

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ekologi merupakan cabang ilmu biologi yang mempelajari hubungan makhluk hidup dengan habitatnya. Pada dasarnya makhluk hidup bergantung pada makhluk hidup lainnya sehingga terjadi hubungan timbal balik antar makhluk hidup. Hubungan antar makhluk hidup inilah yang dinamakan interaksi.

Interaksi antar populasi di alam digambarkan dalam suatu model rantai makanan. Salah satu interaksi pada rantai makanan adalah proses makan-memakan. Model matematika yang menggambarkan pertumbuhan populasi yang mengalami proses makan-memakan disebut model *predator-prey*. *Prey* merupakan populasi yang dimakan, sedangkan *predator* adalah populasi pemakan. Model ini ditemukan pertama kali oleh Lotka dan Volterra sehingga disebut model Lotka-Volterra.

Interaksi makhluk hidup tidak hanya *predator-prey* saja, melainkan dapat berupa interaksi lain, yaitu komensalisme atau amensalisme. Komensalisme merupakan hubungan satu arah yang terjadi di antara dua spesies dengan hanya satu jenis spesies yang mendapat keuntungan karena kehadiran spesies lain. Spesies pemberi keuntungan disebut spesies *host*, sedangkan spesies yang memperoleh keuntungan disebut spesies komensal. Dalam simbiosis amensalisme, salah satu spesies dirugikan tetapi spesies yang lain tidak diuntungkan maupun dirugikan. Spesies *enemy* adalah sebutan untuk spesies yang tidak diuntungkan maupun dirugikan, sedangkan spesies yang dirugikan disebut spesies amensal.

Analisis dinamik model *predator-prey* telah banyak dikaji. Salah satunya telah dikaji analisis dinamik model *predator-prey* dengan omnivora oleh Andayani (2012). Dalam kajiannya, terdapat spesies ketiga yaitu omnivora yang bertindak sebagai pemangsa *prey* dan bangkai *predator*. Selain itu, juga telah dikaji analisis kestabilan model *predator-prey* tiga spesies dengan *host commensal* pada *prey* (Kumar dan Pattabiramacharyulu, 2010) dan ditambahkan sifat pada spesies ketiga yaitu sebagai *enemy* pada *predator* sehingga terjadi simbiosis amensalisme antara spesies ketiga dan *predator* (Kiran dan Reddy, 2012).

Skripsi ini membandingkan antara model yang ditulis oleh Kumar dan Pattabiramacharyulu (2010) dengan Kiran dan Reddy (2012) sehingga terdapat dua model yaitu model tanpa dan dengan amensalisme.

Model matematika yang terbentuk meliputi laju pertumbuhan *prey*, laju pertumbuhan *predator*, dan laju pertumbuhan spesies ketiga. Model matematika tersebut berupa sistem persamaan diferensial biasa nonlinear yang mengacu pada model pertumbuhan logistik. Dari model tersebut dilakukan analisis dinamik, dengan menentukan titik kesetimbangan dan menganalisis kestabilan lokalnya. Hasil analisis yang telah diperoleh diilustrasikan dengan simulasi numerik. Dari hasil analisis tersebut, akan diselidiki perbedaan antara model tanpa amensalisme dan model dengan adanya amensalisme.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, pokok permasalahan yang dibahas dalam skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana formulasi model *predator-prey* tiga spesies dengan spesies ketiga adalah *host commensal* pada *prey* tanpa dan dengan adanya *enemy* pada *predator*?
2. Bagaimana hasil analisis kestabilan kedua model?
3. Bagaimana simulasi numerik dan interpretasi kedua model?
4. Apa efek amensalisme terhadap pertumbuhan populasi ketiga spesies tersebut?

1.3 Batasan Masalah

Penulisan skripsi ini difokuskan pada pembahasan dengan beberapa batasan masalah, yaitu

1. hanya terdapat tiga jenis spesies dalam ekosistem,
2. tidak ada migrasi,
3. terdapat kompetisi internal pada ketiga spesies.

1.4 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Memformulasikan model *predator-prey* tiga spesies dengan spesies ketiga adalah *host commensal* untuk *prey* tanpa dan dengan adanya *enemy* pada *predator*.
2. Melakukan analisis kestabilan kedua model.
3. Melakukan simulasi numerik kedua model.
4. Mengetahui efek amensalisme terhadap pertumbuhan populasi ketiga spesies tersebut.



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB II TINJAUAN PUSTAKA

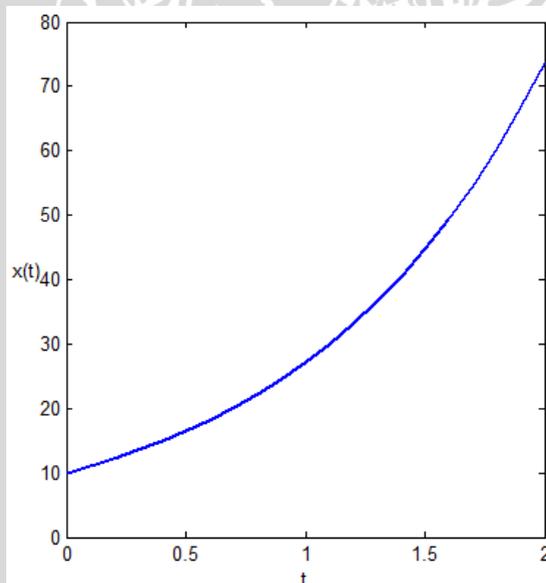
2.1 Model Pertumbuhan Satu Spesies

2.1.1 Model Pertumbuhan Eksponensial

Pertumbuhan populasi secara kontinu dengan sumber daya yang tidak terbatas dapat dimodelkan dalam bentuk

$$\frac{dx}{dt} = rx, \quad (2.1)$$

dengan $x(t)$ menyatakan jumlah populasi pada saat t dan $r > 0$ menyatakan tingkat pertumbuhan intrinsik populasi. Model pertumbuhan eksponensial menggambarkan pertumbuhan populasi karena terjadi perkembangbiakan. Jadi selama terjadi pertumbuhan eksponensial, jumlah populasi bertambah seiring bertambahnya waktu. Misalkan jumlah populasi awal $x(0) = 10$, dengan $r = 1$ maka populasi akan terus bertambah seperti diperlihatkan pada Gambar 2.1 berikut (Molles, 2002).



Gambar 2.1 Pertumbuhan eksponensial

2.1.2 Model Pertumbuhan Logistik

Model pertumbuhan logistik adalah model pertumbuhan populasi dengan sumber daya lingkungan yang terbatas. Ketika ukuran populasi bertambah, laju pertumbuhan akhirnya melemah dan kemudian berhenti pada ukuran populasi tertentu. Ukuran populasi yang menghentikan pertumbuhan tersebut secara umum disebut *carrying capacity*, yaitu jumlah individu maksimal yang dapat didukung oleh lingkungannya (Molles, 2002).

Laju pertumbuhan populasi bergantung pada ukuran populasi, sehingga secara matematis laju pertumbuhan populasi dinyatakan sebagai

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \quad (2.2)$$

Misalkan K adalah *carrying capacity*. Jika dalam populasi terdapat x individu, maka lingkungan masih dapat mendukung $(K - x)$ individu. Jadi masih terdapat bagian lingkungan yang dapat ditempati, sebesar

$$\frac{(K - x)}{K}. \quad (2.3)$$

Persamaan (2.3) inilah yang sebanding dengan pertumbuhan per kapita. Oleh karena itu, model logistik dinyatakan sebagai

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = r \frac{(K - x)}{K}$$

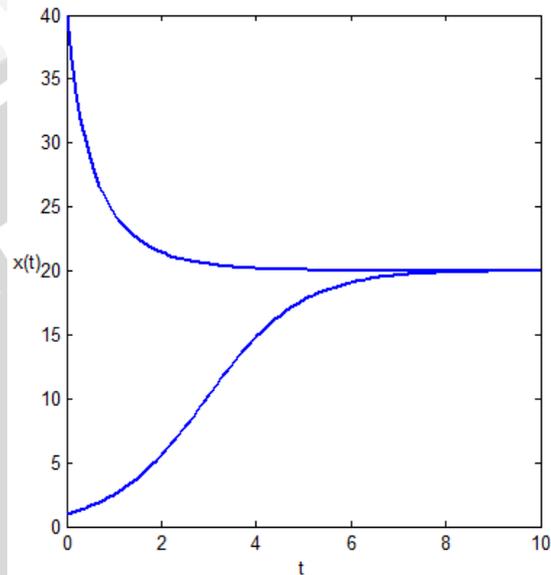
atau

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad (2.4)$$

dengan $r > 0$ menyatakan tingkat pertumbuhan intrinsik populasi (Boyce dan Di Prima, 2009).

Jika jumlah populasi awal $x(0) < K$, maka model logistik meramalkan bahwa ukuran populasi meningkat menuju *carrying capacity* K . Tetapi jika nilai awal $x(0) > K$, maka model logistik meramalkan bahwa jumlah populasi akan berkurang menuju *carrying capacity* K . Sebagai contoh, jika populasi awal $x(0) = 1$, $r = 1$, dan $K = 20$, maka jumlah populasi meningkat dan pada saat $x(t) = K = 20$ laju pertumbuhan populasi berhenti. Sebaliknya jika

$x(0) = 40$, jumlah populasi berkurang hingga pertumbuhan populasi terhenti pada $x(t) = K = 20$. Grafik pertumbuhan logistik diperlihatkan pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2 Pertumbuhan logistik

2.2 Model Pertumbuhan Dua Spesies

2.2.1 Model *Predator-Prey*

Persamaan diferensial biasa yang menggambarkan interaksi antara spesies *prey* dan *predator* pertama kali diperkenalkan oleh Volterra pada tahun 1928 dan dikenal sebagai model Lotka-Volterra. Model *predator-prey* dua spesies menggambarkan interaksi antara *predator* dan *prey* yang mengacu pada model pertumbuhan logistik. Misalkan N_1 adalah jumlah populasi *prey* dan N_2 adalah jumlah populasi *predator*. Dalam hal ini diasumsikan bahwa pertumbuhan *prey* terbatas oleh *carrying capacity* yang dinyatakan dengan $a_{11}N_1^2$. Laju pemangsaan terhadap *prey* diasumsikan sama dengan laju interaksi *prey* dan *predator* yang dinyatakan dengan $a_{11}PN_1N_2$. Dengan demikian, laju pertumbuhan populasi *prey* dapat dituliskan

$$\frac{dN_1}{dt} = a_{11}N_1(K_1 - N_1 - PN_2). \quad (2.5)$$

Laju pertumbuhan populasi *predator* karena memangsa *prey* dinyatakan oleh $a_{22}QN_1N_2$ yang tidak harus sama dengan besarnya pemangsaan terhadap *prey* $a_{11}PN_1N_2$. Populasi *predator* juga diasumsikan terbatas oleh *carrying capacity* yang dinyatakan dengan $a_{22}N_2^2$. Dengan demikian, laju pertumbuhan populasi *predator* adalah

$$\frac{dN_2}{dt} = a_{22}N_2(K_2 - N_2 + QN_1), \quad (2.6)$$

dengan

$$K_i = \frac{a_i}{a_{ii}} = \text{carrying capacities } N_i, \text{ dengan } i = 1,2;$$

$$P = \frac{a_{12}}{a_{11}} = \text{koefisien pemangsaan } prey,$$

$$Q = \frac{a_{21}}{a_{22}} = \text{koefisien konsumsi } predator,$$

$$a_i = \text{laju kelahiran alami } N_i, \text{ dengan } i = 1,2;$$

$$a_{ii} = \text{laju penurunan } N_i \text{ karena sumber daya terbatas, dengan } i = 1,2;$$

$$a_{12} = \text{laju penurunan } prey \text{ karena dimangsa oleh } predator,$$

$$a_{21} = \text{laju peningkatan } predator \text{ karena memangsa } prey$$

(Kumar dan Pattabhramacharyulu, 2010).

2.2.2 Model Komensalisme

Model ini ditandai dengan adanya simbiosis komensalisme antara spesies komensal dan spesies *host* yang dinyatakan dengan $a_{11}CN_1N_2$.

Persamaan laju pertumbuhan spesies komensal (N_1) dan spesies *host* (N_2) dapat ditulis sebagai berikut.

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = a_{11}N_1(K_1 - N_1 + CN_2) \\ \frac{dN_2}{dt} = a_{22}N_2(K_2 - N_2), \end{cases} \quad (2.7)$$

dengan

$$K_i = \frac{a_i}{a_{ii}} = \text{carrying capacities } N_i, \text{ dengan } i = 1,2;$$

$$C = \frac{a_{12}}{a_{11}} = \text{koefisien komensalisme,}$$

$$a_i = \text{laju kelahiran alami } N_i, \text{ dengan } i = 1,2;$$

a_{ii} = laju penurunan N_i karena sumber daya terbatas, dengan $i = 1,2$;
 a_{12} = laju peningkatan komensal karena memperoleh keuntungan dari spesies *host*
 (Kumar dkk, 2011).

2.2.3 Model Amensalisme

Persamaan untuk model amensalisme adalah sebagai berikut. Persamaan laju pertumbuhan spesies amensal (N_1) adalah

$$\frac{dN_1}{dt} = a_{11}N_1(K_1 - N_1 - MN_2). \quad (2.8)$$

Persamaan laju pertumbuhan spesies *enemy* (N_2) adalah

$$\frac{dN_2}{dt} = a_{22}N_2(K_2 - N_2), \quad (2.9)$$

dengan

$K_i = \frac{a_i}{a_{ii}}$ = *carrying capacities* N_i , dengan $i = 1,2$;
 $M = \frac{a_{12}}{a_{11}}$ = koefisien amensalisme,

a_i = laju kelahiran alami N_i , dengan $i = 1,2$;
 a_{ii} = laju penurunan N_i karena sumber daya terbatas, dengan $i = 1,2$;
 a_{12} = laju penurunan spesies amensal karena kerugian yang disebabkan oleh spesies *enemy*
 (Acharyulu, 2011).

2.3 Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah suatu sistem yang dapat diketahui kondisinya di masa yang akan datang jika diberikan kondisi pada masa sekarang atau masa yang lalu (Naggle dan Saff, 1993).

Dalam penerapannya, terdapat dua jenis sistem dinamik, yaitu sistem dinamik diskret ($t \in Z$ atau N) dan sistem dinamik kontinu ($t \in R$). Bentuk sistem dinamik diskret dinyatakan sebagai persamaan beda, yaitu

$$x_{t+1} = f(x_t), t \in Z \text{ atau } N.$$

Apabila t kontinu, bentuk sistem dinamik dinyatakan sebagai sistem persamaan diferensial, yaitu

$$\frac{dx}{dt} = f(x), x \in R.$$

(Arrowsmith dan Place, 1992)

Definisi 2.3.1 (Sistem Otonomus)

Sistem otonomus adalah suatu sistem persamaan diferensial orde satu yang berbentuk

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(\vec{x}) \\ \frac{dy}{dt} &= G(\vec{x}) \\ \frac{dz}{dt} &= H(\vec{x}), \end{aligned} \tag{2.10}$$

dengan $F, G,$ dan H adalah fungsi bernilai riil yang tidak bergantung secara eksplisit terhadap t (Boyce dan DiPrima, 2009).

Definisi 2.3.2 (Titik Keseimbangan)

Pandang sistem otonomus (2.10). Titik $\vec{x}^* = (x^*, y^*, z^*)$ yang memenuhi $F(\vec{x}^*) = 0, G(\vec{x}^*) = 0,$ dan $H(\vec{x}^*) = 0$ disebut titik kritis sistem otonomus (2.10). Titik kritis \vec{x}^* merupakan solusi sistem (2.10) yang bernilai konstan, sebab $\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 0,$ dan $\frac{dz}{dt} = 0.$ Keadaan yang menyebabkan $\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 0,$ dan $\frac{dz}{dt} = 0$ disebut dengan keadaan setimbang dan titik yang memenuhinya disebut titik kesetimbangan (Boyce dan DiPrima, 2009).

Definisi 2.3.3 (Kestabilan Titik Keseimbangan)

Titik kesetimbangan $\vec{x}^* = (x^*, y^*, z^*)$ dikatakan

1. stabil, jika $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ sedemikian sehingga setiap solusi sistem $\vec{x} = \vec{x}(t)$ yang memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta$$

maka berlaku

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \varepsilon, \forall t > 0,$$

2. stabil asimtotik, jika kriteria pertama dipenuhi dan $\exists \delta_0, 0 < \delta_0 < \delta$ sedemikian sehingga setiap solusi sistem $\vec{x} = \vec{x}(t)$ yang memenuhi

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \delta_0$$

bersifat

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^*,$$

3. tak stabil, jika tidak memenuhi kriteria pertama (Boyce dan DiPrima, 2009).

2.3.1 Sistem Otonomus Linear

Bentukkan sistem otonomus linear dengan tiga persamaan adalah

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ \frac{dz}{dt} &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{aligned} \quad (2.11)$$

yang dapat dinyatakan sebagai $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$, di mana

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ dan } \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

dengan $a_{ij} \in \mathbb{R}$ dan $\det(A) \neq 0$.

Teorema 2.3.1

Misalkan λ_1 , λ_2 dan λ_3 adalah nilai eigen matriks A . Titik kesetimbangan $(\vec{x}^*) = (0,0,0)$ sistem (2.11) bersifat

1. **stabil**, jika ketiga nilai eigen λ_1 , λ_2 dan λ_3 mempunyai bagian riil tak positif,
2. **tidak stabil**, jika sedikitnya satu nilai eigen memiliki bagian riil yang positif

(Boyce dan DiPrima, 2009).

2.3.2 Sistem Otonomus Non-Linear

Perhatikan sistem otonomus non-linear berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(\vec{x}) \\ \frac{dy}{dt} &= g(\vec{x}) \\ \frac{dz}{dt} &= h(\vec{x}).\end{aligned}\quad (2.12)$$

Asumsikan bahwa f , g , dan h mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik (\vec{x}^*) . Deret Taylor fungsi f , g , dan h di sekitar (\vec{x}^*) adalah

$$\begin{aligned}f(\vec{x}) &= f(\vec{x}^*) + \frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial y}(y - y^*) \\ &\quad + \frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial z}(z - z^*) + \eta_1(\vec{x}),\end{aligned}\quad (2.13)$$

$$\begin{aligned}g(\vec{x}) &= g(\vec{x}^*) + \frac{\partial g(\vec{x}^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial g(\vec{x}^*)}{\partial y}(y - y^*) \\ &\quad + \frac{\partial g(\vec{x}^*)}{\partial z}(z - z^*) + \eta_2(\vec{x}),\end{aligned}\quad (2.14)$$

$$\begin{aligned}h(\vec{x}) &= h(\vec{x}^*) + \frac{\partial h(\vec{x}^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial h(\vec{x}^*)}{\partial y}(y - y^*) \\ &\quad + \frac{\partial h(\vec{x}^*)}{\partial z}(z - z^*) + \eta_3(\vec{x}),\end{aligned}\quad (2.13)$$

dengan $\eta_1(\vec{x})$, $\eta_2(\vec{x})$, dan $\eta_3(\vec{x})$ adalah suku sisa. Untuk hampiran orde satu di atas, suku sisa memenuhi sifat

$$\lim_{(\vec{x}) \rightarrow (\vec{x}^*)} \frac{\eta_i(\vec{x})}{\|\vec{w}\|} = 0; \quad \forall i = 1, 2, 3;\quad (2.16)$$

dengan $\vec{w} = (x - x^*, y - y^*, z - z^*)^T$.

Dengan menggunakan persamaan (2.13), (2.14), dan (2.15), serta mengingat $\frac{dx}{dt} = \frac{d(x-x^*)}{dt}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{d(y-y^*)}{dt}$, dan $\frac{dz}{dt} = \frac{d(z-z^*)}{dt}$, persamaan (2.12) dapat ditulis dalam bentuk matriks, yaitu

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x - x^* \\ y - y^* \\ z - z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\vec{x}^*) \\ g(\vec{x}^*) \\ h(\vec{x}^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial y} & \frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial z} \\ \frac{\partial g(\vec{x}^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(\vec{x}^*)}{\partial y} & \frac{\partial g(\vec{x}^*)}{\partial z} \\ \frac{\partial h(\vec{x}^*)}{\partial x} & \frac{\partial h(\vec{x}^*)}{\partial y} & \frac{\partial h(\vec{x}^*)}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x^* \\ y - y^* \\ z - z^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(\vec{x}) \\ \eta_2(\vec{x}) \\ \eta_3(\vec{x}) \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Matriks $\begin{bmatrix} \frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial y} & \frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial z} \\ \frac{\partial g(\vec{x}^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(\vec{x}^*)}{\partial y} & \frac{\partial g(\vec{x}^*)}{\partial z} \\ \frac{\partial h(\vec{x}^*)}{\partial x} & \frac{\partial h(\vec{x}^*)}{\partial y} & \frac{\partial h(\vec{x}^*)}{\partial z} \end{bmatrix}$ disebut matriks Jacobi atau *partial*

derivative matrix dan dinotasikan sebagai $J(\vec{x}^*)$.

Jika dimisalkan $u = x - x^*$, $v = y - y^*$, $w = z - z^*$, sehingga $\vec{w} = (u, v, w)^T$ dan dengan mengingat bahwa $f(\vec{x}^*) = g(\vec{x}^*) = h(\vec{x}^*) = 0$, maka persamaan (2.17) dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \\ \frac{dw}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial y} & \frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial z} \\ \frac{\partial g(\vec{x}^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(\vec{x}^*)}{\partial y} & \frac{\partial g(\vec{x}^*)}{\partial z} \\ \frac{\partial h(\vec{x}^*)}{\partial x} & \frac{\partial h(\vec{x}^*)}{\partial y} & \frac{\partial h(\vec{x}^*)}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix}$$

atau

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w} + \vec{\eta}. \quad (2.18)$$

Berdasarkan persamaan (2.16) bila $\vec{w} \rightarrow \vec{0}$, maka $\vec{\eta} \rightarrow \vec{0}$, sehingga $\vec{\eta}$ dapat diabaikan dan di sekitar (\vec{x}^*) sistem nonlinear (2.12) dapat dihipotesis oleh sistem linear

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w}. \quad (2.19)$$

Untuk $x = x^*$, $y = y^*$ dan $z = z^*$ diperoleh $(u^*, v^*, w^*) = (0, 0, 0)$, sehingga sistem linear (2.19) memiliki titik kesetimbangan $(u^*, v^*, w^*) = (0, 0, 0)$ (Boyce dan Di Prima, 2009).

Teorema 2.3.2

Titik kesetimbangan sistem otonomus nonlinear (2.12) bersifat

1. **stabil** jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi (2.19) adalah stabil,
 2. **tak stabil** jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi (2.19) adalah tak stabil
- (Boyce dan DiPrima, 2009).

