

**QUASI-IDEAL DALAM SEMIGRUP TERNARI TERURUT**

**SKRIPSI**

oleh :  
**SITI KHAIRUN NISA**  
**0810943020-94**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**  
**JURUSAN MATEMATIKA**  
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**  
**UNIVERSITAS BRAWIJAYA**  
**MALANG**  
**2013**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



# QUASI-IDEAL DALAM SEMIGRUP TERNARI TERURUT

## SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh :

**SITI KHAIRUN NISA**

**0810943020-94**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
MALANG  
2013**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



**LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI**

**QUASI-IDEAL DALAM SEMIGRUP TERNARI TERURUT**

oleh:

**SITI KHAIRUN NISA**

**0810943020-94**

**Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji  
pada tanggal 20 Juni 2013  
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Sains dalam bidang Matematika**

**Pembimbing**

**Dra. Ari Andari, M.S  
NIP. 196105161987012001**

**Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika  
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya**

**Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc  
NIP. 196709071992031001**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Siti Khairun Nisa  
NIM : 0810943020-94  
Jurusan : Matematika  
Penulis Skripsi berjudul : Quasi-Ideal dalam Semigrup Ternari Terurut

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. Isi dari Skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Skripsi ini.
2. Apabila dikemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 20 Juni 2013  
Yang menyatakan,

(Siti Khairun Nisa)  
NIM. 0810943020-94

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



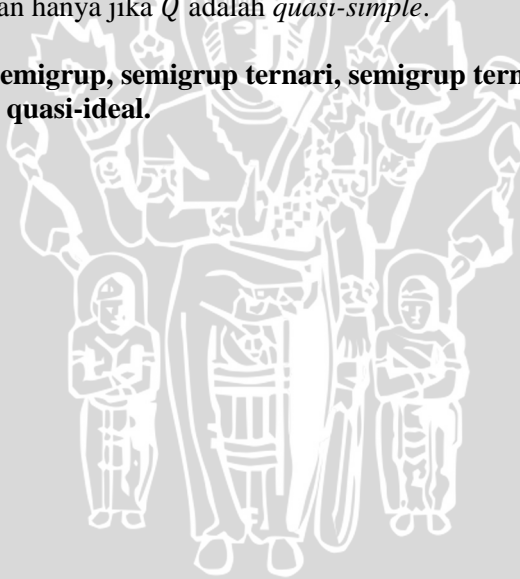


# QUASI-IDEAL DALAM SEMIGRUP TERNARI TERURUT

## ABSTRAK

Dalam skripsi ini dibahas tentang quasi-ideal dalam semigrup ternari terurut. Skripsi ini juga membahas tentang hubungan quasi-ideal minimal dengan *quasi-simple* dalam semigrup ternari terurut. Suatu himpunan bagian tak kosong  $Q$  dari semigrup ternari terurut  $S$  disebut quasi-ideal dari  $S$  jika  $Q$  memenuhi kondisi  $[SSQ] \cap [SQS] \cap [QSS] \subseteq Q$ ,  $[SSQ] \cap [SSQSS] \cap [QSS] \subseteq Q$ , dan jika  $x \in Q$  dan  $y \in S$  sedemikian sehingga  $y \leq x$  maka  $y \in Q$ .  $Q$  juga disebut quasi-ideal dari  $S$  jika dan hanya jika  $Q = L \cap M \cap R$ .  $Q$  adalah quasi-ideal minimal jika dan hanya jika  $Q$  adalah *quasi-simple*.

**Kata Kunci:** semigrup, semigrup ternari, semigrup ternari terurut, ideal, quasi-ideal.



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



# ON QUASI-IDEAL IN ORDERED TERNARY SEMIGROUPS

## ABSTRACT

This script will be discussed about the properties and theorem of quasi-ideal in ordered ternary semigroup. Also, this script will be discussed about the relation between minimal quasi with quasi-simple in ordered ternary semigroup. A nonempty subset  $Q$  of a ordered ternary semigroup  $S$  is called a quasi-ideal of  $S$  if following conditions holds  $[SSQ] \cap [SQS] \cap [QSS] \subseteq Q$ ,  $[SSQ] \cap [SSQSS] \cap [QSS] \subseteq Q$ , and if  $x \in Q$  and  $y \in S$  such that  $y \leq x$  then  $y \in Q$ .  $Q$  also called quasi-ideal of  $S$  if and only if  $Q = L \cap M \cap R$ .  $Q$  is a minimal quasi-ideal if and only if  $Q$  is quasi-simple.

**Keywords:** semigroup, ternary semigroup, ordered ternary semigroup, ideal, quasi-ideal.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur kehadirat Allah SWT atas segala limpahan rahmat, taufik, serta hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **Quasi-Ideal dalam Semigrup Ternari Terurut** ini sesuai dengan baik dan lancar. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada teladan kita Nabi Muhammad SAW, seluruh keluarga, para sahabat dan pengikutnya yang setia sampai hari kiamat.

Skripsi ini disusun dan diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana pada Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Brawijaya.

Skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik atas dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan rasa hormat dan ungkapan terima kasih yang tulus kepada:

1. Dra. Ari Andari, M.S., selaku dosen pembimbing, atas segala bimbingan, nasihat, dan motivasi yang telah diberikan kepada penulis selama penyusunan Skripsi ini.
2. Indah Yanti, S.Si., M.Si., selaku dosen penasihat akademik yang sudah memberikan banyak nasihat, dukungan, dan saran selama penulis menempuh studi dan proses penulisan Skripsi ini.
3. Drs. Bambang Sugandi, M.Si., selaku Ketua Bidang Ilmu Aljabar sekaligus dosen penguji II yang telah memberi semangat dan dukungan kepada penulis.
4. Dr. Sobri Abusini, M.T., selaku Ketua Program Studi Matematika yang sudah memberikan dukungan, saran dan semangat kepada penulis.
5. Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc., selaku Ketua Jurusan Matematika sekaligus dosen penguji I yang telah banyak memberi masukan, saran dan kritik untuk Skripsi ini.
6. Segenap dosen Jurusan Matematika FMIPA UB atas transfer ilmu yang diberikan dan staf Tata Usaha Jurusan Matematika atas segala bantuannya selama penulis menempuh studi.
7. Orang tua, kakak-kakaku tercinta serta M. Hidayatullah, S.Ked yang telah memberikan dukungan, do'a, dan pengorbanan baik secara moril maupun materil sehingga penulis dapat menyelesaikan studi dengan baik.

8. Sahabat-sahabat penulis yang selalu menghibur, memotivasi dan memberikan dukungan serta do'a kepada penulis, Weny Kurniasari, S.Si, Hayatunnufus Zahir, S.Si, Triana Nur Khayati, S.Si, Nurul Herlina Amalia, S.Si, Sri Lestari, S.Kom, Hayatulisa Winasari dan Mas Riesky.
9. Teman-teman seperjuangan yang selalu memotivasi dan memberikan dukungan serta do'a kepada penulis, Pitroh, Icha, Tita, Andan, Imam, Arya, Rendy, Syiva dan semua mahasiswa matematika angkatan 2008 dan 2009.
10. Semua pihak yang telah membantu penulis dalam penyusunan Skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari masih terdapat kekurangan dalam penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, penulis dengan senang hati menerima segala saran dan kritik yang membangun lewat email penulis [sitikhairunnisa04@gmail.com](mailto:sitikhairunnisa04@gmail.com). Akhirnya penulis berharap semoga Skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis khususnya dan bagi pembaca umumnya.

Malang, 01 Mei 2013

Penulis

## DAFTAR ISI

	Halaman
<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	i
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b> .....	iii
<b>HALAMAN PERNYATAAN</b> .....	v
<b>ABSTRAK</b> .....	vii
<b>ABSTRACT</b> .....	ix
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	xi
<b>DAFTAR ISI</b> .....	xiii
<b>DAFTAR NOTASI</b> .....	xv
<b>BAB I PENDAHULUAN</b> .....	1
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	1
1.3 Tujuan .....	1
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA</b> .....	3
2.1 Relasi .....	3
2.2 Pemetaan.....	5
2.3 Operasi Biner .....	6
2.4 Operasi Terner .....	7
2.5 Semigrup .....	7
2.6 Semigrup Ternari.....	16
<b>BAB III PEMBAHASAN</b> .....	25
3.1 Semigrup Ternari Terurut .....	25
3.2 Ideal dalam Semigrup Ternari Terurut .....	29
<b>BAB IV KESIMPULAN</b> .....	59
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	61

UNIVERSITAS BRAWIJAYA





## DAFTAR NOTASI

### Notasi

$(A)$   
 $[ \ ]$

### Keterangan

$A \subseteq S$   
Operasi terner

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan salah satu ilmu pengetahuan tertua dan dianggap sebagai induk atau alat dan bahasa dasar banyak ilmu. Matematika mempunyai beragam kajian. Salah satu kajian tersebut adalah aljabar yang akan dibahas pada skripsi ini.

Aljabar merupakan suatu metode untuk menyelesaikan persoalan secara praktis dengan menggunakan simbol atau variabel. Variabel tersebut biasanya menggunakan huruf untuk bilangan yang belum diketahui. Struktur aljabar secara umum dibangun oleh tiga komponen, yaitu himpunan tak kosong, operasi, dan aksioma. Struktur aljabar mengalami perkembangan diantaranya semigrup ternari yang merupakan perkembangan dari semigrup. Perbedaan diantara keduanya hanya terletak pada domain pada himpunan tak kosong.

Pada tahun 1932, D.H.Lehmer memulai konsep sistem ternari secara aljabar. Semigrup ternari pertama kali dikenalkan oleh Banach. Pada tahun 1995, V.N.Dixit dan S.Dewen memperkenalkan konsep quasi-ideal dan bi-ideal dalam semigrup ternari. Karena adanya konsep quasi-ideal dalam semigrup ternari, maka dikembangkan konsep quasi-ideal dalam semigrup ternari terurut.

### 1.2 Rumusan Masalah

Permasalahan yang dibahas dalam penulisan skripsi ini adalah bagaimana definisi, teorema, dan sifat-sifat serta contoh yang berkaitan dengan quasi-ideal dalam semigrup ternari terurut.

### 1.3 Tujuan

Tujuan pembahasan skripsi ini adalah untuk membuktikan teorema, proposisi, dan sifat-sifat serta contoh yang berkaitan dengan quasi-ideal dalam semigrup ternari terurut.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan beberapa definisi dan contoh yang berkaitan sebagai acuan untuk membahas permasalahan yang akan disampaikan pada bab selanjutnya.

#### 2.1 Relasi

Relasi dapat didefinisikan sebagai hubungan antara anggota-anggota dari himpunan dengan himpunan lainnya. Adapun definisi relasi pada himpunan dan sifat-sifatnya adalah sebagai berikut.

##### Definisi 2.1.1 (Hasil Kali Kartesius)

Misalkan  $A$  dan  $B$  adalah himpunan. Himpunan dari semua pasangan terurut  $(x, y)$ , dimana  $x \in A$  dan  $y \in B$ , disebut hasil kali kartesius (*cartesian product*) dari himpunan  $A$  dan  $B$ . Dalam notasi himpunan dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

(Bhattacharya, dkk., 1990)

##### Contoh 2.1.2

Misalkan  $A = \{1, 2, 3\}$  dan  $B = \{x, y\}$ . Sehingga  $A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}$ .

##### Definisi 2.1.3 (Relasi)

Misalkan  $A$  dan  $B$  adalah himpunan. Jika  $R$  adalah himpunan bagian dari  $A \times B$ , maka  $R$  disebut relasi dari  $A$  ke  $B$ . Jika  $(x, y) \in R$ , maka  $x$  dikatakan berada dalam relasi  $R$  ke  $y$  dan dinotasikan dengan  $xRy$ . Selain itu, juga diperkenalkan empat sifat yang berlaku untuk relasi  $R$  pada himpunan  $X$ .

1.  $R$  refleksif jika  $xRx, \forall x \in X$ .
2.  $R$  simetris jika  $xRy$  maka  $yRx, \forall x, y \in X$ .
3.  $R$  antisimetris jika  $xRy$  dan  $yRx$  maka  $x = y, \forall x, y \in X$ .
4.  $R$  transitif jika  $xRy$  dan  $yRz$  maka  $xRz, \forall x, y, z \in X$ .

(Bhattacharya, dkk, 1990)

Jika  $R$  refleksif, simetris, dan transitif, maka  $R$  disebut relasi ekuivalen pada  $X$ . Sedangkan jika  $R$  refleksif, antisimetris, dan transitif, maka  $R$  disebut relasi terurut parsial pada  $X$ .

**Contoh 2.1.4**

Relasi kongruensi antara bilangan bulat yang didefinisikan oleh  $x \equiv y \pmod{m} \Leftrightarrow x - y = km$  untuk setiap  $k \in \mathbb{Z}$  dan  $m \in \mathbb{N}$  adalah suatu relasi ekuivalen.

**Bukti.**

1. Refleksif.

Karena  $m|(x - x)$  atau  $m$  membagi  $(x - x)$  untuk setiap  $x \in \mathbb{Z}$ .

2. Simetris.

Akan ditunjukkan jika  $x \equiv y \pmod{m}$  maka  $y \equiv x \pmod{m}$ .  
Misalkan  $x, y \in \mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned} x \equiv y \pmod{m} &\Leftrightarrow x - y = km \\ &\Leftrightarrow -(y - x) = km \\ &\Leftrightarrow (y - x) = (-k)m \quad (\text{misalkan } j = -k) \\ &\Leftrightarrow (y - x) = jm \\ &\Leftrightarrow y \equiv x \pmod{m}. \end{aligned}$$

Karena untuk  $x \equiv y \pmod{m}$  berlaku  $y \equiv x \pmod{m}$ , maka relasi tersebut bersifat simetris.

3. Transitif.

Akan ditunjukkan  $x \equiv y \pmod{m}$  dan  $y \equiv z \pmod{m}$  maka  $x \equiv z \pmod{m}$ .

Misalkan  $x, y, z \in \mathbb{Z}$ .

$$x \equiv y \pmod{m} \Leftrightarrow x - y = km \text{ dan}$$

$$y \equiv z \pmod{m} \Leftrightarrow y - z = lm$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} (x - y) + (y - z) &= (k + l)m \Leftrightarrow x - z = nm \\ &\Leftrightarrow x \equiv z \pmod{m}. \end{aligned}$$

Karena  $x \equiv y \pmod{m}$  dan  $y \equiv z \pmod{m}$  maka  $x \equiv z \pmod{m}$ .  
Jadi relasi tersebut bersifat transitif.

Dari pembuktian 1, 2, dan 3 terbukti bahwa relasi kongruensi tersebut adalah relasi ekuivalen. ■

### Contoh 2.1.5

Misalkan  $R$  adalah relasi yang didefinisikan pada himpunan bilangan bulat, dalam hal ini  $xRy \Leftrightarrow x = ky$  untuk setiap  $k \in \mathbb{Z}^+$ . Maka relasi ini adalah suatu relasi terurut parsial.

#### Bukti.

1.  $R$  refleksif, karena untuk  $k = 1$  maka  $x = y$ . Akibatnya  $xRx$ .
2.  $R$  antisimetris, karena  $y \leq x$  maka tidak mungkin bahwa  $x < y$  karena  $x$  merupakan kelipatan dari  $y$  kecuali jika  $x = y$ .
3.  $R$  transitif, karena jika  $x = ky$  dan  $y = tz$ , maka  $x = k(tz) \Leftrightarrow x = ktz$ , sehingga  $x$  juga kelipatan  $z$ .

Dari pembuktian 1, 2, dan 3 terbukti bahwa  $R$  adalah relasi terurut parsial. ■

## 2.2 Pemetaan

Pemetaan biasanya digunakan untuk memetakan elemen di suatu himpunan dengan elemen di himpunan lainnya. Pemetaan dapat dinotasikan dengan huruf tunggal, misalnya  $f, g, \dots, F, G, \dots$ , dan seterusnya. Berikut ini diberikan suatu definisi dari pemetaan.

### Definisi 2.2.1 (Pemetaan)

Misalkan  $A$  dan  $B$  adalah himpunan tak kosong. Pemetaan  $f$  dari  $A$  ke  $B$  adalah suatu relasi sedemikian sehingga untuk setiap  $a \in A$  terdapat dengan tunggal  $b \in B$  dengan  $(a, b) \in f$ . Selanjutnya dalam pemetaan dapat dituliskan sebagai  $f(a) = b$ .

Pada pemetaan  $f$  dari  $A$  ke  $B$ , himpunan  $A$  disebut daerah asal (domain) dari  $f$  dan himpunan  $B$  disebut daerah kawan (kodomain) dari  $f$ . Secara umum dikenal dua macam pemetaan yaitu:

- (i)  $f$  disebut pemetaan satu-satu (injektif) jika untuk setiap  $a, b \in A$  dengan  $a \neq b$  maka  $f(a) \neq f(b)$ .
- (ii)  $f$  disebut pemetaan onto (surjektif) jika untuk setiap  $b \in B$  terdapat  $a \in A$  sedemikian sehingga  $b = f(a)$ .

Jika  $f$  merupakan pemetaan injektif dan surjektif, maka  $f$  disebut sebagai pemetaan bijektif.

(Bhattacharya, dkk., 1990)

## 2.3 Operasi Biner

Operasi biner merupakan salah satu kasus khusus dari pemetaan. Adapun definisi dari operasi biner adalah sebagai berikut.

### Definisi 2.3.1 (Operasi Biner)

Misalkan  $S$  himpunan tak kosong. Suatu operasi biner  $(*)$  pada himpunan  $S$  adalah pemetaan dari  $S \times S$  ke  $S$ , dimana  $S \times S$  adalah himpunan semua pasangan terurut elemen dari  $S$  dan dinotasikan sebagai berikut.

$$*: S \times S \rightarrow S$$

$$(a, b) \mapsto * (a, b) = a * b$$

(El-Madhoun, 2007)

### Contoh 2.3.2

Didefinisikan operasi  $*$  pada  $\mathbb{Z}$  dengan syarat untuk setiap  $x, y \in \mathbb{Z}$ ,  $x * y = x \cdot y$  maka operasi  $*$  adalah operasi biner.

### Bukti.

Akan ditunjukkan bahwa operasi  $*$  merupakan operasi yang tertutup dan terdefinisi. Sesuai dengan sifat bilangan bulat, pergandaan dua bilangan bulat akan menghasilkan bilangan bulat juga. Sehingga  $x * y = x \cdot y \in \mathbb{Z}$ . Karena operasi  $*$  merupakan operasi yang tertutup dan terdefinisi. Jadi operasi  $*$  merupakan operasi biner.

### Definisi 2.3.3 (Sifat Operasi Biner)

Operasi biner  $* : S \times S \rightarrow S$  pada himpunan  $S$  dikatakan

- (i) tertutup jika  $x * y = z$ ,
  - (ii) komutatif jika  $x * y = y * x$ ,
  - (iii) asosiatif jika  $x * (y * z) = (x * y) * z$ ,  
jika  $\circ$  adalah operasi biner yang lain pada  $S$  maka operasi biner  $*$  dikatakan
  - (iv) distributif kiri atas  $\circ$  jika  $x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z)$ ,
  - (v) distributif kanan atas  $\circ$  jika  $(y \circ z) * x = (y * x) \circ (z * x)$ ,
- untuk setiap  $x, y, z \in S$ . Jika operasi  $*$  adalah distributif kanan dan kiri atas operasi  $\circ$ , maka operasi  $*$  dikatakan sebagai distributif atas  $\circ$ .  
(Bhattacharya, dkk., 1990)



## 2.4 Operasi Terner

### Definisi 2.4.1 (Operasi Terner)

Misalkan  $S$  himpunan tak kosong. Suatu operasi terner pada himpunan  $S$  adalah pemetaan dari  $S \times S \times S$  ke  $S$ , dimana  $S \times S \times S$  adalah himpunan semua pasangan terurut elemen dari  $S$  dan dinotasikan sebagai berikut.

$$*: S \times S \times S \rightarrow S$$

$$(a, b, c) \mapsto * (a, b, c) = [abc].$$

(Changphas, 2012)

### Contoh 2.4.2

Didefinisikan operasi  $[ ]$  pada  $\mathbb{Z}$  dengan syarat untuk setiap  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ,  $[abc] = a \cdot b \cdot c$  maka operasi  $[ ]$  merupakan operasi terner.

### Bukti.

Akan ditunjukkan bahwa operasi  $[ ]$  merupakan operasi yang tertutup dan terdefinisi. Sesuai dengan sifat bilangan bulat, pergandaan dua bilangan bulat akan menghasilkan bilangan bulat juga. Sehingga  $[abc] = a \cdot b \cdot c \in \mathbb{Z}$ . Karena operasi  $[ ]$  merupakan operasi yang tertutup dan terdefinisi. Jadi operasi  $[ ]$  merupakan operasi terner.

## 2.5 Semigrup

Semigrup merupakan struktur aljabar yang terdiri dari himpunan tak kosong  $G$  bersama dengan operasi biner dan berlaku sifat asosiatif. Suatu semigrup belum tentu grup karena tidak semua elemen dari semigrup mempunyai invers atau bahkan tidak mempunyai elemen identitas.

Definisi dan contoh yang berkaitan dengan semigrup diberikan sebagai berikut.

### Definisi 2.5.1 (Semigrup)

Misalkan  $G$  adalah himpunan tak kosong dan didefinisikan operasi biner  $*$ .  $(G, *)$  disebut semigrup jika dan hanya jika

- (i)  $(G, *)$  tertutup :  $a * b \in G, \forall a, b \in G,$
- (ii)  $(G, *)$  asosiatif :  $a * (b * c) = (a * b) * c, \forall a, b, c \in G.$

(Whitelaw, 1995)

### Contoh 2.5.2

$\mathbb{Z}^+ = \{z | z > 0\}$ .  $(\mathbb{Z}^+, \bullet)$  adalah semigrup.

#### Bukti.

Akan dibuktikan  $\mathbb{Z}^+$  dengan operasi pergandaan memenuhi aksioma-aksioma berikut:

- (i)  $(\mathbb{Z}^+, \bullet)$  tertutup, yaitu untuk setiap  $a, b \in \mathbb{Z}^+$  maka  $a \bullet b \in \mathbb{Z}^+$ .  
Ambil sebarang  $a, b \in \mathbb{Z}^+$ , maka  $a > 0$  dan  $b > 0$ , sehingga  $a \bullet b > 0$ . Akibatnya  $a \bullet b \in \mathbb{Z}^+$ . Jadi  $(\mathbb{Z}^+, \bullet)$  memenuhi sifat tertutup.

- (ii)  $(\mathbb{Z}^+, \bullet)$  asosiatif, yaitu untuk setiap  $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$  maka  $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$ .  
Ambil sebarang  $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ . Karena operasi pergandaan pada bilangan bulat bersifat asosiatif, maka berlaku  $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$ .

Karena  $(\mathbb{Z}^+, \bullet)$  memenuhi (i) dan (ii) maka  $(\mathbb{Z}^+, \bullet)$  adalah semigrup. Untuk selanjutnya, penulisan  $a \bullet b$  cukup ditulis  $ab$ . ■

### Contoh 2.5.3

$G = \mathbb{Z}_{16} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{14}, \bar{15}\}$ .  $(G, \bullet)$  adalah semigrup.

#### Bukti.

Akan dibuktikan  $G$  dengan operasi pergandaan memenuhi aksioma-aksioma berikut:

- (i)  $(G, \bullet)$  tertutup, yaitu untuk setiap  $a, b \in G$  maka  $ab \in G$ .  
Ambil  $a = \bar{4}$  dan  $b = \bar{6}$ , sehingga  $ab = \bar{4} \bullet \bar{6} = \bar{8} \in G$ .  
Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap  $a, b \in G$ . Jadi  $(G, \bullet)$  memenuhi sifat tertutup.

- (ii)  $(G, \bullet)$  asosiatif, yaitu untuk setiap  $a, b, c \in G$  maka  $(ab)c = a(bc)$ .  
Ambil  $a = \bar{2}$ ,  $b = \bar{3}$ , dan  $c = \bar{6}$ , sehingga

$$(ab)c = (\bar{2} \cdot \bar{3}) \cdot \bar{6} = \bar{4} \in G,$$

$$a(bc) = \bar{2} \cdot (\bar{3} \cdot \bar{6}) = \bar{4} \in G.$$

Terbukti bahwa  $(ab)c = a(bc)$ .

Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap  $a, b, c \in G$ . Jadi  $(G, \cdot)$  memenuhi sifat asosiatif.

Karena  $(G, \cdot)$  memenuhi (i) dan (ii) maka terbukti bahwa  $(G, \cdot)$  adalah semigrup. ■

### Contoh 2.5,4

Misalkan  $G = \mathbb{Z}$ , dimana  $\mathbb{Z}$  merupakan himpunan bilangan asli dan  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Didefinisikan operasi  $*$  pada  $\mathbb{Z}$  oleh  $a * b = a + b + ab$ , maka  $(G, *)$  merupakan semigrup.

### Bukti.

Akan dibuktikan  $G$  dengan operasi  $*$  memenuhi sifat tertutup dan asosiatif.

(i) Tertutup.

Karena  $a, b \in G$  dan  $ab \in G$ , sehingga

$$a * b = a + b + ab \in G.$$

(ii) Asosiatif.

Ambil sebarang  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , maka

$$\begin{aligned} (a * b) * c &= (a + b + ab) * c \\ &= (a + b + ab) + c + (a + b + ab)c \\ &= a + b + ab + c + ac + bc + abc \\ &= a + b + c + ab + ac + bc + abc \\ a * (b * c) &= a * (b + c + bc) \\ &= a + (b + c + bc) + a(b + c + bc) \\ &= a + b + c + bc + ab + ac + abc \\ &= a + b + c + ab + ac + bc + abc \end{aligned}$$

Karena  $(a * b) * c = a * (b * c)$  untuk setiap  $a, b, c \in G$ , sehingga  $G$  memenuhi sifat asosiatif.

Jadi terbukti bahwa  $(G, *)$  merupakan semigrup.

### Definisi 2.5.5 (Semigrup Komutatif)

Misalkan  $(G, *)$  adalah semigrup. Maka  $(G, *)$  disebut semigrup komutatif jika  $a * b = b * a, \forall a, b \in G$ .

(Golan, 1999)

### Contoh 2.5.6

$\mathbb{Z}^+ = \{z | z > 0\}$ .  $(\mathbb{Z}^+, \bullet)$  adalah semigrup komutatif.

#### Bukti.

Akan dibuktikan  $(\mathbb{Z}^+, \bullet)$  adalah semigrup komutatif. Dari Contoh 2.5.2 terbukti bahwa  $(\mathbb{Z}^+, \bullet)$  adalah semigrup. Selanjutnya akan dibuktikan  $(\mathbb{Z}^+, \bullet)$  komutatif, yaitu untuk setiap  $a, b \in \mathbb{Z}^+$  maka  $ab = ba$ . Ambil sebarang  $a, b \in \mathbb{Z}^+$ . Karena operasi pergandaan pada bilangan bulat komutatif, maka berlaku  $ab = ba$ . Jadi terbukti bahwa  $(\mathbb{Z}^+, \bullet)$  adalah semigrup komutatif. ■

### Contoh 2.5.7

$G = \mathbb{Z}_{16} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{14}, \bar{15}\}$ .  $(G, \bullet)$  adalah semigrup komutatif.

#### Bukti.

Akan dibuktikan  $G$  adalah semigrup komutatif. Dari Contoh 2.5.3 terbukti bahwa  $G$  adalah semigrup. Selanjutnya dibuktikan bahwa  $(G, \bullet)$  komutatif.  $(G, \bullet)$  komutatif, yaitu untuk setiap  $a, b \in G$  maka  $ab = ba$ . Ambil  $a = \bar{2}$  dan  $b = \bar{3}$ , sehingga  
 $ab = \bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{6} \in G$ ,  
 $ba = \bar{3} \cdot \bar{2} = \bar{6} \in G$ .  
Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap  $a, b \in G$ . Jadi  $(G, \bullet)$  memenuhi sifat komutatif. Jadi terbukti bahwa  $(G, \bullet)$  adalah semigrup komutatif. ■

### Contoh 2.5.8

Misalkan  $G = \mathbb{Z}$ , dimana  $\mathbb{Z}$  merupakan himpunan bilangan asli dan  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Didefinisikan operasi  $*$  pada  $\mathbb{Z}$  oleh  $a * b = a + b + ab$ , maka  $(G, *)$  merupakan semigrup komutatif.

#### Bukti.

Akan dibuktikan  $G$  adalah semigrup komutatif. Dari Contoh 2.5.4 terbukti bahwa  $G$  adalah semigrup. Selanjutnya dibuktikan bahwa  $(G, *)$  komutatif.  $(G, *)$  komutatif, yaitu untuk setiap  $a, b \in G$  maka  $a * b = b * a$ .  
 $a * b = a + b + ab \in G$ ,  
 $b * a = b + a + ba \in G$ .  
Jadi terbukti bahwa  $(G, *)$  adalah semigrup komutatif. ■

### Definisi 2.5.9 (Subsemigrup)

Misalkan  $(G, *)$  adalah semigrup dan  $H$  adalah himpunan bagian (*subset*) dari  $G$ . Jika  $(H, *)$  semigrup maka  $(H, *)$  disebut subsemigrup dari  $(G, *)$ .

(Whitelaw, 1995)

### Contoh 2.5.10

Misalkan  $H$  adalah himpunan bilangan bulat genap positif pada semigrup  $\mathbb{Z}^+$ , maka  $H$  adalah subsemigrup.

### Bukti.

Akan dibuktikan bahwa  $H$  adalah subsemigrup dari  $\mathbb{Z}^+$ .  
 $H = \{2h | h \in \mathbb{Z}^+\}$ .  $H \subseteq \mathbb{Z}^+$ . Misalkan  $a = 2h_1$ ,  $b = 2h_2$ , dan  $c = 2h_3$  dengan  $a, b, c \in H$  dan  $h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{Z}^+$ .

(i)  $(H, \bullet)$  tertutup, yaitu untuk setiap  $a, b \in H$  maka  $ab \in H$ .

$$ab = (2h_1)(2h_2) = 4h_1h_2 = 2(2h_1h_2).$$

Karena  $h_1 > 0$  dan  $h_2 > 0$ , maka  $h_1h_2 > 0$ . Jelas bahwa  $2h_1h_2 \in \mathbb{Z}^+$  dan  $2(2h_1h_2) \in H$ . Jadi  $(H, \bullet)$  memenuhi sifat tertutup.

(ii)  $(H, \bullet)$  asosiatif, yaitu untuk setiap  $a, b, c \in H$  maka

$$(ab)c = a(bc).$$

$$\begin{aligned} (ab)c &= ((2h_1)(2h_2))(2h_3) \\ &= 4(h_1h_2)(2h_3) \\ &= 8(h_1h_2h_3) \\ &= (2h_1)4(h_2h_3) \\ &= (2h_1)((2h_2)(2h_3)) \\ &= a(bc). \end{aligned}$$

Jadi  $(H, \bullet)$  berlaku sifat asosiatif.

Karena  $(H, \bullet)$  memenuhi (i) dan (ii) terbukti bahwa  $(H, \bullet)$  adalah semigrup. Maka  $H$  adalah subsemigrup dari  $\mathbb{Z}^+$ . ■

### Contoh 2.5.11

Jika  $G = \mathbb{Z}_{16} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{15}\}$  adalah semigrup dan

$H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}, \bar{14}\} \subseteq G$ , maka  $(H, \bullet)$  adalah subsemigrup dari  $G$ .

### Bukti.

Akan dibuktikan  $H$  dengan operasi pergandaan memenuhi aksioma-aksioma berikut:

(i)  $(H, \cdot)$  tertutup, yaitu untuk setiap  $a, b \in H$  maka  $ab \in H$ .  
Ambil  $a = \bar{6}$  dan  $b = \bar{10}$ , sehingga  $ab = \bar{6} \cdot \bar{10} = \bar{12} \in H$ .  
Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap  $a, b \in H$ . Jadi  $(H, \cdot)$  memenuhi sifat tertutup.

(ii)  $(H, \cdot)$  asosiatif, yaitu untuk setiap  $a, b, c \in H$  maka  $(ab)c = a(bc)$ .

Ambil  $a = \bar{2}$ ,  $b = \bar{4}$ , dan  $c = \bar{6}$ , sehingga

$$(ab)c = (\bar{2} \cdot \bar{4}) \cdot \bar{6} = \bar{0} \in H,$$

$$a(bc) = \bar{2} \cdot (\bar{4} \cdot \bar{6}) = \bar{0} \in H.$$

Terbukti bahwa  $(ab)c = a(bc)$ .

Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap  $a, b, c \in H$ . Jadi  $(H, \cdot)$  memenuhi sifat asosiatif.

Karena  $(H, \cdot)$  memenuhi (i) dan (ii), maka terbukti bahwa  $(H, \cdot)$  adalah semigrup. Maka  $H$  adalah subsemigrup dari  $G$ . ■

### Definisi 2.5.12 (Perkalian Himpunan pada Semigrup)

Misalkan  $(G, \cdot)$  adalah semigrup.  $A$  dan  $B$  himpunan bagian tak kosong dari  $G$ . Maka  $AB$  didefinisikan

$$AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$$

(El-Madhoun, 2007)

### Definisi 2.5.13 (Ideal Kiri dan Ideal Kanan dalam Semigrup)

Misalkan  $(G, *)$  adalah semigrup.  $I$  merupakan himpunan bagian tak kosong dari  $G$ .  $I$  disebut ideal kiri (kanan) dari  $G$  jika

$$gi \in I (ig \in I)$$

untuk setiap  $g \in G$  dan  $i \in I$ .

Jika  $I$  adalah ideal kiri dan kanan, maka  $I$  disebut ideal atau ideal dua sisi dari  $G$ .

(Harju, 1966)

### Contoh 2.5.14

Jika  $G = \mathbb{Z}^+ = \{z \mid z > 0\}$  terhadap operasi pergandaan adalah semigrup, maka  $I = 3\mathbb{Z}^+ = \{3z \mid z \in \mathbb{Z}^+\} \subseteq G$  adalah ideal dari semigrup  $G$ .

**Bukti.**

Akan ditunjukkan  $I = 3\mathbb{Z}^+ = \{3z|z \in \mathbb{Z}^+\}$  adalah ideal kiri dari  $G$ .

Misalkan  $I = \{3z|z \in \mathbb{Z}^+\}$ , sehingga

$$gi = z(3z) = 3z^2 \in I.$$

$$ig = (3z)z = 3z^2 \in I.$$

Karena  $I$  adalah ideal kiri dan kanan maka  $I$  merupakan ideal dua sisi dari semigrup  $G$ . ■

**Contoh 2.5.15**

Jika  $G = \mathbb{Z}_{16} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{14}, \bar{15}\}$  adalah semigrup dengan operasi pergandaan, maka  $I = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}, \bar{12}\}$  adalah ideal dari  $G$ .

**Bukti.**

Akan dibuktikan bahwa  $I$  adalah ideal kiri dari semigrup  $G$ , atau dengan kata lain  $gi \in I$  untuk setiap  $g \in G$  dan  $i \in I$ .

Ambil sebarang  $g = \bar{3}$  dan  $i = \bar{4}$ , sehingga

$$gi = \bar{3} \cdot \bar{4} = \bar{12} \in I,$$

$$ig = \bar{4} \cdot \bar{3} = \bar{12} \in I.$$

Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap  $g \in G$  dan  $i \in I$ . Karena  $I$  adalah ideal kiri dan kanan, maka  $I$  merupakan ideal dua sisi dari semigrup  $G$ . ■

**Definisi 2.5.16 (Ideal Sejati dalam Semigrup)**

Misalkan  $G$  adalah semigrup dan  $I$  himpunan bagian tak kosong dari  $G$ . Maka  $I$  disebut ideal sejati jika  $I \neq G$  dan  $I \neq e$ .

(El-Madhoun, 2007)

**Contoh 2.5.17**

Jika  $\mathbb{Z}_{16} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{14}, \bar{15}\}$  adalah semigrup terhadap operasi pergandaan biasa dan  $I$  adalah himpunan bagian tak kosong dari  $\mathbb{Z}_{16}$ , maka  $I$  adalah ideal sejati.

**Bukti.**

$\mathbb{Z}_{16} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{14}, \bar{15}\}$ . Ideal-ideal dari  $\mathbb{Z}_{16}$  adalah  $I_1 = \{\bar{0}, \bar{8}\}$ ,  $I_2 = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}, \bar{12}\}$ , dan  $I_3 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}, \bar{14}\}$ .  $I_1$ ,  $I_2$ , dan  $I_3$  adalah ideal sejati, karena  $I_1 \neq \mathbb{Z}_{16}$ ,  $I_2 \neq \mathbb{Z}_{16}$ , dan  $I_3 \neq \mathbb{Z}_{16}$ . ■

### Definisi 2.5.18 (Quasi-Ideal dalam Semigrup)

Misalkan  $G$  adalah semigrup. Suatu himpunan bagian tak kosong  $Q$  dari semigrup  $G$  disebut quasi-ideal dari  $G$  jika  $Q$  adalah subsemigrup dari  $G$  yang memenuhi

$$GQ \cap QG \subseteq Q.$$

(El-Madhoun, 2007)

### Contoh 2.5.19

Jika  $G = \mathbb{Z}^+ = \{z | z > 0\}$  terhadap operasi pergandaan adalah semigrup, maka  $Q = 5\mathbb{Z}^+ = \{5z | z \in \mathbb{Z}^+\}$  adalah quasi-ideal dari semigrup  $G$ .

### Bukti.

1. Akan dibuktikan bahwa  $Q$  adalah subsemigrup dari  $G$ . Akan ditunjukkan bahwa  $Q$  terhadap operasi pergandaan memenuhi aksioma-aksioma berikut:

(i)  $(Q, \bullet)$  tertutup, yaitu untuk setiap  $a, b \in Q$  maka  $ab \in Q$ .  
Ambil  $a = 5n_1$  dan  $b = 5n_2$ , sehingga  
 $ab = (5n_1)(5n_2) = 25n_1n_2 = 5(5n_1n_2)$ .  
Karena  $n_1 > 0$  dan  $n_2 > 0$ , maka  $n_1n_2 > 0$ . Jelas bahwa  $5n_1n_2 \in \mathbb{Z}^+$  dan  $5(5n_1n_2) \in Q$ . Jadi  $(Q, \bullet)$  memenuhi sifat tertutup.

(ii)  $(Q, \bullet)$  asosiatif, yaitu untuk setiap  $a, b, c \in G$  maka  $(ab)c = a(bc)$ .  
Ambil  $a = 5n_1$ ,  $b = 5n_2$ , dan  $c = 5n_3$ , sehingga  
 $(ab)c = ((5n_1)(5n_2))(5n_3)$   
 $= 25(n_1n_2)(5n_3)$   
 $= 125(n_1n_2n_3)$   
 $= (5n_1)25(n_2n_3)$   
 $= (5n_1)((5n_2)(5n_3))$   
 $= a(bc)$ .

Jadi  $(Q, \bullet)$  berlaku sifat asosiatif.

Karena  $(Q, \bullet)$  memenuhi (i) dan (ii) terbukti bahwa  $(Q, \bullet)$  adalah semigrup. Maka  $Q$  adalah subsemigrup dari  $G$ .

2. Akan dibuktikan bahwa  $Q = \{5n | n \in \mathbb{Z}^+\}$  memenuhi sifat  $GQ \cap QG \subseteq Q$ , dengan Definisi 2.5.12.

Misalkan  $G = \{z | z > 0\}$  dan  $Q = \{5z | z \in \mathbb{Z}^+\}$ , sehingga



$$GQ = gq = z(5z) = 5z^2.$$

$$QG = qg = (5z)z = 5z^2.$$

$$GQ \cap QG = 5z^2 \subseteq Q.$$

Jadi terbukti bahwa  $GQ \cap QG \subseteq Q$ .

Dari pembuktian 1 dan 2 dapat disimpulkan bahwa  $Q$  adalah quasi-ideal dari  $G$ . ■

### Contoh 2.5.20

Jika  $G = \mathbb{Z}_{16} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{14}, \bar{15}\}$  adalah semigrup terhadap operasi pergandaan biasa, maka  $Q = \{\bar{0}, \bar{8}\}$  adalah quasi-ideal dari  $G$ .

### Bukti.

1. Akan dibuktikan  $Q$  adalah subsemigrup dari  $G$ .

Akan ditunjukkan bahwa  $Q$  terhadap operasi pergandaan memenuhi aksioma-aksioma berikut:

(i)  $(Q, \bullet)$  tertutup, yaitu untuk setiap  $a, b \in Q$  maka  $ab \in Q$ .

Ambil  $a = \bar{0}$  dan  $b = \bar{8}$ , sehingga

$$ab = \bar{0} \bullet \bar{8} = \bar{0} \in Q.$$

Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap  $a, b \in Q$ . Jadi  $(Q, \bullet)$  memenuhi sifat tertutup.

(ii)  $(Q, \bullet)$  asosiatif, yaitu untuk setiap  $a, b, c \in Q$  maka  $(ab)c = a(bc)$ .

Ambil  $a = \bar{0}$ ,  $b = \bar{0}$ , dan  $c = \bar{8}$ , sehingga

$$(ab)c = (\bar{0} \bullet \bar{0}) \bullet \bar{8} = \bar{0} \in Q,$$

$$a(bc) = \bar{0} \bullet (\bar{0} \bullet \bar{8}) = \bar{0} \in Q.$$

Terbukti bahwa  $(ab)c = a(bc)$ .

Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap  $a, b, c \in Q$ .

Jadi  $(Q, \bullet)$  memenuhi sifat asosiatif.

Jadi terbukti bahwa  $Q$  adalah semigrup. Dari Contoh 2.5.3 diketahui bahwa  $G$  adalah semigrup. Karena  $G$  merupakan semigrup dan  $Q \subseteq G$  juga merupakan semigrup maka dengan menggunakan Definisi 2.5.9 terbukti bahwa  $Q$  adalah subsemigrup dari  $G$ .

2. Akan dibuktikan  $Q$  memenuhi  $GQ \cap QG \subseteq Q$ , dengan Definisi 2.5.12.

$$GQ = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{12}, \bar{13}, \bar{14}, \bar{15}\} \bullet \{\bar{0}, \bar{8}\}$$

$$= \{\bar{0}, \bar{8}\} \subseteq Q.$$

$$QG = \{\bar{0}, \bar{8}\} \cdot \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{12}, \bar{13}, \bar{14}, \bar{15}\} \\ = \{\bar{0}, \bar{8}\} \subseteq Q.$$

Jadi terbukti bahwa  $GQ \cap QG \subseteq Q$ .

Dari pembuktian 1 dan 2 dapat disimpulkan bahwa  $Q$  adalah quasi-ideal dari  $G$ . ■

## 2.6 Semigrup Ternari

### Definisi 2.6.1 (Semigrup Ternari)

Misalkan  $S$  himpunan tak kosong. Maka  $S$  disebut semigrup ternari jika terdapat operasi ternar  $S \times S \times S \rightarrow S$ , yang didefinisikan  $(x_1, x_2, x_3) \mapsto^* [x_1 x_2 x_3] = x_1 * x_2 * x_3$  sedemikian sehingga

$$[[x_1 x_2 x_3] x_4 x_5] = [x_1 [x_2 x_3 x_4] x_5] = [x_1 x_2 [x_3 x_4 x_5]]$$

untuk setiap  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in S$ . Selanjutnya,  $[ \ ]$  menunjukkan operasi ternar pada  $S$  jika  $S$  adalah suatu semigrup ternari.

(Dixit dan S. Dewan, 1995)

### Contoh 2.6.2

Didefinisikan operasi  $[ \ ]$  pada  $\mathbb{Z}^-$  dengan syarat untuk setiap  $a, b, c \in \mathbb{Z}^-$ ,  $[abc] = a \cdot b \cdot c$  maka  $(\mathbb{Z}^-, [ \ ])$  merupakan semigrup ternari.

### Bukti.

Akan dibuktikan adalah  $(\mathbb{Z}^-, [ \ ])$  semigrup ternari. Maka harus ditunjukkan bahwa  $(\mathbb{Z}^-, [ \ ])$  memenuhi kondisi berikut:

(i)  $(\mathbb{Z}^-, [ \ ])$  tertutup, maka  $[abc] = a \cdot b \cdot c \in \mathbb{Z}^-$  untuk setiap  $a, b, c \in \mathbb{Z}^-$ .

Ambil sebarang  $a, b, c \in \mathbb{Z}^-$ , maka  $a < 0$ ,  $b < 0$ , dan  $c < 0$ , sehingga  $[abc] = a \cdot b \cdot c < 0$ . Akibatnya  $[abc] = a \cdot b \cdot c \in \mathbb{Z}^-$ . Jadi  $(\mathbb{Z}^-, [ \ ])$  tertutup.

(ii)  $(\mathbb{Z}^-, [ \ ])$  berlaku sifat asosiatif, maka

$$[[abc]de] = [a[bcd]e] = [ab[cde]]$$

untuk setiap  $a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}^-$ .

Ambil sebarang  $a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}^-$ . Karena operasi pergandaan pada bilangan bulat bersifat asosiatif, maka berlaku  $[[abc]de] = [a[bcd]e] = [ab[cde]]$ .

Karena  $(\mathbb{Z}^-, [ \cdot ])$  memenuhi (i) dan (ii) maka terbukti bahwa  $(\mathbb{Z}^-, [ \cdot ])$  merupakan semigrup ternari. ■

### Contoh 2.6.3

Didefinisikan operasi  $[ \cdot ]$  pada  $\mathbb{Z}_{16}$  dengan syarat untuk setiap  $a, b, c \in \mathbb{Z}_{16}$ ,  $[abc] = a \cdot b \cdot c$  maka  $(\mathbb{Z}_{16}, [ \cdot ])$  merupakan semigrup ternari.

### Bukti.

Akan dibuktikan bahwa  $(\mathbb{Z}_{16}, [ \cdot ])$  adalah semigrup ternari. Maka harus ditunjukkan bahwa  $(\mathbb{Z}_{16}, [ \cdot ])$  memenuhi kondisi berikut:

(i)  $(\mathbb{Z}_{16}, [ \cdot ])$  tertutup, maka  $[abc] = a \cdot b \cdot c \in \mathbb{Z}_{16}$  untuk setiap  $a, b, c \in \mathbb{Z}_{16}$ .

Ambil  $a = \bar{3}$ ,  $b = \bar{3}$ , dan  $c = \bar{5}$ , sehingga

$$[abc] = \bar{3} \cdot \bar{3} \cdot \bar{5} = \bar{13} \in \mathbb{Z}_{16}.$$

Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap  $a, b, c \in \mathbb{Z}_{16}$ . Jadi  $\mathbb{Z}_{16}$  tertutup terhadap operasi terner pergandaan.

(ii)  $(\mathbb{Z}_{16}, [ \cdot ])$  berlaku sifat asosiatif, maka

$$[[abc]de] = [a[bcd]e] = [ab[cde]]$$

untuk setiap  $a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}_{16}$ .

Ambil  $a = \bar{2}$ ,  $b = \bar{3}$ ,  $c = \bar{5}$ ,  $d = \bar{6}$ , dan  $e = \bar{3}$  untuk setiap  $a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}_{16}$ , sehingga

$$[[abc]de] = (\bar{2} \cdot \bar{3} \cdot \bar{5}) \cdot \bar{6} \cdot \bar{3} = \bar{12} \in \mathbb{Z}_{16},$$

$$[a[bcd]e] = \bar{2} \cdot (\bar{3} \cdot \bar{5} \cdot \bar{6}) \cdot \bar{3} = \bar{12} \in \mathbb{Z}_{16},$$

$$[ab[cde]] = \bar{2} \cdot \bar{3} \cdot (\bar{5} \cdot \bar{6} \cdot \bar{3}) = \bar{12} \in \mathbb{Z}_{16}.$$

Terbukti bahwa  $[[abc]de] = [a[bcd]e] = [ab[cde]]$ . Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap  $a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}_{16}$ . Jadi  $(\mathbb{Z}_{16}, [ \cdot ])$  memenuhi sifat asosiatif.

Karena  $\mathbb{Z}_{16}$  memenuhi (i) dan (ii) maka terbukti bahwa  $(\mathbb{Z}_{16}, [ \cdot ])$  merupakan semigrup ternari. ■

### Definisi 2.6.4 (Perkalian Himpunan pada Semigrup Ternari)

Misalkan  $(S, [ \cdot ])$  adalah semigrup ternari.  $A_1$ ,  $A_2$ , dan  $A_3$  adalah himpunan bagian tak kosong dari  $S$ . Maka  $[A_1A_2A_3]$  didefinisikan

$$[A_1A_2A_3] = \{[x_1x_2x_3] = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, x_3 \in A_3\}.$$

(Changphas, 2012)

### Definisi 2.6.5 (Subsemigrup Ternari)

Misalkan  $S$  adalah semigrup ternari. Himpunan bagian tak kosong  $T$  dari  $S$  dikatakan subsemigrup ternari dari  $S$  jika

$$[t_1 t_2 t_3] \in T$$

untuk setiap  $t_1, t_2, t_3 \in T$ .

(Dixit dan S. Dewan, 1995)

### Contoh 2.6.6

Misalkan  $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$  dan

$T = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$ . Didefinisikan operasi  $[ \ ]$  pada  $S$

dan  $T$  dengan syarat untuk setiap  $S_1, S_2, S_3 \in S$  dan  $T_1, T_2, T_3 \in T$ ,  $[S_1 S_2 S_3] = S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \in S$  dan  $[T_1 T_2 T_3] = T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \in T$  maka  $(T, [ \ ])$  adalah subsemigrup ternari dari semigrup ternari  $(S, [ \ ])$ .

### Bukti.

1. Akan dibuktikan bahwa  $(S, [ \ ])$  adalah semigrup ternari. Maka harus ditunjukkan bahwa  $(S, [ \ ])$  memenuhi kondisi:

(i)  $(S, [ \ ])$  tertutup, yaitu  $[S_1 S_2 S_3] = S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \in S$  untuk setiap  $S_1, S_2, S_3 \in S$ .

Ambil sebarang  $S_1, S_2, S_3 \in S$ , dimana  $S_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,

$S_2 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ , dan  $S_3 = \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$ , sehingga

$$\begin{aligned} [S_1 S_2 S_3] &= S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dimisalkan  $\begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ , sehingga

$$\begin{aligned} [S_1 S_2 S_3] &= \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 i + b_1 k & a_1 j + b_1 l \\ c_1 i + d_1 k & c_1 j + d_1 l \end{pmatrix} \in S. \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa  $(S, [ \ ])$  tertutup.

(ii)  $(S, [ \ ])$  berlaku sifat asosiatif, maka

$$[[S_1S_2S_3]S_4S_5] = [S_1[S_2S_3S_4]S_5] = [S_1S_2[S_3S_4S_5]]$$

untuk setiap  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 \in S$ .

Ambil sebarang  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 \in S$ . Karena operasi pergandaan pada matriks bersifat asosiatif, maka berlaku

$$[[S_1S_2S_3]S_4S_5] = [S_1[S_2S_3S_4]S_5] = [S_1S_2[S_3S_4S_5]].$$

Karena  $(S, [ \ ])$  memenuhi (i) dan (ii) maka terbukti bahwa  $(S, [ \ ])$  merupakan semigrup ternari.

2. Akan dibuktikan bahwa  $(T, [ \ ])$  adalah subsemigrup ternari dari  $(S, [ \ ])$ . Dengan Definisi 2.6.4 akan ditunjukkan bahwa  $[T_1T_2T_3] \in T$ .

Ambil sebarang  $T_1, T_2, T_3 \in T$ , dimana  $T_1 = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$ ,

$T_2 = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$ , dan  $T_3 = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$ , sehingga

$$\begin{aligned} [T_1T_2T_3] &= T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \\ &= \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} mp & 0 \\ 0 & nq \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} mpu & 0 \\ 0 & nqv \end{pmatrix} \in T. \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa  $(T, [ \ ])$  adalah subsemigrup ternari dari semigrup ternari  $(S, [ \ ])$ . ■

### Definisi 2.6.7 (Ideal dalam Semigrup Ternari)

Misalkan  $S$  adalah semigrup ternari dan  $I$  adalah himpunan bagian tak kosong dari  $S$ . Maka  $I$  disebut ideal kiri (lateral, kanan) dari  $S$  jika

$$[s_1s_2i] \in I \quad ([s_1is_2] \in I, [is_1s_2] \in I),$$

untuk setiap  $s_1, s_2 \in S$  dan  $i \in I$ . Jika  $I$  adalah ideal kiri, ideal lateral, dan ideal kanan dari  $S$ , maka  $I$  disebut ideal dari  $S$ .

(Dixit dan S. Dewan, 1995)

### Contoh 2.6.8

$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$  adalah semigrup ternari dan

$I = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\} \subseteq S$ . Maka  $(I, [ \ ])$  adalah ideal kiri dari semigrup ternari  $(S, [ \ ])$ .

### Bukti.

Akan dibuktikan bahwa  $(I, [ \ ])$  adalah ideal kiri dari semigrup ternari  $(S, [ \ ])$ . Dengan Definisi 2.6.4 akan ditunjukkan bahwa  $[S_1 S_2 I_1] \in I$  untuk setiap  $S_1, S_2 \in S$  dan  $I_1 \in I$ .

Ambil sebarang  $S_1, S_2 \in S$  dan  $I_1 \in I$ , dimana  $S_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ ,

$S_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ , dan  $I_1 = \begin{pmatrix} p & 0 \\ q & 0 \end{pmatrix}$ , sehingga

$$\begin{aligned} [S_1 S_2 I_1] &= S_1 \cdot S_2 \cdot I_1 \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ q & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ q & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 a_2 p + b_1 c_2 p + a_1 b_2 q + b_1 d_2 q & 0 \\ c_1 a_2 p + d_1 c_2 p + c_1 b_2 q + d_1 d_2 q & 0 \end{pmatrix} \in I. \end{aligned}$$

Karena  $[S_1 S_2 I_1] \in I$  maka terbukti bahwa  $(I, [ \ ])$  adalah ideal kiri dari semigrup ternari  $(S, [ \ ])$ . ■

### Contoh 2.6.9

Jika  $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$  dan  $I = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$ .

Didefinisikan operasi  $[ \ ]$  pada  $S$  dan  $I$  dengan syarat untuk setiap  $S_1, S_2 \in S$  dan  $I_1 \in I$ ,  $[S_1 I_1 S_2] = S_1 \cdot I_1 \cdot S_2 \in I$  maka  $(I, [ \ ])$  adalah ideal lateral dari semigrup ternari  $(S, [ \ ])$ .

### Bukti.

1. Akan dibuktikan bahwa  $(S, [ \ ])$  adalah semigrup ternari. Maka harus ditunjukkan bahwa  $(S, [ \ ])$  memenuhi kondisi:
  - (i)  $(S, [ \ ])$  tertutup, yaitu  $[S_1 S_2 S_3] = S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \in S$  untuk setiap  $S_1, S_2, S_3 \in S$ .

Ambil sebarang  $S_1, S_2, S_3 \in S$ , dimana  $S_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ ,

$S_2 = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ , dan  $S_3 = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$ , sehingga

$$\begin{aligned} [S_1 S_2 S_3] &= S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ace & 0 \\ 0 & bde \end{pmatrix} \in S. \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa  $(S, [ \ ])$  tertutup.

(ii)  $(S, [ \ ])$  berlaku sifat asosiatif, maka

$$[[S_1 S_2 S_3] S_4 S_5] = [S_1 [S_2 S_3 S_4] S_5] = [S_1 S_2 [S_3 S_4 S_5]]$$

untuk setiap  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 \in S$ .

Ambil sebarang  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 \in S$ . Karena operasi pergandaan pada matriks bersifat asosiatif, maka berlaku

$$[[S_1 S_2 S_3] S_4 S_5] = [S_1 [S_2 S_3 S_4] S_5] = [S_1 S_2 [S_3 S_4 S_5]].$$

Karena  $(S, [ \ ])$  memenuhi (i) dan (ii) maka terbukti bahwa  $(S, [ \ ])$  merupakan semigrup ternari.

2. Akan dibuktikan bahwa  $(I, [ \ ])$  adalah ideal lateral dari semigrup ternari  $(S, [ \ ])$ . Dengan Definisi 2.6.4 akan ditunjukkan bahwa  $[S_1 I_1 S_2] \in I$ .

Ambil sebarang  $S_1, S_2 \in S$  dan  $I_1 \in I$ , dimana  $S_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$ ,

$S_2 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$ , dan  $I_1 = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , sehingga

$$\begin{aligned} [S_1 I_1 S_2] &= S_1 \cdot I_1 \cdot S_2 \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 p a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I. \end{aligned}$$

Karena  $[S_1 I_1 S_2] \in I$  maka terbukti bahwa  $(I, [ \ ])$  adalah ideal lateral dari semigrup ternari  $(S, [ \ ])$ . ■

### Contoh 2.6.10

$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$  adalah semigrup ternari dan

$I = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\} \subseteq S$ . Maka  $(I, [ \ ])$  adalah ideal kanan dari semigrup ternari  $(S, [ \ ])$ .

### Bukti.

Akan dibuktikan bahwa  $(I, [ \ ])$  adalah ideal kanan dari semigrup ternari  $(S, [ \ ])$ . Dengan Definisi 2.6.4 akan ditunjukkan bahwa  $[I_1 S_1 S_2] \in I$ .

Ambil sebarang  $S_1, S_2 \in S$  dan  $I_1 \in I$ , dimana  $S_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,

$S_2 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ , dan  $I_1 = \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , sehingga

$$\begin{aligned} [I_1 S_1 S_2] &= I_1 \cdot S_1 \cdot S_2 \\ &= \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} pa + qc & pb + qd \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} pae + qcg + pbg + qdg & paf + qcf + pbh + qdh \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Karena  $[I_1 S_1 S_2] \in I$  maka terbukti bahwa  $(I, [ \ ])$  adalah ideal kanan dari semigrup ternari  $(S, [ \ ])$ . ■

### Definisi 2.6.11 (Quasi-Ideal dalam Semigrup Ternari)

Misalkan  $S$  adalah semigrup ternari. Himpunan bagian tak kosong  $Q$  disebut quasi-ideal dari  $S$  jika memenuhi dua kondisi berikut:

- (i)  $[SSQ] \cap [SQS] \cap [QSS] \subseteq Q$ ,
- (ii)  $[SSQ] \cap [SSQSS] \cap [QSS] \subseteq Q$ .

(Dixit dan S. Dewan, 1995)

### Contoh 2.6.12

$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$  adalah semigrup ternari dan

$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\} \subseteq S$ . Maka  $(Q, [ \ ])$  adalah quasi-ideal dari semigrup ternari  $(S, [ \ ])$ .



### Bukti.

Akan dibuktikan bahwa  $(Q, [ \ ])$  adalah quasi-ideal dari semigrup ternari  $(S, [ \ ])$ . Maka harus ditunjukkan bahwa  $(Q, [ \ ])$  memenuhi dua kondisi berikut:

1.  $[SSQ] \cap [SQS] \cap [QSS] \subseteq Q$ .

Akan ditunjukkan bahwa  $[S_1S_2Q_1] \in Q$ ,  $[S_1Q_1S_2] \in Q$ , dan  $[Q_1S_1S_2] \in Q$  untuk setiap  $S_1, S_2 \in S$  dan  $Q_1 \in Q$ .

Ambil sebarang  $S_1, S_2 \in S$  dan  $Q_1 \in Q$ , dimana  $S_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,

$S_2 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ , dan  $Q_1 = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$ , sehingga

$$\begin{aligned} [S_1S_2Q_1] &= S_1 \cdot S_2 \cdot Q_1 \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aeu + bgu & afv + bhv \\ ceu + dgu & cfv + dhv \end{pmatrix} \notin Q, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [S_1Q_1S_2] &= S_1 \cdot Q_1 \cdot S_2 \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} au & bv \\ cu & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aue + bcg & auf + bvh \\ cue + dgu & cuf + dvh \end{pmatrix} \notin Q, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [Q_1S_1S_2] &= Q_1 \cdot S_1 \cdot S_2 \\ &= \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ua & ub \\ vc & vd \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} uae + ubg & uaf + ubh \\ vce + vdg & vcf + vdh \end{pmatrix} \notin Q \end{aligned}$$

$$[SSQ] \cap [SQS] \cap [QSS] = \begin{pmatrix} aeu & 0 \\ 0 & dhv \end{pmatrix} \subseteq Q.$$

Jadi terbukti bahwa  $Q$  memenuhi kondisi

$$[SSQ] \cap [SQS] \cap [QSS] \subseteq Q.$$

2.  $[SSQ] \cap [SSQSS] \cap [QSS] \subseteq Q$ .

Akan ditunjukkan bahwa  $[S_1S_2Q_1] \in Q$ ,  $[S_1S_2Q_1S_3S_4] \in Q$ , dan  $[Q_1S_1S_2] \in Q$  untuk setiap  $S_1, S_2, S_3, S_4 \in S$  dan  $Q_1 \in Q$ .

Ambil sebarang  $S_1, S_2, S_3, S_4 \in S$  dan  $Q_1 \in Q$ , dimana

$$S_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, S_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, S_4 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \text{ dan}$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}, \text{ sehingga}$$

$$[S_1 S_2 Q_1] = \begin{pmatrix} aeu + bgu & afv + bhv \\ ceu + dgu & cfv + dhv \end{pmatrix} \notin Q,$$

$$[Q_1 S_1 S_2] = \begin{pmatrix} uae + ubg & uaf + ubh \\ vce + vdg & vcf + vd h \end{pmatrix} \notin Q,$$

$$\begin{aligned} [S_1 S_2 Q_1 S_3 S_4] &= S_1 \cdot S_2 \cdot Q_1 \cdot S_3 \cdot S_4 \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aeu + bgu & afv + bhv \\ ceu + dgu & cfv + dhv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & bc + d^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$[SSQ] \cap [SSQSS] \cap [QSS] = \begin{pmatrix} aeu & 0 \\ 0 & dhv \end{pmatrix} \in Q.$$

Jadi terbukti bahwa  $Q$  memenuhi

$$[SSQ] \cap [SSQSS] \cap [QSS] \subseteq Q.$$

Dari pembuktian 1 dan 2 dapat diketahui bahwa  $(Q, [ \ ])$  bukan merupakan ideal dari semigrup ternari  $(S, [ \ ])$  tetapi  $(Q, [ \ ])$  merupakan quasi-ideal dari semigrup ternari  $(S, [ \ ])$ . ■

## BAB III

### PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai definisi, teorema, proposisi, lemma, sifat-sifat, dan contoh yang berkaitan dengan quasi-ideal dalam semigrup ternari terurut.

#### 3.1 Semigrup Ternari Terurut

Semigrup ternari terurut merupakan perkembangan dari semigrup ternari. Namun diantara keduanya terdapat perbedaan yang mendasar yaitu adanya relasi terurut parsial.

##### Definisi 3.1.1 (Semigrup Ternari Terurut)

Semigrup ternari  $S$  disebut semigrup ternari terurut jika terdapat relasi terurut " $\leq$ " atas  $S$  sedemikian sehingga  $x \leq y \Rightarrow [xx_1x_2] \leq [yx_1x_2]$ ,  $[x_1xx_2] \leq [x_1yx_2]$ ,  $[x_1x_2x] \leq [x_1x_2y]$  untuk setiap  $x, y, x_1, x_2 \in S$ .

(Changphas, 2012)

##### Contoh 3.1.2

Didefinisikan operasi  $[ ]$  pada  $\mathbb{Z}$  dengan syarat untuk setiap  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ,  $[abc] = a \cdot b \cdot c$  maka  $(\mathbb{Z}, [ ])$  merupakan semigrup ternari terurut.

##### Bukti.

- (i) Akan ditunjukkan bahwa  $(\mathbb{Z}, [ ])$  memenuhi sifat tertutup, yaitu  $[abc] = a \cdot b \cdot c \in \mathbb{Z}$  untuk setiap  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ .  
Ambil sebarang  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , sehingga  $[abc] = a \cdot b \cdot c \in \mathbb{Z}$ . Jadi terbukti bahwa  $(\mathbb{Z}, [ ])$  memenuhi sifat tertutup.
- (ii) Akan ditunjukkan bahwa  $(\mathbb{Z}, [ ])$  memenuhi sifat asosiatif, yaitu untuk setiap  $a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}$  maka

$$[[abc]de] = [a[bcd]e] = [ab[cde]].$$

Ambil sebarang  $a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}$ . Karena operasi pergandaan pada bilangan bulat bersifat asosiatif, maka berlaku  $[[abc]de] = [a[bcd]e] = [ab[cde]]$ .

- (iii) Akan ditunjukkan bahwa  $(\mathbb{Z}, [ ])$  adalah relasi terurut parsial.  
Ambil sebarang  $a, b, x, y \in \mathbb{Z}$  maka berlaku

$[xab] \leq [yab]$ ,  $[axb] \leq [ayb]$ , dan  $[abx] \leq [aby]$ .

Ambil  $a = 4$ ,  $B = 6$ ,  $x = 2$ , dan  $y = 3$ , sehingga

$$[xab] = 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48,$$

$$[yab] = 3 \cdot 4 \cdot 6 = 72.$$

$$[axb] = 4 \cdot 2 \cdot 6 = 48,$$

$$[ayb] = 4 \cdot 3 \cdot 6 = 72.$$

$$[abx] = 4 \cdot 6 \cdot 2 = 48,$$

$$[aby] = 4 \cdot 6 \cdot 3 = 72.$$

Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap  $a, b, x, y \in \mathbb{Z}$ .

Karena  $[xab] \leq [yab]$ ,  $[axb] \leq [ayb]$ , dan  $[abx] \leq [aby]$ , maka  $(\mathbb{Z}, [ \ ])$  adalah relasi terurut parsial.

Karena  $(\mathbb{Z}, [ \ ])$  memenuhi (i), (ii), dan (iii) maka terbukti bahwa  $(\mathbb{Z}, [ \ ])$  adalah semigrup ternari terurut. ■

### Definisi 3.1.3

Misalkan  $S$  adalah semigrup ternari terurut, maka untuk  $A \subseteq S$  dinotasikan  $[A] = \{x \in S \mid x \leq a \text{ untuk setiap } a \in A\}$ .

(Changphas, 2012)

### Contoh 3.1.4

$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$ . Didefinisikan operasi  $[ \ ]$  pada

$S$  dengan syarat untuk setiap  $S_1, S_2, S_3 \in S$ ,  $[S_1 S_2 S_3] = S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \in S$  maka  $(S, [ \ ])$  adalah semigrup ternari terurut.

### Bukti.

Dari Contoh 2.6.6 dapat diketahui bahwa  $(S, [ \ ])$  adalah semigrup ternari. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa  $(S, [ \ ])$  adalah relasi terurut parsial.

Ambil sebarang  $A, B, X, Y \in S$ . Menurut definisi,

$X = (a_{ij}) \leq Y = (b_{ij})$  jika dan hanya jika  $a_{ij} \leq b_{ij}$  untuk setiap  $i, j$  maka berlaku

$$[XAB] \leq [YAB], [AXB] \leq [AYB], \text{ dan } [ABX] \leq [ABY].$$

Jadi terbukti bahwa  $(S, [ \ ])$  adalah semigrup ternari terurut.

Misalkan  $A = \left\{ \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \mid p, q \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\} \subseteq S$ , sehingga

$$(A] = \{x \in S \mid x \leq a \text{ untuk setiap } a \in A\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \mid p, q \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}. \quad \blacksquare$$

### Lemma 3.1.5

Misalkan  $S$  adalah semigrup ternari terurut dan  $A, B \subseteq S$ . Maka berlaku:

1.  $A \subseteq (A]$ ,
2.  $(A] \subseteq (B]$  jika  $A \subseteq B$ ,
3.  $(A \cup B] = (A] \cup (B]$ .

### Bukti.

1. Akan dibuktikan  $A \subseteq (A]$ .  
Misalkan  $a \in A$ , karena " $\leq$ " refleksif atas  $S$ , maka  $a \in (A]$ . Jadi terbukti  $A \subseteq (A]$ .
2. Akan dibuktikan  $(A] \subseteq (B]$  jika  $A \subseteq B$ .  
Diketahui  $A \subseteq B$ . Misalkan  $a \in A$  dan  $b \in B$ . Maka menurut Lemma 3.1.5 (1) berlaku  $a \in (A]$  dan  $b \in (B]$ . Sehingga  $A \subseteq (A]$  dan  $B \subseteq (B]$ . Karena  $(A] \supseteq A \subseteq B \subseteq (B]$  maka  $(A] \subseteq (B]$ . Jadi terbukti  $(A] \subseteq (B]$  jika  $A \subseteq B$ .
3. Akan dibuktikan  $(A \cup B] = (A] \cup (B]$ . Misalkan  $t \in (A \cup B]$ . Maka berlaku  $t \leq a$  atau  $t \leq b$  untuk setiap  $a \in A$ ,  $b \in B$ . Dengan kata lain  $t \leq a$  untuk setiap  $a \in A$  atau  $t \leq b$  untuk setiap  $b \in B$ . Sehingga  $t \in (A]$  atau  $t \in (B]$ .  
Jadi,  $(A \cup B] \subseteq (A] \cup (B]$  ... i)  
Sebaliknya, misalkan  $t \in (A] \cup (B]$ . Maka  $t \leq a$  untuk setiap  $a \in A$  atau  $t \leq b$  untuk setiap  $b \in B$ . Dengan kata lain  $t \leq a$  atau  $t \leq b$  untuk setiap  $a \in A$ ,  $b \in B$ . Sehingga  $t \in (A \cup B]$ . Jadi  $(A] \cup (B] \subseteq (A \cup B]$  ...ii)  
Dari i) dan ii) terbukti  $(A \cup B] = (A] \cup (B]$ . \blacksquare

### Definisi 3.1.6 (Subsemigrup Ternari)

Misal  $S$  adalah semigrup ternari terurut. Himpunan bagian tak kosong  $T$  dari  $S$  disebut subsemigrup ternari dari  $S$  jika

$$[t_1 t_2 t_3] \in T.$$

(Changphas, 2012)

### Contoh 3.1.7

Misalkan  $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$  dan

$T = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$ . Didefinisikan operasi  $[ \ ]$  pada  $S$

dan  $T$  dengan syarat untuk setiap  $S_1, S_2, S_3 \in S$  dan  $T_1, T_2, T_3 \in T$ ,  $[S_1 S_2 S_3] = S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \in S$  dan  $[T_1 T_2 T_3] = T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \in T$  maka  $(T, [ \ ])$  adalah subsemigrup ternari terurut dari semigrup ternari terurut  $(S, [ \ ])$ .

### Bukti.

Akan dibuktikan bahwa  $(T, [ \ ])$  adalah subsemigrup ternari terurut dari  $(S, [ \ ])$ . Dengan Definisi 2.6.4 akan ditunjukkan bahwa  $[T_1 T_2 T_3] \in T$ .

Ambil sebarang  $T_1, T_2, T_3 \in T$ , dimana  $T_1 = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & n_1 \end{pmatrix}$ ,

$T_2 = \begin{pmatrix} m_2 & 0 \\ 0 & n_2 \end{pmatrix}$ , dan  $T_3 = \begin{pmatrix} m_3 & 0 \\ 0 & n_3 \end{pmatrix}$ , sehingga

$$\begin{aligned} [T_1 T_2 T_3] &= T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \\ &= \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & n_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_2 & 0 \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_3 & 0 \\ 0 & n_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m_1 m_2 & 0 \\ 0 & n_1 n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_3 & 0 \\ 0 & n_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m_1 m_2 m_3 & 0 \\ 0 & n_1 n_2 n_3 \end{pmatrix} \in T. \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa  $(T, [ \ ])$  merupakan subsemigrup ternari terurut dari semigrup ternari terurut  $(S, [ \ ])$ . ■

### 3.2 Ideal dalam Semigrup Ternari Terurut

#### Definisi 3.2.1 (Ideal dalam Semigrup Ternari Terurut)

Misalkan  $S$  adalah semigrup ternari terurut dan  $I$  adalah himpunan bagian tak kosong dari  $S$ . Maka  $I$  disebut ideal kiri (lateral, kanan) dari  $S$  jika memenuhi:

- (i)  $[s_1s_2i] \in I, ([s_1is_2] \in I, [is_1s_2] \in I)$ , untuk setiap  $s_1, s_2 \in S$  dan  $i \in I$ .
- (ii) Jika  $x \in I$  dan  $y \in S$  sedemikian sehingga  $y \leq x$ , maka  $y \in I$ .  
Jika  $I$  adalah ideal kiri, ideal lateral, dan ideal kanan dari  $S$ , maka  $I$  disebut ideal dari  $S$ .

(Changphas, 2012)

#### Contoh 3.2.2

$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$  adalah semigrup ternari terurut dan  $I = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\} \subseteq S$ . Maka  $(I, [ \ ])$  adalah ideal kiri dari semigrup ternari terurut  $(S, [ \ ])$ .

#### Bukti.

Akan dibuktikan bahwa  $(I, [ \ ])$  adalah ideal kiri dari semigrup ternari terurut  $(S, [ \ ])$ . Dengan Definisi 2.6.4 akan ditunjukkan bahwa  $[S_1S_2I_1] \in I$ .

Ambil sebarang  $S_1, S_2 \in S$  dan  $I_1 \in I$ , dimana  $S_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ ,

$S_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ , dan  $I_1 = \begin{pmatrix} p & 0 \\ q & 0 \end{pmatrix}$ , sehingga

$$\begin{aligned} [S_1S_2I_1] &= S_1 \cdot S_2 \cdot I_1 \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ q & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ q & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1a_2p + b_1c_2p + a_1b_2q + b_1d_2q & 0 \\ c_1a_2p + d_1c_2p + c_1b_2q + d_1d_2q & 0 \end{pmatrix} \in I. \end{aligned}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa  $(I, [ \ ])$  memenuhi sifat relasi terurut parsial.

Misal  $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \in I$  dan  $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S$ . Menurut Definisi,  $Y = (a_{ij}) \leq X = (b_{ij})$  jika dan hanya jika  $a_{ij} \leq b_{ij}$  untuk setiap  $i, j$ . Maka  $Y = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \in I$ .

Jadi terbukti bahwa  $(I, [ \ ])$  adalah ideal kiri dari semigrup ternari terurut  $(S, [ \ ])$ . ■

### Contoh 3.2.3

Misalkan  $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$  dan

$I = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$ . Didefinisikan operasi  $[ \ ]$  pada  $S$  dan  $I$  dengan syarat untuk setiap  $S_1, S_2 \in S$  dan  $I_1 \in I$ ,  $[S_1 I_1 S_2] = S_1 \cdot I_1 \cdot S_2 \in I$  maka  $(I, [ \ ])$  adalah ideal lateral dari semigrup ternari terurut  $(S, [ \ ])$ .

#### Bukti.

Akan dibuktikan bahwa  $(I, [ \ ])$  adalah ideal lateral dari semigrup ternari terurut  $(S, [ \ ])$ . Dengan Definisi 2.6.4 akan ditunjukkan bahwa  $[S_1 I_1 S_2] \in I$ .

Ambil sebarang  $S_1, S_2 \in S$  dan  $I_1 \in I$ , dimana  $S_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$ ,

$S_2 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$ , dan  $I_1 = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , sehingga

$$\begin{aligned} [S_1 I_1 S_2] &= S_1 \cdot I_1 \cdot S_2 \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 p a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I. \end{aligned}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa  $(I, [ \ ])$  memenuhi sifat relasi terurut parsial.



Misal  $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$  dan  $Y = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in S$ . Menurut Definisi,  $Y = (a_{ij}) \leq X = (b_{ij})$  jika dan hanya jika  $a_{ij} \leq b_{ij}$  untuk setiap  $i, j$ . Maka  $Y = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$ .

Jadi terbukti bahwa  $(I, [ \ ])$  adalah ideal lateral dari semigrup ternari terurut  $(S, [ \ ])$ . ■

### Contoh 3.2.4

$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$  adalah semigrup ternari terurut dan  $I = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\} \subseteq S$ , maka  $(I, [ \ ])$  adalah ideal kanan dari semigrup ternari terurut  $(S, [ \ ])$ .

### Bukti.

Akan dibuktikan bahwa  $(I, [ \ ])$  adalah ideal kanan dari semigrup ternari terurut  $(S, [ \ ])$ . Dengan Definisi 2.6.4 akan ditunjukkan bahwa  $[I_1 S_1 S_2] \in I$ .

Ambil sebarang  $S_1, S_2 \in S$  dan  $I_1 \in I$ , dimana  $S_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,

$S_2 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ , dan  $I_1 = \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , sehingga

$$\begin{aligned} [I_1 S_1 S_2] &= I_1 \cdot S_1 \cdot S_2 \\ &= \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} pa + qc & pb + qd \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} pae + qcg + pbg + qdg & paf + qcf + pbh + qdh \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa  $(I, [ \ ])$  memenuhi sifat relasi terurut parsial.

Misal  $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$  dan  $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S$ . Menurut Definisi,  $Y = (a_{ij}) \leq X = (b_{ij})$  jika dan hanya jika  $a_{ij} \leq b_{ij}$  untuk setiap  $i, j$ . Maka  $Y = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$ .

Jadi terbukti bahwa  $(I, [ \ ])$  adalah ideal kanan dari semigrup ternari terurut  $(S, [ \ ])$ . ■

### Definisi 3.2.5 (Quasi-Ideal dalam Semigrup Ternari Terurut)

Misalkan  $S$  adalah semigrup ternari terurut dan  $Q$  adalah himpunan bagian tak kosong dari  $S$ . Maka  $Q$  disebut quasi-ideal dari  $S$  jika memenuhi kondisi:

- (i)  $[SSQ] \cap [SQS] \cap [QSS] \subseteq Q$ ,
  - (ii)  $[SSQ] \cap [SSQSS] \cap [QSS] \subseteq Q$ ,
  - (iii) Jika  $x \in Q$  dan  $y \in S$  sedemikian sehingga  $y \leq x$ , maka  $y \in Q$ .
- (Changphas, 2012)

### Contoh 3.2.6

$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$  adalah semigrup ternari terurut dan  $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\} \subseteq S$ , maka  $(Q, [ \ ])$  adalah quasi-ideal dari semigrup ternari terurut  $(S, [ \ ])$ .

### Bukti.

Akan dibuktikan bahwa  $(Q, [ \ ])$  adalah quasi-ideal dari semigrup ternari terurut  $(S, [ \ ])$ . Maka harus ditunjukkan bahwa  $(Q, [ \ ])$  memenuhi dua kondisi berikut:

3.  $[SSQ] \cap [SQS] \cap [QSS] \subseteq Q$ .

Dengan Definisi 2.6.4 akan ditunjukkan bahwa  $[S_1 S_2 Q_1] \in Q$ ,  $[S_1 Q_1 S_2] \in Q$ , dan  $[Q_1 S_1 S_2] \in Q$  untuk setiap  $S_1, S_2 \in S$  dan  $Q_1 \in Q$ .

Ambil sebarang  $S_1, S_2 \in S$  dan  $Q_1 \in Q$ , dimana  $S_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,

$S_2 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ , dan  $Q_1 = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$ , sehingga

$$\begin{aligned} [S_1 S_2 Q_1] &= S_1 \cdot S_2 \cdot Q_1 \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aeu + bgu & afv + bhv \\ ceu + dgu & cfv + dhv \end{pmatrix} \notin Q, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[S_1 Q_1 S_2] &= S_1 \cdot Q_1 \cdot S_2 \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} au & bv \\ cu & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} aue + bcg & auf + bv h \\ cue + dgu & cuf + dv h \end{pmatrix} \notin Q,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[Q_1 S_1 S_2] &= Q_1 \cdot S_1 \cdot S_2 \\
&= \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ua & ub \\ vc & vd \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} uae + ubg & uaf + ubh \\ vce + vdg & vcf + vdh \end{pmatrix} \notin Q
\end{aligned}$$

$$[SSQ] \cap [SQS] \cap [QSS] = \begin{pmatrix} aeu & 0 \\ 0 & dhv \end{pmatrix} \subseteq Q.$$

Jadi terbukti bahwa  $(Q, [ \ ])$  memenuhi kondisi

$$[SSQ] \cap [SQS] \cap [QSS] \subseteq Q.$$

4.  $[SSQ] \cap [SSQSS] \cap [QSS] \subseteq Q.$

Dengan Definisi 2.6.4 akan ditunjukkan bahwa  $[S_1 S_2 Q_1] \in Q$ ,  $[S_1 S_2 Q_1 S_3 S_4] \in Q$ , dan  $[Q_1 S_1 S_2] \in Q$  untuk setiap  $S_1, S_2, S_3, S_4 \in S$  dan  $Q_1 \in Q$ .

Ambil sebarang  $S_1, S_2, S_3, S_4 \in S$  dan  $Q_1 \in Q$ , dimana

$$S_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, S_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, S_4 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \text{ dan}$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}, \text{ sehingga}$$

$$[S_1 S_2 Q_1] = \begin{pmatrix} aeu + bgu & afv + bhv \\ ceu + dgu & cfv + dhv \end{pmatrix} \notin Q,$$

$$[Q_1 S_1 S_2] = \begin{pmatrix} uae + ubg & uaf + ubh \\ vce + vdg & vcf + vdh \end{pmatrix} \notin Q,$$

$$[S_1 S_2 Q_1 S_3 S_4] = S_1 \cdot S_2 \cdot Q_1 \cdot S_3 \cdot S_4$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} aeu + bgu & afv + bhv \\ ceu + dgu & cfv + dhv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & bc + d^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$[SSQ] \cap [SSQSS] \cap [QSS] = \begin{pmatrix} aeu & 0 \\ 0 & dhv \end{pmatrix} \subseteq Q.$$

Jadi terbukti bahwa  $(Q, [ \ ])$  memenuhi

$$[SSQ] \cap [SSQSS] \cap [QSS] \subseteq Q.$$

5. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa  $(Q, [ \ ])$  memenuhi sifat relasi terurut parsial.

Misal  $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \in Q$  dan  $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S$ . Menurut

Definisi,  $Y = (a_{ij}) \leq X = (b_{ij})$  jika dan hanya jika  $a_{ij} \leq b_{ij}$

untuk setiap  $i, j$ . Maka  $Y = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \in Q$ .

Dari pembuktian 1, 2, dan 3 dapat diketahui bahwa  $(Q, [ \ ])$  bukan merupakan ideal kiri, ideal lateral, dan ideal kanan tetapi  $(Q, [ \ ])$  merupakan quasi-ideal dari semigrup ternari terurut  $(S, [ \ ])$ . ■

### Proposisi 3.2.7

Misalkan  $S$  adalah semigrup ternari terurut,  $Q$  adalah quasi-ideal dari  $S$ , dan  $T$  adalah subsemigrup ternari terurut dari  $S$ . Jika  $Q \cap T \neq \emptyset$ , maka  $Q \cap T$  adalah quasi-ideal dari  $T$ .

### Bukti.

Asumsikan bahwa  $Q_1 = Q \cap T \neq \emptyset$ . Karena  $Q_1 \subseteq Q \cap T$  dan  $T$  adalah subsemigrup ternari dari  $S$ , sehingga berdasarkan Definisi 3.2.5 diperoleh:

- (i)  $[TTQ_1] \cap [TQ_1T] \cap [Q_1TT] \subseteq Q_1$ .  
 $[TT[Q \cap T]] \cap [T[Q \cap T]T] \cap [[Q \cap T]TT]$   
 $= [[TTQ] \cap [TTT]] \cap [[TQT] \cap [TTT]] \cap [[QTT] \cap [TTT]]$   
 $= [[TTQ] \cap [TQT] \cap [QTT]] \cap [TTT]$   
 $\subseteq Q \cap T$ .
- (ii)  $[TTQ_1] \cap [TTQ_1TT] \cap [Q_1TT] \subseteq Q_1$ .  
 $[TT[Q \cap T]] \cap [TT[Q \cap T]TT] \cap [[Q \cap T]TT]$   
 $= [[TTQ] \cap [TTT]] \cap [[TTQTT] \cap [TTTTT]] \cap$   
 $[ [QTT] \cap [TTT] ]$   
 $= [[TTQ] \cap [TTQTT] \cap [QTT]] \cap [[TTT] \cap [TTTTT]]$   
 $\subseteq Q \cap T$ .

- (iii) Misalkan  $x \in Q \cap T$  dan  $y \in T$  sedemikian sehingga  $y \leq x$ . Karena  $x \in Q$  dan  $y \in Q$ . Jadi,  $y \in Q \cap T$ . Terbukti bahwa  $Q \cap T$  adalah quasi-ideal dari  $T$ . ■

**Contoh 3.2.8**

$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$  adalah semigrup ternari terurut,

$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$  adalah quasi-ideal dari  $(S, [ \ ])$ , dan

$T = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$  adalah subsemigrup ternari terurut dari  $(S, [ \ ])$ . Maka  $(Q \cap T, [ \ ])$  adalah quasi-ideal dari  $(T, [ \ ])$ .

**Bukti.**

1. Akan ditunjukkan bahwa  $(Q, [ \ ])$  adalah quasi-ideal dari  $(S, [ \ ])$ . Dari Contoh 3.2.6 terbukti bahwa  $(Q, [ \ ])$  adalah quasi-ideal dari  $(S, [ \ ])$ .
2. Akan ditunjukkan bahwa  $(T, [ \ ])$  adalah subsemigrup ternari terurut dari  $(S, [ \ ])$ . Dengan Definisi 2.6.4 akan ditunjukkan bahwa  $[T_1 T_2 T_3] \in T$ .

Ambil sebarang  $T_1, T_2, T_3 \in T$ , dimana  $T_1 = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,

$T_2 = \begin{pmatrix} p_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , dan  $T_3 = \begin{pmatrix} p_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , sehingga

$$\begin{aligned} [T_1 T_2 T_3] &= T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \\ &= \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_1 p_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_1 p_2 p_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in T. \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa  $(T, [ \ ])$  merupakan subsemigrup ternari terurut dari semigrup ternari terurut  $(S, [ \ ])$ .

3. Akan dibuktikan bahwa  $(Q \cap T, [ \ ])$  adalah quasi-ideal dari  $(T, [ \ ])$ . Maka diasumsikan bahwa  $Q_1 = Q \cap T$  dan harus ditunjukkan bahwa  $(Q_1, [ \ ])$  memenuhi:

(i)  $[TTQ_1] \cap [TQ_1T] \cap [Q_1TT] \subseteq Q_1$ .

Dengan Definisi 2.6.4 akan ditunjukkan bahwa  $[T_1T_2A] \in Q_1$ ,  $[T_1AT_2] \in Q_1$ , dan  $[AT_1T_2] \in Q_1$  untuk setiap  $T_1, T_2 \in T$  dan  $A \in Q_1$ .

$$Q_1 = Q \cap T = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ambil sebarang  $T_1, T_2 \in T$  dan  $A \in Q_1$ , dimana

$$T_1 = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dan } A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ sehingga}$$

$$\begin{aligned} [T_1T_2A] &= T_1 \cdot T_2 \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1x_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1x_2a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in Q_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [T_1AT_2] &= T_1 \cdot A \cdot T_2 \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1ax_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in Q_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [AT_1T_2] &= A \cdot T_1 \cdot T_2 \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax_1x_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in Q_1. \end{aligned}$$

$$[TTQ_1] \cap [TQ_1T] \cap [Q_1TT] = \begin{pmatrix} ax_1x_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subseteq Q_1.$$

Jadi terbukti bahwa  $(Q_1, [ \ ])$  memenuhi kondisi

$$[TTQ_1] \cap [TQ_1T] \cap [Q_1TT] \subseteq Q_1.$$

(ii)  $[TTQ_1] \cap [TTQ_1TT] \cap [Q_1TT] \subseteq Q_1$ .

Dengan Definisi 2.6.4 akan ditunjukkan bahwa

$[T_1T_2A] \in Q_1$ ,  $[T_1T_2AT_3T_4] \in Q_1$ , dan  $[AT_1T_2] \in Q_1$  untuk setiap  $T_1, T_2, T_3, T_4 \in T$  dan  $A \in Q_1$ .

Ambil sebarang  $T_1, T_2 \in T$  dan  $A \in Q_1$ , dimana

$$T_1 = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, T_3 = \begin{pmatrix} x_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$T_4 = \begin{pmatrix} x_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  dan  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , sehingga

$$[T_1 T_2 A] = \begin{pmatrix} x_1 x_2 a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in Q_1.$$

$$[A T_1 T_2] = \begin{pmatrix} a x_1 x_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in Q_1.$$

$$\begin{aligned} [T_1 T_2 A T_3 T_4] &= T_1 \cdot T_2 \cdot A \cdot T_3 \cdot T_4 \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 x_2 a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 x_2 a x_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 x_2 a x_3 x_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in Q_1. \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa  $(Q_1, [ \ ])$  memenuhi kondisi

$$[TTQ_1] \cap [TTQ_1TT] \cap [Q_1TT] \subseteq Q_1.$$

(iii) Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa  $(Q_1, [ \ ])$  memenuhi sifat relasi terurut parsial.

Misal  $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in Q_1$  dan  $Y = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in T$ . Menurut Definisi,  $Y = (a_{ij}) \leq X = (b_{ij})$  jika dan hanya jika  $a_{ij} \leq b_{ij}$  untuk setiap  $i, j$ . Maka  $Y = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in Q_1$ .

Dari pembuktian 1, 2, dan 3 terbukti bahwa  $(Q_1, [ \ ])$  adalah quasi-ideal dari  $(T, [ \ ])$ . ■

### Proposisi 3.2.9

Misalkan  $S$  adalah semigrup ternari terurut dan  $\{Q_i | i \in I\}$  adalah himpunan tak kosong dari quasi-ideal dari  $S$ . Jika  $\bigcap_{i \in I} Q_i \neq \emptyset$ , maka  $\bigcap_{i \in I} Q_i$  adalah quasi-ideal dari  $S$ .

### Bukti.

Asumsikan bahwa  $Q = \bigcap_{i \in I} Q_i \neq \emptyset$ . Sehingga berdasarkan Definisi 3.2.5 diperoleh:

$$\begin{aligned} (i) \quad [SSQ] \cap [SQS] \cap [QSS] \\ &= [SS[\bigcap_{i \in I} Q_i]] \cap [S[\bigcap_{i \in I} Q_i]S] \cap [[\bigcap_{i \in I} Q_i]SS] \\ &\subseteq \bigcap_{i \in I} Q_i. \end{aligned}$$

- (ii)  $[SSQ] \cap [SSQSS] \cap [QSS]$   
 $= [SS[\cap_{i \in I} Q_i]] \cap [SS[\cap_{i \in I} Q_i]SS] \cap [[\cap_{i \in I} Q_i]SS]$   
 $\subseteq \cap_{i \in I} Q_i.$
- (iii) Misalkan  $x \in \cap_{i \in I} Q_i$  dan  $y \in S$  sedemikian sehingga  $y \leq x$ .  
 Misalkan  $i \in I$ . Karena  $y \leq x$ ,  $x \in Q_i$ , dan  $y \in Q_i$ . Jadi  
 $y \in \cap_{i \in I} Q_i.$
- Terbukti bahwa  $\cap_{i \in I} Q_i$  adalah quasi-ideal dari  $S$ . ■

### Contoh 3.2.10

$S = \mathbb{Z} = \{z | z \in \mathbb{Z}\}$  adalah semigrup ternari terurut,  $Q_1 = 2\mathbb{Z}$  adalah quasi-ideal dari semigrup ternari terurut  $(S, [ \ ])$ ,  $Q_2 = 3\mathbb{Z}$  adalah quasi-ideal dari semigrup ternari terurut  $(S, [ \ ])$ , dan  $Q_3 = 4\mathbb{Z}$  adalah quasi-ideal dari semigrup ternari terurut  $(S, [ \ ])$ . Maka  $(Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3, [ \ ])$  adalah quasi-ideal dari  $(S, [ \ ])$ .

### Bukti.

Akan dibuktikan bahwa  $(Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3, [ \ ])$  adalah quasi-ideal dari  $(S, [ \ ])$ . Maka diasumsikan bahwa  $Q = Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3$  dan harus ditunjukkan bahwa  $(Q, [ \ ])$  memenuhi:

- (i)  $[SSQ] \cap [SQS] \cap [QSS] \subseteq Q.$

Akan ditunjukkan bahwa  $[s_1 s_2 q] \in Q$ ,  $[s_1 q s_2] \in Q$ , dan  $[q s_1 s_2] \in Q$  untuk setiap  $s_1, s_2 \in S$  dan  $q \in Q$ .

$$Q = Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3 = 2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} \cap 4\mathbb{Z} = 12\mathbb{Z} = \{12z | z \in \mathbb{Z}\}.$$

$$[s_1 s_2 q] = s_1 \cdot s_2 \cdot q = (z)(z)(12z) = 12z^3 \in Q,$$

$$[s_1 q s_2] = s_1 \cdot q \cdot s_2 = (z)(12z)(z) = 12z^3 \in Q,$$

$$[q s_1 s_2] = q \cdot s_1 \cdot s_2 = (12z)(z)(z) = 12z^3 \in Q.$$

$$[SSQ] \cap [SQS] \cap [QSS] = 12z^3 \subseteq Q.$$

Jadi terbukti bahwa  $(Q, [ \ ])$  memenuhi kondisi

$$[SSQ] \cap [SQS] \cap [QSS] \subseteq Q.$$

- (ii)  $[SSQ] \cap [SSQSS] \cap [QSS] \subseteq Q.$

Akan ditunjukkan bahwa  $[s_1 s_2 q] \in Q$ ,  $[s_1 s_2 q s_3 s_4] \in Q$ , dan  $[q s_1 s_2] \in Q$  untuk setiap  $s_1, s_2, s_3, s_4 \in S$  dan  $q \in Q$ .

$$[s_1 s_2 q] = s_1 \cdot s_2 \cdot q = (z)(z)(12z) = 12z^3 \in Q,$$

$$[q s_1 s_2] = q \cdot s_1 \cdot s_2 = (12z)(z)(z) = 12z^3 \in Q,$$

$$[s_1 s_2 q s_3 s_4] = s_1 \cdot s_2 \cdot q \cdot s_3 \cdot s_4$$

$$= (z)(z)(12z)(z)(z) = 12z^5 \in Q.$$

$$[SSQ] \cap [SSQSS] \cap [QSS] = 12z^3 \subseteq Q.$$



Jadi terbukti bahwa  $(Q, [ \ ])$  memenuhi kondisi  
 $[SSQ] \cap [SSQSS] \cap [QSS] \subseteq Q$ .

(iii) Misalkan  $X = 12\mathbb{Z} \subseteq Q$  dan  $Y = 24\mathbb{Z} \subseteq S$ . Menurut Definisi  $Y \leq X \Leftrightarrow Y \subseteq X$ , maka  $Y \subseteq Q$ .

Karena  $Q$  memenuhi (i), (ii), dan (iii) sehingga terbukti bahwa  $(Q, [ \ ])$  adalah quasi ideal dari  $(S, [ \ ])$ . ■

### Definisi 3.2.11

Misalkan  $S$  adalah semigrup ternari terurut dan  $X$  adalah himpunan bagian tak kosong dari  $S$ . Maka irisan dari semua quasi-ideal dari  $S$  yang memuat  $X$ , dinotasikan  $\langle X \rangle_q$ , adalah quasi-ideal dari  $S$  yang memuat  $X$ . Irisan dari semua quasi-ideal dari  $S$  yang memuat  $X$  disebut quasi-ideal yang dibangun oleh  $X$ .

(Changphas,2012)

### Contoh 3.2.12

$S = \mathbb{Z} = \{z | z \in \mathbb{Z}\}$  adalah semigrup ternari terurut.

$Q_1 = 2\mathbb{Z} = \{2z | z \in \mathbb{Z}\}$  adalah quasi-ideal dari  $S$ ,

$Q_2 = 3\mathbb{Z} = \{3z | z \in \mathbb{Z}\}$  adalah quasi-ideal dari  $S$ ,

$Q_3 = 4\mathbb{Z} = \{4z | z \in \mathbb{Z}\}$  adalah quasi-ideal dari  $S$ , dan

$Q_4 = 5\mathbb{Z} = \{5z | z \in \mathbb{Z}\}$  adalah quasi-ideal dari  $S$ .

Sehingga  $Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3 \cap Q_4 = 60\mathbb{Z}$ .

Jadi,  $\langle X \rangle_q = 60\mathbb{Z} = \{30z | z \in \mathbb{Z}\}$ .

### Proposisi 3.2.13

Misalkan  $S$  adalah semigrup ternari terurut. Irisan dari ideal kiri, ideal lateral, dan ideal kanan dari  $S$  merupakan quasi-ideal dari  $S$ .

### Bukti.

Misalkan  $L$  adalah ideal kiri dari  $S$ ,  $M$  adalah ideal lateral dari  $S$ , dan  $R$  adalah ideal kanan dari  $S$ . Diasumsikan bahwa  $Q = L \cap M \cap R$ .

Ambil sebarang  $l \in L$ ,  $m \in M$ , dan  $r \in R$ . Karena

$[lmr] \in [L \cap M \cap R]$ , sehingga  $Q$  tak kosong. Karena  $[SSQ] \subseteq L$ ,  $[SQS] \subseteq M$ , dan  $[QSS] \subseteq R$ , sehingga berdasarkan Definisi 3.2.5 diperoleh:

- (i)  $[SSQ] \cap [SQS] \cap [QSS]$   
 $= [SS[L \cap M \cap R]] \cap [S[L \cap M \cap R]S] \cap [[L \cap M \cap R]SS]$   
 $= [[SSL] \cap [SSM] \cap [SSR]] \cap [[SLS] \cap [SMS] \cap [SRS]] \cap$   
 $[LSS] \cap [MSS] \cap [RSS]$   
 $= [[SSL] \cap [SLS] \cap [LSS]] \cap [[SSM] \cap [SMS] \cap [MSS]] \cap$   
 $[[SSR] \cap [SRS] \cap [RSS]]$   
 $\subseteq L \cap M \cap R = Q.$
- (ii)  $[SSQ] \cap [SSQSS] \cap [QSS]$   
 $= [SS[L \cap M \cap R]] \cap [SS[L \cap M \cap R]SS] \cap [[L \cap M \cap R]SS]$   
 $= [[SSL] \cap [SSM] \cap [SSR]] \cap$   
 $[[SSLSS] \cap [SSMSS] \cap [SSRSS]] \cap$   
 $[LSS] \cap [MSS] \cap [RSS]$   
 $= [[SSL] \cap [SSLSS] \cap [LSS]] \cap$   
 $[[SSM] \cap [SSMSS] \cap [MSS]] \cap$   
 $[[SSR] \cap [SSRSS] \cap [RSS]]$   
 $\subseteq L \cap M \cap R = Q.$
- (iii) Misalkan  $x \in L \cap M \cap R$  dan  $y \in S$  sedemikian sehingga  $y \leq x$ .  
 Karena  $x \in L \cap M \cap R$ , sehingga  $y \in L \cap M \cap R$ .  
 Terbukti bahwa  $L \cap M \cap R$  adalah quasi ideal dari  $S$ . ■

**Contoh 3.2.14**

$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$  adalah semigrup ternari terurut,  
 $L = \left\{ \begin{pmatrix} r & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} \mid r, t \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$  adalah ideal kiri dari semigrup ternari terurut  $(S, [ \ ])$ ,  $M = \left\{ \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \mid r, s, t, u \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$  adalah ideal kanan dari semigrup ternari terurut  $(S, [ \ ])$ , dan  
 $R = \left\{ \begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$  adalah ideal kanan dari semigrup ternari terurut  $(S, [ \ ])$ . Maka  $(L \cap M \cap R, [ \ ])$  merupakan quasi-ideal dari  $(S, [ \ ])$ .

**Bukti.**

Akan dibuktikan bahwa  $(L \cap M \cap R, [ \ ])$  adalah quasi-ideal dari  $(S, [ \ ])$ . Maka diasumsikan bahwa  $Q = L \cap M \cap R$  dan harus ditunjukkan bahwa  $Q$  memenuhi:

(i)  $[SSQ] \cap [SQS] \cap [QSS] \subseteq Q$ .

Dengan Definisi 2.6.4 akan ditunjukkan bahwa  $[S_1S_2Q_1] \in Q$ ,  $[S_1Q_1S_2] \in Q$ , dan  $[Q_1S_1S_2] \in Q$  untuk setiap  $S_1, S_2 \in S$  dan  $Q_1 \in Q$ .

$$\begin{aligned} Q &= L \cap M \cap R \\ &= \begin{pmatrix} r & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ambil sebarang  $S_1, S_2 \in S$  dan  $Q_1 \in Q$ , dimana  $S_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,

$S_2 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ , dan  $Q_1 = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , sehingga

$$\begin{aligned} [S_1S_2Q_1] &= S_1 \cdot S_2 \cdot Q_1 \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aex + bgx & 0 \\ cex + dgx & 0 \end{pmatrix} \notin Q, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [S_1Q_1S_2] &= S_1 \cdot Q_1 \cdot S_2 \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax & 0 \\ cx & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} axe & axf \\ cxe & cxf \end{pmatrix} \notin Q, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [Q_1S_1S_2] &= Q_1 \cdot S_1 \cdot S_2 \\ &= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xa & xb \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xae + xbg & xaf + xbh \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin Q. \end{aligned}$$

$$[SSQ] \cap [SQS] \cap [QSS] = \begin{pmatrix} aex & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subseteq Q.$$

Jadi terbukti bahwa  $(Q, [ \ ])$  memenuhi kondisi

$$[SSQ] \cap [SSQS] \cap [QSS] \subseteq Q.$$

(ii)  $[SSQ] \cap [SSQS] \cap [QSS] \subseteq Q.$

Dengan Definisi 2.6.4 akan ditunjukkan bahwa  $[S_1 S_2 Q_1] \in Q,$

$[S_1 S_2 Q_1 S_3 S_4] \in Q,$  dan  $[Q_1 S_1 S_2] \in Q$  untuk setiap

$S_1, S_2, S_3, S_4 \in S$  dan  $Q_1 \in Q.$

Ambil sebarang  $S_1, S_2, S_3, S_4 \in S$  dan  $Q_1 \in Q,$  dimana

$$S_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, S_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, S_4 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \text{ dan}$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ sehingga}$$

$$[S_1 S_2 Q_1] = \begin{pmatrix} aex + bgx & 0 \\ cex + dgx & 0 \end{pmatrix} \notin Q,$$

$$[Q_1 S_1 S_2] = \begin{pmatrix} xae + xbg & xaf + xbh \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in Q,$$

$$\begin{aligned} [S_1 S_2 Q_1 S_3 S_4] &= S_1 \cdot S_2 \cdot Q_1 \cdot S_3 \cdot S_4 \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aex + bgx & 0 \\ cex + dgx & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 ex + abgx & abex + b^2 gx \\ acex + adgx & bcex + bdgx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \notin Q. \end{aligned}$$

$$[SSQ] \cap [SSQS] \cap [QSS] = \begin{pmatrix} aex & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subseteq Q.$$

Jadi terbukti bahwa  $(Q, [ \ ])$  memenuhi kondisi

$$[SSQ] \cap [SSQS] \cap [QSS] \subseteq Q.$$

(iii) Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa  $(Q_1, [ \ ])$  memenuhi sifat relasi terurut parsial.

Misal  $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in Q$  dan  $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S.$  Menurut

Definisi,  $Y = (a_{ij}) \leq X = (b_{ij})$  jika dan hanya jika  $a_{ij} \leq b_{ij}$

untuk setiap  $i, j.$  Maka  $Y = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in Q.$

Karena  $(Q, [ \ ])$  memenuhi (i), (ii), dan (iii) sehingga terbukti bahwa  $(Q, [ \ ])$  adalah quasi ideal dari  $(S, [ \ ]).$  ■

### Proposisi 3.2.15

Misalkan  $S$  adalah semigrup ternari terurut. Jika  $Q$  adalah quasi-ideal dari  $S$ , maka terdapat ideal kiri  $L$ , ideal lateral  $M$ , dan ideal kanan  $R$  sedemikian sehingga  $Q = L \cap M \cap R$ .

**Bukti.**

Asumsikan bahwa  $Q$  adalah quasi-ideal dari  $S$ .

Misalkan  $L = (Q \cup [SSQ])$ ,  $R = (Q \cup [QSS])$ , dan

$M = (Q \cup [SQS] \cup [SSQSS])$ .

Karena  $Q \neq \emptyset$  dan  $L \neq \emptyset$  maka akan ditunjukkan bahwa  $L$  adalah ideal kiri dari  $S$ .

Misalkan  $x \in [SSL]$ , sehingga  $x = [s'sl]$  untuk setiap  $l \in L$  dan  $s, s' \in S$ .

Misalkan  $l \leq p$  untuk setiap  $p \in Q \cup [SSQ]$ , sehingga

$[s'sl] \leq [s'sp]$ . Terdapat dua kasus yang terdiri dari:

**Kasus 1.**  $p \in Q$ , sehingga  $[s'sp] \in [SSQ] \subseteq Q \cup [SSQ]$ . Jadi didapatkan  $x \in L$ .

**Kasus 2.**  $p \in [SSQ]$ . Misalkan  $p = [s_1s_2q]$  untuk setiap  $q \in Q$  dan  $s_1, s_2 \in S$ . Karena

$[s'sp] = [s's[s_1s_2q]] = [s'[ss_1s_2]q] \in [SSQ] \subseteq Q \cup [SSQ]$ ,

sehingga didapatkan  $x \in L$ . Maka  $[SSL] \subseteq L$ .

Misalkan  $x \in L$  dan  $y \in S$  sedemikian sehingga  $y \leq x$ . Maka  $x \leq z$  untuk setiap  $z \in Q \cup [SSQ]$ . Karena  $y \leq z$  dan  $y \in L$ , sehingga  $L$  adalah ideal kiri dari  $S$ .

Karena  $Q \neq \emptyset$  dan  $R \neq \emptyset$  maka akan ditunjukkan  $R$  adalah ideal kanan dari  $S$ .

Misalkan  $x \in [RSS]$ , sehingga  $x = [rss']$  untuk setiap  $r \in R$  dan  $s, s' \in S$ .

Misalkan  $r \leq t$  untuk setiap  $t \in Q \cup [QSS]$ , sehingga

$[rss'] \leq [tss']$ . Terdapat dua kasus yang terdiri dari:

**Kasus 1.**  $t \in Q$ , sehingga  $[tss'] \in [QSS] \subseteq Q \cup [QSS]$ . Jadi didapatkan  $x \in R$ .

**Kasus 2.**  $t \in [QSS]$ . Misalkan  $t = [qs_3s_4]$  untuk setiap  $q \in Q$  dan  $s_3, s_4 \in S$ . Karena

$[tss'] = [[qs_3s_4]ss'] = [q((ss_3s_4)s')] \in [QSS] \subseteq Q \cup [QSS]$ ,

sehingga didapatkan  $x \in R$ . Maka  $[RSS] \subseteq R$ .

Misalkan  $x \in R$  dan  $y \in S$  sedemikian sehingga  $y \leq x$ . Maka  $x \leq z$  untuk setiap  $z \in Q \cup [QSS]$ . Karena  $y \leq z$  dan  $y \in R$ , sehingga  $R$  adalah ideal kanan dari  $S$ .

Akan ditunjukkan  $M$  adalah ideal lateral dari  $S$ .

Misalkan  $x \in [SMS]$ , sehingga  $x = [s_5ms_6]$  untuk setiap  $m \in M$  dan  $s_5, s_6 \in S$ .

Misalkan  $m \leq n$  untuk setiap  $n \in Q \cup [SQS] \cup [SSQSS]$ , sehingga  $(s_5ms_6) \leq (s_5ns_6)$ . Terdapat tiga kasus yang terdiri dari:

**Kasus 1.**  $n \in Q$ , sehingga  $[s_5ns_6] \in [SQS] \subseteq Q \cup [SQS] \cup [SSQSS]$ . Jadi didapatkan  $x \in M$ .

**Kasus 2.**  $n \in [SQS]$ , sehingga  $[s_5ns_6] \in [SSQSS] \subseteq Q \cup [SQS] \cup [SSQSS]$ . Jadi didapatkan  $x \in M$ .

**Kasus 3.**  $n \in [SSQSS]$ . Maka  $[s_5ns_6] \in [SQS] \subseteq Q \cup [SQS] \cup [SSQSS]$ , Jadi didapatkan  $x \in M$ . Maka  $[SMS] \subseteq M$ .

Misalkan  $x \in M$  dan  $y \in S$  sedemikian sehingga  $y \leq x$ . Maka  $x \leq z$  untuk setiap  $z \in Q \cup [SQS] \cup [SSQSS]$ . Sehingga  $y \in M$ .

Akan ditunjukkan bahwa  $Q = L \cap M \cap R$ .

$$\begin{aligned} L \cap M \cap R &= (Q \cup [QSS]) \cap (Q \cup [SQS] \cup [SSQSS]) \cap (Q \cup [SSQ]) \\ &= (Q) \cup ([QSS]) \cap ([SQS] \cup [SSQSS]) \cap ([SSQ]) \\ &\subseteq Q. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### Contoh 3.2.16

$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$  adalah semigrup ternari terurut

dan  $Q = \left\{ \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid q \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$  adalah quasi-ideal dari semigrup

ternari terurut  $(S, [ \ ])$ . Maka menurut Proposisi 3.2.15 terdapat ideal kiri  $L$ , ideal lateral  $M$ , dan ideal kanan  $R$  sedemikian sehingga  $Q = L \cap M \cap R$ .

### Bukti.

Misalkan  $L = (Q \cup [SSQ])$ ,  $M = (Q \cup [SQS] \cup [SSQSS])$ , dan  $R = (Q \cup [QSS])$ .

Akan ditunjukkan bahwa  $(L, [ \ ])$  adalah ideal kiri dari  $(S, [ \ ])$ , maka  $(L, [ \ ])$  harus memenuhi  $[S_1S_2L_1] \in L$  untuk setiap  $S_1, S_2 \in S$  dan  $L_1 \in L$  serta jika  $x \in L$  dan  $y \in S$  sedemikian sehingga  $y \leq x$  maka  $y \in L$ .

Ambil sebarang  $S_1, S_2 \in S$  dan  $Q_1 \in Q$ , dimana  $S_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  
 $S_2 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ , dan  $Q_1 = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Dengan Definisi 2.6.4,

$$\begin{aligned} [S_1 S_2 Q_1] &= S_1 \cdot S_2 \cdot Q_1 \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aex + bgx & 0 \\ cex + dgx & 0 \end{pmatrix}, \text{ sehingga} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= Q \cup [SSQ] = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} aex + bgx & 0 \\ cex + dgx & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ambil sebarang  $S_1, S_2 \in S$  dan  $L_1 \in L$ , dimana  $S_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  
 $S_2 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ , dan  $L_1 = \begin{pmatrix} r & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}$ . Dengan Definisi 2.6.4,

$$\begin{aligned} [S_1 S_2 L_1] &= S_1 \cdot S_2 \cdot L_1 \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aer + bgr + aft + bht & 0 \\ cer + dgr + cft + dht & 0 \end{pmatrix} \in L. \end{aligned}$$

Ambil  $X = \begin{pmatrix} r & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} \in L$  dan  $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S$ . Menurut Definisi,  
 $Y = (a_{ij}) \leq X = (b_{ij})$  jika dan hanya jika  $a_{ij} \leq b_{ij}$  untuk setiap  
 $i, j$ . Maka  $Y = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \in L$ .

Jadi terbukti bahwa  $L = (Q \cup [SSQ])$  adalah ideal kiri dari  $(S, [ \ ])$ .

Akan ditunjukkan bahwa  $(M, [ \ ])$  adalah ideal lateral dari  $(S, [ \ ])$ ,  
 maka  $(M, [ \ ])$  harus memenuhi  $[S_1 M_1 S_2] \in M$  untuk setiap  
 $S_1, S_2 \in S$  dan  $M_1 \in M$  serta jika  $x \in M$  dan  $y \in S$  sedemikian  
 sehingga  $y \leq x$ , maka  $y \in M$ .

Ambil sebarang  $S_1, S_2 \in S$  dan  $Q_1 \in Q$ , dimana  $S_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  
 $S_2 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ ,  $S_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $S_4 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ , dan  $Q_1 = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Dengan Definisi 2.6.4,

$$\begin{aligned} [S_1 Q_1 S_2] &= S_1 \cdot Q_1 \cdot S_2 \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax & 0 \\ cx & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} axe & axf \\ cxe & cxf \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [S_1 S_2 Q_1 S_3 S_4] &= S_1 \cdot S_2 \cdot Q_1 \cdot S_3 \cdot S_4 \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aex + bgx & 0 \\ cex + dgx & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dimisalkan  $\begin{pmatrix} aex + bgx & 0 \\ cex + dgx & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ n & 0 \end{pmatrix}$ , maka

$$\begin{aligned} [S_1 S_2 Q_1 S_3 S_4] &= S_1 \cdot S_2 \cdot Q_1 \cdot S_3 \cdot S_4 \\ &= \begin{pmatrix} m & 0 \\ n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ma & mb \\ na & nb \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} mae + mbg & maf + mbh \\ nae + nbg & naf + nbh \end{pmatrix}, \text{ sehingga} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= Q \cup [SQS] \cup [SSQSS] \\ &= \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} axe & axf \\ cxe & cxf \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} mae + mbg & maf + mbh \\ nae + nbg & naf + nbh \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ambil sebarang  $S_1, S_2 \in S$  dan  $M_1 \in M$ , dimana  $S_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,

$S_2 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ , dan  $M_1 = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$ . Dengan Definisi 2.6.4,

$$\begin{aligned} [S_1 M_1 S_2] &= S_1 \cdot M_1 \cdot S_2 \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} ar + bt & as + bu \\ cr + dt & cs + du \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} are + bte + asg + bug & arf + btf + ash + buh \\ cre + dte + csg + dtg & crf + dtf + csh + duh \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ambil  $X = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \in M$  dan  $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S$ . Menurut Definisi,  $Y = (a_{ij}) \leq X = (b_{ij})$  jika dan hanya jika  $a_{ij} \leq b_{ij}$  untuk setiap  $i, j$ . Maka  $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M$ . Jadi terbukti bahwa  $M = (Q \cup [SQS] \cup [SSQSS])$  adalah ideal lateral dari  $(S, [ \ ])$ .

Akan ditunjukkan bahwa  $(R, [ \ ])$  adalah ideal kanan dari  $(S, [ \ ])$ , maka  $(R, [ \ ])$  harus memenuhi  $[R_1S_1S_2] \in R$  untuk setiap  $S_1, S_2 \in S$  dan  $R_1 \in R$  dan jika  $x \in R$  dan  $y \in S$  sedemikian sehingga  $y \leq x$  maka  $y \in R$ .

Ambil sebarang  $S_1, S_2 \in S$  dan  $Q_1 \in Q$ , dimana  $S_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,

$S_2 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ , dan  $Q_1 = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Dengan Definisi 2.6.4,

$$\begin{aligned}
[Q_1S_1S_2] &= Q_1 \cdot S_1 \cdot S_2 \\
&= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} xa & xb \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} xae + xbg & xaf + xbh \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ sehingga}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R &= Q \cup [QSS] = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} xae + xbg & xaf + xbh \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ambil sebarang  $S_1, S_2 \in S$  dan  $R_1 \in R$ , dimana  $S_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,

$S_2 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ , dan  $R_1 = \begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Dengan Definisi 2.6.4,

$$\begin{aligned}
[R_1S_1S_2] &= R_1 \cdot S_1 \cdot S_2 \\
&= \begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} ra + sc & rb + sd \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} rae + sce + rbg + sdg & raf + rbf + rbh + sdh \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ambil  $X = \begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$  dan  $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S$ . Menurut Definisi,  $Y = (a_{ij}) \leq X = (b_{ij})$  jika dan hanya jika  $a_{ij} \leq b_{ij}$  untuk setiap  $i, j$ . Maka  $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ .

Jadi terbukti bahwa  $R = (Q \cup [QSS])$  adalah ideal kanan dari  $(S, [ \ ])$ .

$$\begin{aligned}
L \cap M \cap R &= (Q \cup [QSS]) \cap (Q \cup [SQS] \cup [SSQSS]) \cap (Q \cup [SSQ]) \\
&= \begin{pmatrix} r & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= Q
\end{aligned}$$

### **Teorema 3.2.17**

Misalkan  $S$  adalah semigrup ternari terurut. Jika  $\emptyset \neq A \subseteq S$  dan

$$\langle A \rangle_q = \cap \{Q_i \mid Q_i \text{ quasi ideal dari } S \text{ yang memuat } A\}$$

maka

$$\langle A \rangle_q = (A \cup [SSA]) \cap (A \cup [SAS] \cup [SSASS]) \cap (A \cup [ASS]).$$

### **Bukti.**

Berdasarkan Definisi 3.2.11,  $\langle A \rangle_q$  adalah quasi-ideal dari  $S$  yang memuat  $A$ . Karena  $(A \cup [SSA])$  adalah ideal kiri,  $(A \cup [SAS] \cup [SSASS])$  adalah ideal lateral, dan  $(A \cup [ASS])$  adalah ideal kanan, sehingga menurut Proposisi 3.2.13,

$$(A \cup [SSA]) \cap (A \cup [SAS] \cup [SSASS]) \cap (A \cup [ASS])$$

adalah quasi-ideal dari  $S$  yang memuat  $A$ . Jadi

$$\langle A \rangle_q \subseteq (A \cup [SSA]) \cap (A \cup [SAS] \cup [SSASS]) \cap (A \cup [ASS]).$$

Karena  $A \subseteq Q_i$ , untuk setiap  $i \in I$ , sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&(A \cup [SSA]) \cap (A \cup [SAS] \cup [SSASS]) \cap (A \cup [ASS]) \\
&= (A) \cup \{([SSA]) \cap ([SAS] \cup [SSASS]) \cap ([ASS])\} \\
&\subseteq (Q_i) \cup \{([SSQ_i]) \cap ([SQ_iS] \cup [SSQ_iSS]) \cap ([Q_iSS])\} \\
&\subseteq Q_i.
\end{aligned}$$

Maka

$$\langle A \rangle_q \supseteq (A \cup [SSA]) \cap (A \cup [SAS] \cup [SSASS]) \cap (A \cup [ASS]).$$

Dapat disimpulkan bahwa

$$\langle A \rangle_q = (A \cup [SSA]) \cap (A \cup [SAS] \cup [SSASS]) \cap (A \cup [ASS]).$$

### Contoh 3.2.18

$S = \mathbb{Z} = \{z | z \in \mathbb{Z}\}$ ,  $(S, [ \ ])$  adalah semigrup ternari terurut. Karena  $Q_1 = 2\mathbb{Z}$ ,  $Q_2 = 3\mathbb{Z}$ , dan  $Q_3 = 4\mathbb{Z}$ , maka  $\langle A \rangle_q = Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3$ .

Akan dibuktikan bahwa

$$\langle A \rangle_q = (A \cup [SSA]) \cap (A \cup [SAS] \cup [SSASS]) \cap (A \cup [ASS]).$$

### Bukti.

$$\langle A \rangle_q = Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3 = 2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} \cap 4\mathbb{Z} = 12\mathbb{Z}.$$

Misalkan  $L = (A \cup [SSA])$ ,  $M = (A \cup [SAS] \cup [SSASS])$ , dan  $R = (A \cup [ASS])$ .

Akan ditunjukkan bahwa  $(L, [ \ ])$  adalah ideal kiri dari  $(S, [ \ ])$ , maka  $(L, [ \ ])$  harus memenuhi  $[s_1 s_2 l] \in L$  untuk setiap  $s_1, s_2 \in S$  dan  $l \in L$  serta jika  $x \in L$  dan  $y \in S$  sedemikian sehingga  $y \leq x$  maka  $y \in L$ .

Dengan Definisi 2.6.4 akan ditunjukkan bahwa  $[s_1 s_2 a] \in A$  untuk setiap  $s_1, s_2 \in S$  dan  $a \in A$ .

$$[s_1 s_2 a] = (z)(z)(12z) = 12z^3 \in A, \text{ sehingga}$$

$$L = A \cup [SSA] = 12\mathbb{Z} \cup 12\mathbb{Z} = 12\mathbb{Z} \subseteq A \subseteq S.$$

$$[s_1 s_2 l] = (z)(z)(12z) = 12z^3 \in L.$$

Ambil  $X = 12\mathbb{Z} \subseteq L$  dan  $Y = 24\mathbb{Z} \subseteq S$ , menurut Definisi

$Y \leq X \Leftrightarrow Y \subseteq X$ , maka  $Y \subseteq L$ . Jadi terbukti bahwa  $L = (A \cup [SSA])$  adalah ideal kiri dari  $(S, [ \ ])$ .

Akan ditunjukkan bahwa  $(M, [ \ ])$  adalah ideal lateral dari  $(S, [ \ ])$ , maka  $(M, [ \ ])$  harus memenuhi  $[s_1 m s_2] \in M$  untuk setiap  $s_1, s_2 \in S$  dan  $m \in M$  serta jika  $x \in M$  dan  $y \in S$  sedemikian sehingga  $y \leq x$ , maka  $y \in M$ .

Dengan Definisi 2.6.4 akan ditunjukkan bahwa  $[s_1 a s_2] \in A$  dan  $[s_1 s_2 a s_3 s_4] \in A$  untuk setiap  $s_1, s_2, s_3, s_4 \in S$  dan  $a \in A$ .

$$[s_1 a s_2] = (z)(12z)(z) = 12z^3 \in A,$$

$[s_1s_2as_3s_4] = (z)(z)(12z)(z)(z) = 12z^5 \in A$ , sehingga  
 $M = A \cup [SAS] \cup [SSASS] = 12\mathbb{Z} \cup 12\mathbb{Z} \cup 12\mathbb{Z} = 12\mathbb{Z} \subseteq A \subseteq S$ .

$[s_1ms_2] = (z)(12z)(z) = 12z^3 \in M$ .

Ambil  $X = 12\mathbb{Z} \subseteq M$  dan  $Y = 24\mathbb{Z} \subseteq S$ , menurut Definisi  
 $Y \leq X \Leftrightarrow Y \subseteq X$ , maka  $Y \subseteq M$ . Jadi terbukti bahwa

$M = (A \cup [SAS] \cup [SSASS])$  adalah ideal lateral dari  $(S, [ \ ])$ .

Akan ditunjukkan bahwa  $(R, [ \ ])$  adalah ideal kanan dari  $(S, [ \ ])$ ,  
 maka  $(R, [ \ ])$  harus memenuhi  $[rs_1s_2] \in R$  untuk setiap  $s_1, s_2 \in S$   
 dan  $r \in R$  serta jika  $x \in R$  dan  $y \in S$  sedemikian sehingga  $y \leq x$   
 maka  $y \in R$ .

Dengan Definisi 2.6.4 akan ditunjukkan bahwa  $[as_1s_2] \in A$  untuk  
 setiap  $s_1, s_2 \in S$  dan  $a \in A$ .

$[as_1s_2] = (12z)(z)(z) = 12z^3 \in A$ , sehingga

$R = A \cup [ASS] = 12\mathbb{Z} \cup 12\mathbb{Z} = 12\mathbb{Z} \subseteq A \subseteq S$ .

Ambil  $X = 12\mathbb{Z} \subseteq R$  dan  $Y = 24\mathbb{Z} \subseteq S$ , menurut Definisi

$Y \leq X \Leftrightarrow Y \subseteq X$ , maka  $Y \subseteq R$ . Jadi terbukti bahwa

$R = (A \cup [ASS])$  adalah ideal kanan dari  $(S, [ \ ])$ .

$\langle A \rangle_q = (A \cup [SSA]) \cap (A \cup [SAS] \cup [SSASS]) \cap (A \cup [ASS])$   
 $= 12\mathbb{Z} \cap 12\mathbb{Z} \cap 12\mathbb{Z} = 12\mathbb{Z}$ . ■

### Definisi 3.2.19

Suatu semigrup ternari terurut  $S$  disebut *quasi-simple* jika  $S$  tidak  
 memuat quasi-ideal yang sejati.

(Changphas, 2012)

### Contoh 3.2.20

Semigrup ternari  $S = \mathbb{Z}_{11} - \{0\}$  terhadap operasi pergandaan adalah  
*quasi-simple*.

### Bukti.

Menurut Definisi 3.2.5,  $Q$  merupakan quasi-ideal jika memenuhi  
 kondisi berikut.

(i)  $[SSQ] \cap [SQS] \cap [QSS] \subseteq Q$ ,

(ii)  $[SSQ] \cap [SSQSS] \cap [QSS] \subseteq Q$ ,

(iii) Jika  $x \in Q$  dan  $y \in S$  sedemikian sehingga  $y \leq x$ , maka  $y \in Q$ .

Karena  $Q = S$ , maka  $Q$  merupakan quasi-ideal jika memenuhi  
 kondisi berikut.

- (i)  $[SSS] \cap [SSS] \cap [SSS] \subseteq S$ ,  
(ii)  $[SSS] \cap [SSSSS] \cap [SSS] \subseteq S$ ,  
(iii) Jika  $x \in S$  dan  $y \in S$  sedemikian sehingga  $y \leq x$ , maka  $y \in S$ .

Sehingga

$$[SSS] = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}\}$$

$$[SSSSS] = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}\}.$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} [SSS] \cap [SSS] \cap [SSS] &= [SSS] \cap [SSSSS] \cap [SSS] \\ &= \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}\} \subseteq S. \end{aligned}$$

Misalkan  $x = \bar{3} \in S$  dan  $y = \bar{2} \in S$  sedemikian sehingga  $y \leq x$ , maka  $y \in S$ . Berlaku untuk setiap  $x, y \in S$ .

Jadi terbukti bahwa  $S = \mathbb{Z}_{11} - \{0\}$  adalah *quasi-simple*. ■

### Definisi 3.2.21

Misalkan  $S$  adalah semigrup ternari terurut.  $Q$  adalah quasi-ideal dari  $S$ .  $Q$  disebut quasi-ideal minimal jika  $Q$  tidak memuat quasi-ideal sejati dari  $S$ .

(Changphas, 2012)

### Contoh 3.2.22

$Q_4 = \{\bar{0}, \bar{8}\}$  merupakan quasi-ideal minimal dalam semigrup ternari terurut  $S = \mathbb{Z}_{16}$ .

### Bukti.

Diketahui  $S = \mathbb{Z}_{16}$  adalah semigrup ternari terurut. Akan dibuktikan bahwa  $Q_4 = \{\bar{0}, \bar{8}\}$  merupakan quasi-ideal minimal dalam  $S$ . Quasi-ideal-quasi-ideal dalam  $S$  adalah

$$Q_1 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{12}, \bar{13}, \bar{14}, \bar{15}\}$$

$$Q_2 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}, \bar{14}\}$$

$$Q_3 = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}, \bar{12}\}$$

$$Q_4 = \{\bar{0}, \bar{8}\}$$

$Q_4$  merupakan quasi-ideal minimal dari semigrup ternari terurut  $S$  karena  $Q_4$  tidak memuat quasi-ideal sejati, sedangkan  $Q_1, Q_2,$  dan  $Q_3$  memuat quasi-ideal sejati yaitu  $Q_2 \subset Q_1, Q_3 \subset Q_1, Q_4 \subset Q_1, Q_3 \subset Q_2, Q_4 \subset Q_2,$  dan  $Q_4 \subset Q_3$ . ■

### Contoh 3.2.23

$Q = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}\}$  merupakan quasi-ideal minimal dari semigrup ternari terurut  $S = \mathbb{Z}_{11} - \{0\}$ .

#### Bukti.

Semigrup ternari terurut  $S = \mathbb{Z}_{11} - \{0\}$  hanya memiliki satu quasi-ideal yaitu  $Q = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}\}$ . Oleh karena itu,  $Q$  tidak memuat quasi-ideal lain sehingga  $Q$  merupakan quasi-ideal minimal dari semigrup ternari terurut. ■

### Contoh 3.2.24

$S = Q_{12}$  adalah semigrup ternari terurut. Akan dibuktikan bahwa  $S = Q_{12}$  memuat ideal sejati yang merupakan quasi-ideal minimal dari  $S$ .

#### Bukti.

Ideal-ideal dari  $S = Q_{12}$  adalah sebagai berikut.

$$I_1 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}\}$$

$$I_2 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}\}$$

$$I_3 = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$$

$$I_4 = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$$

$$I_5 = \{\bar{0}, \bar{6}\}$$

$I_2, I_3, I_4,$  dan  $I_5$  adalah ideal sejati karena  $I_2 \neq S, I_3 \neq S, I_4 \neq S,$  dan  $I_5 \neq S$ .

Quasi-ideal-quasi-ideal dari  $S = Q_{12}$  adalah sebagai berikut.

$$Q_1 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}\}$$

$$Q_2 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}\}$$

$$Q_3 = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$$

$$Q_4 = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$$

$$Q_5 = \{\bar{0}, \bar{6}\}$$

$Q_4$  dan  $Q_5$  merupakan quasi-ideal minimal karena  $Q_4$  dan  $Q_5$  tidak memuat quasi-ideal yang lainnya. Karena  $Q_4 = I_4 = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$  dan  $Q_5 = I_5 = \{\bar{0}, \bar{6}\}$ , sehingga terbukti bahwa  $S = Q_{12}$  memuat ideal sejati yang merupakan quasi-ideal minimal dari  $S$ . ■

### **Teorema 3.2.25**

Suatu semigrup ternari terurut  $S$  disebut *quasi-simple* jika dan hanya jika  $S = ([SSx]) \cap ([SxS]) \cup ([SSxSS]) \cap ([xSS])$  untuk setiap  $x \in S$ .

#### **Bukti.**

( $\Rightarrow$ ) Asumsikan bahwa  $S$  adalah *quasi-simple*. Misalkan  $x \in S$ . Akan ditunjukkan bahwa  $L = ([SSx])$  adalah ideal kiri dari  $S$ .

Misalkan  $y \in [SSL]$ , sehingga  $y = [s'l]$  untuk setiap  $l \in L$  dan  $s', s \in S$ . Karena  $l \in L$  dan  $l = [s_1s_2x]$  untuk setiap  $s_1, s_2 \in S$ , maka  $y = [s'l] = [s's[s_1s_2x]] = [s'[ss_1s_2]x] \in [SSx] \subseteq L$ .

Misalkan  $y \in L$  dan  $z \in S$  sedemikian sehingga  $z \leq y$ . Karena  $y \in L$  dan  $y \leq w$  untuk setiap  $w \in [SSx]$ , sehingga  $z \leq w$  dan  $z \in ([SSx]) = L$ . Oleh karena itu, terbukti bahwa  $([SSx])$  adalah ideal kiri dari  $S$ .

Akan ditunjukkan bahwa  $R = ([xSS])$  adalah ideal kanan dari  $S$ . Misalkan  $y \in [RSS]$ , sehingga  $y = [rss']$  untuk setiap  $r \in R$  dan  $s, s' \in S$ . Karena  $r \in R$  dan  $r = [xs_1s_2]$  untuk setiap  $s_1, s_2 \in S$ , maka

$$y = [rss'] = [[xs_1s_2]ss'] = [x[s_1s_2s]s'] \in [xSS] \subseteq R.$$

Misalkan  $y \in R$  dan  $z \in S$  sedemikian sehingga  $z \leq y$ . Karena  $y \in R$  dan  $y \leq w$  untuk setiap  $w \in [xSS]$ , sehingga  $z \leq w$  dan  $z \in ([xSS]) = R$ . Oleh karena itu, terbukti bahwa  $([xSS])$  adalah ideal kanan dari  $S$ .

Akan ditunjukkan bahwa  $M = ([SxS]) \cup ([SSxSS])$  adalah ideal lateral dari  $S$ .

Misalkan  $y \in [SMS]$ , maka  $y = [sms']$  untuk setiap  $m \in M$  dan  $s, s' \in S$ . Jika  $m = [s_1xs_2]$  untuk setiap  $s_1, s_2 \in S$ , maka  $y = [sms'] = [s[s_1xs_2]s'] \in [SSxSS] \subseteq M$ .

Jika  $m = [s_3s_4xs_5s_6]$  untuk setiap  $s_3, s_4, s_5, s_6 \in S$ , maka  $y = [sms'] = [s[s_3s_4xs_5s_6]s'] \in [SxS] \subseteq M$ .

Maka  $[SMS] \subseteq M$ . Misalkan  $y \in M$  dan  $z \in S$  sedemikian sehingga  $z \leq y$ . Jika  $y \leq w$  untuk setiap  $w \in [SSxSS]$ , maka

$z \in ([SSxSS]) \subseteq M$ . Jika  $y \leq w'$  untuk setiap  $w' \in [SxS]$ , maka  $z \in ([SxS]) \subseteq M$ . Oleh karena itu, terbukti bahwa  $([SxS]) \cup ([SSxSS])$  adalah ideal lateral dari  $S$ .

Dengan menggunakan Proposisi 3.2.13, maka

$$S = ([SSx]) \cap ([SxS]) \cup ([SSxSS]) \cap ([xSS]).$$

( $\Leftarrow$ ) Asumsikan bahwa  $S = ([SSx]) \cap ([SxS]) \cup ([SSxSS]) \cap ([xSS])$  untuk setiap  $x \in S$ . Misal  $Q$  adalah quasi-ideal dari  $S$ . Misalkan  $q \in Q$ . Dari asumsi didapatkan

$$\begin{aligned} S &= ([SSq]) \cap ([SqS]) \cup ([SSqSS]) \cap ([qSS]) \\ &\subseteq ([SSQ]) \cap ([SQS]) \cup ([SSQSS]) \cap ([QSS]) \\ &\subseteq Q, \end{aligned}$$

sehingga  $S = Q$ . ■

### Contoh 3.2.26

$S = \mathbb{Z}_{11} - \{0\} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}\}$  merupakan *quasi-simple* jika dan hanya jika  $S = ([SSx]) \cap ([SxS]) \cup ([SSxSS]) \cap ([xSS])$  untuk setiap  $x \in S$ .

### Bukti.

( $\Rightarrow$ ) Asumsikan bahwa  $S$  adalah *quasi-simple*. Misalkan

$$L = ([SSx]), M = ([SxS]) \cup ([SSxSS]), \text{ dan } R = ([xSS]).$$

Akan ditunjukkan bahwa  $L$  adalah ideal kiri dari  $S$ , maka  $L$  harus memenuhi  $[s_1s_2l] \in L$  untuk setiap  $s_1, s_2 \in S$  dan  $l \in L$  serta jika  $a \in L$  dan  $b \in S$  sedemikian sehingga  $b \leq a$  maka  $b \in L$ .

$L = [SSx] = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}\} \subseteq S$  dan misalkan  $a = \bar{3} \in S$  dan  $b = \bar{2} \in S$  sedemikian sehingga  $b \leq a$ , maka  $b \in S$ . Berlaku untuk setiap  $a, b \in S$ .

Jadi terbukti bahwa  $L = ([SSx])$  adalah ideal kiri dari  $S$ .

Akan ditunjukkan bahwa  $M$  adalah ideal kiri dari  $S$ , maka  $M$  harus memenuhi  $[s_1ms_2] \in M$  untuk setiap  $s_1, s_2 \in S$  dan  $m \in M$  serta jika  $a \in M$  dan  $b \in S$  sedemikian sehingga  $b \leq a$  maka  $b \in M$ .

$$[SxS] = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}\} \subseteq S,$$

$$[SSxSS] = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}\} \subseteq S.$$

$$M = [SxS] \cup [SSxSS] = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}\} \subseteq S, \text{ dan}$$



misalkan  $a = \bar{3} \in S$  dan  $b = \bar{2} \in S$  sedemikian sehingga  $b \leq a$ , maka  $b \in S$ . Berlaku untuk setiap  $a, b \in S$ .

Jadi terbukti bahwa  $M = ([SxS]) \cup ([SSxSS])$  adalah ideal lateral dari  $S$ .

Akan ditunjukkan bahwa  $R$  adalah ideal kiri dari  $S$ , maka  $R$  harus memenuhi  $[rs_1s_2] \in R$  untuk setiap  $s_1, s_2 \in S$  dan  $r \in R$  serta jika  $a \in R$  dan  $b \in S$  sedemikian sehingga  $b \leq a$  maka  $b \in R$ .

$R = [xSS] = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}\} \subseteq S$  dan misalkan  $a = \bar{3} \in S$  dan  $b = \bar{2} \in S$  sedemikian sehingga  $b \leq a$ , maka  $b \in S$ . Berlaku untuk setiap  $a, b \in S$ .

Jadi terbukti bahwa  $R = ([xSS])$  adalah ideal kanan dari  $S$ .

Dengan menggunakan Proposisi 3.2.13, maka

$$\begin{aligned} L \cap M \cap R &= ([SSx]) \cap ([SxS]) \cup ([SSxSS]) \cap ([xSS]) \\ &= \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}\} \cap \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}\} \\ &\quad \cap \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}\} \\ &= \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}\} = S. \end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ ) Asumsikan bahwa  $S = ([SSx]) \cap ([SxS]) \cup ([SSxSS]) \cap ([xSS])$  untuk setiap  $x \in S$ . Misal  $Q = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}\}$  adalah quasi-ideal dari  $S$ . Misalkan  $q \in Q$ . Dari asumsi didapatkan

$$\begin{aligned} S &= ([SSq]) \cap ([SqS]) \cup ([SSqSS]) \cap ([qSS]) \\ &= \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}\} \cap \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}\} \cap \\ &\quad \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}\} \\ &= \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}\} = Q. \end{aligned}$$

Sehingga  $S = Q$ . ■

### **Teorema 3.2.27**

Misalkan  $S$  adalah semigrup ternari terurut dan  $Q$  adalah quasi-ideal dari  $S$ .  $Q$  adalah quasi-ideal minimal dari  $S$  jika dan hanya jika  $Q$  adalah *quasi-simple*.

#### **Bukti.**

( $\Rightarrow$ ) Asumsikan bahwa  $Q$  adalah quasi-ideal minimal dari  $S$  dan misalkan  $Q'$  adalah quasi-ideal dari  $Q$ . Sehingga

$$[QQQ'] \cap [[QQ'Q] \cup [QQQ'QQ]] \cap [Q'QQ] \subseteq Q.$$

Karena  $Q$  adalah minimal dan  $[QQQ'] \cap [[QQ'Q] \cup [QQQ'QQ]] \cap [Q'QQ] \subseteq Q' \subseteq Q \subseteq S$ , mengakibatkan  $[QQQ'] \cap [[QQ'Q] \cup [QQQ'QQ]] \cap [Q'QQ] = Q' = Q = S$ .  
 Sehingga  $Q$  merupakan *quasi-simple*.

( $\Leftarrow$ ) Asumsikan bahwa  $Q$  adalah *quasi-simple*. Misalkan  $Q'$  adalah quasi-ideal dari  $S$  atau dengan kata lain  $Q' \subseteq S$ . Karena  $Q = S$ , sehingga  $Q' \subseteq Q$ . Oleh karena itu,  $Q'$  merupakan quasi-ideal dari  $Q$  atau dengan kata lain  $Q' = Q$ . Jadi terbukti bahwa  $Q$  merupakan quasi-ideal minimal dari  $S$ . ■

### Contoh 3.2.28

Jika  $S = \mathbb{Z}_{11} - \{0\}$  adalah semigrup ternari terurut dan  $Q = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}\}$  adalah quasi-ideal dari  $S$  maka berlaku Teorema 3.2.27.

#### Bukti.

- (i) Akan ditunjukkan bahwa  $Q = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}\}$  merupakan quasi-ideal minimal dari semigrup ternari terurut  $\mathbb{Z}_{11} - \{0\}$ . Berdasarkan Contoh 3.2.23 terbukti bahwa  $Q = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}\}$  merupakan quasi-ideal dari semigrup ternari terurut  $\mathbb{Z}_{11} - \{0\}$ .
- (ii) Akan ditunjukkan bahwa  $Q = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}\}$  merupakan *quasi-simple*. Dari Contoh 3.2.18 terbukti bahwa  $Q = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}\}$  adalah *quasi-simple*.

Karena (i) dan (ii) terpenuhi, maka Teorema 3.2.27 berlaku. ■

### Contoh 3.2.29

$S = \mathbb{Z}_{16}$  adalah semigrup ternari terurut dan  $Q = \{\bar{0}, \bar{8}\}$  merupakan quasi-ideal dari  $S$ . Sehingga berlaku Teorema 3.2.27.

#### Bukti.

- (i) Akan ditunjukkan bahwa  $Q = \{\bar{0}, \bar{8}\}$  adalah quasi-ideal minimal. Dari Contoh 3.2.22 terbukti bahwa  $Q = \{\bar{0}, \bar{8}\}$  adalah quasi-ideal minimal dari  $S$ .

(ii) Akan ditunjukkan bahwa  $Q = \{\bar{0}, \bar{8}\}$  adalah *quasi-simple*.  
 $Q = \{\bar{0}, \bar{8}\}$  merupakan *quasi-simple* jika memenuhi kondisi berikut.

$$[QQQ'] \cap [[QQ'Q] \cup [QQQ'QQ]] \cap [Q'QQ] \subseteq Q.$$

Berdasarkan Definisi 3.2.17, dapat diketahui bahwa  $Q' = Q$ , sehingga

$$[QQQ] \cap [[QQQ] \cup [QQQQQ]] \cap [QQQ] \subseteq Q.$$

$$[QQQ] = \{\bar{0}, \bar{8}\}$$

$$[QQQQQ] = \{\bar{0}, \bar{8}\}.$$

Jadi terbukti bahwa  $Q = \{\bar{0}, \bar{8}\}$  merupakan *quasi-simple*.

Karena (i) dan (ii) terpenuhi, maka Teorema 3.2.27 berlaku. ■



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## BAB IV

### KESIMPULAN

Dari pembahasan pada bab sebelumnya dalam skripsi ini dapat disimpulkan bahwa

1.  $Q$  merupakan quasi-ideal dari  $S$  jika dan hanya jika  $Q = L \cap M \cap R$ , dimana  $L$  adalah ideal kiri dari  $S$ ,  $M$  adalah ideal lateral dari  $S$ , dan  $R$  adalah ideal kanan dari  $S$ .
2.  $Q$  adalah quasi-ideal dari semigrup ternari terurut  $S$ .  $Q$  merupakan quasi-ideal minimal dari  $S$  jika dan hanya jika  $Q$  adalah *quasi-simple*.



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## DAFTAR PUSTAKA

- Bhattacharya, P.B, S.K. Jain, dan S.R. Nagpaul. 1990. *Basic Abstract Algebra*. Cambridge University Press. New York.
- Changphas, T. 2012. A Note on Minimal Quasi-Ideals in Ternary Semigroups, *International Mathematical Forum*, Vol. 7. Hal: 539-544.
- Changphas, T. 2012. A Note on Quasi and Bi-ideals in Ordered Ternary Semigroups, *International Journal Mathematics Analysis*, Vol. 6, hal: 527-532.
- Choo-suwan, P dan R. Chinram. 2012. A Study on Quasi-Ideals in Ternary Semigroups. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol. 77, hal: 639-647.
- Dixit, V.N dan S. Dewan. 1995. A Note on Quasi and Bi-ideal in Ternary Semigroups, *International Journal Mathematics Sciences*, Vol. 18, hal: 501-508.
- El-Madhoun, N.R. 2007. *Quasi-ideal and Bi-ideals on Semigroups and Semirings*. MSc. Thesis, The Islamic University of Gaza. Palestine.
- Golan, J.S. 1999. *Semiring and Their Applications*. Kluwer Academic Publisher. London.
- Harju, Tero. 1966. *Lecture Notes in Semigroups*. University of Turku. Finland.
- Kar, S dan B.K. Maity. 2007. Congruences on Ternary Semigroups. *Journal of The Chungcheong Mathematical Society*, Vol. 20, hal: 191-201.

Steinfeld, O. 1978. *Quasi-ideal in Rings and Semigroups*. Akadémiai Kiadó Budapest.

Whitelaw, T.A. 1995. *Introduction to Abstract Algebra*. Chapman and Hall Press. Florida.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

