MASALAH DEPENDENSI PADA FUNGSI AKTUARIA *MULTIPLE-LIFE STATUS*

SKRIPSI

oleh
FAWZAN RINALDY
0910940052-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2013

MASALAH DEPENDENSI PADA FUNGSI AKTUARIA *MULTIPLE-LIFE STATUS*

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh
FAWZAN RINALDY
0910940052-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2013

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

MASALAH DEPENDENSI PADA FUNGSI AKTUARIA
MULTIPLE-LIFE STATUS

oleh
FAWZAN RINALDY
0910940052-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 29 Mei 2013
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Pembimbing

Dra. Endang Wahyu H., M.Si.
NIP. 196611121991032001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Abdul Rouf A., M.Sc.
NIP. 196709071992031001

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	**: Fawzan Rinaldy**
NIM	**: 0910940052**
Jurusan	**: Matematika**
Penulis skripsi berjudul	**: Masalah Depandensi pada Fungsi Aktuaria *Multiple-Life Status***

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. **Isi dari skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub yang tertulis di daftar pustaka dalam skripsi ini.**
2. **Apabila di kemudian hari ternyata skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang saya terima.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan penuh kesadaran.

Malang, 29 Mei 2013
yang menyatakan,

Fawzan Rinaldy
NIM 0910940052

MASALAH DEPENDENSI PADA FUNGSI AKTUARIA *MULTIPLE-LIFE STATUS*

ABSTRAK

Dependensi merupakan salah satu faktor yang mempengaruhi besarnya premi pada fungsi aktuaria *multiple-life status*. Dalam perhitungan premi pada fungsi aktuaria *multiple-life status* biasanya pengaruh dependensi ini diabaikan karena keterbatasan cara dalam menghitungnya. Pada skripsi ini dibahas mengenai pengaruh dependensi terhadap besarnya premi pada masing-masing status dengan menggunakan orde korelasi serta menggunakan definisi dan teorema yang berhubungan. Kemudian dibuat suatu batas bawah dan batas atas premi menggunakan Frechet-Hoeffding *bounds*. Batas bawah dan batas atas ini merupakan besarnya premi yang berbeda dependensinya. Setelah itu, dibuat suatu ilustrasi numerik dari batas bawah dan batas atas premi. Berdasarkan ilustrasi numerik yang dibuat menggunakan contoh kasus pada pasangan suami istri, dapat diketahui masalah dependensinya. Semakin tua usia antara suami dan istri, maka dependensi antara keduanya semakin meningkat, namun mengalami penurunan ketika mencapai usia tertentu. Semakin besar selisih usia antara suami dan istri, maka dependensinya semakin menurun.

Kata Kunci: dependensi, *multiple-life status,* orde korelasi, Frechet-Hoeffding *bounds.*

DEPENDENCY PROBLEM ON MULTIPLE-LIFE STATUS ACTUARIAL FUNCTION

ABSTRACT

Dependency is one of the factors that affect the premium of the actuarial function multiple-life status. In the premium calculation of the actuarial function multiple-life status normally negligible influence of dependency due to limitations in the way of counting. In this paper discussed the effect of dependencies on the amount of premium in each state by using correlation order and use the definitions and theorems related. Then lower and upper bound of premiums built using the Fréchet-Hoeffding bounds. The lower and upper bound is the premium that different in dependency. Based on numerical illustration that created using case of married couples, it can be seen the dependency problem. The older age between husband and wife, then the dependencies between them has increased, but decreased when it reaches a certain age. The greater the age difference between husband and wife, then the dependencies decreased.

Key Word: dependency, multiple-life status, correlation order, Frechet-Hoeffding bounds.

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan bimbingan dan petunjuk-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul *Masalah Dependensi pada Fungsi Aktuaria Multiple-Life Status* dengan baik dan lancar. Shalawat serta salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW sebagai suri tauladan bagi penulis.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan serta motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada

1. Dra. Endang Wahyu H., M.Si. selaku dosen pembimbing, atas segala bimbingan, motivasi, bantuan, serta kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini,
2. Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si., dan Prof. Dr. Marjono, M.Phil. selaku dosen penguji, atas segala kritik dan saran yang telah diberikan untuk perbaikan skripsi ini,
3. Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc. selaku Ketua Jurusan Matematika, Dr. Sobri Abusini, M.T. selaku Ketua Program Studi Matematika, dan Indah Yanti, S.Si., M.Si. selaku dosen Pembimbing Akademik,
4. seluruh dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan Tata Usaha Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
5. Ibu, Bapak, Bima, dan seluruh keluarga besarku atas segala doa, bantuan, dan motivasi yang tak pernah habis diberikan.
6. Salzabila atas semua motivasi dan kesediaan bantuannya kapan pun penulis perlukan.
7. Oci, Reza, Fitri, Riska, Bahrul, Fajar, Aisyah, Anggun, Iqwan, Eko, Ayuhan, dan teman-teman Matematika 2009 atas semangat dan bantuan yang telah diberikan serta kebersamaannya selama ini,
8. semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Allah SWT memberikan anugerah dan barokah-Nya kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini. Sebagai manusia yang memiliki keterbatasan dan tidak luput dari kesalahan, penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun, melalui email fawzan_rinaldy@yahoo.com.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi berbagai pihak, serta menjadi sumber inspirasi untuk penulisan skripsi selanjutnya.

Malang, 29 Mei 2013

Fawzan Rinaldy

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam istilah umum asuransi, aktuaria didefinisikan sebagai salah satu disiplin ilmu yang mengaplikasikan prinsip-prinsip matematika dan statistika pada asuransi, termasuk mengkalkulasi atau menghitung daftar harga premi. Perhitungan harga premi pada fungsi aktuaria *single-life* dapat memanfaatkan *life table*, namun tidak demikian dengan perhitungan fungsi aktuaria *multiple-life,* khususnya pada *multiple-life status*. Salah satu cara yang digunakan untuk mempermudah perhitungan pada fungsi aktuaria *multiple-life status* yaitu dengan mengasumsikan bahwa variabel sisa usia suatu individu yang tergabung dalam status tersebut adalah independen. Jika diasumsikan demikian, maka individu tersebut akan mempunyai resiko kematian yang sama. Jika dilihat dalam kehidupan nyata, terdapat beberapa faktor yang mempengaruhi dependensi, seperti hubungan keluarga atau faktor genetik. Hubungan keluarga, sebagai contoh suami istri, orang tua dan anak atau faktor genetik, sebagai contoh pada kasus individu kembar, pasti memiliki keterikatan satu sama lain. Dapat dikatakan faktor seperti itu juga mempunyai pengaruh terhadap fungsi aktuaria *multiple-life status*.

Untuk itu, diperlukan pembahasan mengenai dependensi dari suatu variabel acak. Dhaene dan Goovaerts (1996) membahas masalah dependensi namun diaplikasikan pada nilai resiko dari suatu portofolio. Pada skripsi ini dibahas masalah dependensi pada variabel acak sisa usia suatu individu yang tergabung dalam *multiple-life status*. Referensi utama yang digunakan dalam penulisan skripsi ini sendiri adalah *paper* Dhaene dkk. (2000) "*A Note On Dependencies In Multiple Lives Statuses*". Pada pembahasan skripsi ini diperkenalkan orde korelasi sebagai alat untuk memahami dependensi pada kasus *multiple-life status*. Orde korelasi merupakan orde parsial untuk distribusi dua variabel acak. Hal lain yang digunakan dalam pembahasan skripsi ini adalah Frechet-Hoeffding *bounds*. Frechet-Hoeffding *bounds* merupakan batas-batas dari fungsi *copula*. Fungsi *copula* inilah yang dikaitkan dengan premi anuitas maupun asuransi. Dengan demikian, Frechet-Hoeffding *bounds* yang merupakan batas-batas dari fungsi *copula* digunakan untuk menentukan batas bawah dan batas atas suatu premi anuitas dan asuransi. Kemudian pada bagian akhir skripsi ini dibuat suatu ilustrasi numerik dari batas bawah dan batas atas premi anuitas dan asuransi. Ilustrasi numerik ini nantinya digunakan sebagai alat untuk menginterpretasikan dependensi dari individu yang tergabung dalam *multiple-life status*.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana pengaruh dependensi suatu variabel acak sisa usia suatu individu terhadap besarnya premi anuitas maupun asuransi?
2. Bagaimana menentukan batas bawah dan batas atas premi tunggal suatu anuitas maupun asuransi pada *multiple-life status* menggunakan Frechet-Hoeffding *bounds*?
3. Bagaimana menginterpretasikan dependensi suatu individu pada *multiple-life status* menggunakan ilustrasi numerik dari batas bawah dan batas atas premi anuitas maupun asuransi?

1.3 Tujuan

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Mengetahui pengaruh dependensi suatu variabel acak sisa usia suatu individu terhadap besarnya premi anuitas maupun asuransi.
2. Menentukan batas bawah dan batas atas premi tunggal suatu anuitas maupun asuransi pada *multiple-life status* menggunakan Frechet-Hoeffding *bounds*.
3. Menginterpretasikan dependensi suatu indivudu pada *multiple-life status* menggunakan ilustrasi numerik dari batas bawah dan batas atas suatu premi anuitas maupun asuransi.

1.4 Batasan Masalah

Batasan masalah pada skripsi ini yaitu

1. Fungsi aktuaria *multiple-life status* terdiri dari dua individu saja.
2. Premi tunggal yang digunakan yaitu premi tunggal pada anuitas awal seumur hidup, *pure endowment*, dan asuransi seumur hidup, terutama dalam kasus diskrit.

1.5 Manfaat

Manfaat dari penulisan skripsi ini yaitu memberikan penjelasan secara matematis bahwa dependensi merupakan salah satu hal yang mempengaruhi besarnya premi.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Ruang Sampel, Kejadian, dan Peluang Suatu Kejadian

Ruang sampel merupakan himpunan semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan. Ruang sampel biasanya dinotasikan dengan S. Kejadian merupakan himpunan bagian dari ruang sampel.

Jika suatu percobaan menghasilkan n hasil percobaan dan $n(A)$ merupakan banyaknya kejadian A maka peluang dari kejadian A dapat dinyatakan dengan

$$\mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n}.$$

Kejadian selain kejadian A disebut komplemen dari A, dinotasikan dengan A^c. Peluang kejadiannya dinyatakan dengan

$$\mathrm{P}(A^c) = 1 - \mathrm{P}(A).$$

Jika terdapat dua kejadian, misalkan A dan B, dapat dicari peluang irisan dan gabungan dari kejadian tersebut. Peluang irisan dua kejadian A dan B dinotasikan $\mathrm{P}(AB)$, sedangkan peluang gabungannya dinotasikan $\mathrm{P}(A \cup B)$. Peluang gabungan dari dua kejadian A dan B dapat dinyatakan dengan

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB). \tag{2.1}$$

(Wallpole, 1995).

2.2 Variabel Acak

Variabel acak adalah suatu fungsi yang nilainya berupa bilangan riil yang ditentukan oleh setiap elemen dalam ruang sampel. Variabel acak dinotasikan huruf kapital, misalnya X. Untuk nilai-nilai dari variabel acak X digunakan huruf kecilnya, dalam hal ini x.

(Wallpole, 1995).

2.3 Fungsi Kepadatan Peluang

Misalkan X adalah suatu variabel acak diskrit dan kemungkinan nilai-nilainya adalah x_1, x_2, x_3, ..., yang disusun dalam suatu urutan tertentu. Misalkan juga nilai-nilai ini memiliki probabilitas yang dinyatakan oleh

$$\mathrm{P}(X = x_k) = f(x_k), \qquad k = 1, 2, \ldots \; . \tag{2.2}$$

Fungsi kepadatan peluang didefinisikan dengan

$$\mathrm{P}(X = x) = f(x). \tag{2.3}$$

Untuk $(x = x_k)$, persamaan (2.3) tereduksi menjadi persamaan (2.2) sementara untuk nilai-nilai lain dari x, $f(x) = 0$. Secara umum, $f(x)$ adalah fungsi kepadatan peluang jika

1. $f(x) \geq 0$.
2. $\sum_x f(x) = 1$.

Di sisi lain, jika X adalah suatu variabel acak kontinu, maka peluang bahwa X memiliki suatu nilai khusus adalah nol, sementara peluang interval bahwa X terletak antara dua nilai yang berbeda, misalnya a dan b, ditentukan oleh

$$\mathrm{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx, \tag{2.4}$$

dimana fungsi $f(x)$ memiliki sifat-sifat

1. $f(x) \geq 0$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

(Spiegel dkk, 2000).

2.4 Fungsi Distribusi Kumulatif

Fungsi distribusi kumulatif, atau dapat disebut fungsi distribusi saja, dari suatu variabel acak X didefinisikan sebagai

$$F(x) = \mathrm{P}(X \leq x),$$

dimana x adalah sembarang bilangan riil, yaitu $-\infty < x < \infty$.
Fungsi distribusi $F(x)$ memiliki sifat-sifat sebagai berikut

1. $F(x)$ monoton naik (*nondecreasing*) [artinya, $F(x) \leq F(y)$ jika $x \leq y$].
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$.
3. $F(x)$ kontinu dari kanan [artinya, $\lim\limits_{h \to 0^+} F(x+h) = F(x)$ untuk semua x].

Jika X merupakan suatu variabel acak diskrit, fungsi distribusinya dapat dinyatakan sebagai

$$F(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \sum_{u \leq x} f(u), \tag{2.5}$$

sedangkan jika X merupakan variabel acak kontinu, fungsi distribusinya dinyatakan sebagai

$$F(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du. \tag{2.6}$$

(Spiegel dkk, 2000).

2.5 Distribusi Gabungan Dua Variabel Acak

2.5.1 Kasus Diskrit

Jika X dan Y adalah dua variabel acak diskrit, fungsi kepadatan peluang gabungannya dianalogikan sesuai persamaan (2.3), sehingga fungsi kepadatan peluang gabungannya dapat didefinisikan sebagai

$$\mathrm{P}(X = x, Y = y) = f(x, y),$$

dimana

1. $f(x, y) \geq 0$.
2. $\sum\limits_{x} \sum\limits_{y} f(x, y) = 1$.

Untuk fungsi distribusi gabungan dari X dan Y dianalogikan sesuai persamaan (2.5) dan didefinisikan oleh

$$F(x,y) = \mathrm{P}(X \le x, Y \le y) = \sum_{u \le x} \sum_{v \le y} f(u,v).$$

(Spiegel dkk, 2000).

2.5.2 Kasus Kontinu

Fungsi peluang gabungan untuk variabel-variabel acak X dan Y yang didefinisikan oleh

1. $f(x,y) \ge 0$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$.

Seperti halnya pada kasus diskrit, pada kasus kontinu juga dianalogikan dari distribusi satu variabel acak. Dalam kasus kontinu, jika peluang bahwa X terletak di antara a dan b sementara Y terletak di antara c dan d, secara matematis sesuai analogi dari persamaan (2.4) dapat ditentukan oleh

$$\mathrm{P}(a < X < b, c < Y < d) = \int_{c}^{d} \int_{a}^{b} f(x,y)dxdy.$$

Untuk fungsi distribusi gabungan X dan Y dalam kasus kontinu dianalogikan sesuai persamaan (2.6) dan didefinisikan oleh

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \mathrm{P}(X \le x, Y \le y) \\ &= \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv. \end{aligned} \qquad (2.7)$$

Fungsi distribusi marjinal, atau fungsi distribusi dari X dan Y berturut-turut adalah

$$P(X \leq x) = F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f(u,v) dv du, \tag{2.8}$$

$$P(Y \leq y) = F_2(y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{\infty} f(u,v) du dv, \tag{2.9}$$

sedangkan fungsi kepadatan marjinal, atau fungsi kepadatan dari X dan Y berturut-turut adalah

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,v)\ dv,$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u,y)\ du.$$

(Spiegel dkk, 2000).

2.6 Variabel-Variabel Acak Independen

Jika $X = x$ dan $Y = y$ adalah kejadian-kejadian yang independen untuk semua x dan y, maka dikatakan bahwa X dan Y adalah variabel-variabel acak yang independen. Hal ini dapat dituliskan

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

atau ekuivalen dengan

$$f(x,y) = f_1(x)f_2(y),$$

dimana $f_1(x)$ dan $f_2(y)$ berturut-turut adalah fungsi-fungsi kepadatan peluang marjinal dari X dan Y.

Jika $X \leq x$ dan $Y \leq y$ adalah kejadian-kejadian independen untuk semua x dan y, maka dikatakan bahwa X dan Y adalah variabel-variabel acak yang independen. Hal ini dapat dituliskan

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y) \tag{2.10}$$

atau ekuivalen dengan

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y), \tag{2.11}$$

dimana $F_1(x)$ dan $F_2(y)$ berturut-turut adalah fungsi-fungsi distribusi marjinal dari X dan Y(Spiegel dkk, 2000).

2.7 Ekspektasi

Dalam teori peluang, ekspektasi merupakan suatu nilai harapan dari keseluruhan nilai variabel acak bila percobaan itu diulang-ulang tanpa henti. Untuk suatu variabel acak diskrit X yang memiliki nilai-nilai x_1, ...,x_n ekspektasi dari X didefinisikan sebagai

$$E(X) = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathrm{P}(X = x_j). \tag{2.12}$$

Untuk suatu variabel acak kontinu X dengan fungsi kepadatan $f(x)$, eskpektasi dari X didefinisikan sebagai

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \tag{2.13}$$

Ekspektasi dari suatu variabel acak X seringkali disebut *mean* dan dilambangkan dengan μ_x, atau μ, jika variabel acaknya sudah jelas diketahui.

Perhitungan untuk nilai ekspektasi satu variabel dapat diperluas untuk dua variabel atau lebih. Sebagai contoh, jika X dan Y adalah dua variabel acak kontinu dengan fungsi kepadatan peluang gabungan $f(x, y)$, dengan menggunakan analogi yang sesuai dengan (2.13), *mean* atau ekspektasi dari X, Y, dan XY adalah

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) dy dx, \tag{2.14}$$

$$\mu_Y = E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dxdy, \quad (2.15)$$

$$\mu_{XY} = E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy. \quad (2.16)$$

(Spiegel dkk, 2000).

2.8 Varians, Standar Deviasi, dan Kovarians

Varians merupakan ukuran pemencaran dari suatu variabel acak terhadap rata-ratanya. Varians dari suatu variabel acak X didefinisikan sebagai

$$Var(X) = \sigma_X{}^2 = E[(X-\mu)^2]. \quad (2.17)$$

Varians juga dapat dinyatakan dengan $E(X^2) - \mu^2$, yaitu dengan cara sebagai berikut.
Dari (2.17), diketahui bahwa

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[(X-\mu)^2] \\ &= E[X^2 - 2\mu X + \mu^2] \\ &= E(X^2) - E(2\mu X) + E(\mu^2) \\ &= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \\ &= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= E(X^2) - \mu^2. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Varians itu sendiri merupakan suatu bilangan tidak negatif. Akar kuadrat positif dari varians disebut standar deviasi. Standar deviasi juga dapat didefinisikan sebagai rata-rata jarak penyimpangan data terhadap nilai rata-ratanya. Dari (2.17), standar deviasi dapat ditentukan sebagai

$$\sigma_X = \sqrt{E[(X-\mu)^2]}.$$

Seperti halnya ekspektasi, varians untuk satu variabel dapat diperluas untuk dua variabel atau lebih. Misalkan untuk kasus dua variabel, terdapat variabel acak kontinu X dan Y dengan fungsi kepadatan peluang gabungan $f(x,y)$. Sesuai dengan analogi dari (2.17), varians dari variabel acak X dan Y adalah

$$\begin{aligned}\sigma_X{}^2 &= E[(X-\mu_x)^2] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_x)^2 f(x,y)dydx, \\ \sigma_Y{}^2 &= E[(Y-\mu_Y)^2] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y-\mu_Y)^2 f(x,y)dxdy.\end{aligned}$$

Suatu kuantitas lain yang muncul dalam kasus dua variabel adalah kovarians. Kovarians merupakan nilai harapan yang memberikan informasi mengenai hubungan atau korelasi antara dua variabel acak. Untuk variabel acak X dan Y, kovarians didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned}\sigma_{XY} &= Kov(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_x)(y-\mu_Y)f(x,y)dxdy.\end{aligned} \tag{2.19}$$

Kovarians juga dapat ditentukan dengan

$$Kov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(XY) - \mu_X\mu_Y, \tag{2.20}$$

yaitu dengan cara sebagai berikut.
Dari (2.19) didapatkan

$$\begin{aligned}Kov(X,Y) &= E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] \\ &= E[XY - \mu_Y X - \mu_X Y + \mu_x\mu_Y] \\ &= E(XY) - E(\mu_Y X) - E(\mu_X Y) + E(\mu_x\mu_Y) \\ &= E(XY) - \mu_Y E(X) - \mu_X E(Y) + E(\mu_x\mu_Y) \\ &= E(XY) - 2\mu_X\mu_Y + \mu_X\mu_Y \\ &= E(XY) - \mu_X\mu_Y.\end{aligned}$$

(Spiegel dkk, 2000).

Kovarians juga dapat dinyatakan dengan

$$Kov(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{ F(x,y) - F_1(x)F_2(y) \right\} dxdy. \qquad (2.21)$$

(Lehmann, 1966).

Bukti:

Diasumsikan bahwa X dan Y independen dan $f(x,y)$ adalah fungsi kepadatan peluang yang berbentuk konstanta. Dari (2.20), diketahui bahwa

$$Kov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Dengan menggunakan (2.14), (2.15), dan (2.16) didapatkan

$$Kov(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dydx \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dxdy. \qquad (2.22)$$

Dari asumsi diketahui X dan Y independen. Dari asumsi tersebut diketahui bahwa

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dydx \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dxdy. \qquad (2.23)$$

Langkah selanjutnya digunakan (2.23) pada persamaan (2.22) sehingga dapat dituliskan dengan

$$Kov(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy$$

$$Kov(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{ xyf(x,y) - xyf(x,y) \right\} dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{ xyf(x,y) - xyf_1(x)f_2(y) \right\} dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{ xyf(x,y) - xf_1(x)yf_2(y) \right\} dxdy.$$

Karena $f(x,y)$ merupakan konstanta, didapatkan

$$Kov(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{ \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\, dudv - \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\, dvdu \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\, dudv \right\} dxdy.$$

Dengan menggunakan (2.7), (2.8), dan (2.9) didapatkan

$$Kov(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{ F(x,y) - F_1(x)F_2(y) \right\} dxdy.$$

Rumus kovarians (2.21) dapat juga digunakan untuk kasus variabel acak yang dependen dan fungsi kepadatan peluang $f(x,y)$ secara umum, tidak hanya yang berbentuk konstanta. Untuk memperjelas hal tersebut diberikan contoh soal sebagai berikut.

Contoh 1

Diketahui fungsi kepadatan peluang gabungan $f(x,y)$ sebagai berikut.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x+3y), & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1. \\ 0, & \text{yang lain.} \end{cases}$$

$Kov(X,Y)$ yang dicari dengan menggunakan (2.20) bernilai sama dengan $Kov(X,Y)$ yang dicari dengan menggunakan (2.21), yaitu $Kov(XY) = -\frac{1}{150}$. Perhitungannya disajikan pada Lampiran 1.

2.9 Koefisien Korelasi

Ukuran dependensi dari variabel X dan Y yang ditentukan oleh

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

dengan ρ sebagai koefisien korelasi. Jika X dan Y adalah variabel acak independen, maka $Kov(X,Y) = \sigma_{XY} = 0$. Dalam kasus ini, diketahui bahwa $\rho = 0$. Nilai dari koefisien korelasi sendiri berkisar antara -1 sampai 1. Nilai $\rho = -1$ atau $\rho = 1$ menyatakan bahwa variabel acaknya sangat berkorelasi (Spiegel dkk, 2000).

2.10 Orde Statistika

Mula-mula diberikan sampel acak, $X_1, X_2, \dots, X_n$. Setelah itu dilakukan pengurutan terhadap sampel acak tersebut dari nilai yang kecil ke nilai yang besar (*ascending order*), maka didapatkan

$$\begin{aligned} Y_1 &= \min_{1 \le i \le n} X_i \\ Y_2 &= X_i \text{ yang terkecil ke dua, untuk } 1 \le i \le n \\ &\vdots \\ Y_n &= \operatorname*{maks}_{1 \le i \le n} X_i \end{aligned}$$

dimana Y_i merupakan orde statistika ke-i. Y_1 disebut sebagai orde statistika terkecil dan Y_n disebut sebagai orde statistika terbesar. Untuk mencari fungsi distribusi dari orde statistik terkecil atau Y_1 dilakukan dengan cara

$$\begin{aligned} G_{Y_1}(y_1) &= \mathrm{P}(Y_1 \le y_1) \\ &= \mathrm{P}(\min((X_1, X_2, \dots, X_n) \le y_1) \\ &= 1 - \mathrm{P}(\min((X_1, X_2, \dots, X_n) > y_1) \\ &= 1 - \mathrm{P}[(X_1 > y_1)(X_2 > y_1) \dots (X_n > y_1)] \end{aligned} \tag{2.24}$$

Pada orde statistik terbesar atau Y_n, fungsi distribusinya dapat dicari dengan cara

$$\begin{aligned} G_{Y_n}(y_n) &= \mathrm{P}(Y_n \leq y_n) \\ &= \mathrm{P}(\text{maks}((X_1, X_2, \dots, X_n) \leq y_n) \\ &= \mathrm{P}(\text{maks}((X_1, X_2, \dots, X_n) \leq y_n) \\ &= \mathrm{P}[(X_1 \leq y_n)(X_2 \leq y_n) \dots (X_n \leq y_n)]. \end{aligned} \tag{2.25}$$

(Spiegel dkk, 2000).

2.11 Orde Parsial

Orde parsial merupakan relasi biner '$\leq$' dalam suatu himpunan P yang memenuhi sifat-sifat reflektif, anti-simetris, dan transitif. Untuk semua a, b, dan c di dalam P, didapatkan sebagai berikut.

1. Reflektif, yaitu $a \leq a$.
2. Anti-simetris, yaitu jika $a \leq b$ dan $b \leq a$ maka $a = b$.
3. Transitif, yaitu jika $a \leq b$ dan $b \leq c$ maka $a \leq c$.

(Schroder, 2003).

2.12 Fungsi Indikator

Diberikan S adalah ruang sampel. Dimisalkan juga $A \subseteq S$ adalah suatu kejadian dan peluang dari A dinotasikan $\mathrm{P}(A)$. Fungsi indikator (variabel acak indikator) dari kejadian A, dinotasikan dengan $\mathbf{I}_A$. Fungsi indikator dari kejadian A merupakan suatu variabel acak yang didefinisikan dengan

$$\mathbf{I}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{, jika } \omega \in A \\ 0 & \text{, jika } \omega \notin A \end{cases}$$

Contoh 2

Misalkan dilakukan suatu percobaan yaitu melempar sebuah dadu enam sisi. Dapat didata ruang sampelnya adalah

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Didefinisikan pula suatu kejadian A sebagai kejadian munculnya dadu bermata genap. Dari percobaan tersebut dapat diambil suatu indikator bahwa bernilai 1 ketika muncul angka $2, 4, 6$ dan bernilai 0 ketika muncul angka $1, 3, 5$.

Dengan kata lain, fungsi indikator dari kejadian A adalah variabel acak yang bernilai 1 ketika terjadi kejadian A dan bernilai 0 ketika tidak terjadi kejadian A. Dapat dilihat bahwa $\mathbf{I}_A$ ini sendiri merupakan suatu variabel acak diskrit. Fungsi kepadatan peluang $\mathbf{I}_A$ adalah

$$p_{\mathbf{I}_A}(x) = \begin{cases} \mathrm{P}(A) & \text{, jika } x = 1 \\ \mathrm{P}(A^c) = 1 - \mathrm{P}(A) & \text{, jika } x = 0 \\ 0 & \text{, yang lain} \end{cases}$$

Fungsi indikator biasanya digunakan untuk menyederhanakan suatu notasi dan untuk membuktikan suatu teorema.

Fungsi indikator memiliki sifat-sifat di bawah ini:

1) Perpangkatan
   Pangkat ke-n dari $\mathbf{I}_A$ adalah $\mathbf{I}_A$ itu sendiri atau dapat dituliskan

$$(\mathbf{I}_A(\omega))^n = \mathbf{I}_A(\omega), \forall n, \omega \qquad (2.26)$$

   karena $\mathbf{I}_A$ dapat bernilai 1 atau 0 dan

$$1^n = 1$$
$$0^n = 0$$

2) Nilai ekspektasi
   Dengan menggunakan (2.12), dapat diketahui nilai ekspektasi dari $\mathbf{I}_A$ adalah $\mathrm{P}(A)$

$$\begin{aligned} E[\mathbf{I}_A] &= \sum_{x\in\{0,1\}} x p_{\mathbf{I}_A}(x) \\ &= 1.\, p_{\mathbf{I}_A}(1) + 0.\, p_{\mathbf{I}_A}(0) \\ &= 1.\, \mathrm{P}(A) + 0.\, \mathrm{P}(A^c) \\ &= \mathrm{P}(A) \end{aligned} \qquad (2.27)$$

3) Varians
   Dengan menggunakan (2.18) dan (2.26), varians dari $\mathbf{I}_A$ adalah $\mathrm{P}(A).(1 - \mathrm{P}(A))$

$$
\begin{aligned}
Var[\mathbf{I}_A] &= E[(\mathbf{I}_A)^2] - E[(\mathbf{I}_A)]^2 \\
&= E[(\mathbf{I}_A)] - E[(\mathbf{I}_A)]^2 \\
&= \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A)^2 \\
&= \mathrm{P}(A).(1 - \mathrm{P}(A))
\end{aligned}
$$

(Marco, 2010)

2.13 Fungsi *Copula*

Pada teori peluang dan statistika, *copula* merupakan sejenis fungsi distribusi dari variabel acak yang berdistribusi *uniform*. Distribusi *uniform* merupakan salah satu distribusi peluang dimana nilai dari peluang pada suatu interval a dan b mempunyai nilai yang sama. Untuk m variabel acak yang berdistribusi *uniform* pada $[0, 1]$, $U_1, U_2, \dots, U_m$, fungsi distribusi gabungannya yaitu C, didefinisikan dengan

$$C(u_1, u_2, \dots, u_m) = \mathrm{P}(U_1 \le u_1, U_2 \le u_2, \dots, U_m \le u_m).$$

C di sini juga dapat didefinisikan sebagai fungsi *copula*.

Fungsi *copula* dapat digunakan untuk menghubungkan fungsi distribusi marjinal menjadi fungsi distribusi gabungannya. Untuk fungsi distribusi marjinal $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_m(x_m)$, menggunakan definisi dari fungsi *copula* didapatkan

$$C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_m(x_m)) = F(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Hal tersebut dapat ditunjukkan sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
&C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_m(x_m)) \\
&\qquad = \mathrm{P}(U_1 \le F_1(x_1), U_2 \le F_2(x_2), \dots, U_m \le F_m(x_m)) \\
&\qquad = \mathrm{P}(F_1^{-1}(U_1) \le x_1, F_2^{-1}(\,U_2) \le x_2, \dots, F_m^{-1}(U_m) \le x_m) \\
&\qquad = \mathrm{P}(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \dots, X_m \le x_m) \\
&\qquad = F(x_1, x_2, \dots, x_m).
\end{aligned}
$$

(Li, 1999).

2.14 Frechet-Hoeffding *Bounds*

Suatu *copula* $C(u_1, u_2, \dots, u_m)$ memiliki batas-batas berikut ini.

$$W(u_1, u_2, \dots, u_m) \leq C(u_1, u_2, \dots, u_m) \leq M(u_1, u_2, \dots, u_m).$$

Fungsi W disebut *lower* Frechet-Hoeffding *bounds* dan didefinisikan sebagai

$$W(u_1, u_2, \dots, u_m) = \text{maks}\left\{1 - m + \sum_{\text{i}=1}^{m} u_i \, , 0\right\}.$$

Fungsi M disebut *upper* Frechet-Hoeffding *bounds* dan didefinisikan sebagai

$$M(u_1, u_2, \dots, u_m) = \min\{u_1, u_2, \dots, u_m\}.$$

Pada kasus dua variabel, Frechet-Hoeffding *bounds* dinyatakan dengan

$$\text{maks}\{u_1 + u_2 - 1, 0\} \leq C(u_1, u_2) \leq \min\{u_1, u_2\}. \tag{2.28}$$

(Novosyolov, 2006).

2.15 Fungsi Aktuaria *Single-Life*

2.15.1 Umur saat Meninggal

Misalkan terdapat satu individu baru yang lahir. Umur saat meninggal individu tersebut, misalkan X, adalah variabel acak kontinu. Jika $F_X(x)$ dinotasikan sebagai fungsi distribusi dari X maka dapat ditulis

$$F_X(x) = \text{P}(X \leq x) \qquad x \geq 0. \tag{2.29}$$

Dari persamaan (2.29), dapat dinyatakan bahwa untuk setiap bilangan positif x, $F_X(x)$ adalah peluang suatu individu baru akan meninggal pada usia x atau kurang.

Fungsi $s(x)$ merupakan fungsi *survival* dengan

$$s(x) = 1 - F_X(x) = \text{P}(X > x) \qquad x \geq 0. \tag{2.30}$$

Biasanya diambil asumsi bahwa $F_X(0) = 0$, sehingga mengakibatkan $s(0) = 1$. Fungsi $s(x)$ ini sendiri adalah peluang suatu individu baru akan mencapai usia x (Bowers dkk, 1997).

2.15.2 Waktu sampai Meninggal untuk Individu Berusia x Tahun

Pertama-tama diperkenalkan simbol (x). Simbol (x) adalah notasi untuk individu yang berusia x tahun. Waktu sampai meninggal untuk individu yang berusia x tahun atau dapat disebut sebagai sisa usia dari (x), yaitu $X - x$, dinotasikan dengan $T(x)$.

Di bawah ini diberikan pernyataan mengenai $T(x)$. Dengan menggunakan analogi yang sesuai dengan persamaan (2.29) dan (2.30), untuk $t \geq 0$ dapat didefinisikan

$$ {}_tq_x = \mathrm{P}[T(x) \leq t] = F_{T(x)}(t), \tag{2.31}$$

$$ {}_tp_x = 1 - {}_tq_x = \mathrm{P}[T(x) > t]. \tag{2.32}$$

Simbol ${}_tq_x$ dapat diinterpretasikan sebagai peluang (x) akan meninggal dalam kurun waktu t tahun. Simbol ${}_tq_x$ ini sendiri adalah fungsi distribusi dari $T(x)$. Di lain pihak, ${}_tp_x$ diinterpretasikan sebagai peluang (x) akan mencapai usia $x + t$. Simbol ${}_tp_x$ ini adalah fungsi *survival* untuk (x). Untuk mempermudah pembacaan, jika $t = 1$ notasinya adalah

q_x : Peluang (x) akan meninggal dalam kurun waktu satu tahun,
p_x : Peluang (x) akan mencapai usia $x + 1$.

Simbol ${}_tp_{x+s}$ adalah peluang $(x + s)$ akan mencapai usia $x + s + t$ tahun. Jadi ${}_tp_{x+s}$ dapat didefinisikan sebagai

$$ {}_tp_{x+s} = \mathrm{P}[T(x + s) > t].$$

Jika dipandang melalui peluang (x), maka ${}_tp_{x+s}$ didefinisikan dengan

$$ {}_tp_{x+s} = \mathrm{P}[T(x) > s + t | T(x) > s]$$
$$ = \frac{P[T(x) > s + t, T(x) > s]}{\mathrm{P}[T(x) > s]}$$

$$
\begin{aligned}
{}_tp_{x+s} &= \frac{P[T(x) > s + t]}{\mathrm{P}[T(x) > s]} \\
&= \frac{{}_{s+t}p_x}{{}_sp_x}
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

Untuk kejadian bahwa (x) akan bertahan hidup t tahun dan akan meninggal dalam kurun waktu u tahun atau dengan kata lain, (x) akan meninggal antara usia $x + t$ dan $x + t + u$ dinotasikan dengan

$$
\begin{aligned}
{}_{t|u}q_x &= \mathrm{P}[t < T(x) \leq t + u] \\
&= \mathrm{P}[T(x) \leq t + u] - \mathrm{P}[T(x) \leq t] \\
&= F_{T(x)}(t + u) - F_{T(x)}(t) \\
&= {}_{t+u}q_x - {}_tq_x = {}_tp_x - {}_{t+u}p_x.
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

Untuk kasus khusus dari individu yang berusia 0 tahun (individu baru yang lahir), didapatkan $T(0) = X$ dan

$$
{}_xp_0 = s(x) \qquad x \geq 0. \tag{2.35}
$$

Diambil asumsi bahwa suatu individu baru tersebut akan bertahan hidup hingga usia x tahun. Dengan menggunakan (2.35), didapatkan

$$
\begin{aligned}
{}_tp_x &= \frac{{}_{x+t}p_0}{{}_xp_0} = \frac{s(x + t)}{s(x)}, \\
{}_tq_x &= 1 - {}_tp_x \\
&= 1 - \frac{s(x + t)}{s(x)} \\
&= \frac{s(x) - s(x + t)}{s(x)},
\end{aligned}
\tag{2.36}
$$

sehingga dengan menggunakan (2.34) dan (2.36), ${}_{t|u}q_x$ dapat dinyatakan dengan

$$
{}_{t|u}q_x = {}_tp_x - {}_{t+u}p_x
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{t|u}q_x &= \frac{s(x+t)-s(x+t+u)}{s(x)} \\
&= \left[\frac{s(x+t)}{s(x)}\right]\left[\frac{s(x+t)-s(x+t+u)}{s(x+t)}\right] \\
&= {}_tp_x\ {}_uq_{x+t}.
\end{aligned} \tag{2.37}
$$

Dalam fungsi aktuaria juga dikenal istilah sisa usia *curtate*. Sisa usia *curtate* merupakan jumlah tahun yang telah dilalui oleh (x) sebelum kematiannya. Sisa usia *curtate* dinotasikan dengan $K(x)$ dan merupakan variabel acak diskrit. Fungsi peluang dari sisa usia *curtate* adalah

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}[K(x)=k] &= \mathrm{P}[k \le T(x) < k+1] \\
&= \mathrm{P}[k < T(x) \le k+1].
\end{aligned}
$$

Dengan menggunakan (2.34) dan (2.37), $\mathrm{P}[K(x)=k]$ dapat dituliskan

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}[K(x)=k] &= {}_kp_x - {}_{k+1}p_x \\
&= {}_kp_x . q_{x+k}
\end{aligned} \tag{2.38}
$$

(Bowers dkk, 1997).

2.16 Fungsi Aktuaria *Multiple-Life*

Untuk fungsi aktuaria *multiple-life*, dapat diambil kasus dua individu yang berusia x dan y dengan variabel sisa usia dari masing-masing individu adalah $T(x)$ dan $T(y)$. Dengan menggunakan analogi sesuai persamaan (2.29), fungsi distribusi gabungan dari $T(x)$ dan $T(y)$ adalah

$$F_{T(x)T(y)}(s,t) = \mathrm{P}[T(x) \le s, T(y) \le t],$$

sedangkan untuk fungsi survival dari (x) dan (y), dengan menggunakan analogi (2.30) didapatkan

$$s_{T(x)T(y)}(s,t) = \mathrm{P}[T(x) > s, T(y) > t].$$

(Bowers dkk, 1997).

2.17 *Multiple-life status*

2.17.1 *Joint-life status*

Joint-life status adalah sebuah status yang dinyatakan hidup ketika semua individu yang tergabung dalam *joint-life status* tersebut masih hidup dan dinyatakan mati ketika terjadi kematian yang pertama terjadi pada status tersebut. Jika terdapat m individu, maka $T(x_1\, x_2 \cdots x_m) = \min[T(x_1), T(x_2), \dots, T(x_m)]$, dimana $T(x_i)$ adalah waktu sampai meninggal dari individu yang berusia x_i tahun. Waktu sampai meninggal pada *joint-life status* diinterpretasikan sebagai orde statistik terkecil. Pada kasus dua individu yaitu (x) dan (y), didapat

$$T(xy) = \min[T(x), T(y)]. \tag{2.39}$$

Dengan menggunakan (2.24), fungsi distribusi $T(xy)$, untuk $t > 0$, dengan distribusi gabungan dari $T(x)$ dan $T(y)$ adalah

$$\begin{aligned} F_{T(xy)}(t) = {}_tq_{xy} &= \mathrm{P}[T(xy) \le t] \\ &= \mathrm{P}\{\min[T(x), T(y)] \le t\} \\ &= 1 - \mathrm{P}\{\min[T(x), T(y)] > t\} \\ &= 1 - \mathrm{P}[T(x) > t, T(y) > t] \\ &= 1 - s_{T(x)T(y)}(t, t). \end{aligned} \tag{2.40}$$

Pada kasus *joint-life status* diperkenalkan bahwa $\{\min\,[T(x), T(y)] \le t\}$ merupakan gabungan dari $[T(x) \le t]$ dan $[T(y) \le t]$. Oleh karena itu, dengan menggunakan (2.1) didapatkan

$$\begin{aligned} F_{T(xy)}(t) &= \mathrm{P}\{\min\,[T(x), T(y)] \le t\} \\ &= \mathrm{P}[T(x) \le t] + \mathrm{P}[T(y) \le t] - \mathrm{P}[T(x) \le t, T(y) \le t] \\ &= {}_tq_x + {}_tq_y - F_{T(x)T(y)}(t, t). \end{aligned}$$

Seperti halnya fungsi aktuaria *single-life*, dapat juga dicari ${}_tp_{xy}$ pada fungsi aktuaria *multiple-life status*. Oleh karena itu, dengan menggunakan persamaan (2.32) dan (2.40), ${}_tp_{xy}$ dapat didefinisikan sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
{}_tp_{xy} = \mathrm{P}[T(xy) > t] &= 1 - {}_tq_{xy} \\
&= 1 - (1 - s_{T(x)T(y)}(t,t)) \\
&= s_{T(x)T(y)}(t,t) \\
&= \mathrm{P}[\mathrm{T(x)} > t, T(\mathrm{y}) > t]. \qquad (2.41)
\end{aligned}
$$

Untuk $T(x)$ dan $T(y)$ independen, didapatkan

$$
\begin{aligned}
{}_tq_{xy} &= {}_tq_x + {}_tq_y - F_{T(x)}(t)F_{T(x)}(t) \\
&= {}_tq_x + {}_tq_y - {}_tq_x \, {}_tq_y \qquad (2.42)
\end{aligned}
$$

dan

$$
{}_tp_{xy} = {}_tp_x \, {}_tp_y. \qquad (2.43)
$$

(Bowers dkk, 1997).

2.17.2 *Last-survivor status*

Last-survivor status adalah status yang dinyatakan hidup jika terdapat minimal satu individu yang hidup yang tergabung dalam *last-survivor status* dan dinyatakan mati jika terjadi kematian yang terakhir dari status tersebut. *Last-survivor status* dinotasikan dengan $(\overline{x_1 x_2 \cdots x_m})$, dimana x_i adalah usia individu ke-i dan m adalah jumlah individu dalam status. Untuk *last-survivor status*, variabel $T(\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}) = \text{maks}[T(x_1), T(x_2), \dots, T(x_m)]$, dimana $T(x_i)$ adalah waktu sampai meninggal dari individu yang berusia x_i tahun. Waktu sampai meninggal pada *last-survivor status* dapat diinterpretasikan sebagai orde statistik terbesar. Pada kasus dua individu yaitu (x) dan (y), didapatkan

$$
T(\overline{xy}) = \text{maks}[T(x), T(y)]. \qquad (2.44)
$$

Dengan menggunakan (2.25), fungsi distribusi $T(\overline{xy})$, untuk $t > 0$, dengan distribusi gabungan dari $T(x)$ dan $T(y)$ adalah

$$
\begin{aligned}
F_{T(\overline{xy})}(t) = {}_tq_{\overline{xy}} &= \mathrm{P}[T(\overline{xy}) \le t] \\
&= \mathrm{P}\{\text{maks}[T(x), T(y)] \le t\} \\
&= \mathrm{P}[T(x) \le t, T(y) \le t]. \qquad (2.45)
\end{aligned}
$$

Sama halnya dengan *joint-life status*, pada *last-survivor status*, ${}_{t}p_{\overline{xy}}$ dapat dicari dengan menggunakan (2.32) sehingga didapatkan

$$
\begin{aligned}
{}_{t}p_{\overline{xy}} &= \mathrm{P}[T(\overline{xy}) > t] = 1 - {}_{t}q_{\overline{xy}} \\
&= 1 - \mathrm{P}[T(x) \leq t, T(y) \leq t].
\end{aligned} \tag{2.46}
$$

Jika pada *joint-life status* diperkenalkan bahwa $\{\min[T(x), T(y)] \leq t\}$ merupakan gabungan dari $[T(x) \leq t]$ dan $[T(y) \leq t]$, maka pada *last-survivor status* diperkenalkan bahwa $\{\max[T(x), T(y)] > t\}$ merupakan gabungan dari $[T(x) > t]$ dan $[T(y) > t]$. Dengan menggunakan (2.1) didapatkan

$$
\begin{aligned}
{}_{t}p_{\overline{xy}} &= \mathrm{P}\{\mathrm{maks}[T(x), T(y)] > t\} \\
&= \mathrm{P}[T(x) > t] + \mathrm{P}[T(y) > t] - \mathrm{P}[T(x) > t, T(y) > t] \\
&= {}_{t}p_{x} + {}_{t}p_{y} - {}_{t}p_{xy}.
\end{aligned}
$$

Jika variabel acak $T(x)$ dan $T(y)$ independen, maka ${}_{t}q_{\overline{xy}}$ dapat dituliskan dengan

$$
{}_{t}q_{\overline{xy}} = {}_{t}q_{x}\ {}_{t}q_{y} \tag{2.47}
$$

dan ${}_{t}p_{\overline{xy}}$ dapat dituliskan dengan

$$
\begin{aligned}
{}_{t}p_{\overline{xy}} &= {}_{t}p_{x} + {}_{t}p_{y} - {}_{t}p_{xy} \\
&= {}_{t}p_{x} + {}_{t}p_{y} - {}_{t}p_{x}\ {}_{t}p_{y}.
\end{aligned} \tag{2.48}
$$

Hubungan antara *joint-life status* dan *last-survivor status* dapat dituliskan sebagai berikut.

$$
\begin{gathered}
T(xy) + T(\overline{xy}) = T(x) + T(y) \\
F_{T(xy)}(t) + F_{T(\overline{xy})}(t) = F_{T(x)}(t) + F_{T(y)}(t) \\
{}_{t}p_{xy} + {}_{t}p_{\overline{xy}} = {}_{t}p_{x} + {}_{t}p_{y} \\
f_{T(xy)}(t) + f_{T(\overline{xy})}(t) = f_{T(x)}(t) + f_{T(y)}(t)
\end{gathered}
$$

(Bowers dkk, 1997).

2.18 Tingkat Bunga

2.18.1 Bunga Sederhana / Bunga Tunggal

Bunga sederhana atau bunga tunggal adalah bunga yang hanya berdasarkan pada besar pokok dan jangka investasinya. Misalkan besar pokok P, tingkat bunga tunggal i, jangka investasinya n tahun, maka besarnya bunga tunggal yang dinotasikan I adalah

$$I = Pni.$$

(Futami, 1993).

2.18.2 Bunga Majemuk

Bunga majemuk adalah suatu bunga dimana besar pokok jangka investasi selanjutnya adalah besar pokok sebelumnya ditambah dengan bunga yang diperoleh. Misalkan besar pokok P, tingkat bunga tunggal i, jangka investasinya n tahun, maka total pokok beserta bunga yang dinotasikan S adalah

$$S = P(1+i)^n. \tag{2.49}$$

Dalam bunga majemuk didefinisikan suatu fungsi v yaitu

$$v = \frac{1}{1+i}. \tag{2.50}$$

Asumsikan nilai $S = 1$ dan periode tahunan $n = 1$. Dengan mensubtitusikan nilai v pada (2.49), maka didapatkan

$$S = P(1+i)^n$$
$$P = \frac{S}{(1+i)^n}$$
$$P = v^n S = v$$

Jadi v dapat diinterpretasikan sebagai nilai tunai dari pembayaran sebesar 1 yang dilakukan satu tahun kemudian. Dalam bunga majemuk didefinisikan juga fungsi diskon d sebagai berikut.

$$d = 1 - v = \frac{1 + i - 1}{1 + i} = \frac{i}{1 + i},$$

dimana d adalah besar bunga yang hilang jika pembayaran dilakukan satu tahun lebih cepat (Futami, 1993).

2.19 *Perpetuities* dan Anuitas Tertentu

Perpetuities (*perpetual payment stream*) merupakan pembayaran setiap periode sebesar 1. Nilai tunai dari *perpetuities* dinotasikan dengan $\ddot{a}_{\overline{\infty}|}$ dimana $\ddot{a}_{\overline{\infty}|}$ didefinisikan dengan

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = 1 + v + v^2 + \cdots = \frac{1}{1 - v} = \frac{1}{d}.$$

Anuitas tertentu merupakan deretan pembayaran berkala yang dibayarkan dalam jangka waktu tertentu dengan anggapan bahwa pembayaran pasti dilakukan apabila telah sampai pada waktunya. Jika pembayaran dilakukan di setiap awal periode maka disebut anuitas tertentu awal. Deretan pembayaran pada anuitas tertentu awal dimulai pada waktu 0 sampai $n - 1$. Nilai tunai dari anuitas tertentu awal, yang dinotasikan dengan $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ adalah

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + \cdots + v^{n-1}$$

Anuitas tertentu juga merupakan selisih dari dua *perpetuities,* yang merupakan *perpetuities* yang dimulai pada waktu 0 dan *perpetuities* yang dimulai pada waktu n. Jadi nilai tunai dari anuitas tertentu awal adalah

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{\infty}|} - v^n \ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \frac{1 - v^n}{d}. \tag{2.51}$$

(Bowers dkk, 1997)

2.20 Anuitas Seumur Hidup

Sebuah anuitas hidup adalah serangkaian pembayaran yang dilakukan pada interval yang sama selama masa hidup seseorang. Contoh dari anuitas hidup adalah dana pensiun. Salah satu jenis dari anuitas hidup yaitu anuitas seumur hidup. Jika setiap pembayaran dilakukan pada setiap awal periode, maka disebut anuitas seumur hidup awal.

Misalkan pada anuitas seumur hidup deretan pembayarannya dilakukan jika (x) masih hidup. Dapat dikatakan deretan pembayarannya dilakukan pada waktu 0 sampai $K(x)$, dimana $K(x)$ adalah variabel acak sisa usia *curtate* dari (x). Jadi nilai tunai dari anuitas seumur hidup awal adalah

$$\ddot{a}_{\overline{K(x)+1|}} = 1 + v + \cdots + v^{K(x)},$$

dengan fungsi kepadatan peluangnya adalah $\mathrm{P}[K(x) = k]$.

Premi tunggal merupakan suatu ekspektasi dari nilai tunainya. Untuk premi tunggal anuitas seumur hidup, dinotasikan dengan $\ddot{a}_x$, didapatkan

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x = E\left(\ddot{a}_{\overline{K(x)+1|}}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1|}}\ \mathrm{P}[K(x) = k] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1|}}\ {}_k p_x \cdot q_{x+k} \end{aligned} \tag{2.52}$$

Rumus premi anuitas seumur hidup (2.52) dapat disederhanakan dengan langkah-langkah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x &= \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1|}}\ {}_k p_x \cdot q_{x+k} \\ &= \ddot{a}_{\overline{1|}}\ {}_0 p_x . q_x + \ddot{a}_{\overline{2|}} p_x . q_{x+1} + \ddot{a}_{3|}\ {}_2 p_x . q_{x+2} + \cdots \\ &= \ddot{a}_{\overline{1|}}\ {}_0 p_x . (1 - p_x) + \ddot{a}_{\overline{2|}} p_x . (1 - p_{x+1}) \\ &\qquad + \ddot{a}_{3|}\ {}_2 p_x . (1 - p_{x+2}) + \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x = \ddot{a}_{\overline{1|}}\left({}_0 p_x - {}_0 p_x . p_x\right) + \ddot{a}_{\overline{2|}}(p_x - p_x . p_{x+1}) \\ + \ddot{a}_{3|}({}_2 p_x - {}_2 p_x . p_{x+2}) + \cdots \end{aligned} \tag{2.53}$$

Dengan menggunakan (2.33), persamaan (2.53) dapat dituliskan sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}_x &= \ddot{a}_{\overline{1}|}\left({}_0p_x - p_x\right) + \ddot{a}_{\overline{2}|}\left(p_x - {}_2p_x\right) + \ddot{a}_{3|}\left({}_2p_x - {}_3p_x\right) \\
&\quad + \cdots \\
\ddot{a}_x &= 1.\left({}_0p_x - p_x\right) + (1+v)\left(p_x - {}_2p_x\right) \\
&\quad + (1+v+v^2)\left({}_2p_x - {}_3p_x\right) + \cdots \\
\ddot{a}_x &= 1.\ {}_0p_x - 1.\,p_x + (1+v)p_x - (1+v)\ {}_2p_x \\
&\quad + (1+v+v^2)\ {}_2p_x - (1+v+v^2)\ {}_3p_x \\
&\quad + \cdots \\
\ddot{a}_x &= 1.\ {}_0p_x + v^1.\,p_x + v^2.\ {}_2p_x + \cdots
\end{aligned} \tag{2.54}
$$

Sesuai dengan (2.54), premi anuitas seumur hidup awal dapat dituliskan dengan

$$
\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k\ {}_kp_x, \tag{2.55}
$$

atau dengan menggunakan (2.32) didapatkan

$$
\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \mathrm{P}(T(x) > k). \tag{2.56}
$$

Premi anuitas seumur hidup dapat juga dinyatakan pada kasus *multiple-life status*. Untuk anuitas seumur hidup awal pada *joint-life status*, dengan menggunakan (2.41), (2.55), dan (2.56), rumus preminya adalah

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}_{xy} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k\ {}_kp_{xy} &= \sum_{k=0}^{\infty} v^k \mathrm{P}(T(xy) > k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} v^k \mathrm{P}(T(x) > k, T(y) > k).
\end{aligned} \tag{2.57}
$$

Demikian juga untuk anuitas seumur hidup awal pada *last-survivor status*. Dengan menggunakan (2.46), (2.55), dan (2.56), rumus preminya adalah sebagai berikut.

$$\ddot{a}_{\overline{xy}} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \,{}_k p_{\overline{xy}} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \mathrm{P}(T(\overline{xy}) > k)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} v^k (1 - \mathrm{P}[T(x) \leq k, T(y) \leq k]).$$
(2.58)

(Bowers dkk, 1997).

2.21 *Pure Endowment*

Pure endowment adalah sebuah polis asuransi jiwa yang dibayarkan apabila suatu individu yang bersangkutan masih hidup pada saat akhir periode dari *pure endowment* itu sendiri. Jika individu tersebut meninggal selama periode *pure endowment*, maka pembayaran tidak dilakukan.

Nilai tunai dari premi *pure endowment* n-tahun adalah v^n dengan fungsi kepadatan peluangnya adalah ${}_n p_x$. Jadi premi *pure endowment* n-tahun yang dinotasikan ${}_n E_x$ adalah

$${}_n E_x = E(v^n) = v^n \,{}_n p_x, \tag{2.59}$$

atau dengan menggunakan (2.32) didapatkan

$${}_n E_x = v^n \mathrm{P}(T(x) > n). \tag{2.60}$$

Hubungan antara *pure endowment* n-tahun dengan anuitas seumur hidup adalah

$$\ddot{a}_x = \sum_{n=0}^{\infty} {}_n E_x. \tag{2.61}$$

Untuk rumus premi *pure endowment* n-tahun dari *joint-life status*, dengan menggunakan (2.41) dan (2.59) didapatkan

$$\begin{aligned} {}_n E_{xy} &= v^n \,{}_n p_{xy} \\ &= v^n \mathrm{P}(T(xy) > n) \\ &= v^n \mathrm{P}[T(x) > n, T(y) > n), \end{aligned} \tag{2.62}$$

sedangkan rumus premi *pure endowment* n-tahun dari *last-survivor status* menggunakan (2.46) dan (2.59) didapatkan

$$\begin{aligned} {}_nE_{\overline{xy}} &= v^n \ {}_np_{\overline{xy}} \\ &= v^n \mathrm{P}(T(\overline{xy}) > n) \\ &= v^n(1 - \mathrm{P}[T(x) \leq n, T(y) \leq n]). \end{aligned} \tag{2.63}$$

(Bowers dkk, 1997).

2.22 Asuransi Seumur Hidup

Asuransi jiwa adalah asuransi yang memberikan sejumlah uang tertentu atas kematian tertanggung sesuai dengan ketentuan dalam polis asuransi. Asuransi seumur hidup merupakan salah satu jenis dari asuransi jiwa. Dalam polis asuransi seumur hidup, uang pertanggungan akan dibayarkan pada akhir periode ketika tertanggung meninggal.

Nilai tunai dari premi asuransi seumur hidup adalah $v^{K(x)+1}$ dengan fungsi kepadatan peluangnya adalah $\mathrm{P}[K(x) = k]$. Jadi premi anuitas seumur hidup yang dinotasikan dengan A_x adalah

$$\begin{aligned} A_x = E\left(v^{K(x)+1}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, \mathrm{P}[K(x) = k] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \ {}_kp_x \cdot q_{x+k}, \end{aligned} \tag{2.64}$$

Hubungan asuransi seumur hidup dengan anuitas seumur hidup adalah

$$A_x = 1 - d\ddot{a}_x. \tag{2.65}$$

Buktinya didapatkan dengan langkah-langkah sebagai berikut. Sebelumnya telah dibahas bahwa anuitas merupakan selisih dari dua *perpetuities*. Dengan menggunakan (2.51), didapatkan

$$\ddot{a}_{\overline{K(x)+1|}} = \ddot{a}_{\overline{\infty}|} - v^{K(x)+1}\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \frac{1 - v^{K(x)+1}}{d} \tag{2.66}$$

Dengan mencari ekspektasi dari persamaan (2.66) maka didapatkan

$$E(\ddot{a}_{\overline{K(x)+1|}}) = E\left(\frac{1 - v^{K(x)+1}}{d}\right)$$
$$\ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{d}$$
$$A_x = 1 - d\ddot{a}_x.$$

Dengan menggunakan (2.64), dapat ditentukan rumus premi asuransi seumur hidup untuk *joint-life status* yaitu

$$\begin{aligned} A_{xy} &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \ {}_k p_{xy} . q_{x+k:y+k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} P[k < \min(T(x), T(y) \leq k+1], \end{aligned} \tag{2.67}$$

sedangkan rumus premi asuransi seumur hidup untuk *last-survivour status* adalah

$$\begin{aligned} A_{\overline{xy}} &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} (\ {}_k p_x . q_{x+k} + \ {}_k p_y . q_{y+k} - \ {}_k p_{xy} . q_{x+k:y+k}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} P[k < \text{maks}(T(x), T(y) \leq k+1]. \end{aligned}$$

(2.68)

(Bowers dkk, 1997).

BAB III
PEMBAHASAN

3.1 Pengaruh Dependensi terhadap Besarnya Premi Anuitas dan Asuransi

Pada bab sebelumnya telah diberikan penjelasan singkat bahwa perhitungan premi dari suatu anuitas maupun asuransi pada fungsi *multiple-life status* menggunakan asumsi variabel sisa usia adalah independen. Pada bab ini dibahas mengenai dependensi dari variabel sisa usia tersebut, karena dependensi juga memberikan pengaruh terhadap besar premi. Pembahasan mengenai dependensi ini menggunakan ukuran dependensi yang positif, artinya nilai $\rho \geq 0$. Untuk mendukung pembahasan masalah dependensi tersebut diperkenalkan satu notasi baru yaitu $R(F_{1,\dots,} F_n)$, dimana $R(F_{1,\dots,} F_n)$ adalah himpunan pasangan variabel acak multivariabel, misalkan $(X_1, \dots, X_n)$, dengan fungsi distribusi marjinal dari X_i adalah F_i.

Pada skripsi ini digunakan orde korelasi sebagai alat untuk mengetahui masalah dependensi dari variabel sisa usia adalah orde korelasi. Orde korelasi ini merupakan merupakan orde parsial untuk distribusi dua variabel. Pembahasan mengenai dependensi ini nantinya digunakan untuk mengetahui besarnya suatu premi dari anuitas maupun asuransi yang berbeda dependensinya. Berikut ini diberikan definisi orde korelasi.

Definsi 3.1
Misalkan $(T(x), T(y))$ dan $(S(x), S(y))$ adalah elemen dari $R(F, G)$, dengan fungsi distribusi marjinalnya masing-masing adalah F dan G. $(T(x), T(y))$ dikatakan kurang berkorelasi dibandingkan dengan $(S(x), S(y))$, dinotasikan dengan $(T(x), T(y)) \leq_c (S(x), S(y))$ jika

$$Kov\big[f\big(T(x)\big), g\big(T(y)\big)\big] \leq Kov[f\big(S(x)\big), g(S(y))]$$

untuk semua fungsi f dan g yang monoton naik (*non decreasing*) dimana nilai kovariannya ada.

Definisi 3.1 dapat diturunkan menjadi suatu teorema mengenai hubungan orde korelasi dan perbandingan fungsi distribusi gabungan dari variabel acak yang berbeda dependensinya.

Teorema 3.1
Misalkan $(T(x), T(y))$ dan $(S(x), S(y))$ adalah elemen dari $R(F, G)$. Pernyataan-pernyataan ini ekuivalen:

a) $\big(T(x), T(y)\big) \leq_c \big(S(x), S(y)\big)$.
b) $\mathrm{P}[T(x) \leq t, T(y) \leq s] \leq \mathrm{P}[S(x) \leq t, S(y) \leq s]$ untuk semua $t, s \geq 0$.

Bukti:
(a) → (b)
Asumsikan bahwa (a) dipenuhi dan dipilih $f(u) = \mathbf{I}(u > t)$ dan $g(u) = \mathbf{I}(u > s)$. Dari Definisi 3.1 didapatkan

$$\big(T(x), T(y)\big) \leq_c \big(S(x), S(y)\big)$$
$$Kov\big[f\big(T(x)\big), g\big(T(y)\big)\big] \leq Kov[f\big(S(x)\big), g(S(y))]$$
$$Kov(\mathbf{I}(T(x) > t, T(y) > s)) \leq Kov(\mathbf{I}(S(x) > t, S(y) > s))$$

Dengan menggunakan (2.20) dan (2.27) didapatkan

$$E\big(\mathbf{I}(T(x) > t, T(y) > s)\big) - E\big(\mathbf{I}(T(x) > t)\big)E\big(\mathbf{I}(T(y) > s)\big)$$
$$\leq$$
$$E(\mathbf{I}(S(x) > t, S(y) > s)) - E\big(\mathbf{I}(S(x) > t)\big)E\big(\mathbf{I}(S(y) > s)\big)$$

$$\begin{gathered}\mathrm{P}(T(x) > t, T(y) > s) - \mathrm{P}(T(x) > t)\mathrm{P}(T(y) > s) \\ \leq \\ \mathrm{P}(S(x) > t, S(y) > s) - \mathrm{P}(S(x) > t)\mathrm{P}(S(y) > s)\end{gathered} \tag{3.1}$$

Pada (3.1), diketahui bahwa $T(x)$ dan $S(x)$ dan mempunyai fungsi distribusi dan interval yang sama. Begitu pula dengan $T(y)$ dan $S(y)$. Jadi $\mathrm{P}(T(x) > t)\mathrm{P}(T(y) > s) = \mathrm{P}(S(x) > t)\mathrm{P}(S(y) > s)$, sehingga didapatkan

$$\mathrm{P}(T(x) > t, T(y) > s) \leq \mathrm{P}(S(x) > t, S(y) > s) \tag{3.2}$$

Menurut ekuivalensi, pertidaksamaan (3.2) juga dapat dituliskan dengan

$$\mathrm{P}(T(x) \leq t, T(y) \leq s) \leq \mathrm{P}(S(x) \leq t, S(y) \leq s) \tag{3.3}$$

Pembuktian mengenai ekuivalensi pertidaksamaan (3.2) dan (3.3) diberikan pada Lampiran 2.
(b) → (a)
Asumsikan bahwa (b) dipenuhi. Untuk fungsi f dan g yang monoton naik (*non decreasing*), didapatkan

$$\mathrm{P}(T(x) \leq t, T(y) \leq s) \leq \mathrm{P}(S(x) \leq t, S(y) \leq s)$$
$$\mathrm{P}(f(T(x)) \leq t, g(T(y)) \leq s) \leq \mathrm{P}(f(S(x)) \leq t, g(S(y)) \leq s) \tag{3.4}$$

Pada (3.4), ruas kiri dikurangi $\mathrm{P}\big(f\big(T(x)\big) \leq t\big)\mathrm{P}\big(g\big(T(y)\big) \leq s\big)$ dan ruas kanan dikurangi $\mathrm{P}(f(S(x)) \leq t)\mathrm{P}(g(S(y)) \leq s)$. Hal ini boleh dilakukan karena

$$\mathrm{P}\big(f\big(T(x)\big) \leq t\big)\mathrm{P}\big(g\big(T(y)\big) \leq s\big) = \mathrm{P}(f(S(x)) \leq t)\mathrm{P}\big(g\big(S(y)\big) \leq s\big),$$

sehingga (3.4) dapat dituliskan dengan

$$\mathrm{P}\big(f\big(T(x)\big) \leq t, g\big(T(y)\big) \leq s\big) - \mathrm{P}\big(f\big(T(x)\big) \leq t\big)\mathrm{P}\big(g\big(T(y)\big) \leq s\big)$$
$$\leq$$
$$\mathrm{P}(f(S(x)) \leq t, g(S(y)) \leq s) - \mathrm{P}(f(S(x)) \leq t)\mathrm{P}(g(S(y)) \leq s) \tag{3.5}$$

Perlu diingat bahwa fungsi distribusi $T(x)$ dan $S(x)$ sama dan fungsi distribusi $T(y)$ dan $S(y)$ juga demikian, namun fungsi distribusi gabungan dari $T(x)$ dan $T(y)$ berbeda dengan fungsi distribusi gabungan $S(x)$ dan $S(y)$. Misalkan fungsi distribusi gabungan dari $T(x)$ dan $T(y)$ dinotasikan H_1 dan fungsi distribusi gabungan dari $S(x)$ dan $S(y)$ dinotasikan H_2. Pertidaksamaan (3.5) dapat dituliskan menjadi

$$H_{1\,f(T(x)),g(T(y))}(t,s) - F_{f(T(x))}(t)G_{g(T(y))}(s)$$
$$\leq H_{2\,f(S(x)),g(S(y))}(t,s) - F_{f(S(x))}(t)G_{g(S(y))}(s). \tag{3.6}$$

Untuk menghubungkan (3.6) dengan rumus kovarians, maka kedua ruasnya diintegralkan terhadap t dan s. Jadi (3.6) dapat dituliskan menjadi

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\quad H_{1f(T(x)),g(T(y))}(t,s)-F_{f(T(x))}(t)G_{g(T(y))}(s)\quad\right\}dtds$$

$$\leq$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\quad H_{2f(S(x)),g(S(y))}(t,s)-F_{f(S(x))}(t)G_{g(S(y))}(s)\quad\right\}dtds$$

(3.7)

Bentuk (3.7) adalah rumus kovarians (2.21), sehingga didapatkan

$$Kov\big[f\big(T(x)\big),g\big(T(y)\big)\big]\leq Kov[f\big(S(x)\big),g(S(y))]$$
$$\big(T(x),T(y)\big)\leq_c\big(S(x),S(y)\big)$$

Dalam menghubungkan masalah perbedaan dependensi dengan besarnya premi pada fungsi *multiple-life status* dibutuhkan suatu definisi mengenai variabel acak sisa usia yang terorder secara stokastik. Orde stokastik itu sendiri merupakan orde parsial. Orde stokastik digunakan untuk membandingkan variabel acak yang mempunyai fungsi distribusi dengan interval yang sama. Berikut ini adalah definisi variabel acak sisa usia yang terorder secara stokastik.

Definisi 3.2
Misalkan $T(x)$ dan $S(x)$ adalah dua variabel sisa usia. Dikatakan bahwa $S(x)$ lebih dominan secara stokastik dari $T(x)$, dinotasikan $T(x)\leq_{st}S(x)$, jika salah satu kondisi ekuivalen di bawah ini dipenuhi:
a) $\mathrm{P}(T(x)>t)\leq\mathrm{P}(S(x)>t)$ untuk semua t.
b) $\mathrm{P}(T(x)\leq t)\geq\mathrm{P}(S(x)\leq t)$ untuk semua t.

Dari Definsi 3.1, Teorema 3.1, dan Definsi 3.2, didapatkan perbandingan variabel acak sisa usia *multiple-life status* yang terorder secara stokastik yang diberikan dalam lemma berikut.

Lemma 3.1
Misalkan $(T(x),T(y))$ dan $(S(x),S(y))$ adalah variabel acak dari distribusi dua variabel sisa usia, keduanya elemen dari $R(F,G)$. Jika

$\big(T(x),T(y)\big) \leq_c (S(x),S(y))$, maka pernyataan mengenai hubungan orde stokastik ini dipenuhi:

a) $T(xy) \leq_{st} S(xy)$,

b) $T(\overline{xy}) \geq_{st} S(\overline{xy})$.

Bukti:

(a) Diketahui $\big(T(x),T(y)\big) \leq_c \big(S(x),S(y)\big)$.

Dari Teorema 3.1 dan ekuivalensi didapat

$$\big(T(x),T(y)\big) \leq_c \big(S(x),S(y)\big).$$
$$\mathrm{P}[T(x) \leq t, T(y) \leq s] \leq \mathrm{P}[S(x) \leq t, S(y) \leq s]$$
$$\mathrm{P}[T(x) > t, T(y) > s] \leq \mathrm{P}[S(x) > t, S(y) > s]$$

Untuk $s = t$ didapatkan

$$\mathrm{P}[T(x) > t, T(y) > t] \leq \mathrm{P}[S(x) > t, S(y) > t]. \tag{3.8}$$

Pertidaksamaan (3.8) dapat dihubungkan dengan perbandingan fungsi distribusi sisa usia pada kasus *joint-life status*. Dengan menggunakan (2.41), pertidaksamaan (3.8) dapat dituliskan menjadi

$$\mathrm{P}[T(xy) > t] \leq \mathrm{P}[S(xy) > t]. \tag{3.9}$$

Langkah selanjutnya yaitu digunakan Definisi 3.2, sehingga dari pertidaksamaan (3.9) didapatkan

$$T(xy) \leq_{st} S(xy).$$

(b) Diketahui $\big(T(x),T(y)\big) \leq_c \big(S(x),S(y)\big)$.

Seperti halnya pada pembuktian (a), dari Teorema 3.1 didapat

$$\big(T(x),T(y)\big) \leq_c (S(x),S(y))$$
$$\mathrm{P}[T(x) \leq t, T(y) \leq s] \leq \mathrm{P}[S(x) \leq t, S(y) \leq s].$$

Untuk $s = t$ didapat

$$\mathrm{P}[T(x) \leq t, T(y) \leq t] \leq \mathrm{P}[S(x) \leq t, S(y) \leq t]. \tag{3.10}$$

Dapat dilihat bahwa pertidaksamaan (3.10) dapat dihubungkan dengan perbandingan variabel acak sisa usia pada kasus *last-survivor status*. Dengan menggunakan (2.45), pertidaksamaan (3.10) menjadi

$$\mathrm{P}[T(\overline{xy}) \leq t] \leq \mathrm{P}[S(\overline{xy}) \leq t]. \quad (3.11)$$

Menurut Definsi 3.2, dari pertidaksamaan (3.11) didapatkan

$$T(\overline{xy}) \geq_{st} S(\overline{xy}).$$

Dari Lemma 3.1 dapat disimpulkan sebagai berikut. Pada kasus *joint-life status*, jika variabel acak sisa usianya meningkat dependensinya, maka peluang hidup dari *joint-life status* juga meningkat atau dengan kata lain peluang mati dari *joint-life status* menurun. Pada kasus *last-survivor status*, jika variabel acak sisa usianya meningkat dependensinya, maka peluang hidup dari *last-survivor status* akan menurun atau dapat dikatakan peluang mati dari *last-survivor status* meningkat.

Pada Lemma 3.1 telah dibahas mengenai perbandingan variabel acak sisa usia pada *multiple-life status* yang berbeda dependensinya. Selanjutnya perbandingan premi anuitas maupun asuransi dengan variabel acak sisa usia yang berbeda dependensinya dinyatakan dalam teorema berikut ini.

Teorema 3.2
Misalkan $(T(x), T(y))$ dan $(S(x), S(y))$ adalah variabel acak dari distribusi dua variabel sisa usia, keduanya elemen dari $R(F, G)$. Jika $(T(x), T(y)) \leq_c (S(x), S(y))$, maka perbandingan besar premi yang berbeda dependensinya seperti yang ditampilkan pada Tabel 3.1 dan Tabel 3.2 dipenuhi:

a) Tabel 3.1 Perbandingan premi *joint-life status* yang berbeda dependensinya

Jenis premi	**Perbandingan premi**
Anuitas seumur hidup	$\ddot{a}_{xy}^{T} \leq \ddot{a}_{xy}^{S}$
Pure endowment	${}_kE_{xy}^{T} \leq {}_kE_{xy}^{S}$
Asuransi seumur hidup	$A_{xy}^{T} \geq A_{xy}^{S}$

b) Tabel 3.2 Perbandingan premi *last-survivor status* yang berbeda dependensinya

Jenis premi	Perbandingan premi
Anuitas seumur hidup	$\ddot{a}_{\overline{xy}}^{T} \geq \ddot{a}_{\overline{xy}}^{S}$
Pure endowment	${}_{k}E_{\overline{xy}}^{T} \geq {}_{k}E_{\overline{xy}}^{S}$
Asuransi seumur hidup	$A_{\overline{xy}}^{T} \leq A_{\overline{xy}}^{S}$

Keterangan: Indek T pada $\ddot{a}$, E,dan A menunjukkan premi yang dibangun dari variabel sisa usia T. Indek S pada $\ddot{a}$, E,dan A menunjukkan premi yang dibangun dari variabel sisa usia S.

Bukti:
(a) Diketahui $\big(T(x), T(y)\big) \leq_c (S(x), S(y))$.
Dari Lemma 3.1 dan Definisi 3.2 didapatkan

$$\begin{aligned}(T(x), T(y)) &\leq_c (S(x), S(y)) \\ T(xy) &<_{st} S(xy). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Dengan menggunakan pertidaksamaan (3.12), dapat dicari perbandingan premi anuitas maupun asuransi pada kasus *joint-life status* dengan dependensi variabel acak yang berbeda. Pertama-tama terlebih dahulu dicari perbandingan premi anuitas seumur hidup *joint-life status* dengan langkah-langkah sebagai berikut.

Dari (3.12), digunakanlah Definsi 3.2 sehingga didapatkan

$$\mathrm{P}(T(xy) > t) \leq \mathrm{P}(S(xy) > t). \tag{3.13}$$

Pada pertidaksamaan (3.13), t merupakan suatu nilai untuk variabel acak kontinu. Untuk menerapkan (3.13) pada anuitas seumur hidup diskrit, digunakan nilai yang diskrit, yaitu k. Pada (3.13) kedua ruasnya dikalikan dengan v^k, kemudian masing-masing dijumlahkan dengan $k = 0, 1, 2, \ldots$ didapatkan

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^k \mathrm{P}(T(xy) > k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} v^k \mathrm{P}(S(xy) > k).$$

Dengan menggunakan (2.57) didapatkan

$$\ddot{a}_{xy}^{T} \leq \ddot{a}_{xy}^{S}.$$

Kemudian dicari perbandingan premi *pure endowment joint-life status* dengan dependensi variabel acak yang berbeda. Langkah-langkah penentuan perbandingan premi *pure endowment* didapatkan dengan langkah-langkah sebagai berikut.

Untuk mengetahui pengaruh orde korelasi pada *pure endowment*, digunakanlah hasil yang didapat dari anuitas seumur hidup, yaitu

$$\ddot{a}_{xy}^{T} \leq \ddot{a}_{xy}^{S}.$$

Rumus anuitas seumur hidup *joint-life status* dapat dituliskan dalam bentuk lain, yaitu menggunakan (2.61) sehingga didapatkan

$$\sum_{k=0}^{\infty} {}_kE_{xy}^{T} \leq \sum_{k=0}^{\infty} {}_kE_{xy}^{S}$$
$${}_kE_{xy}^{T} \leq {}_kE_{xy}^{S}.$$

Sama halnya dengan *pure endowment,* untuk mengetahui pengaruh orde korelasi pada asuransi seumur hidup juga digunakan hasil yang didapat dari anuitas seumur hidup. Langkah-langkahnya sebagai berikut.

Hasil yang didapat dari anuitas seumur hidup yaitu

$$\ddot{a}_{xy}^{T} \leq \ddot{a}_{xy}^{S}. \qquad (3.14)$$

Dengan mengalikan kedua ruas (3.14) dengan $-d$, kemudian ditambahkan dengan 1 didapatkan

$$1 - d\ddot{a}_{xy}^{T} \geq 1 - d\ddot{a}_{xy}^{S}.$$

Kembali ke (2.65) didapatkan

$$A_{xy}^{T} \geq A_{xy}^{S}.$$

(b) Diketahui $\big(T(x), T(y)\big) \leq_c (S(x), S(y))$. Dengan cara yang sama pada pembuktian (a) didapatkan

$$\begin{aligned} (T(x), T(y)) &\leq_c (S(x), S(y)) \\ T(\overline{xy}) &\geq_{st} S(\overline{xy}). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Pertidaksamaan (3.15) digunakan untuk mencari perbandingan premi anuitas maupun asuransi pada kasus *last-survivor status*. Seperti halnya pada kasus *joint-life status*, pertama-tama terlebih dahulu dicari perbandingan premi anuitas seumur hidup *last-survivor status* dengan langkah-langkah sebagai berikut.

Pertidaksamaan (3.15) dapat dituliskan dalam bentuk lain, yaitu dengan menggunakan Definisi 3.2, sehingga didapatkan

$$\mathrm{P}(T(\overline{xy}) > t) \geq \mathrm{P}(S(\overline{xy}) > t). \tag{3.16}$$

Seperti pada kasus *joint-life status*, pada pertidaksamaan (3.16) digunakan suatu nilai yang diskrit yaitu k. Pada pertidaksamaan (3.16) kedua ruasnya dikalikan dengan v^k, kemudian masing-masing dijumlahkan dengan $k = 0, 1, 2, \ldots$ didapatkan

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^k \mathrm{P}(T(\overline{xy}) > k) \geq \sum_{k=0}^{\infty} v^k \mathrm{P}(S(\overline{xy}) > k).$$

Dengan menggunakan (2.58) didapatkan

$$\ddot{a}_{\overline{xy}}^{T} \geq \ddot{a}_{\overline{xy}}^{S}.$$

Untuk mengetahui pengaruh orde korelasi pada *pure endowment* pada *last survivor status* juga digunakan hasil yang didapat dari anuitas seumur hidup, yaitu

$$\ddot{a}_{\overline{xy}}^{T} \geq \ddot{a}_{\overline{xy}}^{S}$$

Kemudian dengan menggunakan (2.61) didapatkan

$$\sum_{k=0}^{\infty} {}_{k}E_{\overline{xy}}^{T} \geq \sum_{k=0}^{\infty} {}_{k}E_{\overline{xy}}^{S}$$
$${}_{k}E_{\overline{xy}}^{T} \geq {}_{k}E_{\overline{xy}}^{S}$$

Pada asuransi seumur hidup *last-survivor status*, pengaruh orde korelasinya dapat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut.

Kembali lagi pada hasil yang telah didapat dari anuitas seumur hidup yaitu

$$\ddot{a}_{\overline{xy}}^{T} \geq \ddot{a}_{\overline{xy}}^{S}. \tag{3.17}$$

Dengan mengalikan kedua ruas (3.17) dengan $-d$ dan ditambahkan dengan 1 didapatkan

$$1 - d\ddot{a}_{\overline{xy}}^{T} \leq 1 - d\ddot{a}_{\overline{xy}}^{S}.$$

Langkah terakhir yaitu dengan menggunakan (2.65) sehingga dapat dituliskan dalam bentuk

$$A_{\overline{xy}}^{T} \leq A_{\overline{xy}}^{S}$$

Dari Teorema 3.2, perbandingan besar premi dari anuitas seumur hidup, *pure endowment*, dan asuransi seumur hidup yang berbeda dependensinya pada *multiple life status* dapat diketahui. Pada kasus *joint-life status*, dapat disimpulkan bahwa jika variabel sisa usia yang tergabung dalam status meningkat dependensinya, maka besar premi tunggal dari anuitas seumur hidup dan *pure endowment* juga meningkat, namun besar premi tunggal dari asuransi seumur hidup akan menurun. Pada kasus *last-survivor status*, dapat disimpulkan bahwa jika variabel sisa usia yang tergabung dalam status meningkat dependensinya, maka besar premi tunggal dari anuitas seumur hidup dan *pure endowment* akan menurun, namun besar premi tunggal dari asuransi seumur hidup meningkat.

3.2 Batas Bawah dan Batas Atas Premi Anuitas dan Asuransi

Pada skripsi ini digunakan Frechet-Hoeffding *bounds* untuk menentukan batas bawah dan batas atas premi anuitas dan asuransi. Frechet-Hoeffding *bounds* dibangun dengan menggunakan variabel acak sisa usia $T(x)$ dan $T(y)$. Untuk setiap elemen $(T(x), T(y))$ pada $R(F,G)$, dengan menggunakan (2.28) didapat Frechet-Hoeffding *bounds* adalah

$$\text{maks}\{F_{T(x)}(t) + G_{T(y)}(s) - 1{,}0\} \leq C\left(F_{T(x)}(t), G_{T(y)}(s)\right) \leq \min\left\{F_{T(x)}(t), G_{T(y)}(s)\right\},$$

atau bentuk Frechet-Hoeffding *bounds* dapat juga dituliskan sebagai berikut.

$$\text{maks}\{F_{T(x)}(t) + G_{T(y)}(s) - 1{,}0\} \leq \mathrm{P}(T(x) \leq t, T(y) \leq s) \leq \min\left\{F_{T(x)}(t), G_{T(y)}(s)\right\},$$

Fungsi distribusi gabungan dari $T(x)$ dan $T(y)$ yang masing-masing dinyatakan dengan Frechet-Hoeffding *upper bounds* dan Frechet-Hoeffding *lower bounds* adalah

$$\mathrm{P}(T_U(x) \leq t, T_U(y) \leq s) = \min\{F_{T(x)}(t), G_{T(y)}(s)\},$$
$$\mathrm{P}(T_L(x) \leq t, T_L(y) \leq s) = \text{maks}\{F_{T(x)}(t) + G_{T(y)}(s) - 1{,}0\}.$$

Kemudian dicari fungsi distribusi $T(xy)$ dan $T(\overline{xy})$ dengan menggunakan fungsi distribusi gabungan dari $T(x)$ dan $T(y)$ yang dinyatakan dengan Frechet-Hoeffding *upper bounds* dan Frechet-Hoeffding *lower bounds*.

Fungsi distribusi gabungan $T(x)$ dan $T(y)$ yang dinyatakan dengan Frechet-Hoeffding *upper bounds*, yaitu

$$\mathrm{P}(T_U(x) \leq t, T_U(y) \leq s) = \min\{F_{T(x)}(t), G_{T(y)}(s)\}.$$

Untuk $s = t$, didapatkan

$$\mathrm{P}(T_U(x) \leq t, T_U(y) \leq t) = \min\{F_{T(x)}(t), G_{T(y)}(t)\}. \tag{3.18}$$

Pada kasus *joint-life status*, fungsi distribusi $T(xy)$ yang dibentuk oleh Frechet-Hoeffding *upper bounds*, dalam hal ini merupakan ${}_tq_{xy}^U$, didapat melalui langkah-langkah sebagai berikut.

Dari (3.18), diketahui bahwa

$$\mathrm{P}(T_U(x) \leq t, T_U(y) \leq t) = \min\{F_{T(x)}(t), G_{T(y)}(t)\},$$

atau dapat dituliskan

$$\mathrm{P}(T_U(x) \leq t, T_U(y) \leq t) = \min\{\mathrm{P}(T(x) \leq t), \mathrm{P}(T(y) \leq t)\}.$$

Menurut ekuivalensi diperoleh

$$\mathrm{P}(T_U(x) > t, T_U(y) > t) = \min\{\mathrm{P}(T(x) > t), \mathrm{P}(T(y) > t)\}.$$

Dengan menggunakan (2.32) dan (2.41) didapatkan

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(T_U(xy) > t) &= \min\{\mathrm{P}(T(x) > t), \mathrm{P}(T(y) > t)\} \\ {}_tp_{xy}^U &= \min\{{}_tp_x, {}_tp_y\}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Untuk memperoleh ${}_tq_{xy}^U$, maka pada persamaan (3.19) kedua ruasnya dikomplemenkan, yaitu dengan cara

$$\begin{aligned} 1 - {}_tp_{xy}^U &= 1 - \min\{{}_tp_x, {}_tp_y\} \\ {}_tq_{xy}^U &= \text{maks}\{(1 - {}_tp_x), (1 - {}_tp_y)\} \\ {}_tq_{xy}^U &= \text{maks}\{{}_tq_x, {}_tq_y\} \\ {}_tq_{xy}^U &= \text{maks}\{\mathrm{P}(T(x) \leq t), \mathrm{P}(T(y) \leq t)\} \\ {}_tq_{xy}^U &= \text{maks}\{F_{T(x)}(t), G_{T(y)}(t)\} \end{aligned}$$

Pada kasus *last-survivor status*, fungsi distribusi $T(\overline{xy})$ yang dibentuk oleh Frechet-Hoeffding *upper bounds*, dalam hal ini merupakan ${}_tq_{\overline{xy}}^U$ didapat melalui langkah-langkah sebagai berikut.

Kembali lagi pada (3.18), diketahui bahwa

$$\mathrm{P}(T_U(x) \le t, T_U(y) \le t) = \min\{F_{T(x)}(t), G_{T(y)}(t)\}$$

Dengan menggunakan (2.45) didapatkan

$$\mathrm{P}(T_U(\overline{xy}) \le t) = \min\{F_{T(x)}(t), G_{T(y)}(t)\}$$
$$ {}_t q_{\overline{xy}}^{U} = \min\{F_{T(x)}(t), G_{T(y)}(t)\}$$

Pada tahap ini fungsi distribusi $T(xy)$ dan $T(\overline{xy})$ yang dibentuk dengan Frechet-Hoeffding *upper bounds* sudah ditentukan. Kemudian digunakan cara yang sama dalam mencari fungsi distribusi $T(xy)$ dan $T(\overline{xy})$ yang dibentuk dengan Frechet-Hoeffding *lower bounds*. Fungsi distribusi gabungan dari $T(x)$ dan $T(y)$ yang dibentuk dengan Frechet-Hoeffding *lower bounds* yaitu

$$\mathrm{P}[T_L(x) \le t, T_L(y) \le s] = \mathrm{maks}\{F_{T(x)}(t) + G_{T(y)}(s) - 1, 0\}.$$

Untuk $s = t$, didapat

$$\mathrm{P}[T_L(x) \le t, T_L(y) \le t] = \mathrm{maks}\left\{F_{T(x)}(t) + G_{T(y)}(t) - 1, 0\right\}. \tag{3.20}$$

Pada kasus *joint-life status*, fungsi distribusi $T(xy)$ yang dibentuk oleh Frechet-Hoeffding *lower bounds*, dalam hal ini merupakan ${}_t q_{xy}^{L}$, didapat melalui langkah-langkah sebagai berikut.

Dari (3.20), diketahui bahwa

$$\mathrm{P}(T_L(x) \le t, T_L(y) \le t) = \mathrm{maks}\left\{F_{T(x)}(t) + G_{T(y)}(t) - 1, 0\right\},$$

atau dapat ditulis

$$\mathrm{P}(T_L(x) \le t, T_L(y) \le t) = \mathrm{maks}\{\mathrm{P}(T(x) \le t) + \mathrm{P}(T(y) \le t) - 1, 0\}.$$

Menurut ekuivalensi diperoleh

$$\mathrm{P}(T_L(x) > t, T_L(y) > t) = \mathrm{maks}\{\mathrm{P}(T(x) > t) + \mathrm{P}(T(y) > t) - 1, 0\}.$$

Dengan menggunakan (2.32) dan (2.41) didapatkan

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(T_L(xy) > t) &= \text{maks}\{\mathrm{P}(T(x) > t) + \mathrm{P}(T(y) > t) - 1, 0\} \\ {}_t p_{xy}^L &= \text{maks}\{ {}_t p_x + {}_t p_y - 1, 0\} \end{aligned} \tag{3.21}$$

Untuk memperoleh ${}_t q_{xy}^L$, maka pada persamaan (3.21) kedua ruasnya dikomplemenkan, yaitu dengan cara

$$\begin{aligned} 1 - {}_t p_{xy}^L &= 1 - \text{maks}\{ {}_t p_x + {}_t p_y - 1, 0\} \\ {}_t q_{xy}^L &= \min\left\{\left(1 - ({}_t p_x + {}_t p_y - 1)\right), 1\right\} \\ {}_t q_{xy}^L &= \min\left\{\left(2 - ({}_t p_x + {}_t p_y)\right), 1\right\} \\ {}_t q_{xy}^L &= \min\left\{\left(2 - \left((1 - {}_t q_x) + (1 - {}_t q_y)\right)\right), 1\right\} \\ {}_t q_{xy}^L &= \min\left\{\left(2 - (2 - {}_t q_x - {}_t q_y)\right), 1\right\} \\ {}_t q_{xy}^L &= \min\{ {}_t q_x + {}_t q_y, 1\} \\ {}_t q_{xy}^L &= \min\{F_{T(x)}(t) + G_{T(y)}(t), 1\} \end{aligned}$$

Pada kasus *last-survivor status*, fungsi distribusi $T(\overline{xy})$ yang dibentuk oleh Frechet-Hoeffding *lower bounds*, dalam hal ini merupakan ${}_t q_{\overline{xy}}^L$ didapat melalui langkah-langkah sebagai berikut.

Dari (3.20), diketahui bahwa

$$\mathrm{P}(T_L(x) \le t, T_L(y) \le t) = \text{maks}\left\{F_{T(x)}(t) + G_{T(y)}(t) - 1, 0\right\}.$$

Dengan menggunakan (2.45) didapatkan

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(T_L(\overline{xy}) \le t) &= \text{maks}\left\{F_{T(x)}(t) + G_{T(y)}(t) - 1, 0\right\} \\ {}_t q_{\overline{xy}}^L &= \text{maks}\left\{F_{T(x)}(t) + G_{T(y)}(t) - 1, 0\right\} \end{aligned}$$

Dari perhitungan sebelumnya, dapat dikelompokkan untuk masing-masing kasus yaitu *joint-life status* dan *last-survivor status*. Pada kasus *joint-life status* didapatkan

$$
\begin{aligned}
{}_tq_{xy}^{U} &= P[T_U(xy \leq t)] = \text{maks}\{F_{T(x)}(t), G_{T(y)}(t)\} \\
{}_tq_{xy}^{L} &= P[T_L(xy \leq t)] = \min\{F_{T(x)}(t) + G_{T(y)}(t), 1\}.
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

Jika (3.22) dikembalikan ke bentuk Frechet-Hoeffding *bounds* maka

$$
\begin{aligned}
\text{maks}\{F_{T(x)}(t), G_{T(y)}(t)\} &\leq P[T(xy \leq t)] \\
&\leq \min\{F_{T(x)}(t) + G_{T(y)}(t), 1\} \\
P[T_U(xy \leq t)] \leq P[T(xy \leq t)] &\leq P[T_L(xy \leq t)].
\end{aligned}
$$

Dengan menggunakan Definisi 3.2 didapatkan

$$
T_L(xy) \leq_{st} T(xy) \leq_{st} T_U(xy). \tag{3.23}
$$

Untuk kasus *last-survivor status* digunakan cara yang sama. Fungsi distribusi $T(\overline{xy})$ yang dibentuk oleh Frechet-Hoeffding *upper* dan *lower bounds* dinyatakan sebagai

$$
\begin{aligned}
{}_tq_{\overline{xy}}^{U} &= P[T_U(\overline{xy} \leq t)] = \min\{F_{T(x)}(t), G_{T(y)}(t)\} \\
{}_tq_{\overline{xy}}^{L} &= P[T_L(\overline{xy} \leq t)] = \text{maks}\{F_{T(x)}(t) + G_{T(y)}(t) - 1{,}0\}.
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

Jika (3.24) dikembalikan ke dalam bentuk Frechet-Hoeffding *bounds* didapatkan

$$
\begin{aligned}
\text{maks}\{F_{T(x)}(t) + G_{T(y)}(t) - 1{,}0\} &\leq P[T(\overline{xy} \leq t)] \\
&\leq \min\{F_{T(x)}(t), G_{T(y)}(t)\} \\
P[T_L(\overline{xy} \leq t)] \leq P[T(\overline{xy} \leq t)] &\leq P[T_U(\overline{xy} \leq t)].
\end{aligned}
$$

Dengan menggunakan Definisi 3.2 didapatkan

$$
T_U(\overline{xy}) \leq_{st} T(\overline{xy}) \leq_{st} T_L(\overline{xy}). \tag{3.25}
$$

Pembuktian ekuivalensi yang digunakan pada Frechet-Hoeffding *bounds* disajikan dalam Lampiran 3.

Dengan menggunakan variabel acak sisa usia *multiple-life status* yang dibentuk oleh Frechet-Hoeffding *bounds* dan terorder secara stokastik, didapatkan sebuah teorema mengenai batas-batas dari premi anuitas maupun asuransi.

Teorema 3.3
Misalkan $(T_L(x), T_L(y))$ dan $(T_U(x), T_U(y))$ adalah elemen dari $R(F, G)$ yang bergantung pada Frechet-Hoeffding *bounds*. Untuk setiap $(T(x), T(y)) \in R(F, G)$ pernyataan mengenai batas bawah dan batas atas premi seperti yang ditampilkan pada Tabel 3.3 dan Tabel 3.4 dipenuhi:

a) Tabel 3.3 Batas-batas premi pada kasus *joint-life status*

Jenis premi	Batas-batas premi
Anuitas seumur hidup	$\ddot{a}_{xy}^{T_L} \leq \ddot{a}_{xy} \leq \ddot{a}_{xy}^{T_U}$
Pure endowment	${}_kE_{xy}^{T_L} \leq {}_kE_{xy} \leq {}_kE_{xy}^{T_U}$
Asuransi seumur hidup	$A_{xy}^{T_L} \geq A_{xy} \geq A_{xy}^{T_U}$

b) Tabel 3.4 Batas-batas premi pada kasus *last-survivor status*

Jenis premi	Batas-batas premi
Anuitas seumur hidup	$\ddot{a}_{\overline{xy}}^{T_U} \leq \ddot{a}_{\overline{xy}} \leq \ddot{a}_{\overline{xy}}^{T_L}$
Pure endowment	${}_kE_{\overline{xy}}^{T_U} \leq {}_kE_{\overline{xy}} \leq {}_kE_{\overline{xy}}^{T_L}$
Asuransi seumur hidup	$A_{\overline{xy}}^{T_U} \geq A_{\overline{xy}} \geq A_{\overline{xy}}^{T_L}$

Keterangan: Indek T_U pada $\ddot{a}$, E,dan A menunjukkan premi yang dibangun dari variabel sisa usia Frechet-Hoeffding *upper bound*. Indek T_L pada $\ddot{a}$, E,dan A menunjukkan premi yang dibangun dari variabel sisa usia Frechet-Hoeffding *lower bound*.

Bukti:
Langkah-langkah pembuktian pada Teorema 3.3 sama dengan langkah-langkah pembuktian Teorema 3.2, hanya saja pada Teorema 3.3 digunakan tiga ruas pertidaksamaan.
(a) Dengan menggunakan pertidaksamaan (3.23) dan Definsi 3.2 didapatkan

$$T_L(xy) \leq_{st} T(xy) \leq_{st} T_U(xy)$$
$$P[T_L(xy) > t] \leq P[T(xy) > t] \leq P[T_U(xy) > t] \tag{3.26}$$

Untuk batas bawah dan batas atas dari premi anuitas seumur hidup *joint-life status* didapatkan dengan langkah sebagai berikut.

Pada pertidaksamaan (3.26) digunakan suatu nilai yang diskrit yaitu k. Pada pertidaksamaan (3.26) ketiga ruasnya dikalikan dengan v^k, kemudian masing-masing dijumlahkan dengan $k = 0, 1, 2, \ldots$ didapatkan

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^k \, P[T_L(xy) > k] \leq \sum_{k=0}^{\infty} v^k \, P[T(xy) > k] \leq \sum_{k=0}^{\infty} v^k \, P[T_U(xy) > k]$$
$$\ddot{a}_{xy}^{T_L} \leq \ddot{a}_{xy} \leq \ddot{a}_{xy}^{T_U}. \tag{3.27}$$

Batas bawah dan batas atas premi *pure endowment joint-life status* didapatkan dengan langkah-langkah di bawah ini.

$$\ddot{a}_{xy}^{T_L} \leq \ddot{a}_{xy} \leq \ddot{a}_{xy}^{T_U}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} {}_kE_{xy}^{T_L} \leq \sum_{k=0}^{\infty} {}_kE_{xy} \leq \sum_{k=0}^{\infty} {}_kE_{xy}^{T_U}$$
$${}_kE_{xy}^{T_L} \leq {}_kE_{xy} \leq {}_kE_{xy}^{T_U}. \tag{3.28}$$

Demikian juga untuk premi asuransi seumur hidup *joint-life status*, yaitu dengan cara sebagai berikut.

$$\ddot{a}_{xy}^{T_L} \leq \ddot{a}_{xy} \leq \ddot{a}_{xy}^{T_U}$$
$$1 - d\ddot{a}_{xy}^{T_L} \geq 1 - d\ddot{a}_{xy} \geq 1 - d\ddot{a}_{xy}^{T_U}$$
$$A_{xy}^{T_L} \geq A_{xy} \geq A_{xy}^{T_U} \tag{3.29}$$

Pada kasus *joint-life status*, dapat disimpulkan bahwa batas bawah premi tunggal dari anuitas seumur hidup dan *pure endowment* adalah premi tunggal yang dibentuk oleh Frechet-Hoeffding *lower bounds*, sedangkan batas atasnya adalah premi tunggal yang dibentuk oleh Frechet-Hoeffding *upper bounds*. Untuk asuransi seumur hidup berlaku sebaliknya.

(b) Dengan menggunakan pertidaksamaan (3.25) dan Definsi 3.2 didapatkan

$$T_U(\overline{xy}) \leq_{st} T(\overline{xy}) \leq_{st} T_L(\overline{xy})$$
$$P[T_U(\overline{xy}) > t] \leq P[T(\overline{xy}) > t] \leq P[T_L(\overline{xy}) > t] \qquad (3.30)$$
Dengan cara yang sama dengan kasus *joint-life status*, pada anuitas seumur hidup *last-survivor status*, dari (3.30) didapatkan

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^k\, P[T_U(\overline{xy}) > k] \leq \sum_{k=0}^{\infty} v^k\, P[T(\overline{xy}) > k] \leq \sum_{k=0}^{\infty} v^k\, P[T_L(\overline{xy}) > k]$$
$$\ddot{a}_{\overline{xy}}^{T_U} \leq \ddot{a}_{\overline{xy}} \leq \ddot{a}_{\overline{xy}}^{T_L} \qquad (3.31)$$

Begitu juga untuk premi *pure endowment last-survivor status*, batas bawah dan batas atasnya yaitu

$$\ddot{a}_{\overline{xy}}^{T_U} \leq \ddot{a}_{\overline{xy}} \leq \ddot{a}_{\overline{xy}}^{T_L}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} {}_kE_{\overline{xy}}^{T_U} \leq \sum_{k=0}^{\infty} {}_kE_{\overline{xy}} \leq \sum_{k=0}^{\infty} {}_kE_{\overline{xy}}^{T_L}$$
$${}_kE_{\overline{xy}}^{T_U} \leq {}_kE_{\overline{xy}} \leq {}_kE_{\overline{xy}}^{T_L} \qquad (3.32)$$

Kemudian yang terakhir yaitu batas bawah dan batas atas premi asuransi seumur hidup *last-survivor status* adalah sebagai berikut.

$$\ddot{a}_{\overline{xy}}^{T_U} \leq \ddot{a}_{\overline{xy}} \leq \ddot{a}_{\overline{xy}}^{T_L}$$
$$1 - d\ddot{a}_{\overline{xy}}^{T_U} \geq 1 - d\ddot{a}_{\overline{xy}} \geq 1 - d\ddot{a}_{\overline{xy}}^{T_L}$$
$$A_{\overline{xy}}^{T_U} \geq A_{\overline{xy}} \geq A_{\overline{xy}}^{T_L} \qquad (3.33)$$

Pada kasus *last-survivor status*, hasil yang didapat berbanding terbalik dengan kasus *joint-life status*. Dari perhitungan di atas, dapat disimpulkan bahwa batas bawah premi tunggal dari anuitas seumur hidup dan *pure endowment* adalah premi tunggal yang dibentuk oleh Frechet-Hoeffding *upper bounds*, sedangkan batas atasnya adalah premi tunggal yang dibentuk oleh Frechet-Hoeffding *lower bounds*. Untuk asuransi seumur hidup berlaku sebaliknya.

3.3 Dependensi Pasangan Suami Istri dan Ilustrasi Numeriknya

Pembahasan mengenai masalah dependensi pada fungsi aktuaria *multiple-life status* ini menggunakan contoh kasus pasangan suami istri. Pembahasan mengenai dependensi ini tetap memakai batas bawah dan batas atas premi anuitas maupun asuransi yang dibentuk oleh Frechet-Hoeffding *bounds*. Dari pembahasan sebelumnya, dapat diketahui batas bawah dan batas atasnya, namun tidak diketahui secara pasti besarnya $F_{T(x)}(t)$ dan $G_{T(y)}(t)$. Oleh karena itu, digunakan beberapa asumsi agar dapat dibuat ilustrasi numeriknya, yaitu

$$F_{T(x)}(t) \geq G_{T(y)}(t), \quad \text{untuk semua } t \geq 0$$

dimana $F_{T(x)}(t)$ merupakan fungsi distribusi sisa usia suami dan $G_{T(y)}(t)$ merupakan fungsi distribusi sisa usia istri. Dapat diambil asumsi demikian karena usia suami lebih tua atau sama dengan usia istri. Dalam hal ini, (x) dan (y) merupakan pasangan suami istri dimana (x) suami berusia x tahun dan (y) istri berusia y tahun.

Kembali kepada Frechet-Hoeffding *upper bounds*. Dalam pembahasan sebelumnya, pada kasus *joint life status* didapatkan

$$\mathrm{P}(T_U(xy) \leq t) = \text{maks}\{F_{T(x)}(t), G_{T(y)}(t)\}.$$

Karena $F_{T(x)}(t) \geq G_{T(y)}(t)$, maka

$$\mathrm{P}(T_U(xy) \leq t) = F_{T(x)}(t).$$

Sama halnya dengan kasus *last survivor status*,

$$\mathrm{P}(T_U(\overline{xy}) \leq t) = \min\{F_{T(x)}(t), G_{T(y)}(t)\},$$

sehingga didapatkan

$$\mathrm{P}(T_U(\overline{xy}) \leq t) = G_{T(y)}(t).$$

Jadi, untuk batas premi anuitas maupun asuransi yang dibentuk oleh Frechet-Hoeffding *upper bounds*, fungsi distribusi dari variabel acak sisa usia *multiple-life status* pada kasus pasangan suami istri dapat digantikan oleh fungsi distribusi sisa usia suami, dalam hal ini $F_{T(x)}(t)$, atau fungsi distribusi sisa usia istri, dalam hal ini $G_{T(y)}(t)$.

Untuk batas-batas premi anuitas maupun asuransi yang dibentuk oleh Frechet-Hoeffding *lower bounds*, digunakan asumsi variabel acak sisa usia yang independen. Hal ini dilakukan karena sulit menentukan besanya fungsi distribusi variabel acak sisa usia *multiple-life status* jika hanya diketahui $F_{T(x)}(t) \geq G_{T(y)}(t)$. Penggunaan variabel acak sisa usia yang independen ini dapat dilakukan karena batas-batas premi anuitas maupun asuransi yang dibentuk oleh Frechet-Hoeffding *lower bounds* memiliki dependensi yang lebih kecil. Untuk mendukung pernyataan tersebut, diberikan definisi mengenai *Positively Quadrant Dependent* dan sebuah teorema.

Definisi 3.3
Dua variabel acak sisa usia $T(x)$ dan $T(y)$ dikatakan *Positively Quadrant Dependent*, dinotasikan $PQD(T(x), T(y))$ jika

$$\mathrm{P}[T(x) \leq t, T(y) \leq s] \geq \mathrm{P}[T(x) \leq t]\mathrm{P}[T(y) \leq s]$$

untuk semua $t, s \geq 0$.

Dari Definisi 3.3, didapatkan perbandingan besar premi antara variabel acak sisa usia yang dependen dan variabel acak sisa usia yang independen yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 3.4
Diasumsikan bahwa variabel acak dari distribusi dua variabel sisa usia $(T(x), T(y))$ dan $(T^{ind}(x), T^{ind}(y))$ mempunyai fungsi distribusi marjinal yang sama. Jika $PQD(T(x), T(y))$, dan $T^{ind}(x)$ dan $T^{ind}(y)$ sisa usia yang independen, maka pertidaksamaan di bawah ini dipenuhi:

a) *Joint-life status*

$$\ddot{a}_{xy}^{ind} \leq \ddot{a}_{xy}$$
$${}_kE_{xy}^{ind} \leq {}_kE_{xy}$$
$$A_{xy}^{ind} \geq A_{xy}$$

b) Last-survivor status

$$\ddot{a}_{\overline{xy}} \leq \ddot{a}_{\overline{xy}}^{ind}$$
$${}_{k}E_{\overline{xy}} \leq {}_{k}E_{\overline{xy}}^{ind}$$
$$A_{\overline{xy}} \geq A_{\overline{xy}}^{ind}$$

Keterangan: Indek ind pada $\ddot{a}$, E,dan A menunjukkan premi yang dibangun dari T^{ind}. T^{ind} merupakan variabel sisa usia yang independen.

Bukti:
Kembali pada Definisi 3.3, dapat diketahui bahwa

$$\mathrm{P}[T(x) \leq t, T(y) \leq s] \geq \mathrm{P}[T(x) \leq t]\mathrm{P}[T(y) \leq s].$$

Karena $(T(x), T(y))$ dan $(T^{ind}(x), T^{ind}(y))$ mempunyai fungsi distribusi marjinal yang sama, maka

$$\mathrm{P}[T(x) \leq t, T(y) \leq s] \geq \mathrm{P}\left[T^{ind}(x) \leq t\right]\mathrm{P}\left[T^{ind}(y) \leq s\right].$$

Untuk $s = t$,

$$\mathrm{P}[T(x) \leq t, T(y) \leq t] \geq \mathrm{P}\left[T^{ind}(x) \leq t\right]\mathrm{P}\left[T^{ind}(y) \leq t\right].$$

Karena $T^{ind}(x)$ dan $T^{ind}(y)$ independen, maka didapatkan pertidaksamaan di bawah ini

$$\mathrm{P}[T(x) \leq t, T(y) \leq t] \geq \mathrm{P}\left[T^{ind}(x) \leq t, T^{ind}(y) \leq t\right]$$
$$\mathrm{P}\left[T^{ind}(x) \leq t, T^{ind}(y) \leq t\right] \leq \mathrm{P}[T(x) \leq t, T(y) \leq t].$$

Dengan menggunakan Teorema 3.1, didapatkan hasil mengenai orde korelasi yang dapat dituliskan dengan

$$(T^{ind}(x), T^{ind}(y)) \leq_c (T(x), T(y))$$

Langkah terakhir yaitu menggunakan Teorema 3.2, didapatkan hasil perbandingan premi yang dependen dan independen berikut ini.

a) *Joint-life status*

$$\ddot{a}_{xy}^{ind} \leq \ddot{a}_{xy}$$
$${}_kE_{xy}^{ind} \leq {}_kE_{xy}$$
$$A_{xy}^{ind} \geq A_{xy}$$

b) *Last-survivor status*

$$\ddot{a}_{\overline{xy}} \leq \ddot{a}_{\overline{xy}}^{ind}$$
$${}_kE_{\overline{xy}} \leq {}_kE_{\overline{xy}}^{ind}$$
$$A_{\overline{xy}} \geq A_{\overline{xy}}^{ind}$$

Jika dilihat pada Teorema 3.4, dapat dikatakan bahwa untuk batas premi anuitas dan asuransi yang dibentuk oleh Frechet-Hoeffding *lower bounds* dapat digantikan oleh perhitungan premi anuitas dan asuransi dimana variabel acak sisa usianya independen. Hal ini dikarenakan perbandingan premi anuitas dan asuransi yang dibentuk oleh Frechet-Hoeffding *bounds* ekuivalen dengan perbandingan premi anuitas dan asuransi dengan variabel acak sisa usia yang independen.

Dengan demikian, ilustrasi numerik yang dibuat menggunakan pernyataan sebagai berikut. Untuk batas premi anuitas dan asuransi yang dibentuk oleh Frechet-Hoeffding *upper bounds* menggunakan asumsi $F_{T(x)}(t) \geq G_{T(y)}(t)$, dengan $F_{T(x)}(t)$ fungsi distribusi sisa usia suami dan $G_{T(y)}(t)$ fungsi distribusi sisa usia istri. Untuk batas premi anuitas dan asuransi yang dibentuk oleh Frechet-Hoeffding *lower bounds* menggunakan variabel sisa usia independen.

Pada kasus *joint-life status*, sesuai dengan (3.27), (3.28), (3.29), pernyataaan mengenai batas-batas premi anuitas seumur hidup, *pure endowment*, dan asuransi seumur hidup masing-masing sebagai berikut.

a) Anuitas seumur hidup *joint-life status*

$$\ddot{a}_{xy}^{T_L} \leq \ddot{a}_{xy} \leq \ddot{a}_{xy}^{T_U}$$
$$\ddot{a}_{xy}^{ind} \leq \ddot{a}_{xy} \leq \ddot{a}_x$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} v^k \; {}_kp_{xy} \leq \ddot{a}_{xy} \leq \sum_{k=0}^{\infty} v^k \; {}_kp_x \qquad (3.34)$$

Pada kasus independen pada *joint-life status*, dari (2.43) diketahui bahwa ${}_kp_{xy} = {}_kp_x\ {}_kp_y$. Jadi batas-batas premi pada (3.34) dapat dituliskan dengan

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^k\ {}_kp_x\ {}_kp_y \le \ddot{a}_{xy} \le \sum_{k=0}^{\infty} v^k\ {}_kp_x. \qquad (3.35)$$

b) *Pure endowment joint-life status*

$$\begin{gathered} {}_kE_{xy}^{T_L} \le {}_kE_{xy} \le {}_kE_{xy}^{T_U} \\ {}_kE_{xy}^{ind} \le {}_kE_{xy} \le {}_kE_x \\ v^k\ {}_kp_{xy} \le {}_kE_{xy} \le v^k\ {}_kp_x \\ v^k\ {}_kp_x\ {}_kp_y \le {}_kE_{xy} \le v^k\ {}_kp_x. \end{gathered} \qquad (3.36)$$

c) Asuransi seumur hidup *joint-life status*

$$\begin{gathered} A_{xy}^{T_L} \ge A_{xy} \ge A_{xy}^{T_U} \\ A_{xy}^{ind} \ge A_{xy} \ge A_x \\ \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\ {}_kp_{xy}.\, q_{x+k:y+k} \ge A_{xy} \ge \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\ {}_kp_x.\, q_{x+k}. \end{gathered} \qquad (3.37)$$

Pada kasus independen pada *joint-life status*, dari (2.43) diketahui bahwa ${}_kp_{xy} = {}_kp_x\ {}_kp_y$ dan dari (2.42) diketahui bahwa ${}_kq_{xy} = {}_kq_x + {}_kq_y - {}_kq_x\ {}_kq_y$. Jadi dari (3.37), didapatkan batas-batas premi asuransi seumur hidup *joint-life status* sebagai berikut.

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \left({}_kp_x\ {}_kp_y\right)\left(q_{x+k} + q_{y+k} - q_{x+k}q_{y+k}\right) \ge A_{xy} \ge \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\ {}_kp_x.\, q_{x+k}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \left({}_k p_y \, {}_k p_x . q_{x+k} + {}_k p_x \, {}_k p_y . q_{y+k} - {}_k p_x \, {}_k p_y . q_{x+k} . q_{y+k} \right)$$

$$\geq A_{xy} \geq \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \, {}_k p_x . q_{x+k} \tag{3.38}$$

Pada kasus *last-survivor status*, batas-batas preminya menggunakan (3.31), (3.32), (3.33). Dengan demikian, pernyataaan mengenai batas-batas premi anuitas seumur hidup, *pure endowment*, dan asuransi seumur hidup masing-masing dapat dituliskan sebagai berikut.

a) Anuitas seumur hidup *last-survivor status*

$$\ddot{a}_{\overline{xy}}^{T_U} \leq \ddot{a}_{\overline{xy}} \leq \ddot{a}_{\overline{xy}}^{T_L}$$
$$\ddot{a}_y \leq \ddot{a}_{\overline{xy}} \leq \ddot{a}_{\overline{xy}}^{ind}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} v^k \, {}_k p_y \leq \ddot{a}_{\overline{xy}} \leq \sum_{k=0}^{\infty} v^k \, {}_k p_{\overline{xy}} \tag{3.39}$$

Untuk kasus independen pada *last survivor status*, dari (2.48) diketahui bahwa ${}_k p_{\overline{xy}} = {}_k p_x + {}_k p_y - {}_k p_x \, {}_k p_y$. Dari (3.39), batas-batas premi anuitas seumur hidup *last-survivor status* dapat dituliskan dengan

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^k \, {}_k p_y \leq \ddot{a}_{\overline{xy}} \leq \sum_{k=0}^{\infty} v^k \left({}_k p_x + {}_k p_y - {}_k p_x \, {}_k p_y \right) \tag{3.40}$$

b) *Pure endowment last-survivor status*

$${}_k E_{\overline{xy}}^{T_U} \leq {}_k E_{\overline{xy}} \leq {}_k E_{\overline{xy}}^{T_L}$$
$${}_k E_y \leq {}_k E_{\overline{xy}} \leq {}_k E_{\overline{xy}}^{ind}$$
$$v^k \, {}_k p_y \leq {}_k E_{\overline{xy}} \leq v^k \, {}_k p_{\overline{xy}}$$
$$v^k \, {}_k p_y \leq {}_k E_{\overline{xy}} \leq v^k \left({}_k p_x + {}_k p_y - {}_k p_x \, {}_k p_y \right) \tag{3.41}$$

c) Asuransi seumur hidup *last-survivor status*

$$A_{\overline{xy}}^{T_U} \geq A_{\overline{xy}} \geq A_{\overline{xy}}^{T_L}$$

$$A_y \geq A_{\overline{xy}} \geq A_{\overline{xy}}^{ind}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \ {}_kp_y . q_{y+k} \geq A_{\overline{xy}} \geq$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \left({}_kp_x . q_{x+k} + {}_kp_y . q_{y+k} - {}_kp_{xy} . q_{x+k:y+k} \right)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \ {}_kp_y . q_{y+k} \geq A_{\overline{xy}} \geq$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \left({}_kp_x . q_{x+k} + {}_kp_y . q_{k+t} - ({}_kp_x \ {}_kp_y)(q_{x+k} + q_{y+k} - q_{x+k} . q_{y+k}) \right)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \ {}_kp_y . q_{y+k} \geq A_{\overline{xy}} \geq$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \Big({}_kp_x . q_{x+k} + {}_kp_y . q_{y+k} - \left({}_kp_y \ {}_kp_x . q_{x+k} + {}_kp_x \ {}_kp_y . q_{y+k} - {}_kp_x \ {}_kp_y . q_{x+k} q_{y+k} \right) \Big)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \ {}_kp_y . q_{y+k} \geq A_{\overline{xy}} \geq$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \Big(\left(1 - {}_kp_y\right) {}_kp_x . q_{x+k} + \left(1 - {}_kp_x\right) {}_kp_y . q_{y+k} + {}_kp_x \ {}_kp_y . q_{x+k} . q_{y+k} \Big)$$

(3.42)

Ilustrasi numerik dari batas bawah dan batas atas anuitas dan asuransi dibuat berdasarkan tabel mortalitas Belgia. Tabel mortalitas Belgia dibagi menjadi dua, yaitu MR (*male*) dan FR (*female*). Tabel tersebut dibangun menggunakan rumus Makeham, yang ditunjukkan pada persamaan (3.43) berikut

$$l_x = ks^x g^{c^x}, \tag{3.43}$$

dimana l_x adalah jumlah individu yang diperkirakan hidup mencapai usia x. Tabel tersebut dibentuk dalam fungsi l_x dengan menggunakan (3.43) . Nilai parameter-parameternya ditampilkan pada Tabel 3.5 sebagai berikut.

Tabel 3.5 Nilai parameter Makeham

Parameter	**MR**	**FR**
k	1000266,63	1000048,56
s	0,999441703848	0,999669730966
g	0,999733441115	0,999951440172
c	1,101077536030	1,116792453830

Tabel mortalitas Belgia disajikan pada Lampiran 4.

Dengan menggunakan l_x, didapatkan nilai ${}_kp_x$ dan ${}_kq_x$ dengan menggunakan rumus sebagai berikut.

$$ {}_kp_x = \frac{l_{x+k}}{l_x}, \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned} {}_kq_x &= 1 - {}_kp_x \\ &= 1 - \frac{l_{x+k}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+k}}{l_x}. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Ilustrasi numerik batas bawah dan batas atas anuitas seumur hidup digunakan (3.35) dan (3.40). Untuk *pure endowment* digunakan (3.36) dan (3.41), sedangkan untuk asuransi seumur hidup digunakan (3.38) dan (3.42). Nilai ${}_tp_x$ dan ${}_tq_x$ dihitung dengan menggunakan (3.44) dan (3.45), dengan asumsi tingkat bunga $i = 4{,}75\%$. *Listing* program untuk menghitung batas-batas premi ditampilkan pada Lampiran 5.

Pertama-tama dibuat ilustrasi numerik pada anuitas seumur hidup yang bertujuan untuk mengetahui dependensi pasangan suami istri dengan semakin bertambahnya usia dari suami dan istri tersebut. Ilustrasi numerik ini menggunakan kondisi dimana usia suami sama dengan usia istri. Ilustrasi numerik ini diberikan pada Tabel 3.6.

Tabel 3.6 Batas premi anuitas seumur hidup dengan $x = y$

x	$\ddot{a}_{xx}$		$\ddot{a}_{\overline{xx}}$		Selisih batas
	Batas bawah	**Batas atas**	**Batas bawah**	**Batas atas**	
20	19,7349	20,1667	20,6574	21,0891	0,4318
30	18,6667	19,2597	19,9384	20,5313	0,5929
40	17,0871	17,9114	18,8316	19,6559	0,8243
50	14,8691	15,9929	17,1768	18,3005	1,1238
60	11,9987	13,4408	14,8254	16,2675	1,4421
70	8,7147	10,3706	11,7577	13,4136	1,6559
75	7,0797	8,7516	10,0300	11,7018	1,6719
76	6,7640	8,4296	9,6770	11,3427	1,6656
77	6,4536	8,1096	9,3233	10,9793	1,6560
80	5,5606	7,1679	8,2646	9,8719	1,6073

Dari Tabel 3.6, dapat dilihat bahwa selisih antara batas bawah dan batas atas pada anuitas seumur hidup semakin meningkat seiring bertambahnya usia dari suami dan istri. Namun ketika suami dan istri mencapai usia 76, selisih batas bawah dan batas atasnya mulai menurun. Dengan demikian, dapat dikatakan suami dan istri akan semakin besar dependensinya jika suami dan istri tersebut semakin tua hingga mencapai usia 75, namun dependensinya semakin mengecil ketika suami dan istri melebihi usia 75.

Pada Tabel 3.6 ilustrasi numerik pada anuitas seumur hidup yang dibuat menggunakan asumsi usia suami sama dengan usia istri. Selanjutnya pada Tabel 3.7 dibuat ilustrasi numerik pada anuitas seumur hidup namun dengan kondisi yang lain yaitu usia suami tidak sama dengan usia istri. Ilustrasi numerik ini juga bertujuan untuk mengetahui dependensi dari pasangan suami istri dengan semakin bertambahnya usia dari suami dan istri tersebut. Sebagai salah satu contoh, pada ilustrasi numerik ini digunakan asumsi bahwa usia suami dan istri berbeda 5 tahun, dengan usia suami lebih tua dibandingkan usia usia istri. Ilustrasi numeriknya ditampilkan pada Tabel 3.7.

Tabel 3.7 Batas premi anuitas seumur hidup dengan $x - y = 5$

x	y	$\ddot{a}_{xy}$ Batas bawah	$\ddot{a}_{xy}$ Batas atas	$\ddot{a}_{\overline{xy}}$ Batas bawah	$\ddot{a}_{\overline{xy}}$ Batas atas	Selisih batas
25	20	19,4098	19,7599	20,6574	21,0074	0,3501
35	30	18,1844	18,6492	19,9384	20,4033	0,4649
45	40	16,4045	17,0301	18,8316	19,4571	0,6255
55	50	13,9724	14,7945	17,1768	17,9989	0,8222
65	60	10,9462	11,9530	14,8254	15,8321	1,0068
75	70	7,6656	8,7516	11,7577	12,8437	1,0860
76	71	7,3454	8,4296	11,4191	12,5034	1.0842
77	72	7,0292	8,1096	11,0765	12,1569	1,0804
85	80	4,7207	5,6952	8,2646	9,2391	0,9745

Seperti halnya Tabel 3.6, dapat dilihat bahwa selisih antara batas bawah dan batas atas pada anuitas seumur hidup semakin meningkat seiring bertambahnya usia dari suami dan istri. Namun pada Tabel 3.7, ketika suami mencapai usia 76 dan istri mencapai usia 71, selisih batas bawah dan batas atasnya mulai menurun. Dengan demikian, dapat dikatakan suami dan istri akan semakin besar dependensinya sampai suami mencapai usia 75 dan istri mencapai usia 70, namun dependensinya semakin mengecil ketika suami dan istri ini masing-masing melebihi usia 75 dan 70.

Dari Tabel 3.6 dan 3.7, dapat disimpulkan sebagai berikut. Semakin tua usia suami dan istri, maka semakin besar dependensi dari pasangan suami istri. Namun ketika suami dan istri tersebut mencapai usia tertentu, dependensi dari keduanya mulai mengalami penurunan.

Kemudian dibuat suatu ilustrasi numerik pada anuitas seumur hidup dengan usia istri 20 tahun dan usia suami yang bervariasi dari 20 hingga 60 tahun. Ilustrasi numerik ini digunakan untuk mengetahui dependensi pasangan suami istri dimana selisih usia antara suami dan istri tersebut berbeda-beda. Ilustasi numeriknya ditampilkan pada Tabel 3.8.

Tabel 3.8 Batas premi anuitas seumur hidup dengan $y = 20$ dan x yang bervariasi dari 20 hingga 60

x	y	$\ddot{a}_{xy}$		$\ddot{a}_{\overline{xy}}$		Selisih batas
		Batas bawah	Batas atas	Batas bawah	Batas atas	
20	20	19,7349	20,1667	20,6574	21,0891	0,4318
30	20	18,9791	19,2597	20,6574	20,9380	0,2806
40	20	17,7345	17,9114	20,6574	20,8343	0,1769
50	20	15,8841	15,9929	20,6574	20,7662	0,1088
60	20	13,3775	13,4408	20,6574	20,7207	0,0633

Selisih antara batas bawah dan batas atas pada premi anuitas seumur hidup yang disajikan dalam Tabel 3.8 mengalami penurunan, seiring dengan bertambahnya usia suami. Jadi dapat disimpulkan bahwa semakin besar selisih usia antara suami dan istri, maka dependensi dari suami dan istri tersebut semakin menurun.

Untuk ilustrasi numerik pada *pure endowment* ini dipertimbangkan juga lamanya kontrak *pure endowment* tersebut yaitu n. Ilustrasi numerik pada *pure endowment* menggunakan beberapa kondisi. Kondisi yang pertama yaitu untuk nilai n yang berbeda-beda dan usia suami dan istri sudah ditentukan sebelumnya. Ilustrasi numerik ini menggunakan usia suami 30 tahun dan usia istri 20 tahun. Ilustrasi numeriknya ditampilkan pada Tabel 3.9.

Tabel 3.9 Batas premi *pure endowment* dengan $x = 30$ dan $y = 20$

n	${}_nE_{30\,20}$		${}_nE_{\overline{30\,20}}$		Selisih batas
	Batas bawah	Batas atas	Batas bawah	Batas atas	
10	0,6178	0,6204	0,6261	0,6287	0,0026
20	0,3762	0,3801	0,3913	0,3951	0,0039
30	0,2205	0,2253	0,2432	0,2486	0,0048
40	0,1166	0,1225	0,1487	0,1546	0,0059
50	0,0468	0,0532	0,0865	0,0929	0,0063
51	0,0416	0,0478	0,0815	0,0878	0,0062
52	0,0366	0,0427	0,0767	0,0828	0,0061
60	0,0090	0,0128	0,0434	0,0472	0,0038

Dari Tabel 3.9 diketahui bahwa selisih batas bawah dan batas atas dari *pure endowment* meningkat semakin bertambahnya nilai n. Namun ketika $n = 51$, selisih batasnya mulai mengalami penurunan. Jadi dapat dikatakan bahwa dependensi dari pasangan suami istri ini meningkat ketika perkiraan hidupnya mencapai 50 tahun mendatang. Namun pada perkiraan hidupnya melebihi 50 tahun, dependensi suami dan istri akan semakin mengecil. Hal ini dibuktikan ketika besar selisih batas mulai mengalami penurunan pada $n = 51$.

Ilustrasi numerik pada *pure endowment* berikutnya menggunakan nilai n yang tetap namun dengan usia suami dan istri yang semakin tua. Pada ilustrasi numerik ini digunakan $n = 10$ dan usia suami sama dengan usia istri. Ilustrasi numeriknya ditampilkan pada Tabel 3.10.

Tabel 3.10 Batas premi *pure endowment* dengan $n = 10$ dan $x = y$

$\boldsymbol{x}$	$_{10}\boldsymbol{E}_{xy}$		$_{10}\boldsymbol{E}_{\overline{x\,y}}$		**Selisih batas**
	Batas bawah	**Batas atas**	**Batas bawah**	**Batas atas**	
20	0,6208	0,6234	0,6261	0,6287	0,0026
30	0,6176	0,6204	0,6250	0,6287	0,0037
40	0,6057	0,6126	0,6216	0,6285	0,0070
50	0,5765	0,5928	0,6115	0,6277	0,0163
60	0,5034	0,5439	0,5819	0,6224	0,0405
70	0,3459	0,4340	0,5011	0,5892	0,0881
80	0,1220	0,2403	0,3192	0,4375	0,1183
81	0,1024	0,2181	0,2950	0,4108	0,1158
82	0,0843	0,1961	0,2702	0,3820	0,1118
85	0,0411	0,1330	0,1941	0,2861	0,0919
90	0,0066	0,0511	0,0818	0,1263	0,0444

Dari Tabel 3.10 diketahui bahwa selisih batas bawah dan batas atas dari *pure endowment* meningkat semakin bertambahnya usia suami dan istri. Namun ketika usia suami dan istri mencapai 81 tahun, selisih batasnya mulai mengalami penurunan. Jadi dapat dikatakan bahwa dependensi pasangan suami istri ini semakin besar seiring bertambahnya usia suami dan istri tersebut dan akan mulai mengalami penurunan ketika suami dan istri tersebut mencapai usia 81 tahun.

Kesimpulan yang dapat diambil dari Tabel 3.9 dan 3.10 sama dengan Tabel 3.6 dan 3.7. Jadi semakin tua usia dari suami dan istri, maka semakin besar dependensinya. Namun, ketika suami dan istri tersebut mencapai usia tertentu, dependensinya mulai mengalami penurunan.

Ilustrasi numerik pada *pure endowment* yang terakhir juga menggunakan nilai n yang tetap. Berbeda dengan Tabel 3.10, pada ilustrasi numerik ini digunakan selisih usia suami dan istri yang semakin besar. Ilustrasi numerik ini menggunakan usia istri 20 tahun dan usia suami yang bervariasi dari 20 hingga 60. Ilustrasi numerik ini ditampilkan pada Tabel 3.11.

Tabel 3.11 Batas premi *pure endowment* dengan $n = 10$, $y = 20$, dan x yang bervariasi dari 20 hingga 60

x	y	${}_{10}E_{xy}$		${}_{10}E_{\overline{x\,y}}$		Selisih batas
		Batas bawah	**Batas atas**	**Batas bawah**	**Batas atas**	
20	20	0,6208	0,6234	0,6261	0,6287	0,0026
30	20	0,6178	0,6204	0,6261	0,6287	0,0026
40	20	0,6101	0,6126	0,6261	0,6287	0,0026
50	20	0,5903	0,5928	0,6261	0,6286	0,0025
60	20	0,5416	0,5439	0,6261	0,6284	0,0023

Dari Tabel 3.11, dapat diketahui bahwa selisih batas premi *pure endowment* semakin mengecil seiring dengan bertambahnya usia suami. Dengan demikian kesimpulan yang dapat diambil pada Tabel 3.11 sama dengan kesimpulan pada Tabel 3.8. Jadi semakin besar selisih usia antara suami dan istri, maka dependensi dari suami dan istri tersebut semakin menurun

Ilustasi numerik pada asuransi seumur hidup dibuat dengan tujuan yang sama seperti pada anuitas seumur hidup yaitu untuk mengetahui dependensi pasangan suami istri dengan semakin bertambahnya usia dari suami dan istri tersebut. Ilustrasi numerik ini menggunakan kondisi usia suami sama dengan usia istri. Ilustrasi numeriknya ditampilkan pada Tabel 3.12.

Tabel 3.12 Batas premi asuransi seumur hidup dengan $x = y$

x	A_{xx} Batas bawah	A_{xx} Batas atas	$A_{\overline{xx}}$ Batas bawah	$A_{\overline{xx}}$ Batas atas	Selisih batas
20	0,0855	0,1051	0,0437	0,0633	0,0196
30	0,1267	0,1535	0,0690	0,0959	0,0269
40	0,1878	0,2252	0,1087	0,1461	0,0374
50	0,2748	0,3257	0,1701	0,2211	0,0510
60	0,3905	0,4559	0,2623	0,3277	0,0654
70	0,5297	0,6048	0,3917	0,4668	0,0751
75	0,6031	0,6790	0,4694	0,5452	0,0758
76	0,6178	0,6933	0,4857	0,5612	0,0755
80	0,6750	0,7478	0,5524	0,6252	0,0729

Dari Tabel 3.12, dapat dilihat bahwa selisih batasnya juga meningkat seiring bertambahnya usia suami dan istri hingga usia suami dan istri tersebut mencapai usia 75 tahun. Namun ketika suami dan istri tersebut mencapai usia 76 tahun selisih batasnya mulai menurun. Jadi dapat dikatakan bahwa interpretasi Tabel 3.12 sama dengan Tabel 3.6. Jadi dapat disimpulkan bahwa semakin tua usia dari suami dan istri, maka semakin besar dependensinya. Namun, ketika suami dan istri tersebut mencapai usia tertentu, dependensinya mulai mengalami penurunan.

Ilustrasi numerik yang terakhir yaitu pada asuransi seumur hidup dengan usia usia istri 20 tahun dan usia suami dari 20 hingga 60 tahun. Ilustrasi numeriknya ditampilkan pada Tabel 3.13.

Tabel 3.13 Batas premi asuransi seumur hidup dengan $y = 20$ dan x yang bervariasi dari 20 hingga 60

x	y	A_{xy} Batas bawah	A_{xy} Batas atas	$A_{\overline{xy}}$ Batas bawah	$A_{\overline{xy}}$ Batas atas	Selisih batas
20	20	0,0855	0,1051	0,0437	0,0633	0,0196
30	20	0,1267	0,1394	0,0505	0,0633	0,0127
40	20	0,1878	0,1958	0,0552	0,0633	0,0080
50	20	0,2748	0,2797	0,0583	0,0633	0,0049
60	20	0,3905	0,3934	0,0604	0,0633	0,0029

Tabel 3.13 menggunakan batas bawah dan batas atas dari asuransi seumur hidup. Dapat dilihat bahwa pada Tabel 3.13 selisih batasnya semakin mengecil semakin bertambahnya usia suami. Pada Tabel 3.13 dapat disimpulkan bahwa semakin besar selisih usia antara suami dan istri, maka dependensi dari keduanya semakin menurun.

Interpretasi dari beberapa ilustrasi numerik tersebut dapat dihubungkan dengan faktor-faktor yang mempengaruhi dependensi pasangan suami istri di dalam dunia nyata. Semakin tua usia antara suami dan istri, maka dependensi antara keduanya semakin meningkat, namun mengalami penurunan ketika mencapai usia tertentu. Dapat dikatakan, pada usia di mana dependensi meningkat, pasangan suami istri tersebut saling membutuhkan satu sama lain. Pada usia tersebut suami dan istri masih memiliki kemampuan untuk menjaga pasangannya. Sebagai contoh, ketika suami sakit, maka suami akan membutuhkan pertolongan terutama dari istri. Begitu juga sebaliknya. Kemudian faktor lain adalah masalah keturunan. Pada usia tersebut pasangan suami istri mampu untuk mempunyai keturunan. Setelah itu masih ditambah pula dengan proses pemeliharaan keturunan sampai menginjak usia dewasa sehingga mengakibatkan pasangan suami istri ini saling membutuhkan satu sama lain. Namun, ketika suami dan istri memasuki usia senja, dapat dikatakan dependensi antara keduanya mulai mengalami penurunan. Faktor yang paling dominan adalah melemahnya masalah fisik. Melemahnya masalah fisik ini bermacam-macam, seperti melemahnya kemampuan mengingat (pikun) dan melemahnya kemampuan dalam berkomunikasi yang membuat pembicaraan yang keluar dari seseorang yang lanjut usia tidak begitu jelas untuk dipahami. Pada usia senja ini pula biasanya seseorang sering mengalami penyakit-penyakit kronis. Hal semacam itulah yang dapat mempengaruhi menurunnya dependensi dari pasangan suami istri.

Berdasarkan ilustrasi numerik yang diberikan juga dapat diketahui bahwa semakin besar selisih usia antara suami dan istri, maka dependensinya semakin menurun. Jika dihubungkan pada dunia nyata, memang usia suami dan istri yang berbeda cukup jauh biasanya menimbulkan masalah. Salah satu contohnya adalah perbedaan pola pikir yang berbeda generasi. Perbedaan pola pikir seperti ini biasanya sulit untuk menemukan titik temu sehingga kurang lebih mempengaruhi menurunnya dependensi.

BAB IV
KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan mengenai masalah dependensi pada fungsi aktuaria *multiple-life status* dapat diambil beberapa kesimpulan yaitu:

1. Dependensi memiliki pengaruh terhadap besarnya premi. Pada kasus *joint-life status*, semakin besar dependensinya, maka semakin besar premi anuitas seumur hidup dan *pure endowment*, namun semakin kecil premi asuransi seumur hidup. Pada kasus *last-survivor status*, semakin besar dependensinya, maka semakin kecil premi anuitas seumur hidup dan *pure endowment*, namun semakin besar premi asuransi seumur hidup.
2. Dalam menentukan batas bawah dan batas atas premi digunakan fungsi distribusi sisa usia gabungan yang dibatasi Frechet-Hoeffding *bounds*. Dengan membagi dua menjadi Frechet-Hoeffding *upper bound* dan Frechet-Hoeffding *lower bound*, didapatkan fungsi distribusi sisa usia *multiple-life status*. Jika fungsi distribusi sisa usia *multiple-life status* ini dikembalikan ke dalam Frechet-Hoeffding *bounds*, maka didapatkan batas bawah dan batas atas premi.
3. Dengan memperhatikan usia dari suami dan istri, dapat diketahui dependensi dari keduanya. Semakin tua usia antara suami dan istri, maka dependensi antara keduanya semakin meningkat, namun mengalami penurunan ketika mencapai usia tertentu. Semakin besar selisih usia antara suami dan istri, maka dependensinya semakin menurun.

4.2 Saran

Saran yang dapat diberikan untuk pembahasan selanjutnya adalah dalam perhitungan premi yang memperhatikan masalah dependensi ini dapat diterapkan pada kasus lebih dari dua individu.

DAFTAR PUSTAKA

Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jonas, D. A., dan Nesbitt, C. J. 1997. *Actuarial Mathematics Second Edition*. The Society of Actuaries. Itasca, Illinois.

Dhaene, J. dan Goovaerts, M. 1996. Dependency of Risks and Stop-Loss Order. *ASTIN Bulletin* 26 (2). 201-212.

Dhaene, J., Vanneste, M., dan Wolthuis, H. 2000. A Note on Dependencies in Multiple-Lives Statuses. *Bulletin of the Swiss Association of Actuaries* 2000 (1), 19-34.

Lehmann, E. 1966. Some Concepts of Dependence. *Annals of Mathematical Statistics* 37, 1137-1153.

Li, D. X. 1999. On Default Correlation: A Copula Function Approach. *Journal of Fixed Income* 9, 43-54.

Marco, T. 2010. *Lectures on Probability Theory and Mathematical Statistic First Edition*. Amazon CreateSpace.

Schröder, B. S. W. 2003. *Ordered Sets: An Introduction*. Birkhäuser. Boston.

Spiegel, M. R., Schiller, J. J. dan Srinivasan, R. A. 2000. *Probability and Statistics*. Second Edition. Mc Graw Hill Companies. New York.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Perhitungan Contoh 1

Diketahui fkp gabungan $f(x,y)$ sebagai berikut.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x+3y), & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1. \\ 0, & \text{yang lain.} \end{cases}$$

Pertama-tama ditentukan nilai kovarians $X\, dan\, Y$ menggunakan (2.20).

$$Kov(XY) = E(XY) - \mu_X \mu_Y$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dydx \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dxdy$$

$$= \int_0^1\int_0^1 xy\frac{2}{5}(2x+3y)dxdy - \int_0^1\int_0^1 x\frac{2}{5}(2x+3y)dydx \int_0^1\int_0^1 y\frac{2}{5}(2x+3y)dxdy$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{4}{5}x^2y + \frac{6}{5}xy^2\right)dxdy - \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{4}{5}x^2 + \frac{6}{5}xy\right)dydx \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{4}{5}xy + \frac{6}{5}y^2\right)dxdy$$

$$Kov(XY) = \int_0^1 \left(\frac{4}{15}x^3y + \frac{3}{5}x^2y^2\right)\Big|_0^1 dy$$
$$- \int_0^1 \left(\frac{4}{5}x^2y + \frac{3}{5}xy^2\right)\Big|_0^1 dx \int_0^1 \left(\frac{2}{5}x^2y + \frac{6}{5}xy^2\right)\Big|_0^1 dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{4}{15}y + \frac{3}{5}y^2\right) dy$$
$$- \int_0^1 \left(\frac{4}{5}x^2 + \frac{3}{5}x\right) dx \int_0^1 \left(\frac{2}{5}y + \frac{6}{5}y^2\right) dy$$

$$= \left(\frac{2}{15}y^2 + \frac{1}{5}y^3\right)\Big|_0^1 - \left(\frac{4}{15}x^3 + \frac{3}{10}x^2\right)\Big|_0^1 \left(\frac{1}{5}y^2 + \frac{2}{5}y^3\right)\Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{2}{15} + \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{4}{15} + \frac{3}{10}\right)\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{15} + \frac{3}{15}\right) - \left(\frac{8}{30} + \frac{9}{30}\right)\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\right)$$

$$= \frac{5}{15} - \frac{17}{30} \cdot \frac{3}{5}$$

$$= \frac{50}{150} - \frac{51}{150} = -\frac{1}{150}.$$

Jadi dapat diketahui bahwa dengan menggunakan (2.20) $Kov(XY) = -\frac{1}{150}$.

Selanjutnya akan dicari nilai $Kov(XY)$ menggunakan (2.21), yaitu dengan rumus sebagai berikut.

$$Kov(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{ F(x,y) - F_1(x)F_2(y) \right\}dxdy.$$

Untuk mendapatkan nilai $Kov(XY)$ menggunakan (2.21), terlebih dahulu dicari $F(x,y)$, $F_1(x)$, dan $F_2(y)$.

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv \\
&= \int_{0}^{y}\int_{0}^{x} \frac{2}{5}(2u+3v)dudv \\
&= \int_{0}^{y}\int_{0}^{x} \left(\frac{4}{5}u + \frac{6}{5}v\right)dudv \\
&= \int_{0}^{y}\int_{0}^{x} \left(\frac{4}{5}u + \frac{6}{5}v\right)dudv \\
&= \int_{0}^{y} \left(\frac{2}{5}u^2 + \frac{6}{5}uv\right)\Big|_0^x dv \\
&= \int_{0}^{y} \left(\frac{2}{5}x^2 + \frac{6}{5}xv\right)dv \\
&= \left(\frac{2}{5}x^2v + \frac{3}{5}xv^2\right)\Big|_0^y \\
&= \left(\frac{2}{5}x^2y + \frac{3}{5}xy^2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)dvdu \\
&= \int_{0}^{x}\int_{0}^{1} \frac{2}{5}(2u+3v)dvdu
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F_1(x) &= \int_0^x \int_0^1 \left(\frac{4}{5}u + \frac{6}{5}v\right) dv du \\
&= \int_0^x \left(\frac{4}{5}uv + \frac{3}{5}v^2\right)\Big|_0^1 du \\
&= \int_0^x \left(\frac{4}{5}u + \frac{3}{5}\right) du \\
&= \left(\frac{2}{5}u^2 + \frac{3}{5}u\right)\Big|_0^x \\
&= \left(\frac{2}{5}x^2 + \frac{3}{5}x\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_2(y) &= \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{\infty} f(u,v) du dv \\
&= \int_0^y \int_0^1 \frac{2}{5}(2u + 3v) du dv \\
&= \int_0^y \int_0^1 \left(\frac{4}{5}u + \frac{6}{5}v\right) du dv \\
&= \int_0^y \left(\frac{2}{5}u^2 + \frac{6}{5}uv\right)\Big|_0^1 dv \\
&= \int_0^y \left(\frac{2}{5} + \frac{6}{5}v\right) dv \\
&= \left(\frac{2}{5}v + \frac{3}{5}v^2\right)\Big|_0^y \\
&= \left(\frac{2}{5}y + \frac{3}{5}y^2\right)
\end{aligned}
$$

Karena $F(x,y)$, $F_1(x)$, dan $F_2(y)$ sudah diketahui, nilai $Kov(XY)$ dapat dicari menggunakan (2.21) dengan cara sebagai berikut.

$$Kov(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{ F(x,y) - F_1(x)F_2(y) \right\} dxdy$$

$$= \int_0^1\int_0^1\left\{ \left(\frac{2}{5}x^2y + \frac{3}{5}xy^2\right) - \left(\frac{2}{5}x^2 + \frac{3}{5}x\right)\left(\frac{2}{5}y + \frac{3}{5}y^2\right) \right\} dxdy$$

$$= \int_0^1\int_0^1\left(\frac{2}{5}x^2y + \frac{3}{5}xy^2\right)dxdy - \int_0^1\int_0^1\left(\frac{2}{5}x^2 + \frac{3}{5}x\right)\left(\frac{2}{5}y + \frac{3}{5}y^2\right)dxdy$$

$$= \int_0^1\int_0^1\left(\frac{2}{5}x^2y + \frac{3}{5}xy^2\right)dxdy - \int_0^1\int_0^1\left(\frac{4}{25}x^2y + \frac{6}{25}x^2y^2 + \frac{6}{25}xy + \frac{9}{25}xy^2\right)dxdy$$

$$= \int_0^1\left(\frac{2}{15}x^3y + \frac{3}{10}x^2y^2\right)\Big|_0^1 dy - \int_0^1\left(\frac{4}{75}x^3y + \frac{6}{75}x^3y^2 + \frac{3}{25}x^2y + \frac{9}{50}x^2y^2\right)\Big|_0^1 dy$$

$$
\begin{aligned}
Kov(X,Y) &= \int_0^1 \left(\frac{2}{15}y + \frac{3}{10}y^2\right)dy \\
&\quad - \int_0^1 \left(\frac{4}{75}y + \frac{6}{75}y^2 + \frac{3}{25}y + \frac{9}{50}y^2\right)dy \\
&= \left(\frac{1}{15}y^2 + \frac{1}{10}y^3\right)\Big|_0^1 \\
&\quad - \left(\frac{2}{75}y^2 + \frac{2}{75}y^3 + \frac{3}{50}y^2 + \frac{3}{50}y^3\right)\Big|_0^1 \\
&= \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{10}\right) - \left(\frac{2}{75} + \frac{2}{75} + \frac{3}{50} + \frac{3}{50}\right) \\
&= \left(\frac{2}{30} + \frac{3}{30}\right) - \left(\frac{4}{150} + \frac{4}{150} + \frac{9}{150} + \frac{9}{150}\right) \\
&= \frac{5}{30} - \frac{26}{150} \\
&= \frac{25}{150} - \frac{26}{150} = -\frac{1}{150}
\end{aligned}
$$

Jadi dapat diketahui bahwa dengan menggunakan (2.21) nilai $Kov(XY) = -\frac{1}{150}$. Nilai kovarians tersebut sama dengan nilai kovarians yang dicari menggunakan (2.20).

Lampiran 2. Pembuktian Ekuivalensi (Digunakan pada Teorema 3.1 dan Lemma 3.1)

Jika $(T(x), T(y))$ dan $(S(x), S(y))$ adalah elemen dari $R(F, G)$, dengan fungsi distribusi marjinalnya masing-masing adalah F dan G, maka pernyataan-pernyataan di bawah ini ekuivalen.

(a) $\mathrm{P}(T(x) \leq t, T(y) \leq s) \leq \mathrm{P}(S(x) \leq t, S(y) \leq s)$
(b) $\mathrm{P}(T(x) \leq t, T(y) > s) \geq \mathrm{P}(S(x) \leq t, S(y) > s)$
(c) $\mathrm{P}(T(x) > t, T(y) \leq s) \geq \mathrm{P}(S(x) > t, S(y) \leq s)$
(d) $\mathrm{P}(T(x) > t, T(y) > s) \leq \mathrm{P}(S(x) > t, S(y) > s)$

Bukti:
Misal $\mathrm{P}(T(x) \leq t, T(y) \leq s) = \mathrm{P}(AB)$ dengan $\mathrm{P}(A)$ dan $\mathrm{P}(B)$ masing-masing adalah $\mathrm{P}(T(x) \leq t)$ dan $\mathrm{P}(T(y) \leq s)$. Misalkan juga $\mathrm{P}(S(x) \leq t, S(y) \leq s) = \mathrm{P}(CD)$ dengan $\mathrm{P}(S(x) \leq t) = \mathrm{P}(C)$ dan $\mathrm{P}(S(y) \leq s) = \mathrm{P}(D)$. Karena memiliki fungsi distribusi marjinal yang sama, dapat dikatakan $\mathrm{P}(A) = P(C)$ dan $\mathrm{P}(B) = P(D)$. Diasumsikan $AB \neq \emptyset$ dan $CD \neq \emptyset$. Diambil salah satu pernyataan yang dipenuhi, sebagai contoh (a).

(a) ≡ (b)

$$\mathrm{P}(T(x) \leq t, T(y) \leq s) \leq \mathrm{P}(S(x) \leq t, S(y) \leq s)$$
$$\mathrm{P}(AB) \leq \mathrm{P}(CD)$$
$$\mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(AB^c) \leq \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(CD^c)$$
$$-\mathrm{P}(AB^c) \leq -\mathrm{P}(CD^c)$$
$$\mathrm{P}(AB^c) \geq \mathrm{P}(CD^c)$$
$$\mathrm{P}(T(x) \leq t, T(y) > s) \geq \mathrm{P}(S(x) \leq t, S(y) > s)$$

(a) ≡ (c)

$$\mathrm{P}(T(x) \leq t, T(y) \leq s) \leq \mathrm{P}(S(x) \leq t, S(y) \leq s)$$
$$\mathrm{P}(AB) \leq \mathrm{P}(CD)$$
$$\mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A^cB) \leq \mathrm{P}(D) - \mathrm{P}(C^cD)$$
$$-\mathrm{P}(A^cB) \leq -\mathrm{P}(C^cD)$$
$$\mathrm{P}(A^cB) \geq \mathrm{P}(C^cD)$$
$$\mathrm{P}(T(x) > t, T(y) \leq s) \geq \mathrm{P}(S(x) > t, S(y) \leq s)$$

(a) ≡ (d)

$$\mathrm{P}(T(x) \leq t, T(y) \leq s) \leq \mathrm{P}(S(x) \leq t, S(y) \leq s)$$
$$\mathrm{P}(AB) \leq \mathrm{P}(CD)$$

$$1 - \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(AB) \leq 1 - \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(D) + \mathrm{P}(CD)$$
$$1 - [\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB)] \leq 1 - [\mathrm{P}(C) + \mathrm{P}(D) - \mathrm{P}(CD)]$$
$$1 - \mathrm{P}(A \cup B) \leq 1 - \mathrm{P}(C \cup D)$$
$$\mathrm{P}(A \cup B)^{\mathrm{c}} \leq \mathrm{P}(C \cup D)^{c}$$
$$\mathrm{P}(A^{c}B^{c}) \leq \mathrm{P}(C^{c}D^{c})$$
$$\mathrm{P}(T(x) > t, T(y) > s) \leq \mathrm{P}(S(x) > t, S(y) > s)$$

Lampiran 3. Pembuktian Ekuivalensi (Digunakan pada Frechet-Hoeffding *Bounds*)

Pertama-tama dilihat pada Frechet-Hoeffding *upper bound*

$$\mathrm{P}(T_U(x) \leq t, T_U(y) \leq t) = \min\{F_{T(x)}(t), G_{T(y)}(t)\}$$

Jika dilihat pada Frechet-Hoeffding *upper bound*, dapat dikatakan bahwa fungsi distribusi gabungan suatu variabel acak sama dengan salah satu fungsi distribusi marjinalnya yang minimum. Dapat dikatakan, $\mathrm{P}(T_U(x) \leq t, T_U(y) \leq t)$ sama dengan salah satu dari $\mathrm{P}(T(x) \leq t)$ dan $\mathrm{P}(T(y) \leq t)$ yang mempunyai nilai paling minimum. Jika $\mathrm{P}(T_U(x) \leq t, T_U(y) \leq t)$ diubah ke dalam bentuk $\mathrm{P}(T_U(x) > t, T_U(y) > t)$, pastinya $\mathrm{P}(T_U(x) > t, T_U(y) > t)$ sama dengan salah satu dari $\mathrm{P}(T(x) > t)$ atau $\mathrm{P}(T(y) > t)$. Namun yang belum diketahui adalah apakah nilainya sama dengan nilai yang minimum atau maksimum.

Untuk membuktikan ekuivalensinya, pertama-tama diasumsikan bahwa

$$\mathrm{P}(T_U(x) \leq t, T_U(y) \leq t) = \min\{\mathrm{P}(T(x) \leq t), \mathrm{P}(T(y) \leq t)\}$$

ekuivalen dengan

$$\mathrm{P}(T_U(x) > t, T_U(y) > t) = \mathrm{maks}\{\mathrm{P}(T(x) > t), \mathrm{P}(T(y) > t)\}$$

Jika dilihat ruas kanan dari kedua persamaan tersebut, dapat dikatakan bahwa $\min\{\mathrm{P}(T(x) \leq t), \mathrm{P}(T(y) \leq t)\}$ merupakan komplemen dari $\mathrm{maks}\{\mathrm{P}(T(x) > t), \mathrm{P}(T(y) > t)\}$, karena

$$\min\{\mathrm{P}(T(x) \leq t), \mathrm{P}(T(y) \leq t)\} = 1 - \mathrm{maks}\{\mathrm{P}(T(x) > t), \mathrm{P}(T(y) > t)\}$$

Namun jika dilihat ruas kiri dari kedua persamaan tersebut, $\mathrm{P}(T_U(x) \leq t, T_U(y) \leq t)$ bukan merupakan komplemen dari $\mathrm{P}(T_U(x) > t, T_U(y) > t)$. Jadi dapat dikatakan bahwa asumsi yang diberikan salah. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa

$$\mathrm{P}(T_U(x) \leq t, T_U(y) \leq t) = \min\{\mathrm{P}(T(x) \leq t), \mathrm{P}(T(y) \leq t)\}$$

ekuivalen dengan

$$\mathrm{P}(T_U(x) > t, T_U(y) > t) = \text{maks}\{\mathrm{P}(T(x) > t), \mathrm{P}(T(y) > t)\}$$

Untuk Frechet-Hoeffding lower bounds digunakan cara yang sama, sehingga didapatkan

$$\mathrm{P}(T_L(x) \leq t, T_L(y) \leq t) = \text{maks}\{\mathrm{P}(T(x) \leq t) + \mathrm{P}(T(y) \leq t) - 1, 0\}$$

ekuivalen dengan

$$\mathrm{P}(T_L(x) > t, T_L(y) > t) = \text{maks}\{\mathrm{P}(T(x) > t) + \mathrm{P}(T(y) > t) - 1, 0\}$$

Lampiran 4. Tabel Mortalitas Belgia dan Listing Program Menampilkan Tabel

Tabel Mortalitas Belgia ($l_x \times 10^6$)

x	l_x (MR)	l_x (FR)	x	l_x (MR)	l_x (FR)	x	l_x (MR)	l_x (FR)
0	1.0000	1.0000	38	0.9692	0.9844	76	0.6415	0.7867
1	0.9994	0.9997	39	0.9676	0.9837	77	0.6156	0.7669
2	0.9988	0.9993	40	0.9660	0.9830	78	0.5884	0.7455
3	0.9982	0.9990	41	0.9642	0.9822	79	0.5598	0.7223
4	0.9976	0.9987	42	0.9623	0.9813	80	0.5299	0.6972
5	0.9970	0.9983	43	0.9603	0.9804	81	0.4990	0.6703
6	0.9964	0.9980	44	0.9582	0.9795	82	0.4669	0.6415
7	0.9958	0.9976	45	0.9558	0.9784	83	0.4341	0.6108
8	0.9952	0.9973	46	0.9533	0.9773	84	0.4006	0.5783
9	0.9946	0.9969	47	0.9507	0.9761	85	0.3668	0.5440
10	0.9940	0.9966	48	0.9478	0.9748	86	0.3328	0.5082
11	0.9934	0.9963	49	0.9446	0.9733	87	0.2991	0.4710
12	0.9927	0.9959	50	0.9413	0.9718	88	0.2659	0.4326
13	0.9921	0.9956	51	0.9376	0.9701	89	0.2336	0.3935
14	0.9915	0.9952	52	0.9337	0.9682	90	0.2025	0.3540
15	0.9908	0.9949	53	0.9294	0.9662	91	0.1731	0.3145
16	0.9901	0.9945	54	0.9248	0.9640	92	0.1457	0.2757
17	0.9895	0.9941	55	0.9198	0.9615	93	0.1204	0.2379
18	0.9888	0.9938	56	0.9143	0.9588	94	0.0977	0.2018
19	0.9881	0.9934	57	0.9084	0.9559	95	0.0776	0.1680
20	0.9873	0.9930	58	0.9020	0.9526	96	0.0602	0.1368
21	0.9866	0.9926	59	0.8951	0.9490	97	0.0455	0.1088
22	0.9859	0.9923	60	0.8875	0.9451	98	0.0335	0.0843
23	0.9851	0.9919	61	0.8793	0.9407	99	0.0239	0.0634
24	0.9843	0.9915	62	0.8705	0.9359	100	0.0165	0.0461
25	0.9835	0.9911	63	0.8609	0.9306	101	0.0109	0.0323
26	0.9826	0.9906	64	0.8504	0.9248	102	0.0070	0.0217

Lanjutan Tabel Mortalitas Belgia ($l_x \times 10^6$)

x	l_x (MR)	l_x (FR)	x	l_x (MR)	l_x (FR)	x	l_x (MR)	l_x (FR)
27	0.9818	0.9902	65	0.8392	0.9184	103	0.0042	0.0139
28	0.9809	0.9898	66	0.8270	0.9112	104	0.0024	0.0085
29	0.9799	0.9893	67	0.8138	0.9034	105	0.0013	0.0049
30	0.9789	0.9889	68	0.7996	0.8947	106	0.0007	0.0026
31	0.9779	0.9884	69	0.7842	0.8852	107	0.0003	0.0013
32	0.9769	0.9879	70	0.7677	0.8747	108	0.0001	0.0006
33	0.9757	0.9874	71	0.7500	0.8632	109	0.0001	0.0003
34	0.9746	0.9868	72	0.7310	0.8506	110	0.0000	0.0001
35	0.9733	0.9863	73	0.7107	0.8367	111	0.0000	0.0000
36	0.9720	0.9857	74	0.6890	0.8215	112	0.0000	0.0000
37	0.9706	0.9850	75	0.6660	0.8048	113	0.0000	0.0000

Listing program menampilkan Tabel Mortalitas Belgia

```
clear all;
lx=zeros(101,1);
ly=zeros(101,1);
km=1000266.63;
sm=0.999441703848;
gm=0.999733441115;
cm=1.101077536030;
kf=1000048.56;
sf=0.999669730966;
gf=0.999951440172;
cf=1.116792453830;
int=0.0475;
v=1/(1+int);

for i=1:251
    lx(i)=km*(sm^(i-1))*(gm^(cm^(i-1)));
    ly(i)=kf*(sf^(i-1))*(gf^(cf^(i-1)));
end;
[ lx ly ];
```

Lampiran 5. Listing Program Perhitungan Batas Bawah dan Batas Atas Premi

Listing program untuk menghitung batas bawah dan batas atas anuitas seumur hidup

```
clear all;
x=input('masukkan x:');
y=input('masukkan y:');
km=1000266.63;
sm=0.999441703848;
gm=0.999733441115;
cm=1.10107536030;
kf=1000048.56;
sf=0.999669730966;
gf=0.999951440172;
cf=1.116792453830;
int=0.0475;
v=1/(1+int);

for i=1:251
    lx(i)=km*(sm^(i-1))*(gm^(cm^(i-1)));
    ly(i)=kf*(sf^(i-1))*(gf^(cf^(i-1)));
end;
for i=1:(131-y)
    qx(i)=(lx(x+1)-lx(x+i))/lx(x+1);
    px(i)=1-qx(i);
end;
for i=1:(131-y)
    qy(i)=(ly(y+1)-ly(y+i))/ly(y+1);
    py(i)=1-qy(i);
end;
ajub=0;
for i=1:(131-y)
    ax=(v^(i-1))*px(i);
    ajub=ajub+ax;
end;
ajlb=0;
for i=1:(131-y)
    axy=(v^(i-1))*px(i)*py(i);
    ajlb=ajlb+axy;
end;
alub=0;
```

Listing program untuk menghitung batas bawah dan batas atas anuitas seumur hidup (lanjutan)

```
for i=1:(131-y)
    ax=(v^(i-1))*(px(i)+py(i)-(px(i)*py(i)));
    alub=alub+ax;
end;
allb=0;
for i=1:(131-y)
    axy=(v^(i-1))*py(i);
    allb=allb+axy;
end;
selj=ajub-ajlb;
sell=alub-allb;
ajlb
ajub
allb
alub
selj
sell
```

Listing program untuk menghitung batas bawah dan batas atas *pure endowment*

```
clear all;
x=input('masukkan x:');
y=input('masukkan y:');
n=input('masukkan n:');
km=1000266.63;
sm=0.999441703848;
gm=0.999733441115;
cm=1.101077536030;
kf=1000048.56;
sf=0.999669730966;
gf=0.999951440172;
cf=1.116792453830;
int=0.0475;
v=1/(1+int);

for i=1:251
    lx(i)=km*(sm^(i-1))*(gm^(cm^(i-1)));
    ly(i)=kf*(sf^(i-1))*(gf^(cf^(i-1)));
end;
qx=(lx(x+1)-lx(x+n+1))/lx(x+1);
```

Listing program untuk menghitung batas bawah dan batas atas *pure endowment* (lanjutan)

```
px=1-qx;
qy=(ly(y+1)-ly(y+n+1))/ly(y+1);
py=1-qy;
ejub=(v^(n))*px;
ejlb=(v^(n))*px*py;
elub=(v^(n))*(px+py-(px*py));
ellb=(v^(n))*py;
selj=ejub-ejlb;
sell=elub-ellb;
ejlb
ejub
ellb
elub
selj
sell
```

Listing program untuk menghitung batas bawah dan batas atas asuransi seumur hidup

```
clear all;
x=input('masukkan x:');
y=input('masukkan y:');
km=1000266.63;
sm=0.999441703848;
gm=0.999733441115;
cm=1.101077536030;
kf=1000048.56;
sf=0.999669730966;
gf=0.999951440172;
cf=1.116792453830;
int=0.0475;
v=1/(1+int);

for i=1:251
    lx(i)=km*(sm^(i-1))*(gm^(cm^(i-1)));
    ly(i)=kf*(sf^(i-1))*(gf^(cf^(i-1)));
end;
for i=1:(131-y)
    qx(i)=(lx(x+1)-lx(x+i))/lx(x+1);
    px(i)=1-qx(i);
    qxc(i)=(lx(x+i)-lx(x+i+1))/(lx(x+1));
```

Listing program untuk menghitung batas bawah dan batas atas asuransi seumur hidup (lanjutan)

```
end;
for i=1:(131-y)
    qy(i)=(ly(y+1)-ly(y+i))/ly(y+1);
    py(i)=1-qy(i);
    qyc(i)=(ly(y+i)-ly(y+i+1))/(ly(y+1));
end;
ajlb=0;
for i=1:(131-y)
    ax=(v^(i))*qxc(i);
    ajlb=ajlb+ax;
end;
ajub=0;
for i=1:(131-y)
    axy=(v^(i))*((py(i)*qxc(i))+(px(i)*qyc(i))-
(qxc(i)*qyc(i)));
    ajub=ajub+axy;
end;
allb=0;
for i=1:(131-y)
    ax=(v^(i))*(((1-py(i))*qxc(i))+((1-
px(i))*qyc(i))+(qxc(i)*qyc(i)));
    allb=allb+ax;
end;
alub=0;
for i=1:(131-y)
    axy=(v^(i))*qyc(i);
    alub=alub+axy;
end;
selj=ajub-ajlb;
sell=alub-allb;
ajlb
ajub
allb
alub
selj
sell
```