BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Matriks

Matriks adalah susunan bilangan yang tersusun dalam baris–baris dan kolom–kolom. Setiap bilangan dalam matriks disebut unsur atau elemen dari matriks itu. Notasi untuk menyatakan suatu matriks biasanya digunakan huruf besar sedangkan untuk unsurnya digunakan huruf kecil. Sebutan matriks biasanya dikaitkan dengan jumlah baris dan kolom yang membentuk matriks tersebut.

Matriks yang terdiri atas m baris dan n kolom disebut matriks berukuran (berdimensi) $m\,x\,n$ atau sering disebut matriks berorde $m\,x\,n$. Matriks $m\,x\,n$ dapat dilambangkan dengan:

$$A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mxn} \end{bmatrix}$$

i : 1,2,…,m $\quad$ j : 1,2,…,n

i : indeks baris dan j : indeks kolom

(Susanta, 1994)

2.2 Determinan Matriks

Jika A adalah sembarang matriks $n\ x\ n$, maka minor anggota a_{ij} dinyatakan oleh M_{ij} dan didefinsikan sebagai determinan sub–matriks yang masih tersisa setelah baris ke–i dan kolom ke–j dihilangkan dari A. Bilangan $(-1)^{i+j} M_{ij}$ dinyatakan oleh C_{ij} dan disebut kofaktor dari a_{ij}. Determinan suatu matriks A yang berukuran $n\ x\ n$ dapat dihitung dengan mengalikan anggota–anggota pada sebarang baris atau kolom dengan kofaktornya dan menjumlahkan hasil kali yang dihasilkan, yaitu untuk setiap $1 \le i \le n$ dan $1 \le j \le n$,

$$det(A) = a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \ldots + a_{nj}c_{nj}$$

(perluasan kofaktor sepanjang kolom ke–*j*),

$$det(A) = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + ... + a_{in}c_{in}$$

(perluasan kofaktor sepanjang baris ke–*i*).

(Anton, 1995)

2.3 Adjoin Matriks

Jika *A* adalah sebarang matriks berukuran *n x n* dan c_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij}, maka matriks:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nxn} \end{bmatrix}$$

disebut matriks kofaktor dari *A.* Transpose dari matriks *A* adalah adjoin *A* dan dinyatakan oleh adj (*A*).

(Susanta, 1994)

2.4 Invers Matriks

Jika $det(A) = a_{ij}$ adalah matriks *n x n* , maka invers *A* dinyatakan oleh

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

dengan *i,j = 1,2,…,n.*

(Anton, 1995)

2.5 Jenis–jenis Matriks

Ada beberapa jenis matriks, diantaranya yaitu :

1. Matriks nonsingular

   Suatu matriks bujur sangkar A_{nxn} disebut nonsingular apabila $det(A) \neq 0$.

2. Matriks singular

   Suatu matriks bujur sangkar A_{nxn} disebut singular apabila $det(A) = 0$.

3. Matriks diagonal

   Matriks diagonal didefinisikan sebagai suatu matriks di mana semua elemennya sama dengan nol kecuali elemen–elemen diagonal utamanya. Jika $A = (a_{ij})$ adalah matriks $m\,x\,m$, maka A dikatakan matriks diagonal jika

$$A = \begin{cases} a_{ij}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

4. Matriks identitas *(I)* adalah suatu matriks bujur sangkar yang mempunyai satu untuk setiap elemen pada diagonal utama dari kiri atau kekanan dan nol disetiap tempat lain.

$$AI = IA = A$$

5. Transpose Matriks

   Jika terdapat suatu matriks $A = (a_{ij})$ berukuran $m\ x\ n$, maka transpose dari A adalah A^T berukuran $n\ x\ m$ dengan mempertukarkan baris–baris dan kolom–kolom sehingga baris i dari A menjadi kolom i dari matriks A^T. Dengan kata lain $A^T = (a_{ji})_{nxm}$

(Anton, 1995)

2.6 Operasi Matriks

Beberapa definisi dari operasi matriks antara lain :

1. Jika $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ adalah sebarang dua matriks $m\ x\ n$, maka penjumlah A dan B adalah

$$(A + B) = (a_{ij} + b_{ij}),$$

   dengan $i = 1,2,\ldots,m$ *dan* $j = 1,2,\ldots,n$.

2. Perkalian Matriks

   a. Perkalian dua matriks

   Jika $A = (a_{ij})$ adalah matriks $m\ x\ r$ dan $B = (b_{ij})$ adalah matriks $r\ x\ n$ maka hasil kali $A\ x\ B$ adalah

$$AB = (c_{ij})$$

   di mana,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}\, b_{kj},$$

   dengan $i = 1,2,\ldots,m$ dan $j = 1,2,\ldots,n$.

b. Perkalian skalar

Jika $A = (a_{ij})$ adalah matriks *m x n* dan *k* adalah suatu skalar, maka hasil kali *A* dan *k* adalah

$$k(A) = (ka_{ij}),$$

dengan $i = 1,2,\ldots,m$ dan $j = 1,2,\ldots,n.$

(Susanta, 1994)

2.7 Sistem Persamaan Linear

Definisi 2.7.1.: Fungsi Linear (Winston, 1993)

Fungsi $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ adalah fungsi linear jika dan hanya jika untuk himpunan konstanta $a_1,\ldots,a_n$, $f(x_1,\ldots,x_n) = a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n$.

Definisi 2.7.2.: Persamaan Linear (Winston, 1993)

Persamaan liner adalah suatu persamaan di mana suku–suku variabelnya berderajat satu. Persamaan linear dalam *n* variabel $x_1,\ldots,x_n$ dapat dinyatakan dalam bentuk $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_{nxn} = b$, dengan $a_1,\ldots,a_n$ dan *b* adalah konstanta riil.

Definisi 2.7.3.: Sistem Persamaan Linear (Winston, 1993)

Sistem persamaan linear adalah sekelompok persamaan linear yang mempunyai satu penyelesaian jawaban persekutuan. Sistem persamaan linear dengan *m* persamaan dan *n* variabel dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

dengan a_{ij}, b_i adalah konstanta dengan $i = 1,2,\ldots,m$ dan $j = 1,2,3,\ldots,n.$

Persamaan diatas jika ditulis dalam bentuk matriks menjadi $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$,

di mana $A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mxn} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

Definisi 2.7.4.: Sistem Persamaan Linear Homogen (Winston, 1993)
Sebuah system persamaan linear (SPL) dikatakan homogen jika semua suku konstanta sama dengan nol, yaitu sistem tersebut mempunyai bentuk:

$$\begin{aligned}\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0\end{aligned}$$

2.8 Program Linear

2.8.1 Bentuk Umum Model Program Linear

Program Linear adalah salah satu teknik penyelesaian riset operasi yang secara khusus menyelesaikan masalah–masalah optimasi (memaksimalkan atau meminimumkan) tetapi hanya terbatas pada masalah–masalah yang dapat diubah menjadi fungsi linear. Demikian pula kendala–kendala yang digunakan juga berbentuk linear. Masalah program linear tidak lain adalah optimasi bersyarat, yakni pencarian nilai maksimum (*maximize*) atau pencarian nilai minimum (*minimize*) suatu fungsi sasaran berkenaan dengan keterbatasan–keterbatasan atau kendala yang harus dipenuhi (Dumairy, 1999).

Secara formal suatu program linear adalah masalah optimasi dengan bentuk meminimumkan atau memaksimumkan.

Memaksimumkan : $Z = c^T x$, di mana $x \in R^n, c \in R^n$

dengan kendala $Ax \leq b, A \in R^{mxn}$, dan $b \in R^m$

$x \geq 0, x \in R^n$

Meminimumkan : $Z = c^T x$, di mana $x \in R^n, c \in R^n$

dengan kendala $Ax \geq b, A \in R^{mxn}$, dan $b \in R^m$

$x \geq 0, x \in R^n$

(Lejasa, 2009)

Pada dasarnya algoritma–algoritma yang dikembangkan untuk memecahkan model program linear ditujukan untuk mencari solusi

dari beberapa alternatif solusi yang dibentuk oleh persamaan–persamaan kendala sehingga diperoleh nilai fungsi sasaran optimum.
Dan tiga unsur utama dari model program linear ini adalah variabel keputusan (tingkat kegiatan), fungsi sasaran (tujuan) dan fungsi kendala.

Definisi 2.8.1.1.: Variabel Keputusan (Hillier and Lieberman, 1994)
Variabel keputusan adalah variabel yang dikontrol dan mempengaruhi penyelesaian masalah. Variabel dinotasikan $x_j = 1,2,\ldots,n$.

Definisi 2.8.1.2.: Fungsi Sasaran (Tujuan) (Hillier and Lieberman, 1994)
Fungsi sasaran adalah fungsi dari variabel keputusan yang akan dioptimumkan (dimaksimumkan atau diminimumkan).

Definisi 2.8.1.3.: Koefisien Fungsi Sasaran (Hillier and Lieberman, 1994)
Koefisien fungsi sasaran adalah koefisien dari variabel dalam fungsi sasaran.

Definisi 2.8.1.4.: Kendala (Hillier and Lieberman, 1994)
Kendala adalah batas dari nilai variabel keputusan.

Definisi 2.8.1.5.: Daerah Fisibel (Dimyati dan Ahmad, 1992)
Daerah fisibel dalam program linear adalah himpunan seluruh titik yang memenuhi seluruh kendala.

Definisi 2.8.1.6.: Penyelesaian Optimal (Hillier and Lieberman, 1994)
Peyelesaian optimal adalah peyelesaian fisibel yang mengoptimumkan fungsi tujuan. Dengan kata lain, suatu nilai fisibel dikatakan optimal apabila nilai tersebut konvergen menuju suatu titik tertentu.

2.8.2 Bentuk standar Model Program Linear (Hillier and Lieberman, 1994)

Model program linear dapat memiliki kendala–kendala yang bertanda =, ≤, ≥. Variabel dalam model program linear berupa variabel nonnegatif. Di dalam menyelesaikan persoalan program linear dengan menggunakan algoritma simpleks, bentuk dasar yang digunakan haruslah bentuk standar, yaitu formulasi yang memiliki sifat–sifat sebagai berikut:

1. Seluruh kendala harus berbentuk persamaan (bertanda =) dengan ruas kanan yang nonnegatif.
2. Seluruh variabel harus merupakan variabel nonnegatif.
3. Fungsi sasarannya dapat berupa memaksimumkan atau meminimumkan.

Istilah umum untuk masalah program linear, mempunyai dua kata kunci pokok yaitu sumber daya dan kegiatan. Jumlah dari kedua istilah tersebut ditandai berturut–turut dengan *m* (sumber daya) dan *n* (kegiatan). Sumber daya diperlukan untuk melaksankan kegiatan–kegiatan yang ada, tetapi jumlah masing–masing sumber daya yang tersedia sangat terbatas sehingga perlu membuat alokasi sumber daya dengan cara seefisien mungkin. Menentukan alokasi ini mencakup memilih tingkat kegiatan (nilai dari variabel keputusan) yang mencapai nilai terbaik bagi *Z* (fungsi tujuan) secara keseluruhan (Hillier and Lieberman, 1994).

Secara umum model program linear dapat ditunjukkan dalam tabel berikut: (Hillier and Lieberman, 1994).

Tabel 2.1 Tabel Dasar Program Linear

Sumber Daya	**Penggunaan Sumber Daya per Unit Kegiatan KEGIATAN**				**Jumlah Sumber Daya Yang Tersedia**
	1	2	…	n	
1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
3	a_{31}	a_{32}	…	a_{3n}	b_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mxn}	b_n
Unit Kegiatan	c_1	c_2	…	c_n	
Tingkat Kegiatan	x_1	x_2	…	x_n	

Sementara itu model matematik dari program linear untuk masalah umum yang terdapat dari tabel di atas dapat dirumuskan sebagai berikut:

Fungsi Tujuan,

Memaksimumkan $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

dengan kendala,

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leq b_m \\
x_1, \ldots, x_n &\geq 0
\end{aligned}
$$

Untuk bentuk program linear di atas lebih dikenal dengan bentuk baku. Sementara itu untuk bentuk lainnya dalam kasus yang berkaitan dengan masalah program linear adalah:

1. Meminimumkan fungsi tujuan.
   Minimumkan $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$
2. Beberapa fungsi kendala dengan pertidaksamaan lebih besar atau sama dengan.
   $a_{i1}.x_1 + a_{i2}.x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_{i,}$untuk beberapa nilai –*i*

3. Beberapa fungsi kendala dalam bentuk persamaan.
   $a_{i1}.x_1 + a_{i2}.x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_{i,}$, untuk beberapa nilai –*i*
4. Menghilangkan kendala–kendala tidak negatif untuk beberapa variabel keputusan. x_j tidak dibatasi dengan tanda, untuk beberapa nilai –*j*.
   Jadi, setiap masalah yang menggabungkan beberapa atau semua bentuk diatas dengan bagian–bagian dari model baku masih tetap termasuk masalah program linear (Hillier and Lieberman,1994).

2.8.3 Beberapa Istilah dalam Menyelesaikan Program Linear (Hillier and Lieberman, 1994)

1. Solusi (penyelesaian layak) adalah suatu solusi atau penyelesaian layak di mana semua kendala yang ada dipenuhi.
2. Daerah layak merupakan kumpulan dari semua penyelesaian yang layak.

3. Penyelesaian optimal merupakan penyelesaian layak yang memiliki nilai paling menguntungkan untuk fungsi tujuan.

2.8.4 Asumsi–asumsi dalam Program Linear

Menurut (Hillier and Lieberman,1994), program linear mempunyai beberapa asumsi diantara:

1. Proporsionalitas (*Proportionality*)
   Proporsionalitas merupakan asumsi mengenei kegiatan salah satu variabel keputusan yang dipertimbangkan secara independen dari yang lainnya. Oleh karena itu, perhatikan kasus di mana hanya satu diantara n kegiatan yang dilaksanakan.
   Katakanlah kegiatan k, $x_j = 0$, untuk setiap $j = 1,2,\dots, n$ kecuali $j = k$.
   Asumsinya adalah bahwa
   a. Ukuran keseluruhan mengenei nilai fungsi tujuan Z adalah sama dengan $c_k x_k$.
   b. Pemakaian setiap sumber daya i adalah sama dengan $a_{ik} x_k$.

   Misalnya,
   i. $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$
   Setiap penambahan satu unit x_1 menaikkan Z dengan c_1, kemudian setiap penambahan satu unit x_2 menaikkan Z dengan c_2 dan seterusnya.
   ii. $a_{i1}.x_1 + a_{i2}.x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i,$
   Setiap penambahan satu unit x_1 akan menaikkan penggunaan sumber daya ke – 1 dengan a_{11}, kemudian satu unit x_2 menaikkan penggunaan sumber daya ke – 1 dengan a_{12} dan seterusnya.
   Dengan demikian, kedua asumsi diatas proporsional (sebanding) secara langsung dengan tingkat setiap kegiatan k yang dilaksankan secara tersendiri $(k = 1,2,\dots,n)$.

2. Adivitas (*Additivity*)
   Asumsi adivitas berlaku baik pada fungsi tujuan maupun fungsi–fungsi pada ruas kiri dan fungsi kendala. Untuk kedua jenis fungsi tersebut asumsinya berkaitan dengan perbandingan antara nilai fungsi total yang diperoleh pada saat melaksanakan kegiatan–kegiatan bersama–sama $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan kontribusi individual

kepada nilai fungsi sebagai akibat melaksanakan kegiatan itu masing – masing. Yang dimaksud dengan kontribusi individual adalah $c_j x_j$ untuk fungsi tujuan dan $a_{ij} x_j$ untuk suatu fungsi kendala. Dengan demikian, asumsi adivitas adalah bahwa untuk setiap fungsi, nilai fungsi total dapat diperoleh dengan menjumlahkan kontribusi individu dari masing–masing kegiatan.

Misalnya,

$Z = c_1 x_1 + c_1 x_2$

di mana,

$x_1 = p$ dan $x_1 = q$

sehingga,

$Z = c_1 p + c_2 q$

Andaikan x_1 bertambah 1 unit, maka diperoleh:

$Z = c_1(p+1) + c_2 q$

Nilai Z ini sama juga dengan penambahan langsung dari kenaikan x_1 kepada harga Z mula–mula tanpa mengurangi kegiatan–kegiatan Z yang diperoleh dari kegiatan kedua (x_2), yaitu:

$Z = c_1 p + c_2 q + c_1$

3. *Divisibilitas*

   Kadang–kadang penyelesaian optimal yang diperoleh pada program linear sering merupakan penyelesaian non–integer. Oleh karena itu, asumsi divisibilitas menjamin bahwa unit–unit kegiatan (variabel keputusan) dapat dibagi ke dalam bagian yang sekecil–kecilnya, sehingga nilai–nilai non–integer pada variabel keputusan adalah mungkin. Demikian pula halnya dengan fungsi tujuan yang dihasilkan.

4. Kepastian (*Deterministik*)

   Asumsi mengenei kepastian adalah bahwa semua nilai–nilai (a_{ij}, b_i, c_j) merupakan konstanta–konstanta yang diketahui. Dalam praktiknya asumsi ini jarang dipenuhi secara tepat, karena model–model program linear biasanya dirumuskan untuk memilih suatu tindakan pada waktu yang akan datang, sehingga konstanta–konstanta yang dipakai akan didasarkan pada suatu prediksi (perkiraan) mengenei kondisi–kondisi di masa mendatang.

2.8.5 Model Program Linear yang Diperluas

Dalam suatu perhitungan akan lebih mudah dalam menghadapi bentuk–bentuk persamaan dibandingkan dengan bentuk pertidaksamaan. Dengan alasan tersebut, maka bentuk pertidaksamaan dari model program linear akan diubah menjadi bentuk persamaan. Perubahan ini dapat dilakukan dengan penambahan suatu variabel tambahan atau variabel *slack* pada tiap–tiap kendala pertidaksamaan. Sementara itu kendala–kendala non– negatif dapat diabaikan sebagai pertidaksamaan, karena dalam perhitungan kendala non negatif tidak diikutsertakan.

Model program linear yang telah diperluas bentuknya menjadi sebagai berikut :

Maksimumkan $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

dengan kendala,

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad &\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} &= b_m \\
x_j \geq 0,\ j = 1,2,\ldots,n+m &
\end{aligned}$$

di mana,

$x_{n+1}, x_{n+2,}, \ldots, x_{n+m}$ adalah variabel *slack.*

Model program linear dapat juga ditulis dengan menggunakan notasi matriks, seperti sebagai berikut:

Maksimumkan $\mathbf{Z} = \mathbf{cx}$

dengan kendala, $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$

$\mathbf{x} \geq \mathbf{o}$

di mana,

c : vektor baris [$c_1\ c_2\ c_3\ \ldots\ c_n$]

x,b,o : vektor–vektor kolom

$$
\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{o} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
$$

A = merupakan matriks koefisien kendala

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mxn} \end{bmatrix}
$$

Sedangkan pada program linear dalam bentuk yang diperluas, modelnya adalah sebagai berikut:

Maksimumkan $Z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$
dengan kendala ,

$$
[\mathbf{A},\mathbf{I}]\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x_s} \end{bmatrix} = \mathbf{b}
$$

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x_s} \end{bmatrix} \geq \mathbf{o}
$$

di mana,
I = merupakan matriks identitas
$\mathbf{x_s}$ = vektor kolom dari variabel slack
o = vektor kolom 0 yang mempunyai (n + m) unsur.

(Hillier and Lieberman,1994)

2.9 Metode Titik Interior

2.9.1 Pengertian Metode Titik Interior dan Penyelesaian Percobaan Awal

Algoritma titik interior adalah algoritma yang memotong atau menembus titik dalam dari daerah fisibel untuk mencapai solusi yang optimum. Titik interior adalah titik–titik yang berada di daerah fisibel (Hillier and Lieberman, 2005). Pendekatan umum dari Agoritma ini adalah untuk memperoleh suatu urutan penyelesaian percobaan awal yang semakin baik sampai tercapai suatu penyelesaian optimal. Dan dalam menentukan percobaan awal optimal atau tidak, dapat dilihat pada akhir tiap iterasi yang dilakukan bersifat konvergen dari nilai yang diperoleh.

Sekarang akan dibahas bagaimana menentukan penyelesaian percobaan awal pada iterasi pertama. Penyelesaian percobaan awal dapat ditentukan dengan mengambil sembarang titik ($x \geq 0$) yang terletak di dalam batas–batas daerah layak. Titik yang diperoleh inilah yang disebut dengan titik dalam ('Titik Interior').

Misalkan: $Max\ Z = c_1x_1 + c_2x_2$

dengan kendala,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \qquad (2.1)$$

$D(x_1, x_2)$ adalah penyelesaian percobaan awal yang dipilih sembarang dari setiap titik yang berada di dalam daerah layak. Kemudian persamaan (2.1) diperluas dengan menambahkan variabel yang ketiga (x_3) pada persamaan (2.1) yang merupakan variabel *slack*. Sehingga masalahnya berubah menjadi:

$$Max\ Z = c_1x_1 + c_2x_2$$

Dengan kendala,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + x_3 \leq b_1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \qquad (2.2)$$

Dengan demikian, penyelesaian percobaan awal yang dipilih adalah $D(x_1, x_2, x_3)$, dimana $D(x_1, x_2, x_3)$ adalah titik dalam ('Titik Interior') pada himpunan daerah layak.

2.9.2 Mengubah Program Linear Umum ke Bentuk Titik Interior dan Penyelesaiannya

- Untuk sembarang masalah pemrograman linear dalam bentuk umum, yaitu:

Untuk kasus maksimasi sebagai berikut:
Fungsi Tujuan,

Memaksimumkan $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$

dengan kendala,

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\
&\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \\
&x_1, ..., x_n \ge 0
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Sebelum menentukan penyelesaian percobaan awal, bentuk umum dari pemrograman linear dari persamaan (2.3) dapat diubah bentuknya dengan menggunakan manipulasi matriks. Maka seluruh masalah yang ada dapat dinyatakan dalam notasi matriks. Sehingga, bentuk umum dari pemrograman linear dari persamaan (2.3) menjadi:

Maksimumkan $Z = \mathbf{cx}$
dengan kendala, $\mathbf{Ax} \le \mathbf{b}$
$\mathbf{x} \ge \mathbf{o}$ (2.4)

di mana,
c : vektor baris [c_1 c_2 c_3 ... c_n]
x,b,o : vektor–vektor kolom

$$
\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{o} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
$$

A = merupakan matriks koefisien kendala

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mxn} \end{bmatrix}$$

Untuk mengubah permasalahan (2.4) ke bentuk Titik Interior dengan langkah–langkah:

Pertama: Mengubah masalah (2.4) dalam bentuk yang diperluas, dengan memasukkan vektor kolom (variabel–variabel *slack*) pada fungsi kendala.
Misalkan,

$$\mathbf{x_s} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ x_{n+3} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix}$$

Setelah ditambahkan dengan variabel *slack*, maka fungsi tujuan dan kendala–kendalanya berubah menjadi sebagai berikut:

$$Max\ Z = \mathbf{c^T x}$$

$$\text{dengan kendala } \ \mathbf{[A,I]}\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x_s} \end{bmatrix} = \mathbf{b,} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x_s} \end{bmatrix} \geq \mathbf{o} \qquad (2.6)$$

di mana,
I = merupakan matriks identitas
$\mathbf{x_s}$ = vektor kolom dari variabel slack
o = vektor kolom 0 yang mempunyai (n + m) unsur.

Dengan demikian, penyelesaian percobaan awalnya adalah $(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+m})$. Andaikan D adalah matriks diagonal yang bersangkutan, sehingga:

$$D = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & x_n & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & x_{n+1} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & x_{n+m} \end{bmatrix}$$

Kedua: Kemudian setelah mendapatkan titik yang diperoleh pada penyelesaian percobaan awal, berikutnya adalah menentukan arah pergerakan mula–mula dari titik interior tersebut agar mendapatkan titik yang dituju yaitu titik yang menyebabkan fungsi tujuan optimal.

Pemenuhan arah gerakan mula–mula dari titik pada penyelesaian percobaan awal yang berfungsi untuk meningkatkan laju dari *Z* (F.Tujuan) dengan laju yang paling cepat, maka arah gerakan yang dilakukan akan mengarah kepada garis fungsi tujuan. Oleh karena itu, arah yang paling ideal kemana akan bergerak adalah dengan menambahkan koefisien–koefisien fungsi tujuan pada penyelesaian percobaan awal. Dan koefisien fungsi tujuan inilah yang disebut dengan Tingkat Kemiringan (Gradient). Hal ini dapat diturunkan dalam bentuk rumus sebagai berikut:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{c} \qquad (2.8)$$

di mana,

$\mathbf{x}'$ = matriks kolom dari penyelesaian percobaan awal berikutnya

$\mathbf{x}$ = matriks kolom dari penyelesaian percobaan awal sebelumnya

$\mathbf{c}$ = matriks kolom dari koefisien - koefisien fungsi tujuan sedemikian sehingga:

$$x' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_{n+m} \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n+m} \end{bmatrix}$$

Ketiga: Penggunaan Tingkat Kemiringan (Gradient) yang berasal dari koefisien–koefisien fungsi tujuan sebagai arah gerakan mula–mula titik interior tersebut, tidak dapat digunakan untuk setiap iterasi berikutnya. Hal ini karena akan terbentur pada titik yang diperoleh selanjutnya terletak di luar daerah layak. Oleh karena itu untuk menghindari hal tersebut, akan dibahas bagaimana memproyeksikan titik yang berada di luar daerah layak itu menjadi titik yang termasuk di dalam daerah layak kembali.

Suatu aturan yang memproyeksikan titik di luar daerah layak menjadi titik di dalam daerah layak dinamakan dengan "Tingkat Kemiringan yang Diproyeksikan". Tingkat Kemiringan inilah yang selanjutnya menjadi arah gerakan dari penyelesaian percobaan awal pada tiap iterasi.

Langkah pertama dari Tingkat Kemiringan yang Diproyeksikan sebagai arah gerakan titik interior adalah menetapkan rumus untuk menghitung gradient yang diproyeksikan secara langsung. Dalam hal ini dirumuskan suatu matriks Proyeksi **P**, sebagai berikut:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathbf{t}}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathbf{t}})^{-1}\mathbf{A} \qquad (2.8)$$

dimana,

P adalah Matriks Proyeksi
A adalah Matriks dari Koefisien–koefisien Kendala
$\mathbf{A^t}$ adalah Matriks Transpose dari **A**
I adalah Matriks Identitas

Sedangkan rumus Tingkat Kemiringan yang Diproyeksikan adalah:

$$\mathbf{Cp} = \mathbf{P.c} \qquad (2.9)$$

dimana,

Cp adalah Matriks Tingkat Kemiringan yang Diproyeksikan
P adalah Matriks Proyeksi
c adalah Vektor Kolom dari Koefisien–koefisien fungsi tujuan

Setelah diperoleh Matriks Tingkat Kemiringan yang Diproyeksikan sebagai arah gerakan penyelesaian percobaan awal, selanjutnya menentukan titik penyelesaian percobaan awal yang berikutnya, yaitu dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\mathbf{x'} = \mathbf{x} + \alpha\, t\, \mathbf{Cp} \tag{2.10}$$

dimana

$\mathbf{x'}$ adalah vektor kolom penyelesaian awal berikutnya

x adalah vektor kolom penyelesaian percobaan awal sebelumnya

Cp adalah vektor kolom dari tingkat kemiringan yang diproyeksikan

t adalah koefisien yang hanya digunakan untuk memberikan batas atas 1 pada α yang berguna mempertahankan kelayakan $(\forall x_j \geq 0),\ j = 1,2,\ldots,n+m$

α adalah suatu tetapan di antara 0 dan $(0 < \alpha < 1)$ berguna untuk mengukur proporsi yang dipakai dari jarak yang dapat ditempuh sebelum meninggalkan daerah layak.

Seberapa besar seharusnya α yang akan digunakan. Karena kenaikan pada fungsi tujuan (Z) adalah proporsional terhadap α, suatu nilai yang mendekati batas atas 1 adalah baik sebagai langkah berarti kearah optimalitas. Penemu dari Algoritma Titik Interior mengemukakan bahwa untuk α = 0,5 atau α = 0,99 dapat dikatakan nilai α ini cukup baik diberikan pada proses perhitungan Algoritma Titik Interior.

Keempat: Tahap berikutnya adalah melakukan perubahan pada daerah layak untuk meletakkan penyelesaian percobaan sekarang dekat dengan pusatnya (dekat dengan titik penyelesaian optimal). Hal ini yang disebut **Pemusatan**.

Pemikiran dasar dari pemusatan adalah mengubah skala (unit–unit) untuk setiap variabel sehingga penyelesaian percobaannya mempunyai jarak yang sama terhadap batas–batas kendala dalam sistem koordinat–koordinat yang baru. Hal ini dapat dilakukan karena skala (unit–unit) tersebut bernilai arbitrer artinya dapat diubah–ubah sebagaimana diinginkan tanpa mengubah masalahnya.

Jika diketahui penyelesaian percobaan awal $(x_1,x_2,\ldots,x_{n+m})$ = $(r_1,r_2,\ldots,r_{n+m})$, maka penyelesaian ini berada pada jarak r_1 unit dari batas kendala $x_1 = 0$, r_2 unit dari batas kendala $x_2 = 0$, … , r_{n+m} unit dari batas kendala $x_{n+m} = 0$. Karena unit–unit tersebut bersifat arbitrer sehingga dapat diubah sebagaimana diinginkan tanpa mengubah masalahnya. Oleh karena itu, variabel–variabel diubah skalanya sebagai berikut:

$$\underline{x}_1 = \frac{x_1}{r_1}, \qquad \underline{x}_2 = \frac{x_2}{r_2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \underline{x}_{n+m} = \frac{x_{n+m}}{r_{n+m}}$$

dimana,

$x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}$ = variabel–variabel semula

$\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_{n+m}$ = variabel–variabel setelah mengalami perubahan

$r_1, r_2, \ldots, r_{n+m}$ = nilai–nilai dari penyelesaian percobaan awal

Perubahan skala dilakukan dengan tujuan merubah penyelesaian percobaan awal $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}) = (r_1, r_2, \ldots, r_{n+m})$ menjadi $(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_{n+m}) = (1,1,\ldots,1)$ dalam koordinat–koordinat yang baru. Untuk setiap iterasi berikutnya, setiap masalah diubah kembali skalanya yang berguna untuk memperoleh ciri yang sama. Sehingga penyelesaian percobaan awal yang telah diubah selalu konstan yaitu $(1,1,\ldots,1)$ di dalam koordinat–koordinat yang baru.

Berdasarkan koordinat–koordinat yang baru, masalahnya menjadi:

$$\begin{aligned}
&\text{Maksimumkan} \quad Z = c_1 r_1 \underline{x}_1 + c_2 r_2 \underline{x}_2 + \ldots + c_n r_n \underline{x}_n \\
&\text{Kendala,} \quad a_{11} r_1 \underline{x}_1 + a_{12} r_2 \underline{x}_2 + \ldots + a_{1n} r_n \underline{x}_n + r_{n+1} \underline{x}_{n+1} = b_1 \\
&\qquad a_{21} r_1 \underline{x}_1 + a_{22} r_2 \underline{x}_2 + \ldots + a_{2n} r_n \underline{x}_n + r_{n+2} \underline{x}_{n+2} = b_2 \\
&\qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
&\qquad a_{m1} r_1 \underline{x}_1 + a_{m2} r_2 \underline{x}_2 + \ldots + a_{mn} r_n \underline{x}_n + r_{n+m} \underline{x}_{n+m} = b_m \\
&\qquad \underline{x}_1 \geq 0,\ \underline{x}_2 \geq 0, \ldots, x_{n+m} \geq 0
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Sehingga, untuk menentukan penyelesaian percobaan awal berikutnya dalam koordinat–koordinat yang baru dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{\alpha}{v}\right) Cp \tag{2.12}$$

dimana,
α : suatu konstanta yang dipilih antara 0 dan 1 ($0< \alpha<1$)
v : nilai absolut dari komponen negatif Cp yang mempunyai nilai absolut terbesar.
Hal ini dilakukan dengan tujuan untuk mempertahankan kelayakan dari penyelesaian percobaan awal ($\underline{\mathbf{x}} \geq 0$).

Kelima: Setelah memperoleh penyelesaian percobaan awal pada koordinat–koordinat yang baru dari tiap–tiap iterasi, selanjutnya akan diubah kembali menjadi koordinat semula.
Rumus yang digunakan adalah:

$$\mathbf{X} = \mathbf{D}\underline{\mathbf{x}} \tag{2.13}$$

dengan
X : vektor kolom dari penyelesaian percobaan awal untuk iterasi berikutnya
D : matriks diagonal dari penyelesaian percobaan awal
x̲ : vektor kolom dari penyelesaian percobaan awal pada koordinat yang telah diubah(diperkecil).
Untuk menyatakan **X** optimal, jika penyelesaian percobaan ini praktis 'tidak berubah' dari yang sebelumnya. Dengan perkataan lain, apabila **X** konvergen menuju suatu titik tertentu maka **X** optimal pada titik tersebut. Dengan demikian iterasi dihentikan.

- Untuk sembarang masalah pemrograman linear dalam bentuk umum, yaitu:

Minimumkan $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$
Dengan kendala,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\geq b_2 \\ \vdots \qquad\qquad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\geq b_m \\ x_1, \ldots, x_n &\geq 0 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Bentuk umum dari pemrograman linear dari persamaan (2.14) diubah bentuknya dengan manipulasi matriks. Sehingga, bentuk umum dari pemrograman linear dari persamaan (2.14) menjadi:

$$\begin{aligned} &\text{Minimumkan } \mathbf{Z} = \mathbf{cx} \\ &\text{dengan kendala, } \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ &\qquad\qquad\qquad\quad \mathbf{x} \geq \mathbf{o} \end{aligned} \tag{2.15}$$

Untuk mengubah permasalahan (2.15) ke bentuk Titik Interior dengan langkah–langkah:

Pertama: Mengubah masalah (2.15) dalam bentuk yang diperluas, dengan memasukkan vektor kolom (variabel–variabel *slack*) pada fungsi kendala.

Misalkan,

$$\mathbf{x_s} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ x_{n+3} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix}$$

Setelah ditambahkan dengan variabel *slack*, maka fungsi tujuan dan kendala–kendalanya berubah menjadi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} &Min\ Z = \mathbf{c^T x} \\ &\text{dengan kendala, } [\mathbf{A,I}]\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x_s} \end{bmatrix} = \mathbf{b}, \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x_s} \end{bmatrix} \geq \mathbf{o} \end{aligned} \tag{2.16}$$

dimana,

$$\begin{aligned} &Min\ \ \mathrm{Z} = Max(-\mathrm{Z}) \\ &\mathrm{Z'} = -\mathrm{Z} \\ &Max\ \mathrm{Z'} = -\mathbf{c^T x} \end{aligned}$$

A = merupakan matriks koefisien kendala

$$A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \ldots & -a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & \ldots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \ldots & -a_{mxn} \end{bmatrix}$$

Dengan demikian, penyelesaian percobaan awalnya adalah $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$. Andaikan D adalah matriks diagonal yang bersangkutan, sehingga:

$$D = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & x_n & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & x_{n+1} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & x_{n+m} \end{bmatrix}$$

Kedua: Mencari Tingkat Kemiringan (Gradient). Hal ini dapat diturunkan dalam bentuk rumus sebagai berikut:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{c} \qquad (2.17)$$

Ketiga: Mencari Tingkat Kemiringan yang Diproyeksikan. Langkah pertama dari Tingkat Kemiringan yang Diproyeksikan sebagai arah gerakan titik interior adalah menetapkan rumus untuk menghitung gradient yang diproyeksikan secara langsung. Dalam hal ini dirumuskan suatu matriks Proyeksi **P**, sebagai berikut:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathbf{t}}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathbf{t}})^{-1}\mathbf{A} \qquad (2.18)$$

Sedangkan rumus Tingkat Kemiringan yang Diproyeksikan adalah:

$$\mathbf{Cp} = \mathbf{P.c} \qquad (2.19)$$

Setelah diperoleh Matriks Tingkat Kemiringan yang Diproyeksikan sebagai arah gerakan penyelesaian percobaan awal, selanjutnya menentukan titik penyelesaian percobaan awal yang berikutnya, yaitu dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \alpha\, t\, \mathbf{Cp} \tag{2.20}$$

Keempat: Tahap berikutnya adalah melakukan perubahan pada daerah layak untuk meletakkan penyelesaian percobaan sekarang dekat dengan pusatnya (dekat dengan titik penyelesaian optimal). Hal ini yang disebut **Pemusatan**.

$$
\begin{aligned}
&\text{Minimumkan} \quad Z' = -c_1 r_1 \underline{x}_1 - c_2 r_2 \underline{x}_2 + \ldots - c_n r_n \underline{x}_n \\
&\text{Kendala,} \quad -a_{11} r_1 \underline{x}_1 - a_{12} r_2 \underline{x}_2 - \ldots - a_{1n} r_n \underline{x}_n + r_{n+1} \underline{x}_{n+1} = -b_1 \\
&\qquad -a_{21} r_1 \underline{x}_1 - a_{22} r_2 \underline{x}_2 - \ldots - a_{2n} r_n \underline{x}_n + r_{n+2} \underline{x}_{n+2} = -b_2 \\
&\qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \qquad \vdots \\
&\qquad -a_{m1} r_1 \underline{x}_1 - a_{m2} r_2 \underline{x}_2 - \ldots - a_{mn} r_n \underline{x}_n + r_{n+m} \underline{x}_{n+m} = -b_m \\
&\qquad \underline{x}_1 \geq 0,\ \underline{x}_2 \geq 0, \ldots, x_{n+m} \geq 0
\end{aligned} \tag{2.21}
$$

Sehingga, untuk menentukan penyelesaian percobaan awal berikutnya dalam koordinat–koordinat yang baru dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{\alpha}{v}\right) Cp \tag{2.22}$$

dimana,

α : suatu konstanta yang dipilih antara 0 dan 1 ($0 < \alpha < 1$)

v : nilai absolut dari komponen negatif Cp yang mempunyai nilai absolut terbesar.

Kelima: Setelah memperoleh penyelesaian percobaan awal pada koordinat–koordinat yang baru dari tiap–tiap iterasi, selanjutnya akan diubah kembali menjadi koordinat semula.

Rumus yang digunakan adalah:

$$\mathbf{X} = \mathbf{D}\underline{\mathbf{x}} \tag{2.23}$$

Untuk menyatakan **X** optimal, jika penyelesaian percobaan ini praktis ‘tidak berubah’ dari yang sebelumnya. Dengan perkataan lain, apabila

X konvergen menuju suatu titik tertentu maka **X** optimal pada titik tersebut. Dengan demikian iterasi dihentikan.

2.10 Komponen Gizi Pakan

Istilah "gizi" di Indonesia baru dikenal sekitar tahun 1952–1955 sebagai terjemahan kata bahasa Inggris *nutrition.* Kata gizi berasal dari bahasa Arab (*ghidza*) yang berarti makanan. Kemudian pakan adalah bahan–bahan yang dimakan sehari–hari untuk memenuhi kebutuhan energi bagi pemeliharaan, pertumbuhan, kerja dan pengganti jaringan tubuh yang rusak. Pakan juga dapat diartikan sebagai bahan sumber energi (Budiyanto, 2004).

Pakan merupakan sumber energi utama untuk pertumbuhan dan pembangkit tenaga sapi. Semakin baik mutu dan jumlah pakan yang diberikan kepada sapi tersebut, semakin besar pula tenaga yang ditimbulkan. Selain itu pemberian makanan yang bernutrisi baik akan mampu memberikan cadangan energi yang berbentuk daging dalam tubuh sapi (Muktiani, 2011).

Komposisi energi dan zat gizi setiap pakan tidak sama. Selain itu, pakan tidak mengandung semua zat gizi yang lengkap. Bahan pakan adalah bahan yang dapat dimakan, dicerna dan digunakan oleh hewan. Bahan pakan sapi terdiri dari tanaman, hasil tanaman, dan kadang–kadang berasal dari ternak serta hewan yang hidup dilaut. Menurut Blakely dan Bade (1998) bahan pakan dapat dibagi menjadi dua kelompok yaitu konsentrat dan berserat. Konsentrat berupa bijian dan butiran serta bahan berserat yaitu jerami dan rumput yang merupakan komponen penyusun ransum. Darmono (1993) menjelaskan bahwa bahan pakan yang baik adalah bahan pakan yang mengandung karbohidrat, protein, lemak, vitamin, dan mineral serta tidak mengandung racun yang dapat membahayakan sapi yang mengkonsumsinya.

Ada beberapa pakan untuk sapi seperti hijauan. Hijauan ini berupa makanan sapi yang berasal dari alam, yakni rumput–rumputan. Hijauan yang dianjurkan untuk pakan sapi yaitu antara 85–100 %. Konsentrat merupakan makanan tambahan untuk sapi selain makanan hijauan, terdiri dari dedak babi (sisa hasil dari pengolahan padi), onggok (ampas singkong), dan ampas tahu. Kemudian makanan tambahan berikutnya yaitu vitamin, mineral dan urea yang dapat diberikan kepada sapi untuk menambah nutrisi dan meningkatkan produksi sapi (Muktiani, 2011).

2.10.1 Konsentrat

Pakan penguat (konsentrat) adalah pakan yang mengandung serat kasar relatif rendah dan mudah dicerna. Bahan pakan panguat ini meliputi bahan pakan yang berasal dari biji–bijian seperti jagung giling, menir, dedak, katul, bungkil kelapa, tetes, dan berbagai umbi. Fungsi pakan penguat adalah meningkatkan dan memperkaya nilai gizi pada bahan pakan lain yang nilai gizinya rendah (Sugeng, 1998).

Bekatul dalam susunannya mendekati analisis dedak halus, akan tetapi lebih sedikit mengandung selaput putih dan bahan kulit, di dalam bekatul juga tercampur pecahan halus dari menir. Kandungan nutrient dari bekatul adalah 15% air, 14,5% PK, 48,7% bahan ekstrak tanpa nitrogen (BETN), 7,4% SK, 7,4% LK, dan 7% abu, kadar protein dapat dicerna 10,8% (Lubis, 1992). Menurut Santosa (1995) bekatul mengandung 85% BK, 14% PK, 87,6% TDN, 0,1 kalsium (Ca) dan 0,8% phosphor (P).

Ampas tahu dalam keadaan segar mengandung lebih dari 80%. Kandungan nutrient dari ampas tahu adalah 84% air, 5% PK, 5,8%(bahan ekstrak tanpa nitrogen) BETN, 3,2% SK, 1,2% LK, dan 0,8% abu. Ampas tahu yang sudah dikeringkan masih mengandung kira–kira 16% air, dengan kadar protein dapat dicerna (Prdd) 22,3%(Lubis, 1992). Menurut Siregar (1994) ampas tahu mengandung 23% BK, 23,7% PK, 23,6% SK dan 79% TDN.

Ketela pohon mempunyai umbi dengan kadar tepung yang sangat tinggi. Umbi ketela pohon yang masih segar tidak dianjurkan diberikan pada ternak secara rutin, karena mengandung racun sianida yang sangat berbahaya(Lubis, 1992). Menurut Siregar (2008) kandungan nutrisi ketela pohon adalah 32,3% BK, 3,3% PK, 4,2% SK, 81,8% TDN. Bahan kering adalah bahan yang terkandung di dalam pakan setelah dihilangkan airnya. Sapi potong mampu mengkonsumsi ransum berupa bahan kering sebanyak 3-4% dari bobot badannya (Tillman *et al.*,1991). Protein kasar adalah jumlah nitrogen(N) yang terdapat di dalam pakan dikalikan dengan 6,25 (Nx6,25), sedangkan Prdd adalah protein pakan yang dicerna dan diserap dalam saluran pencernaan (Siregar, 1994). Menurut (Siregar,

1994) TDN adalah jumlah energi dari pakan maupun ransum yang dapat dicerna.

2.10.2 Pakan Hijauan

Pakan hijauan adalah semua bahan pakan yang berasal dari tanaman ataupun tumbuhan berupa daun–daunan, terkadang termasuk batang, ranting dan bunga(Sugeng, 1998). Jerami adalah sisa–sisa hijauan dari tanaman sebangsa padi dan leguminosa, setelah bijinya dipetik untuk dimanfaatkan oleh manusia. Menurut Siregar (1994) jerami padi mengandung 21% BK, 9,2% PK, 27,4 SK, dan 41% *total digestible nutrients* (TDN).

2.11 Kebutuhan Pakan akan Gizi Seimbang

Kebutuhan sapi akan zat gizi terdiri atas kebutuhan hidup pokok dan produksinya. Zat–zat pakan dalam ransum (pakan) hendaknya tersedia dalam jumlah yang cukup dan seimbang sebab keseimbangan zat–zat pakan dalam ransum sangat berpengaruh terhadap daya cerna. Kemampuan sapi dalam mengkonsumsi ransum dipengaruhi oleh beberapa faktor yaitu :

1. Faktor sapi itu sendiri yang meliputi besar tubuh atau bobot badan, potensi genetik, status fisiologi, tingkat produksi, dan kesehatan sapi
2. Faktor ransum yang diberikan, meliputi bentuk dan sifat, komposisi zat–zat gizi, frekuensi pemberian, keseimbangan zat–zat gizi serta kandungan bahan toksik (bahan limbah berbahaya seperti televisi, telephon seluler, komputer) dan anti nutrisi
3. Faktor lain yang meliputi suhu dan kelembaban udara, curah hujan, lama siang atau malam hari serta keadaan ruangan kandang dan tempat ransum. Konversi pakan dipengaruhi oleh ketersediaan zat–zat gizi dalam ransum dan kesehatan sapi. Semakin tinggi nilai konversi berarti pakan yang digunakan untuk menaikkan bobot badan persatuan berat semakin banyak atau efisiensi pakan rendah. Konversi pakan adalah perbandingan antara konsumsi BK (bahan kering) dengan pertambahan bobot badan harian. Efisiensi pakan adalah perbandingan antara pertambahan bobot badan harian dengan pakan yang dikonsumsi dikalikan 100%.

(Haryanti, 2009)

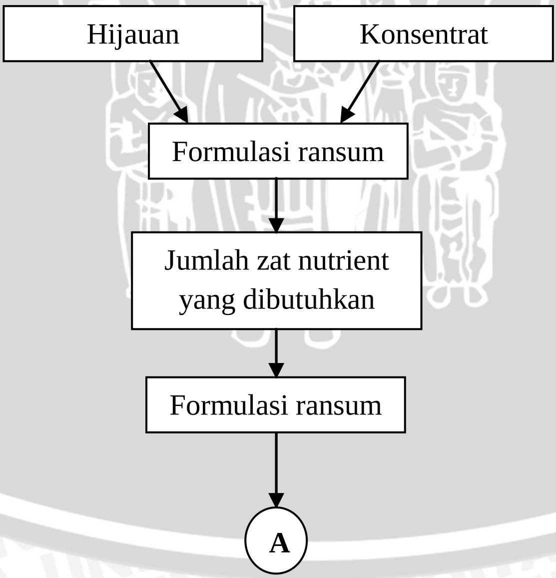
2.12 Ransum Seimbang

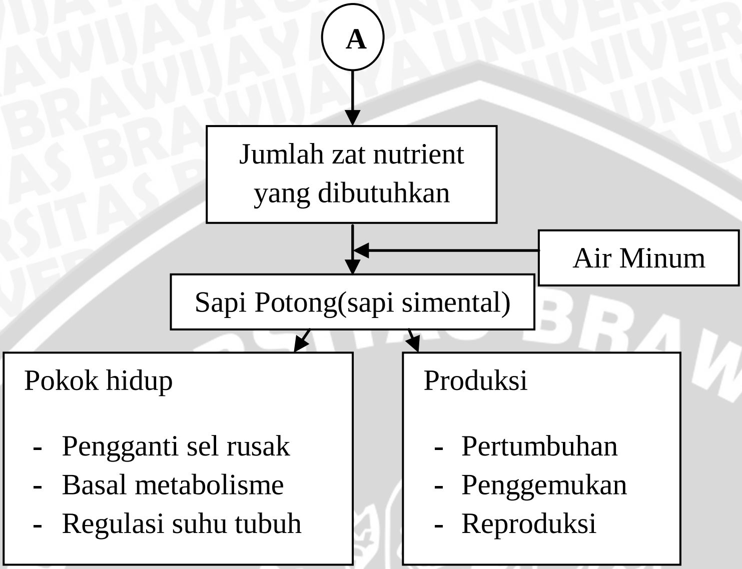
Ransum seimbang adalah ransum yang diberikan selama 24 jam yang mengandung semua zat nutrien (jumlah dan macam nutriennya) dan perbandingan yang cukup untuk memenuhi kebutuhan gizi sesuai dengan tujuan pemeliharaan sapi. Pengetahuan tentang kualifikasi bahan pakan diperlukan untuk menyusun ransum seimbang. Penyusunan ransum seimbang yang sesuai dengan kebutuhan sapi, akan dapat menghasilkan produksi yang optimal (Umiyasih dan Anggraeny, 2007).

Ransum merupakan campuran dari dua atau lebih bahan pakan yang diberikan untuk seekor ternak selama sehari semalam. Ransum harus dapat memenuhi kebutuhan zat nutrient yang diperlukan ternak untuk berbagai fungsi tubuhnya, yaitu untuk hidup pokok, produksi maupun reproduksi (Siregar, 1995).

Ransum yang seimbang sesuai dengan kebutuhan ternak merupakan syarat mutlak dihasilkannya produktivitas yang optimal. Penyusunan ransum tidak boleh merugikan peternak, misalnya peningkatan berat badan yang tidak dapat memenuhi target, salah pemberian pakan karena terlalu banyak dalam memperkirakan kandungan nutrient pakan ataupun karena adanya zat anti nutrisi.

Gambar berikut menyajikan diagram strategi penyusunan ransum seimbang.





Gambar 2.1 Srategi penyusunan ransum