sigma^4}\left(tr\,(\boldsymbol{W_2})^2 + tr(\boldsymbol{W_2}'\boldsymbol{W_2})\right)}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{\lambda\lambda}{}^{-1} = \frac{1}{tr\,(\boldsymbol{W_2})^2 + tr(\boldsymbol{W_2}'\boldsymbol{W_2})}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{\lambda\lambda}{}^{-1} = \frac{1}{tr[(\boldsymbol{W_2}' + \boldsymbol{W_2})\boldsymbol{W_2}]}$$

Lambangkan $T = tr[(\boldsymbol{W_2}' + \boldsymbol{W_2})\boldsymbol{W_2}]$ sehingga diperoleh:

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{\lambda\lambda}{}^{-1} = \frac{1}{T}$$

Pengujian terhadap hipotesis $H_0: \lambda = 0$ lawan $H_1: \lambda \neq 0$, dilandasi pada nilai $\tilde{D}_\lambda$:

$$\tilde{\boldsymbol{D}}_{\boldsymbol{\lambda}} = -tr(\boldsymbol{I} - 0\boldsymbol{W_2})^{-1}\boldsymbol{W_2} + \frac{1}{\sigma^2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{I} - 0\boldsymbol{W_2})'\boldsymbol{W_2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})$$

$$\tilde{\boldsymbol{D}}_{\boldsymbol{\lambda}} = -tr(\boldsymbol{W_2}) + \frac{1}{\sigma^2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})'\boldsymbol{W_2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})$$

Karena unsur-unsur matriks penimbang $\boldsymbol{W_2}$ bernilai nol, maka $tr(\boldsymbol{W_2}) = \boldsymbol{0}$, sedangkan $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ adalah nilai vektor galat model regresi OLS, maka diperoleh :

$$\tilde{\boldsymbol{D}}_{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{e}'\boldsymbol{W_2}\boldsymbol{e}$$

Dengan demikian statistik uji LM untuk model SEM adalah:

$$LM_\lambda = \tilde{\boldsymbol{D}}_{\boldsymbol{\lambda}}'\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{\lambda\lambda}{}^{-1}\tilde{\boldsymbol{D}}_{\boldsymbol{\lambda}}$$

$$LM_\lambda = \left(\frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{e}'\boldsymbol{W_2}\boldsymbol{e}\right)' T^{-1}\left(\frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{e}'\boldsymbol{W_2}\boldsymbol{e}\right)$$

$$LM_\lambda = \left(\frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{e}'\boldsymbol{W_2}\boldsymbol{e}\right)^2 T^{-1} \sim\chi^2_{(1)} \qquad (2.23)$$

di mana

$$T = tr[(\boldsymbol{W_2}' + \boldsymbol{W_2})\boldsymbol{W_2}]$$

H_0 akan ditolak jika LM > $\chi^2_{(1)}$, maka terdapat pengaruh *spatial error*. Keputusan juga dapat dibuat dengan membandingkan *p-value* = $P(\chi^2_{(1)} > LM)$ dan α. Jika $p - value < \alpha$ maka H_0 ditolak sehingga disimpulkan terdapat pengaruh *spatial error.*

Kedua uji LM ini perlu dilakukan untuk mengetahui keberadaan pengaruh spasial. Apabila kedua uji spasial menghasilkan penolakan H_0, terdapat pengaruh *spatial autoregressive* dan *spatial error* maka model regresi spasial yang terbentuk adalah model SARAR.

2.4 Prosedur Generalized Spatial Two-Stage Least Squares

Pendugaan parameter model *spatial autoregressive with autoregressive distrubances* (SARAR) dilakukan dengan menggunakan prosedur *generalized spatial two stage least squares* (GS2SLS).

Model regresi spasial umum (2.3) disederhanakan menjadi persamaan:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Z\delta} + \boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{W_2 u} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

di mana $\boldsymbol{Z} = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Wy})$ adalah matriks gabungan antara **X** dengan **Wy** dan $\boldsymbol{\delta} = (\boldsymbol{\beta}', \rho)'$ adalah vektor yang berisi penduga parameter $\boldsymbol{\beta}$ dan ρ.

Dengan menerapkan transformasi *Cochran Orcutt* maka model menjadi:

$$\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{Z}^*\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad (2.24)$$

di mana $\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{y} - \lambda \boldsymbol{W_2 y}$

$\boldsymbol{Z}^* = \boldsymbol{Z} - \lambda \boldsymbol{W_2 Z}$

sehingga $\boldsymbol{y}^*$ dan $\boldsymbol{Z}^*$ adalah fungsi dari λ.

Pendugaan parameter dengan prosedur GS2SLS memiliki 3 tahapan. Pada tahap pertama, diterapkan metode *two-stage least squares* (2SLS) dengan peubah instrumen **H** tanpa mempertimbangkan pengaruh *spatial error* yang menghasilkan penduga parameter $\hat{\boldsymbol{\delta}}$. Pada tahap kedua, pendugaan parameter *spatial error* (λ) menggunakan metode *generalized moment method* (GMM) berdasarkan nilai galat yang merupakan selisih $\hat{\boldsymbol{y}}_i$ dan $\boldsymbol{y}_i$

pada tahap pertama. Kemudian pada tahap ketiga, pendugaan ulang persamaan (2.3) pada tahap pertama menggunakan 2SLS setelah transformasi *Cochran Orcutt* dan mempertimbangkan pengaruh *spatial error* dengan mensubstitusikan penduga parameter *spatial error* ($\hat{\lambda}$) pada tahap kedua untuk mendapatkan penduga parameter spasial ($\hat{\boldsymbol{\delta}}$) pada model akhir (Kelejian dan Prucha, 1998).

Prosedur pendugaan parameter menggunakan GS2SLS selengkapnya sebagai berikut:

i) **Tahap 1: Pendugaan parameter model *spatial autoregressive***

Pada model *spatial autoregressive*, unsur *spatial autoregressive* yaitu vektor $\boldsymbol{W_1}\mathbf{y}$ saling berhubungan dengan galat ($\boldsymbol{u}$). Hal ini berakibat pendugaan parameter $\boldsymbol{\delta}$ menggunakan OLS tidak dapat menghasilkan penduga parameter yang bersifat konsisten karena $E[(\boldsymbol{W_1}\mathbf{y})\boldsymbol{u}'] \neq 0$, sehingga dilakukan pendugaan parameter $\boldsymbol{\delta}$ menggunakan metode *two-stage least squares* (2SLS) untuk menghasilkan penduga parameter yang bersifat konsisten. Penduga parameter $\boldsymbol{\delta}$ menggunakan metode 2SLS adalah:

$$\hat{\boldsymbol{\delta}} = (\hat{\boldsymbol{Z}}'\hat{\boldsymbol{Z}})^{-1}\hat{\boldsymbol{Z}}'\boldsymbol{y} \tag{2.25}$$

di mana

$$\hat{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{P_H}\boldsymbol{Z} = \left(\mathbf{X}, \widehat{\boldsymbol{W_1}\boldsymbol{y}}\right)$$
$$\widehat{\boldsymbol{W_1}\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{P_H}\boldsymbol{W_1}\mathbf{y}$$
$$\boldsymbol{P_H} = \mathbf{H}(\mathbf{H}'\mathbf{H})^{-\mathbf{1}}\mathbf{H}'$$

Pendugaan menggunakan metode 2SLS membutuhkan peubah instrumen $\mathbf{H}$ sebagai gabungan antara matriks $\mathbf{X}$ dan $\boldsymbol{W_1}\mathbf{X}$ atau $\boldsymbol{H} = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{W_1}\boldsymbol{X})$. Tahap ini menghasilkan penduga model *spatial autoregressive* : $\hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\rho}\boldsymbol{W_1}\boldsymbol{y}$. Berdasarkan model ini, akan dihasilkan nilai galat yang digunakan untuk memperoleh penduga parameter *spatial error* ($\hat{\lambda}$) pada tahap kedua. Pada tahap ini, model belum memperhatikan pengaruh *spatial error* sehingga belum merupakan model pendugaan akhir.

ii) Tahap 2: Pendugaan parameter *spatial error* (λ)

Pendugaan parameter *spatial error* (λ) menggunakan metode *generalized moment method* (GMM). Dari model yang diperoleh pada tahap pertama, akan diperoleh nilai $\widehat{\boldsymbol{y}}_i$, dan nilai galat $\widehat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{y}_i - \widehat{\boldsymbol{y}}_i$.

Prinsip metode *generalized moment method* (GMM) adalah meminimumkan galat dari penduga kondisi momen. Kondisi momen dipresentasikan dalam bentuk persamaan momen maka pendugaan akan menggunakan persamaan momen. Oleh karena itu akan dibentuk suatu persamaan momen

$$\boldsymbol{\Gamma\alpha} - \boldsymbol{\gamma} = 0$$

di mana $\boldsymbol{\alpha}$ adalah vektor parameter, $\boldsymbol{\Gamma}$ dan $\boldsymbol{\gamma}$ adalah matriks yang unsur-unsurnya berupa momen. Langkah-langkah dalam membentuk persamaan momen adalah:

Persamaan (2.3) dapat dibentuk menjadi: $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{u} - \lambda \boldsymbol{W_2 u}$, misalkan $\overline{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{W_2 u}$

maka : $$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{u} - \lambda\overline{\boldsymbol{u}} \tag{2.26}$$

Kemudian kedua ruas pada persamaan (2.26) dikalikan dengan $\boldsymbol{W_2}$, maka:

$$\boldsymbol{W_2\varepsilon} = \boldsymbol{W_2 u} - \lambda \boldsymbol{W_2}\overline{\boldsymbol{u}}$$
$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \overline{\boldsymbol{u}} - \lambda\overline{\overline{\boldsymbol{u}}} \tag{2.27}$$

di mana : $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{W_2\varepsilon}$ dan $\overline{\overline{\boldsymbol{u}}} = \boldsymbol{W_2}\overline{\boldsymbol{u}}$

Dengan melakukan manipulasi terhadap persamaan (2.26) dan (2.27) yaitu mengalikan persamaan (2.26) dengan $\boldsymbol{\varepsilon}'$, persamaan (2.27) dengan $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}'$, dan persamaan (2.26) dengan (2.27) kemudian membagi setiap persamaan yang diperoleh dengan n, akan menghasilkan tiga persamaan hasil manipulasi berikut:

$$\frac{2}{n}\lambda \boldsymbol{u}'\bar{\boldsymbol{u}} - \frac{1}{n}\lambda^2 \bar{\boldsymbol{u}}'\bar{\boldsymbol{u}} + \frac{1}{n}\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{n}\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}$$
$$\frac{2}{n}\lambda \bar{\boldsymbol{u}}'\bar{\bar{\boldsymbol{u}}} - \frac{1}{n}\lambda^2 \bar{\bar{\boldsymbol{u}}}'\bar{\bar{\boldsymbol{u}}} + \frac{1}{n}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{n}\bar{\boldsymbol{u}}'\bar{\boldsymbol{u}}$$
$$\frac{1}{n}\lambda(\boldsymbol{u}'\bar{\bar{\boldsymbol{u}}} + \bar{\boldsymbol{u}}'\bar{\boldsymbol{u}}) - \frac{1}{n}\lambda^2 \bar{\boldsymbol{u}}'\bar{\bar{\boldsymbol{u}}} + \frac{1}{n}\boldsymbol{\varepsilon}'\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{n}\boldsymbol{u}'\bar{\boldsymbol{u}}$$
(2.28)

Persamaan (2.28) dapat dibentuk menjadi persamaan momen:

$$\frac{2}{n}\lambda E(\boldsymbol{u}'\bar{\boldsymbol{u}}) - \frac{1}{n}\lambda^2 E(\bar{\boldsymbol{u}}'\bar{\boldsymbol{u}}) + \frac{1}{n}E(\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}) - \frac{1}{n}E(\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}) = 0$$
$$\frac{2}{n}\lambda E(\bar{\boldsymbol{u}}'\bar{\bar{\boldsymbol{u}}}) - \frac{1}{n}\lambda^2 E(\bar{\bar{\boldsymbol{u}}}'\bar{\bar{\boldsymbol{u}}}) + \frac{1}{n}E(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \frac{1}{n}E(\bar{\boldsymbol{u}}'\bar{\boldsymbol{u}}) = 0$$
$$\frac{1}{n}\lambda E(\boldsymbol{u}'\bar{\bar{\boldsymbol{u}}} + \bar{\boldsymbol{u}}'\bar{\boldsymbol{u}}) - \frac{1}{n}\lambda^2 E(\bar{\boldsymbol{u}}'\bar{\bar{\boldsymbol{u}}}) + \frac{1}{n}E(\boldsymbol{\varepsilon}'\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \frac{1}{n}E(\boldsymbol{u}'\bar{\boldsymbol{u}}) = 0$$
(2.29)

di mana,

$$\frac{1}{n}E(\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{n}n\sigma^2 = \sigma^2$$
$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{W_2}\boldsymbol{\varepsilon}$$
$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{W_2'}\boldsymbol{W_2}\boldsymbol{\varepsilon}$$
$$\begin{aligned}\frac{1}{n}E(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) &= \frac{1}{n}E[tr(\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{W_2'}\boldsymbol{W_2}\boldsymbol{\varepsilon})] \\ &= \frac{1}{n}tr[E(\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{W_2'}\boldsymbol{W_2})] \\ &= \frac{1}{n}\sigma^2 tr(\boldsymbol{W_2'}\boldsymbol{W_2})\end{aligned}$$
$$\frac{1}{n}E(\boldsymbol{\varepsilon}'\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) = 0$$

Kemudian $\frac{1}{n}E(\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon})$, $\frac{1}{n}E\left(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)$ dan $\frac{1}{n}E(\boldsymbol{\varepsilon}'\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$ disubstitusikan pada persamaan (2.29) menjadi:

$$\frac{2}{n}\lambda E(\boldsymbol{u}'\bar{\boldsymbol{u}}) - \frac{1}{n}\lambda^2 E(\bar{\boldsymbol{u}}'\bar{\boldsymbol{u}}) + \sigma^2 - \frac{1}{n}E(\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}) = 0$$
$$\frac{2}{n}\lambda E(\bar{\boldsymbol{u}}'\bar{\bar{\boldsymbol{u}}}) - \frac{1}{n}\lambda^2 E(\bar{\bar{\boldsymbol{u}}}'\bar{\bar{\boldsymbol{u}}}) + \frac{1}{n}\sigma^2 tr(\boldsymbol{W_2'}\boldsymbol{W_2}) - \frac{1}{n}E(\bar{\boldsymbol{u}}'\bar{\boldsymbol{u}}) = 0$$
$$\frac{1}{n}\lambda E(\boldsymbol{u}'\bar{\bar{\boldsymbol{u}}} + \bar{\boldsymbol{u}}'\bar{\boldsymbol{u}}) - \frac{1}{n}\lambda^2 E(\bar{\boldsymbol{u}}'\bar{\bar{\boldsymbol{u}}}) + 0 - \frac{1}{n}E(\boldsymbol{u}'\bar{\boldsymbol{u}}) = 0$$
(2.30)

Persamaan (2.30) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{n}\mathrm{E}(\boldsymbol{u}'\bar{\boldsymbol{u}}) & -\frac{1}{n}\mathrm{E}(\bar{\boldsymbol{u}}'\bar{\boldsymbol{u}}) & 1 \\ \frac{2}{n}\mathrm{E}(\bar{\boldsymbol{u}}'\bar{\bar{\boldsymbol{u}}}) & -\frac{1}{n}\mathrm{E}(\bar{\bar{\boldsymbol{u}}}'\bar{\bar{\boldsymbol{u}}}) & \frac{1}{n}\mathrm{tr}(\boldsymbol{W_2}'\boldsymbol{W_2}) \\ \frac{1}{n}\mathrm{E}(\boldsymbol{u}'\bar{\bar{\boldsymbol{u}}}+\bar{\boldsymbol{u}}'\bar{\boldsymbol{u}}) & -\frac{1}{n}\mathrm{E}(\bar{\boldsymbol{u}}'\bar{\bar{\boldsymbol{u}}}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda^{\mathbf{2}} \\ \sigma^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{n}\mathrm{E}(\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}) \\ \frac{1}{n}\mathrm{E}(\bar{\boldsymbol{u}}'\bar{\boldsymbol{u}}) \\ \frac{1}{n}\mathrm{E}(\boldsymbol{u}'\bar{\boldsymbol{u}}) \end{bmatrix} = 0 \tag{2.31}$$

Berdasarkan matriks (2.31), diperoleh persamaan momen:

$$\boldsymbol{\Gamma\alpha} = \boldsymbol{\gamma} \text{ atau } \boldsymbol{\Gamma\alpha} - \boldsymbol{\gamma} = 0$$

di mana

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{2}{n}\mathrm{E}(\boldsymbol{u}'\bar{\boldsymbol{u}}) & -\frac{1}{n}\mathrm{E}(\bar{\boldsymbol{u}}'\bar{\boldsymbol{u}}) & 1 \\ \frac{2}{n}\mathrm{E}(\bar{\boldsymbol{u}}'\bar{\bar{\boldsymbol{u}}}) & -\frac{1}{n}\mathrm{E}(\bar{\bar{\boldsymbol{u}}}'\bar{\bar{\boldsymbol{u}}}) & \frac{1}{n}\mathrm{tr}(\boldsymbol{W_2}'\boldsymbol{W_2}) \\ \frac{1}{n}\mathrm{E}(\boldsymbol{u}'\bar{\bar{\boldsymbol{u}}}+\bar{\boldsymbol{u}}'\bar{\boldsymbol{u}}) & -\frac{1}{n}\mathrm{E}(\bar{\boldsymbol{u}}'\bar{\bar{\boldsymbol{u}}}) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda^{\mathbf{2}} \\ \sigma^2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n}\mathrm{E}(\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}) \\ \frac{1}{n}\mathrm{E}(\bar{\boldsymbol{u}}'\bar{\boldsymbol{u}}) \\ \frac{1}{n}\mathrm{E}(\boldsymbol{u}'\bar{\boldsymbol{u}}) \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

Kemudian dilakukan pemisalan dengan menyatakan $\hat{\bar{\boldsymbol{u}}} = \boldsymbol{W_2}\hat{\boldsymbol{u}}$ dan $\hat{\bar{\bar{\boldsymbol{u}}}} = \boldsymbol{W_2}^2\hat{\boldsymbol{u}}$, di mana $\hat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z}\hat{\boldsymbol{\delta}}$. $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ adalah penduga parameter yang diperoleh dari tahap pertama. Menurut Kelejian dan Prucha (1997) dari permisalan tersebut akan diperoleh penduga **Γ** dan **γ** adalah **G** dan **g** berikut ini:

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix} \frac{2}{n}\hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\hat{\boldsymbol{u}}} & -\frac{1}{n}\hat{\hat{\boldsymbol{u}}}'\hat{\hat{\boldsymbol{u}}} & 1 \\ \frac{2}{n}\hat{\hat{\boldsymbol{u}}}'\hat{\hat{\hat{u}}} & -\frac{1}{n}\hat{\hat{\hat{u}}}'\hat{\hat{\hat{u}}} & \frac{1}{n}tr(\boldsymbol{W_2}'\boldsymbol{W_2}) \\ \frac{1}{n}\left[\left(\hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\hat{\hat{u}}}+\hat{\hat{\boldsymbol{u}}}'\hat{\hat{\boldsymbol{u}}}\right)\right] & -\frac{1}{n}\left[\hat{\hat{\boldsymbol{u}}}'\hat{\hat{\hat{u}}}\right] & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{g}=\begin{bmatrix} \frac{1}{n}\hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}} \\ \frac{1}{n}\hat{\hat{\boldsymbol{u}}}'\hat{\hat{\boldsymbol{u}}} \\ \frac{1}{n}\hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\hat{\boldsymbol{u}}} \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

Berdasarkan persamaan momen $\boldsymbol{\Gamma\alpha}=\boldsymbol{\gamma}$, maka diperoleh persamaan empiris:

$$\boldsymbol{g}=\boldsymbol{G\alpha}+\boldsymbol{v}$$
$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{g}-\boldsymbol{G\alpha} \tag{2.34}$$

di mana v adalah vektor galat. Penduga yang dihasilkan dengan metode *Generalized Moment Method* (GMM) adalah hasil meminimumkan jumlah kuadrat galat atau $\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}$, dengan langkah-langkah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}&=[\boldsymbol{g}-\boldsymbol{G\alpha}]'[\boldsymbol{g}-\boldsymbol{G\alpha}]\\&=\boldsymbol{g}'\boldsymbol{g}-\boldsymbol{g}'\boldsymbol{G\alpha}-\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{G}'\boldsymbol{g}+\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{G}'\boldsymbol{G\alpha}\end{aligned} \tag{2.35}$$

Hasil $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{G}'\boldsymbol{g}$ berupa skalar maka $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{G}'\boldsymbol{g}$ simetris, sehingga

$$\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{G}'\boldsymbol{g}=(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{G}'\boldsymbol{g})'=(\boldsymbol{G}'\boldsymbol{g})'\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{g}'\boldsymbol{G\alpha} \tag{2.36}$$

Berdasarkan persamaan (2.36) maka persamaan (2.35) menjadi:

$$\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}=\boldsymbol{g}'\boldsymbol{g}-2\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{G}'\boldsymbol{g}+\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{G}'\boldsymbol{G\alpha} \tag{2.37}$$

Nilai penduga $\boldsymbol{\alpha}$ diperoleh dengan meminimumkan nilai kuadrat galat pada persamaan (2.37):

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}}{\partial\boldsymbol{\alpha}'}=-2\boldsymbol{G}'\boldsymbol{g}+\boldsymbol{2G}'\boldsymbol{G\alpha}=\boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{G}'\boldsymbol{g}=\boldsymbol{G}'\boldsymbol{G\alpha}$$

sehingga nilai penduga **α** adalah:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = [\boldsymbol{G}'\boldsymbol{G}]^{-1}\boldsymbol{G}'\boldsymbol{g} \qquad (2.38)$$

di mana, $\hat{\lambda} = \hat{\alpha}(1)$

iii) Tahap 3: Pendugaan Model Akhir

Pada tahap ketiga prosedur GS2SLS dilakukan pendugaan model akhir dengan melakukan pendugaan ulang terhadap parameter **δ** dengan memperhatikan pengaruh *spatial error*.

Hasil tahap kedua berupa penduga parameter *spatial error* $\hat{\lambda}$, statistik ini digunakan untuk menduga parameter **δ** pada tahap ketiga yang mempertimbangkan pengaruh *spatial error*. Pendugaan parameter pada tahap ketiga adalah pendugaan parameter **δ** dengan prosedur yang sama seperti pada tahap pertama yaitu menggunakan metode 2SLS, namun peubah awal ditransformasi menggunakan transformasi *Cochran Orcutt***.** Penduga *generalized spatial two stage least squares* (GS2SLS) $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ adalah:

$$\hat{\boldsymbol{\delta}} = \left[\hat{\mathbf{Z}}^{*\prime}\hat{\mathbf{Z}}^{*}\right]^{-1}\hat{\mathbf{Z}}^{*\prime}\boldsymbol{y}^{*} \qquad (2.39)$$

di mana,

$$\hat{\boldsymbol{Z}}^{*} = \boldsymbol{P_H}^{*}\boldsymbol{Z}^{*} = (\boldsymbol{X}^{*}, \widehat{\boldsymbol{W_1 y}}^{*})$$

$$\boldsymbol{P_H}^{*} = \mathbf{H}^{*}\left(\mathbf{H}^{*\prime}\mathbf{H}^{*}\right)^{-1}\mathbf{H}^{*\prime}$$

$$\boldsymbol{W_1 y}^{*} = \boldsymbol{W_1 y} - \lambda\boldsymbol{W_2 W_1 y}$$

$$\boldsymbol{W_1 y} - \widehat{\lambda\boldsymbol{W_2}}\boldsymbol{W_1 y} = \boldsymbol{P_H}^{*}(\boldsymbol{W_1 y} - \lambda\boldsymbol{W_2 W_1 y})$$

$$\widehat{\boldsymbol{W_1 y}}^{*} = \boldsymbol{P_H}^{*}\boldsymbol{W_1 y}^{*}$$

$$\boldsymbol{Z} = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{W_1 y})$$

$$\boldsymbol{Z}^{*} = \boldsymbol{Z} - \lambda\boldsymbol{W_2 Z}$$

$$\boldsymbol{y}^{*} = \boldsymbol{y} - \lambda\boldsymbol{W_2 y}$$

$$\boldsymbol{X}^{*} = \boldsymbol{X} - \lambda\boldsymbol{W_2 X}$$

Sama seperti pendugaan tahap pertama menggunakan metode 2SLS yang membutuhkan peubah instrumen, tahap ketiga ini juga membutuhkan peubah instrumen $\mathbf{H}^{*} = (\boldsymbol{X}^{*}, \boldsymbol{W_1 X}^{*})$ atau $(\boldsymbol{X}^{*}, \boldsymbol{W_2 X}^{*})$**.**

Setelah penduga $\boldsymbol{\delta}$ diperoleh, akan didapatkan model:

$$\hat{\boldsymbol{y}}^* = \boldsymbol{Z}^*\hat{\boldsymbol{\delta}}$$

atau

$$\hat{\boldsymbol{y}}^* = \boldsymbol{X}^*\hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\rho}\boldsymbol{W_1}\boldsymbol{y}^*$$

Kemudian model *spatial autoregressive with autoregressive distrubances* dibentuk dengan mengembalikan peubah transformasi ke bentuk semula, menghasilkan model:

$$\hat{\boldsymbol{y}} = \hat{\lambda}\boldsymbol{W_2}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\lambda}\boldsymbol{W_2}\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\rho}\boldsymbol{W_1}\boldsymbol{y} - \hat{\rho}\hat{\lambda}\boldsymbol{W_2}\boldsymbol{W_1}\boldsymbol{y}$$

2.5 Matriks Penimbang Spasial

Matriks penimbang spasial (**W)** adalah unsur penting dalam menggambarkan kedekatan antar lokasi dan ditentukan berdasarkan informasi atau kedekatan antar lokasi *(neighborhood)*. LeSage (1999) menyajikan *rook contiguity* (persinggungan sisi) untuk mengukur kedekatan lokasi menggunakan asas persinggungan *(contiguity)* lokasi.

Rook contiguity (persinggungan sisi) mendefinisikan W dengan nilai 1 dan 0, untuk kondisi:

$$W_{ij} \begin{cases} 1, \text{jika lokasi bersinggungan sisi } (\textit{common side}) \text{dengan lokasi lain} \\ 0, \text{jika lokasi tidak bersinggungan sisi } (\textit{common side}) \text{ dengan lokasi lain} \end{cases}$$

Definisi *rook contiguity* sering digunakan dalam aplikasi bidang ekonomi, kesehatan dan sosial, di mana peneliti hanya perlu menemukan semua lokasi pada peta yang memiliki perbatasan bersama (persinggungan sisi).

Matriks penimbang spasial adalah matriks setangkup berordo n (lokasi pengamatan) dan baris serta kolom menyatakan lokasi pada peta di mana $W_{ij} = W_{ji}$ dan $W_{ii} = 0$.

$$\boldsymbol{W} = W_{ij_{(nxn)}} = \begin{bmatrix} 0 & W_{12} & W_{13} & \cdots & W_{1n} \\ W_{21} & 0 & W_{23} & \cdots & W_{2n} \\ W_{31} & W_{32} & 0 & \cdots & W_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{n1} & W_{n2} & W_{n3} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Pada matriks penimbang spasial perlu dilakukan proses pembakuan agar diperoleh jumlah baris sama dengan satu $\left(\sum_{j=1}^{n} W_{ij} = 1\right)$ melalui:

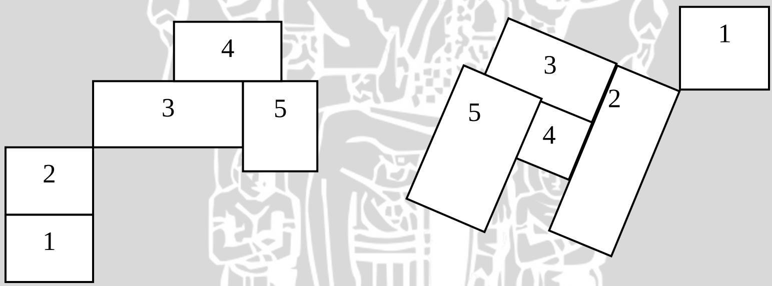
$$W_{ij}^{*} = \frac{W_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} W_{ij}}$$

di mana $W_{ij}^{*} = W_{ji}^{*}$ dan $W_{ii}^{*} = 0$.

Hasil proses pembakuan adalah matriks penimbang spasial:

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 0 & W_{12}^{*} & W_{13}^{*} & \cdots & W_{1n}^{*} \\ W_{21}^{*} & 0 & W_{23}^{*} & \cdots & W_{2n}^{*} \\ W_{31}^{*} & W_{32}^{*} & 0 & \cdots & W_{3n}^{*} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{n1}^{*} & W_{n2}^{*} & W_{n3}^{*} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Penggunaan matriks penimbang spasial dengan metode *rook contiguity* yang menampilkan persinggungan di lima lokasi digambarkan pada Gambar 2.2.



(a) Persinggungan (1,2) dan (3,4,5) (b) Persinggungan (2,3,4,5)

Gambar 2.2. Ilustrasi *rook contiguity*

Dengan menggunakan metode *rook contiguity* di lima lokasi pengamatan (n=5) akan diperoleh matriks penimbang spasial berukuran 5x5 untuk Gambar a dan b di mana baris dan kolom menyatakan lokasi pada Gambar 2.2 sebagai berikut:

$$\boldsymbol{W} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \left[\begin{array}{cc:ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \qquad \boldsymbol{W} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \left[\begin{array}{c:cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

(a) (b)

Kemudian dilakukan proses pembakuan pada matriks penimbang spasial sehingga hasil penjumlahan setiap unit pada baris adalah satu $\left(\sum_{j=1}^{n} W_{ij} = 1\right)$. Pembakuan akan menghasilkan matriks berikut:

$$\boldsymbol{W} = \left[\begin{array}{cc:ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \end{array}\right]$$

(a)

$$\boldsymbol{W} = \left[\begin{array}{c:cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.33 & 0 & 0.33 & 0.33 \\ 0 & 0.33 & 0.33 & 0 & 0.33 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \end{array}\right]$$

(b)

Matriks penimbang spasial yang diperoleh berdasarkan Gambar a terdiri dari matriks berukuran 2x2 yang berada di sisi kiri atas menunjukkan persinggungan antar lokasi (1,2) dan matriks berukuran 3x3 yang berada di sisi kanan bawah menunjukkan persinggungan antar lokasi (3,4,5).

Sedangkan berdasarkan Gambar b diperoleh matriks penimbang spasial yang terdiri dari matriks berukuran 4x4 yang berada di sisi kanan bawah menunjukkan persinggungan antar lokasi (2,3,4,5) dan matriks berukuran 1x1 yang berada di sisi kiri atas menunjukkan persinggungan pada lokasi 1 di mana lokasi 1 tidak bersinggungan dengan lokasi lain.

2.6 Ukuran Kebaikan Persamaan Regresi

Ukuran kebaikan persamaan regresi (*goodness of fit*) dikenal sebagai koefisien determinasi (R^2) dan didefinisikan Draper dan Smith (1992) sebagai:

$$R^2 = \frac{\sum\left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2} = \frac{\boldsymbol{b}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} - n\bar{Y}^2}{\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}' - n\bar{Y}^2}, i = 1,2 \dots n$$

R^2 ($0 \leq R^2 \leq 1$) mengukur proporsi keragaman atau variasi dalam peubah respon yang dijelaskan oleh peubah penjelas dan digunakan sebagai ukuran keberhasilan persamaan regresi dalam menjelaskan keragaman data. Persamaan regresi dikatakan baik jika nilai R^2 semakin mendekati 1.

2.7 Tinjauan Non Statistika

2.7.1 Kemiskinan

Definisi tentang kemiskinan telah mengalami perluasan, seiring dengan semakin kompleksnya faktor penyebab, indikator maupun permasalahan lain yang melingkupi. Kemiskinan tidak lagi hanya dianggap sebagai dimensi ekonomi melainkan telah meluas hingga dimensi sosial, kesehatan, pendidikan maupun politik. Menurut Badan Pusat Statistik, kemiskinan adalah ketidakmampuan seseorang memenuhi standar minimum kebutuhan dasar yang meliputi kebutuhan makan maupun non makan.

Definisi kemiskinan dapat dilihat dari dua sisi, yaitu:

a) Kemiskinan absolut
   Kemiskinan yang dikaitkan dengan perkiraan tingkat pendapatan dan kebutuhan yang hanya dibatasi pada kebutuhan pokok atau kebutuhan dasar minimum yang memungkinkan seseorang untuk hidup secara layak. Dengan demikian kemiskinan diukur dengan cara membandingkan tingkat pendapatan orang dengan tingkat pendapatan yang dibutuhkan untuk memperoleh kebutuhan dasarnya yakni makanan, pakaian dan perumahan agar dapat menjamin kelangsungan hidupnya.

b) Kemiskinan relatif
Kemiskinan dilihat dari aspek ketimpangan sosial, karena ada orang yang sudah dapat memenuhi kebutuhan dasar minimum tetapi masih jauh lebih rendah dibanding masyarakat sekitar (lingkungannya).

2.7.2 Faktor Penyebab Kemiskinan

Menurut Kartasasmita (1996), kondisi kemiskinan dapat disebabkan oleh sekurang-kurangnya empat penyebab, yaitu:

1. Rendahnya taraf pendidikan
   Taraf pendidikan rendah mengakibatkan kemampuan pengembangan diri terbatas dan menyebabkan sempitnya lapangan kerja yang dapat dimasuki. Taraf pendidikan yang rendah juga membatasi kemampuan seseorang untuk mencari dan memanfaatkan peluang untuk memenuhi kebutuhannya.
2. Rendahnya derajat kesehatan
   Taraf kesehatan dan gizi rendah menyebabkan rendahnya daya tahan fisik, daya pikir dan prakarsa.
3. Terbatasnya lapangan kerja
   Keadaan kemiskinan karena kondisi pendidikan dan kesehatan diperberat oleh keterbatasan lapangan pekerjaan. Selama terdapat lapangan kerja atau kegiatan usaha, selama itu pula terdapat harapan untuk memutuskan lingkaran kemiskinan itu.
4. Kondisi keterisolasian
   Banyak penduduk miskin secara ekonomi tidak berdaya karena terpencil dan terisolasi. Mereka hidup terpencil sehingga sulit atau tidak terjangkau oleh pelayanan pendidikan, kesehatan dan gerak kemajuan yang dinikmati masyarakat lain.