

**ANALISIS DINAMIK
MODEL PENGALIHAN PEMANGSAAN ZOOPLANKTON
TERHADAP *NON-TOXIC PHYTOPLANKTON* (NTP)
DAN *TOXIC PRODUCING PHYTOPLANKTON* (TPP)**

SKRIPSI

oleh
MUHAMMAD RIZKI FIRDAUS
0810940055-94



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2013**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



**ANALISIS DINAMIK
MODEL PENGALIHAN PEMANGSAAN ZOOPLANKTON
TERHADAP *NON-TOXIC PHYTOPLANKTON* (NTP)
DAN *TOXIC PRODUCING PHYTOPLANKTON* (TPP)**

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh

MUHAMMAD RIZKI FIRDAUS
0810940055-94



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2013**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

**ANALISIS DINAMIK
MODEL PENGALIHAN PEMANGSAAN ZOOPLANKTON
TERHADAP *NON-TOXIC PHYTOPLANKTON* (NTP)
DAN *TOXIC PRODUCING PHYTOPLANKTON* (TPP)**

oleh

MUHAMMAD RIZKI FIRDAUS

0810940055-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 31 Januari 2013
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Pembimbing I

Pembimbing II

Drs. Marsudi, M.S.

NIP. 196101171988021002

Kwardiniya A., S.Si., M.Si.

NIP. 197006221998022001

**Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya**

Dr. Abdul Rouf A., M.Sc.

NIP. 196709071992031001

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : MUHAMMAD RIZKI FIRDAUS
NIM : 0810940055-94
Jurusan : Matematika
Penulis skripsi berjudul : Analisis Dinamik Model Pengalihan Pemangsaan Zooplankton Terhadap *Non-Toxic Phytoplankton* (NTP) dan *Toxic Producing Phytoplankton* (TPP)

dengan ini menyatakan bahwa :

1. skripsi ini adalah hasil pemikiran saya, bukan hasil plagiat dari tulisan orang lain. Rujukan-rujukan yang tercantum pada daftar pustaka hanya digunakan sebagai acuan atau referensi.
2. Apabila suatu saat nanti diketahui bahwa isi skripsi saya merupakan hasil plagiat, maka saya bersedia menanggung akibat hukum dari keadaan tersebut.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan penuh kesadaran.

Malang, 31 Januari 2013
yang menyatakan,

Muhammad Rizki Firdaus
NIM. 0810940055

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



**ANALISIS DINAMIK MODEL PENGALIHAN
PEMANGSAAN ZOOPLANKTON TERHADAP *NON-TOXIC*
PHYTOPLANKTON (NTP) DAN *TOXIC PRODUCING*
PHYTOPLANKTON (TPP)**

ABSTRAK

Skripsi ini membahas model pengalihan pemangsa zooplankton terhadap spesies NTP dan TPP. Populasi zooplankton dibagi menjadi dua subpopulasi yakni zooplankton pemangsa NTP dan pemangsa TPP. Zooplankton tersebut dapat dari memangsa NTP kemudian memangsa TPP, atau sebaliknya. Interaksi antara NTP, TPP, dan zooplankton dimodelkan dalam bentuk sistem otonomus tak linier berdimensi empat. Kedua subpopulasi zooplankton tersebut dapat diagregasi menjadi satu persamaan sehingga sistem dapat direduksi menjadi tiga dimensi. Variabel tak bebas pada sistem otonomus berdimensi tiga tersebut menyatakan populasi NTP (P_1), populasi TPP (P_2), dan populasi zooplankton (Z). Analisis dinamik terhadap sistem tersebut berupa perhitungan titik kesetimbangan, syarat eksistensi titik kesetimbangan, serta kestabilan lokal titik kesetimbangan. Terdapat enam titik kesetimbangan yang diperoleh dari model, yakni $E_0 = (0,0,0)$, $E_1 = (K, 0,0)$, $E_2 = (0, K, 0)$, $E_3 = (\widehat{P}_1, \widehat{P}_2, 0)$, $E_4 = (\overline{P}_1, 0, \overline{Z})$, dan $E^* = (P_1^*, P_2^*, Z^*)$. Dari enam titik tersebut, hanya E_0 dan E_4 yang tak stabil. Hasil analisis dari enam titik kesetimbangan tersebut dan dampak yang ditimbulkan oleh pengalihan pemangsaan zooplankton diilustrasikan dalam simulasi numerik.

Kata kunci: *non-toxic phytoplankton*, *toxic producing phytoplankton*, zooplankton, agregasi sistem, pengalihan pemangsaan, analisis dinamik

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DYNAMICAL ANALYSIS OF THE MIGRATORY GRAZING OF ZOOPLANKTON BETWEEN NON-TOXIC PHYTOPLANKTON (NTP) AND TOXIC PRODUCING PHYTOPLANKTON

ABSTRACT

This paper discusses model of the migratory grazing of zooplankton between non-toxic phytoplankton (NTP) and toxic producing phytoplankton (TPP) species. Zooplankton are divided into two subpopulations, namely NTP predator and TPP predator. Zooplankton can change their object of predation from NTP to TPP or vice versa. Interaction among NTP, TPP, and zooplankton is constructed as a four-dimensional nonlinear autonomus system. The two equations for zooplankton subpopulations can be aggregated become one equation, so the system can be reduced into a three-dimensional nonlinear autonomus system. The dependent variables are NTP population (P_1), TPP population (P_2), and zooplankton population (Z). Dynamical analysis of the system includes the calculation of the equilibrium points, equilibrium existence condition, and local stability of equilibrium points. There are six equilibrium points, namely $E_0 = (0,0,0)$, $E_1 = (K, 0,0)$, $E_2 = (0, K, 0)$, $E_3 = (\widehat{P}_1, \widehat{P}_2, 0)$, $E_4 = (\overline{P}_1, 0, \overline{Z})$, and $E^* = (P_1^*, P_2^*, Z^*)$. Among six equilibrium points, only E_0 and E_4 which are unstable. The results of the stability analysis of the six equilibrium points and the influence of migratory grazing of zooplankton are illustrated in the numerical simulations.

Keywords: non-toxic phytoplankton, toxic producing phytoplankton, zooplankton, aggregated system, migratory grazing, dynamical analysis

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa yang telah melimpahkan rahmat, pertolongan, hidayah, serta petunjuk-Nya, sehingga skripsi yang berjudul “Analisis Dinamik Model Pengalihan Pemangsa Zooplankton dalam Memangsa *Non-Toxic Phytoplankton* (NTP) dan *Toxic Producing Phytoplankton* (TPP)” ini dapat diselesaikan dengan baik. Skripsi ini disusun dan diajukan sebagai syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Brawijaya.

Pada penyelesaian skripsi ini penulis banyak mendapat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak, oleh karena itu pada kesempatan kali ini penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. **Drs. Marsudi, M.S.** selaku pembimbing I dan Kwardiniya A.,SSi.,MSi. selaku pembimbing II, atas segala bimbingan, motivasi, bantuan, serta kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini,
2. Dr. Wuryansari Muharini K., M.Si. selaku dosen penguji, atas segala kritik dan saran yang telah diberikan untuk perbaikan skripsi ini,
3. Dr. Abdul Rouf Al-Ghofari, M.Sc. selaku Ketua Jurusan Matematika dan Dr. Sobri Abusini, M.T. selaku Ketua Program Studi Matematika,
4. Seluruh dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
5. Ayah, Ibu, Mbah Kuspin, Adik Rizka, serta semua saudara penulis atas segala doa, bantuan, motivasi dan nasehat yang telah diberikan.
6. Sukma, Rohmia, Rizal, Gunawan, Prila, Deni, Firman, Satrio, Resti, Medya, teman-teman Kontrakan Salah Gaul, semua teman-teman seperjuangan Matematika 2008, serta adik-adik tingkat Matematika, atas dukungan, bantuan, dan doanya,
7. semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun, melalui email penulis rizkimatematika08@gmail.com.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi berbagai pihak, serta menjadi sumber inspirasi untuk penulisan skripsi selanjutnya.

Malang, 31 Januari 2013

Penulis



DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGESAHAN	iii
HALAMAN PERNYATAAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
DAFTAR LAMPIRAN	xix
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Pembatasan Kajian	2
1.4 Tujuan Penulisan	3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 Persamaan Diferensial	5
2.2 Sistem Dinamik	6
2.3 Sistem Otonomus.....	6
2.3.1 Titik Kesetimbangan	6
2.3.2 Sistem Otonomus Linear	7
2.3.3 Linearisasi Sistem Otonomus Nonlinear	8
2.4 Kestabilan Titik Kesetimbangan	10
2.5 Model <i>Predator-Prey</i>	10
2.6 Model Logistik	11
2.7 Model Kompetisi	11
2.8 Model Perpindahan Subpopulasi	12
2.9 Plankton.....	13
2.9.1 Fitoplankton	13
2.9.2 Zooplankton	14
2.9.3 Interaksi Antar Plankton	14

BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Model Kompartemen	17
3.2 Model Pengalihan Pemangsaan Zooplankton terhadap <i>Non-Toxic Phytoplankton</i> (NTP) dan <i>Toxic Producing Phytoplankton</i> (TPP).....	18
3.2.1 Laju Perubahan Populasi NTP dan TPP	18
3.2.2 Laju Perubahan Populasi Zooplankton	20
3.2.3 Agregasi Sistem	22
3.3 Titik Keseimbangan Model	25
3.4 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan Model	33
3.4.1 Titik Keseimbangan $E_0 = (0,0,0)$	33
3.4.2 Titik Keseimbangan $E_1 = (K, 0,0)$	33
3.4.3 Titik Keseimbangan $E_2 = (0, K, 0)$	34
3.4.4 Titik Keseimbangan $E_3 = (\bar{P}_1, \bar{P}_2, 0)$	35
3.4.5 Titik Keseimbangan $E_4 = (\bar{P}_1, 0, \bar{Z})$	37
3.4.6 Titik Keseimbangan $E^* = (P_1^*, P_2^*, Z^*)$	38
3.5 Simulasi Numerik dan Interpretasi Model	45
3.5.1 Simulasi Numerik Untuk Kestabilan Titik E_1	45
3.5.2 Simulasi Numerik Untuk Kestabilan Titik E_2	47
3.5.3 Simulasi Numerik Untuk Kestabilan Titik E_3, E_4 , dan E^*	48

BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan	53
4.2 Saran	53

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 3.1 Diagram Kompertemen	17
Gambar 3.2 Simulasi numerik untuk kestabilan titik E_1	46
Gambar 3.3 Simulasi numerik untuk kestabilan titik E_2	47
Gambar 3.4 Simulasi numerik untuk kestabilan titik E_3	49
Gambar 3.5 Simulasi numerik untuk kestabilan titik E_4	50
Gambar 3.6 Simulasi numerik untuk kestabilan titik E^*	51



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 2.1 Tipe dan bentuk fungsi respon	11
Tabel 3.1 Syarat eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan model	43
Tabel 3.2 Nilai parameter untuk simulasi kestabilan titik E_1	45



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

Lampiran 1 *Listing program* 57

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada ekosistem perairan laut, peranan plankton sangat penting dalam siklus rantai makanan. Plankton yang terbagi menjadi zooplankton dan fitoplankton saling berinteraksi, dimana zooplankton merupakan konsumen yang memangsa fitoplankton sebagai sumber makanannya (Lalli dan Parsons, 1997). Keberadaan fitoplankton yang terdiri dari *Toxin Producing Phytoplankton* (TPP) dan *Non-Toxic Phytoplankton* (NTP) juga mempengaruhi jumlah populasi dari zooplankton. TPP merupakan fitoplankton yang dapat mengeluarkan zat racun atau toksin yang dapat menghambat pemangsaan dan dapat menyebabkan kematian bagi zooplankton yang memangsanya, sedangkan NTP merupakan jenis yang tidak mengeluarkan racun sehingga dapat menyebabkan zooplankton berkembang biak dengan baik (Chattopadhyay, dkk, 2006). Zooplankton merupakan spesies yang selalu aktif bergerak untuk memperoleh fitoplankton sebagai sumber makanan. Sifat zooplankton yang aktif bergerak mencari mangsa memungkinkan zooplankton beralih dari memangsa NTP kemudian memangsa TPP atau sebaliknya.

Dalam tulisan Roy dkk (2008), telah dibahas analisis model zooplankton yang beralih dari memangsa NTP ke TPP atau sebaliknya. Analisis model tersebut menghasilkan enam titik kesetimbangan beserta kestabilannya. Akan tetapi pada titik kesetimbangan interior, kestabilan titik diperoleh secara numerik dan bukan secara analitik. Simulasi yang dilakukan terhadap model disajikan dalam bentuk dua dimensi, dimana simulasi tersebut hanya untuk menunjukkan pengaruh pengalihan pemangsaan zooplankton dan zat toksin dari TPP terhadap dinamika populasi NTP, TPP, dan zooplankton, namun tidak menggambarkan kestabilan titik kesetimbangan model.

Ratih Sukmaningtyas (2012), dalam skripsinya yang berjudul "Analisis Dinamik Model Interaksi antara Dua Spesies TPP dan Zooplankton" juga membahas analisis dari interaksi spesies zooplankton dan fitoplankton. Akan tetapi, dalam pembahasan

tersebut diperoleh model interaksi berdimensi tiga dan tidak terjadi pengalihan pemangsaan pada spesies zooplankton.

Berdasarkan hal tersebut, maka pada skripsi ini dibahas model pengalihan pemangsaan zooplankton terhadap NTP dan TPP untuk menentukan titik kesetimbangan dan jenis kestabilan model, dimana analisis kestabilan titik kesetimbangan interior dari model tersebut dilakukan secara analitik agar dapat diketahui bagaimana syarat kestabilan dari titik tersebut. Simulasi numerik dilakukan tidak hanya untuk mengetahui pengaruh pengalihan zooplankton terhadap dinamika populasi NTP, TPP, dan zooplankton, tetapi juga diperlihatkan eksistensi serta kestabilan dari masing-masing titik kesetimbangan model. Simulasi numerik disajikan dalam bentuk tiga dimensi.

1.1 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, dapat dirumuskan beberapa masalah sebagai berikut.

- a. Bagaimana model pengalihan pemangsaan zooplankton terhadap NTP dan TPP?
- b. Bagaimana titik kesetimbangan model?
- c. Bagaimana kestabilan setiap titik kesetimbangan model dan syarat kestabilannya?
- d. Bagaimana simulasi numerik model dan interpretasinya?

1.2 Pembatasan Kajian

Skripsi ini difokuskan pada pembahasan dengan beberapa batasan kajian sebagai berikut.

- a. Laju pengalihan pemangsaan zooplankton dari memangsa NTP ke TPP atau sebaliknya tidak bergantung pada jumlah populasi NTP dan TPP.
- b. Dalam model hanya terdapat masing-masing satu spesies dari NTP, TPP, dan zooplankton.
- c. Ekosistem bersifat tertutup.

1.4 Tujuan Penulisan

Penulisan skripsi ini bertujuan untuk:

- a. mengetahui model pengalihan pemangsaan zooplankton terhadap NTP dan TPP,
- b. menentukan titik kesetimbangan model dan syarat eksistensinya,
- c. menentukan kestabilan dari masing-masing titik kesetimbangan model beserta syarat kestabilannya,
- d. mensimulasikan model secara numerik dan menginterpretasikannya.



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Persamaan Diferensial

Dalam sains dan teknik, model matematika dikembangkan untuk membantu memahami fenomena fisik. Model tersebut seringkali menghasilkan suatu persamaan yang memuat beberapa turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui. Persamaan tersebut dikenal sebagai persamaan diferensial. Sebuah persamaan diferensial yang memuat turunan biasa terhadap satu variabel bebasnya disebut sebagai persamaan diferensial biasa, sedangkan persamaan diferensial yang memuat turunan parsial terhadap lebih dari satu variabel bebasnya dinamakan persamaan diferensial parsial.

Persamaan diferensial biasa linear adalah setiap persamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = F(x),$$

dimana $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, ..., $a_0(x)$, dan $F(x)$ hanya bergantung pada variabel bebas x . $F(x)$ disebut bagian tak homogen dan persamaan tersebut dikatakan homogen jika $F(x) = 0$. Persamaan diferensial biasa yang variabel tak bebas atau turunannya berderajat lebih dari satu dan atau terdapat perkalian antara variabel tak bebas dengan turunannya disebut sebagai persamaan diferensial biasa tak linear.

Sistem persamaan diferensial biasa berdimensi m adalah suatu sistem yang terdiri dari m persamaan diferensial biasa dengan m fungsi yang tidak diketahui. Sistem tersebut berbentuk

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_m) \\ &\vdots \\ \frac{dx_m}{dt} &= f_m(t, x_1, x_2, \dots, x_m) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Jika masing-masing fungsi f_1, f_2, \dots, f_m adalah fungsi linear dari variabel tak bebas x_1, x_2, \dots, x_m , maka sistem (2.1) disebut sistem linear (Nagle dan Saff, 1993).

2.2. Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah suatu sistem yang dapat diketahui nilainya di masa yang akan datang jika diberikan suatu kondisi awal pada masa sekarang atau di masa yang telah lalu. Contoh untuk suatu sistem dinamik adalah

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -2x \\ \frac{dy}{dt} &= -y \end{aligned}$$

dimana solusi dari $x(t)$ dan $y(t)$ menentukan keadaan sistem pada saat t . Jika diketahui $x(t_0) = x_0$ dan $y(t_0) = y_0$, maka kita dapat menentukan keadaan sistem pada waktu mendatang $t > t_0$, yaitu $x(t) = Ae^{-2(t-t_0)}$ dan $y(t) = Be^{-(t-t_0)}$, untuk $t \geq t_0$, dengan A dan B adalah konstanta. (Nagle dan Saff, 1993).

2.3. Sistem Otonomus

Sistem persamaan diferensial yang berbentuk

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (2.2)$$

dengan f_i adalah fungsi yang tidak bergantung secara eksplisit terhadap t disebut sistem otonomus (Boyce dan DiPrima, 2000).

2.3.1. Titik Kesetimbangan

Pandang sistem otonomus (2.2). Titik $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ yang memenuhi

$$\begin{aligned} f_1(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) &= 0 \\ f_2(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) &= 0 \end{aligned}$$

disebut titik kritis sistem otonomus (2.2). Titik kritis \vec{x}^* merupakan solusi sistem (2.2) yang bernilai konstan, sebab $\frac{dx_i}{dt} = 0, i = 1, \dots, n$.

Keadaan yang menyebabkan $\frac{dx_i}{dt} = 0, i = 1, \dots, n$ disebut keadaan setimbang dan titik yang memenuhi kondisi tersebut dinamakan titik kesetimbangan (Boyce dan DiPrima, 2000).

2.3.2. Sistem Otonomus Linear

Bentuk sistem otonomus linear berdimensi tiga adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned} \quad (2.3)$$

dengan a_{ij} adalah konstanta riil, untuk $i, j = 1, \dots, 3$. Persamaan (2.3) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x},$$

dengan $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ dan $A = [a_{ij}]$ (Boyce dan DiPrima, 2000).

Teorema 2.1 (Kestabilan Berdasarkan Nilai Eigen)

Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ adalah nilai eigen matriks A dari sistem otonomus linear (2.3) dengan $\det(A) \neq 0$, maka jenis-jenis kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.3) adalah sebagai berikut.

- Stabil asimtotik jika $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ bernilai negatif.
- Tak stabil pelana jika nilai $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ memiliki tanda yang berbeda.

c. Tidak stabil jika $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ bernilai positif.
(Boyce dan DiPrima, 2000).

Teorema 2.2 (Kriteria Routh-Hurwitz)

Jika suatu sistem linear orde n mempunyai persamaan karakteristik berbentuk

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \quad (2.4)$$

dimana koefisien $a_i, i = 0, 1, \dots, n$ adalah real, maka kestabilan titik kesetimbangan dapat ditentukan dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Berdasarkan persamaan (2.4), dapat dibentuk k matriks menggunakan koefisien-koefisien dari persamaan tersebut, yakni

$$D_1 = [a_1], D_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix}, D_3 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix},$$

$$D_k = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & a_k \end{bmatrix}, k = 1, 2, \dots, n.$$

Titik kesetimbangan sistem bersifat stabil jika dan hanya jika determinan matriks Routh-Hurwitz positif, yakni

$$Det D_k > 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n$$

(Glass dan Murray, 2001).

2.3.3. Linearisasi Sistem Otonomus Nonlinear

Perhatikan sistem otonomus nonlinear berdimensi tiga berikut

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{dx_2}{dt} &= F_2(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{dx_3}{dt} &= F_3(x_1, x_2, x_3) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Diasumsikan bahwa F_1, F_2, F_3 mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$. Deret Taylor fungsi F_1, F_2, F_3 di sekitar titik \vec{x}^* adalah

$$F_i(\vec{x}) = F_i(\vec{x}^*) + \frac{\partial F_i(\vec{x}^*)}{\partial x_1} (x_1 - x_1^*) + \frac{\partial F_i(\vec{x}^*)}{\partial x_2} (x_2 - x_2^*) + \frac{\partial F_i(\vec{x}^*)}{\partial x_3} (x_3 - x_3^*) + \eta_i(\vec{x}^*),$$

dengan $\eta_i(\vec{x}^*)$ adalah suku sisa, $\forall i = 1, 2, 3$.

Karena $F_i(\vec{x}) = \frac{dx_i}{dt} = \frac{d}{dt}(x_i - x_i^*)$, untuk $i = 1, 2, 3$, maka diperoleh

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \\ x_3 - x_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(\vec{x}^*) \\ F_2(\vec{x}^*) \\ F_3(\vec{x}^*) \end{bmatrix} + J(\vec{x}^*) \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \\ x_3 - x_3^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(\vec{x}^*) \\ \eta_2(\vec{x}^*) \\ \eta_3(\vec{x}^*) \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

dengan matriks $J(\vec{x}^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2} & \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}_{x^*}$

disebut matriks Jacobi atau *partial derivative matrix*.

Misalkan $\hat{x}_1 = x_1 - x_1^*$, $\hat{x}_2 = x_2 - x_2^*$, $\hat{x}_3 = x_3 - x_3^*$, serta mengingat $F_1(\vec{x}^*) = F_2(\vec{x}^*) = F_3(\vec{x}^*) = 0$, maka persamaan (2.6) dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} \frac{d\hat{x}_1}{dt} \\ \frac{d\hat{x}_2}{dt} \\ \frac{d\hat{x}_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2} & \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}_{x^*} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(\vec{x}^*) \\ \eta_2(\vec{x}^*) \\ \eta_3(\vec{x}^*) \end{bmatrix}.$$

Bentuk tersebut dapat ditulis sebagai

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J(\vec{x}^*)\vec{w} + \vec{\eta},$$

dengan $\vec{w} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ dan $\vec{\eta} = (\eta_1(\vec{x}^*), \eta_2(\vec{x}^*), \eta_3(\vec{x}^*))$. Jika (x_1, x_2, x_3) cukup dekat dengan (x_1^*, x_2^*, x_3^*) , maka $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ bernilai kecil, menyebabkan $\|\vec{\eta}\| \leq \|\vec{w}\|$. Oleh karena itu, $\vec{\eta}$ dapat diabaikan dan sistem nonlinear (2.5) dapat dihipotesiskan oleh sistem linear

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \mathcal{J}\vec{w} \quad (2.7)$$

(Robinson, 2004).

2.4. Kestabilan Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan dari sistem otonomus nonlinear (2.5) bersifat

1. stabil asimtotik jika titik kesetimbangan sistem yang dilinearkan adalah stabil asimtotik,
2. tak stabil jika titik kesetimbangan sistem yang dilinearkan adalah tak stabil (Robinson, 2004).

2.5. Model *Predator-Prey*

Persamaan diferensial biasa yang menggambarkan interaksi *predator* dan *prey* pertama kali digunakan oleh Volterra pada tahun 1928. Pemangsaan *predator* terhadap *prey* disebut predasi. Model interaksi tersebut kemudian dikenal dengan nama model Lotka-Volterra, yaitu

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} &= cxy - dy \end{aligned} \quad (2.8)$$

dengan $x(t)$ adalah kepadatan populasi *prey* dan $y(t)$ kepadatan populasi *predator* setiap waktu t . Parameter $a, b, c, d > 0$ dengan a adalah angka kelahiran alami *prey*, b adalah koefisien pemangsaan *prey* oleh *predator*, d adalah tingkat kematian alami predator dan c adalah koefisien perkembangbiakan *predator* karena adanya predasi.

Pada model *predator-prey*, laju predasi atau laju memangsa per kapita predator terhadap *prey* sering disebut sebagai fungsi respon. Fungsi respon digunakan untuk mengendalikan pertumbuhan dari

populasi *predator* ataupun *prey*. Fungsi respon tersebut diperlihatkan pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1. Tipe dan bentuk fungsi respon

Tipe	Bentuk fungsi respon
Holling tipe I	Ax
Holling tipe II	$\frac{Ax}{x + B}$
Holling tipe III	$\frac{Ax^2}{x^2 + B^2}$

(Glass dan Murray, 2001).

2.6. Model Logistik

Model logistik seringkali digunakan untuk menggambarkan laju pertumbuhan suatu populasi. Model tersebut dinyatakan sebagai

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right),$$

dimana N adalah tingkat populasi suatu spesies, K menyatakan daya kapasitas lingkungan (*carrying capacities*) dan r adalah konstanta positif yang menyatakan laju pertumbuhan intrinsik (Glass dan Murray, 2001).

2.7. Model Kompetisi

Dalam sistem kompetisi biasanya terdapat dua atau lebih spesies yang bersaing untuk mendapatkan sumber makanan yang terbatas atau saling menghambat pertumbuhan antar spesies. Pada saat dua spesies saling bersaing, maka salah satu spesies biasanya tidak dapat berkembang biak dengan baik .

Masing-masing spesies Lotka-Volterra N_1 dan N_2 yang saling bersaing dalam memperebutkan ruang dan nutrisi untuk berkembang memiliki pertumbuhan logistik, sehingga dapat dimodelkan sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1} - \alpha_{12} \frac{N_2}{K_1} \right) \\ \frac{dN_2}{dt} &= r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2} - \alpha_{21} \frac{N_1}{K_2} \right)\end{aligned}\quad (2.9)$$

dengan $r_1, r_2, K_1, K_2, \alpha_{12}, \alpha_{21}$ adalah konstanta positif. r_1 dan r_2 menyatakan tingkat pertumbuhan N_1 dan N_2 , K_1 dan K_2 menyatakan daya dukung (*carrying capacities*), α_{12} adalah nilai efek kompetisi N_2 terhadap N_1 , dan α_{21} adalah nilai efek kompetisi N_1 terhadap N_2 (Glass dan Murray, 2001).

2.8. Model Perpindahan Subpopulasi

Misalkan terdapat suatu populasi yang memiliki kepadatan total $n(t)$. Populasi tersebut dibagi menjadi subpopulasi $n_i(t), i = 1, \dots, N$ dengan N adalah jumlah dari subpopulasi. Sebagai contoh, individu dapat berpindah dari ruang satu ke ruang yang lain atau dari state satu ke state yang lain. Sebuah vektor ruang dapat ditulis sebagai berikut $(n_1(t), n_2(t), \dots, n_N(t))$. Model mikrosistem menunjukkan pertumbuhan dari subpopulasi sebagai berikut

$$\varepsilon \frac{dn_i}{dt} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} n_j - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N c_{ki} n_i + \varepsilon g_i(n_1, \dots, n_N), \quad (2.10)$$

dengan c_{ij} adalah laju perpindahan dari state j ke state i tiap satuan waktu, g_i adalah fungsi yang menunjukkan pertumbuhan subpopulasi, dan ε adalah konstanta positif yang bernilai sangat kecil ($\varepsilon \ll 1$). Laju perpindahan memiliki skala waktu yang lebih cepat daripada parameter yang lain. Kasus yang paling sederhana adalah mengasumsikan pertumbuhan linear untuk subpopulasi, sehingga persamaan (2.10) menjadi

$$\varepsilon \frac{dn_i}{dt} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} n_j - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N c_{ki} n_i + \varepsilon r_i n_i, \quad (2.11)$$

dengan $r_i n_i$ adalah fungsi pertumbuhan linear subpopulasi. Pada kasus yang hanya memiliki dua state, persamaan (2.11) menjadi

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{dn_1}{dt} &= c_{12}n_2 - c_{21}n_1 + \varepsilon r_1 n_1 \\ \varepsilon \frac{dn_2}{dt} &= c_{21}n_1 - c_{12}n_2 + \varepsilon r_2 n_2\end{aligned}$$

(Auger dan Poggiale, 1996).

2.9. Plankton

Plankton adalah mikroorganisme yang hidup melayang atau mengambang di perairan dan tidak mempunyai kemampuan untuk melawan arus air. Keberadaan plankton sangat mempengaruhi kehidupan di perairan karena memegang peranan penting sebagai sumber makanan bagi berbagai organisme laut (Lalli dan Parsons, 1997). Berdasarkan ukurannya plankton dibagi ke dalam beberapa kelompok yaitu: Ultraplankton ($< 2 \mu\text{m}$), Nanoplankton ($5\text{-}20 \mu\text{m}$), Microplankton ($20\text{-}60 \mu\text{m}$), dan Netplankton ($> 60 \mu\text{m}$). Plankton dapat dibagi menjadi fitoplankton dan zooplankton (Moss, 1998).

2.9.1. Fitoplankton

Tumbuhan plankton yang sering disebut fitoplankton adalah produsen utama di ekosistem perairan laut. Oleh karena itu keberadaannya sangat penting dalam siklus rantai makanan di ekosistem perairan laut. Fitoplankton mengubah bahan-bahan anorganik berupa nutrisi seperti nitrogen, fosfor, karbon, dan silikon menjadi bahan organik dan oksigen melalui proses fotosintesis.

Fitoplankton terdiri dari dua kelompok besar, yaitu diatom dan dinoflagelata. Diatom termasuk ke dalam kelas Alga yang dinamakan *Bacillariophyceae* (*Diatomophyceae*). Salah satu spesies diatom adalah *Chaetoceros laciniosus*. Dinoflagellata termasuk ke dalam kelas *Phyrrhophyceae*. Salah satu contoh spesies Dinoflagellata adalah *Gymnodinium catenatum*. (Lalli dan Parsons, 1997).

Beberapa jenis fitoplankton yang sebagian besar berasal dari Dinoflagellata mempunyai kemampuan untuk menghasilkan zat toksin atau senyawa penghambat. Fitoplankton yang demikian disebut sebagai *Toxin-Producing Phytoplankton* (TPP). Contoh dari spesies TPP antara lain: *Noctiluca scintillans*, *Alexandrium sp*, *Gymnodinium catenatum*, *Pyrodinium bahamense*, dll (Sarkar, dkk, 2001).

2.9.2. Zooplankton

Zooplankton merupakan plankton hewan. Rotifera, Kladocera, dan Kopepoda merupakan jenis-jenis zooplankton predator. Rotifera mengerakkan siliannya yang berada didekat mulut seperti memutar roda yang menyebabkan air beserta fitoplankton yang berada di sekitarnya akan terbawa arus masuk ke dalam mulut. Kladocera termasuk dalam kelas *Crustacea*. Kladocera yang liar selalu aktif mencari mangsa. Kopepoda lebih besar daripada Kladocera. Mangsa dari Kopepoda dapat berupa zooplankton yang lebih kecil atau koloni fitoplankton (Moss, 1998).

Zooplankton dikenal sebagai spesies yang selalu aktif melakukan migrasi vertikal untuk memperoleh fitoplankton sebagai makanan. Pada saat melakukan pemangsaan, zooplankton dapat memangsa NTP kemudian beralih memangsa TPP, ataupun sebaliknya (Roy, dkk, 2008). Secara umum ada tiga pola zooplankton laut dalam melakukan migrasi vertikal yaitu *nocturnal migration* (migrasi malam), *twilight migration* (migrasi senja), dan *reverse migration* (Lalli dan Parsons, 1997).

2.9.3. Interaksi antara fitoplankton dan zooplankton

Penelitian dinamika fitoplankton dan zooplankton beberapa tahun terakhir ini menjadi tema sentral dalam ekologi kelautan. Komunitas plankton dibagi menjadi tiga komponen antara lain: *non-toxic phytoplankton* (NTP), *toxic producing phytoplankton* (TPP), dan zooplankton. TPP adalah kelompok dari fitoplankton yang mempunyai kemampuan untuk memproduksi zat racun, sedangkan NTP adalah kelompok fitoplankton yang tidak memproduksi zat racun. Zooplankton merupakan konsumen yang memangsa NTP dan

TPP sebagai sumber makanannya. NTP menguntungkan bagi pertumbuhan zooplankton, Sementara itu TPP sangat merugikan bagi pertumbuhan zooplankton karena zat toksin yang dikeluarkannya dapat menghambat pertumbuhan zooplankton, serta dapat menyebabkan kematian (Chattopadhyay, dkk, 2006).

Beberapa spesies fitoplankton berkompetisi untuk memperebutkan ruang dan nutrisi yang sama. Oleh karena itu, fitoplankton yang lebih dominan dalam mendapatkan nutrisi dan ruang akan dapat tumbuh dan berkembang biak lebih baik daripada spesies lainnya. Kompetisi dalam memperebutkan nutrisi antara dua spesies Diatom yakni *Asterionella formosa* dan *Cyclotella meneghiniana* yang sama-sama tumbuh di Danau Michigan menjadi salah satu bukti adanya kompetisi antar fitoplankton dalam suatu ekosistem (Moss, 1998).



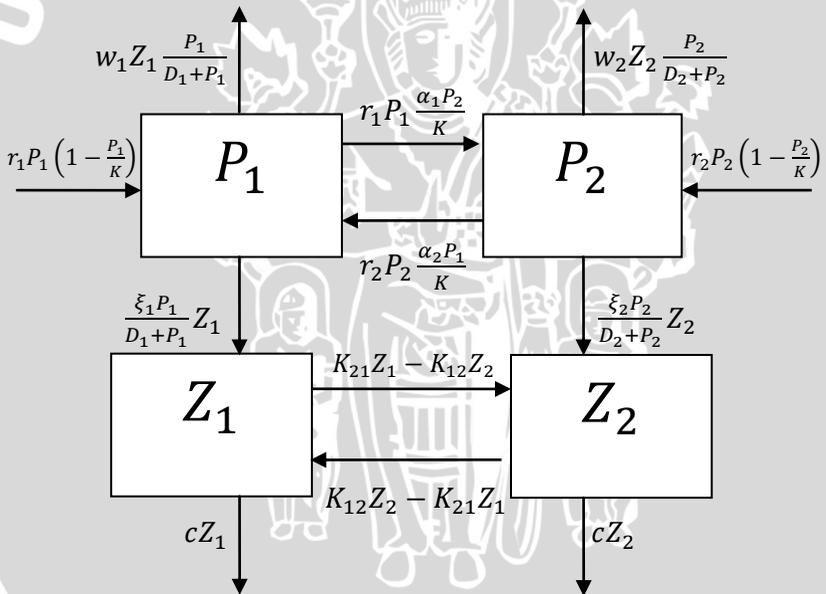
UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Model Kompartemen

Model interaksi fitoplankton dan zooplankton yang terdapat dalam tulisan Roy dkk (2008) menyatakan bahwa populasi fitoplankton sebagai *prey* dan zooplankton sebagai *predator*, masing-masing dibagi menjadi dua subpopulasi yaitu NTP ($P_1(t)$), TPP ($P_2(t)$), zooplankton pemangsa NTP ($Z_1(t)$), dan zooplankton pemangsa TPP ($Z_2(t)$). Model interaksi fitoplankton dan zooplankton tersebut digambarkan dalam diagram kompartemen berikut ini.



Gambar 3.1. Diagram Kompartemen

3.2 Model Perpindahan Pemangsaan Zooplankton terhadap *Non-Toxic Phytoplankton* (NTP) dan *Toxic Producing Phytoplankton* (TPP)

Berdasarkan subbab 3.1 maka model perpindahan pemangsaan zooplankton terhadap *Non-Toxic Phytoplankton* (NTP) dan *Toxic Producing Phytoplankton* (TPP) dalam tulisan Roy dkk (2008) dapat dijabarkan sebagai berikut.

3.2.1 Laju Perubahan Populasi NTP dan TPP

Keberadaan nutrisi yang terdapat pada habitat fitoplankton menyebabkan fitoplankton dapat tumbuh dan berkembang dengan baik. Hal tersebut menyebabkan populasi fitoplankton bertambah. Akan tetapi, suatu populasi akan melambat pertumbuhannya saat populasi tersebut hampir mencapai kapasitas maksimum yang dapat ditampung oleh lingkungan (*carrying capacity*).

Populasi fitoplankton, dalam hal ini NTP dan TPP, pertumbuhan populasinya melambat pada saat hampir mencapai *carrying capacity* lingkungan dan akan berhenti pada saat populasinya sama dengan *carrying capacity* lingkungan. Berdasarkan uraian tersebut, maka laju perubahan populasi NTP dan TPP tiap satuan waktu t diasumsikan mengikuti model persamaan logistik sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dP_1}{dt} &= r_1 P_1 \left(1 - \frac{P_1}{K}\right) \\ \frac{dP_2}{dt} &= r_2 P_2 \left(1 - \frac{P_2}{K}\right) \end{aligned} \prime$$

dengan r_1 dan r_2 berturut-turut menyatakan laju pertumbuhan NTP dan TPP. K menyatakan kapasitas maksimum lingkungan (*carrying capacity*).

NTP dan TPP bersaing dalam memperebutkan nutrisi dan ruang untuk dapat berkembang biak dengan baik. Spesies yang memperoleh nutrisi lebih banyak akan berkembang lebih baik daripada spesies yang lain. Persaingan NTP dan TPP tersebut diasumsikan mengikuti model kompetisi sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{dP_1}{dt} &= r_1 P_1 \left(1 - \frac{P_1}{K} - \alpha_1 \frac{P_2}{K}\right) \\ \frac{dP_2}{dt} &= r_2 P_2 \left(1 - \frac{P_2}{K} - \alpha_2 \frac{P_1}{K}\right),\end{aligned}\quad (3.2)$$

dengan α_1 adalah tingkat hambatan kompetisi P_2 terhadap P_1 dan α_2 adalah tingkat hambatan kompetisi P_1 terhadap P_2 . Persamaan (3.2) dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{aligned}\frac{dP_1}{dt} &= r_1 P_1 \left(1 - \frac{P_1 + \alpha_1 P_2}{K}\right) \\ \frac{dP_2}{dt} &= r_2 P_2 \left(1 - \frac{P_2 + \alpha_2 P_1}{K}\right).\end{aligned}\quad (3.3)$$

Populasi NTP dan TPP berkurang akibat pemangsa oleh zooplankton. Zooplankton dibagi dalam dua kelompok, yaitu zooplankton pemangsa NTP (Z_1) dan zooplankton pemangsa TPP (Z_2). Berkurangnya NTP dan TPP akibat pemangsa Z_1 dan Z_2 diasumsikan mengikuti fungsi respon Holling II dengan laju maksimum pemangsa berturut-turut sebesar w_1 dan w_2 . Konstanta *half-saturation* berturut-turut sebesar D_1 dan D_2 . Berdasarkan uraian tersebut, laju perubahan populasi NTP dan TPP akibat dimangsa oleh zooplankton dapat dimodelkan sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{dP_1}{dt} &= -w_1 Z_1 \frac{P_1}{D_1 + P_1} \\ \frac{dP_2}{dt} &= -w_2 Z_2 \frac{P_2}{D_2 + P_2}.\end{aligned}\quad (3.4)$$

Berdasarkan (3.3) dan (3.4), maka model laju perubahan populasi NTP dan TPP dinyatakan sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{dP_1}{dt} &= r_1 P_1 \left(1 - \frac{P_1 + \alpha_1 P_2}{K}\right) - w_1 Z_1 \frac{P_1}{D_1 + P_1} \\ \frac{dP_2}{dt} &= r_2 P_2 \left(1 - \frac{P_2 + \alpha_2 P_1}{K}\right) - w_2 Z_2 \frac{P_2}{D_2 + P_2}.\end{aligned}\quad (3.5)$$

Persamaan (3.5) dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dP_1}{dt} &= P_1 \left(r_1 \left(1 - \frac{P_1 + \alpha_1 P_2}{K} \right) - \frac{w_1 Z_1}{D_1 + P_1} \right) \\ \frac{dP_2}{dt} &= P_2 \left(r_2 \left(1 - \frac{P_2 + \alpha_2 P_1}{K} \right) - \frac{w_2 Z_2}{D_2 + P_2} \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

3.2.2 Laju Perubahan Populasi Zooplankton

Fitoplankton merupakan sumber makanan bagi zooplankton, oleh karena itu fitoplankton sangat berpengaruh terhadap pertumbuhan populasi zooplankton. Zooplankton dapat beralih dari memangsa NTP ke TPP atau sebaliknya. Z_1 dapat beralih menjadi Z_2 pada saat anggota dari Z_1 memangsa TPP, sedangkan Z_2 dapat beralih menjadi Z_1 pada saat anggota dari Z_2 memangsa NTP. Laju peralihan dari Z_1 ke Z_2 dinotasikan dengan parameter K_{21} dan laju peralihan dari Z_2 ke Z_1 dinotasikan dengan K_{12} .

Pengalihan zooplankton dalam memangsa NTP dan TPP ini dapat diasumsikan mengikuti model perpindahan subpopulasi dengan dua state, dimana pengalihan subpopulasi Z_1 dan Z_2 tersebut bersifat konstan. Bertambahnya Z_1 karena beralihnya Z_2 menjadi Z_1 dan berkurangnya Z_1 dikarenakan beralihnya Z_1 menjadi Z_2 , begitu juga sebaliknya. Berdasarkan uraian tersebut, maka laju perubahan populasi zooplankton akibat pengalihan pemangsaan dapat dimodelkan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dZ_1}{dt} &= (K_{12}Z_2 - K_{21}Z_1) \\ \frac{dZ_2}{dt} &= (K_{21}Z_1 - K_{12}Z_2) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Pada saat memangsa NTP, nilai Z_1 menjadi bertambah karena NTP merupakan fitoplankton yang tidak mengandung senyawa beracun. Laju maksimum pertumbuhan Z_1 akibat memangsa NTP dinotasikan sebagai ξ_1 . Bertambahnya Z_1 tersebut diasumsikan mengikuti fungsi respon Holling II dengan konstanta *half-saturation* sebesar D_1 .

Pada saat memangsa TPP, populasi Z_2 menjadi berkurang karena pengaruh racun yang terdapat pada TPP. Hal tersebut menyebabkan

pertumbuhan Z_2 menjadi terhambat. Laju hambatan tersebut dinotasikan sebagai ξ_2 . Berkurangnya Z_2 karena memangsa TPP diasumsikan mengikuti fungsi respon Holling II dengan konstanta *half-saturation* sebesar D_2 .

Berdasarkan uraian tersebut, maka laju perubahan populasi Z_1 dan Z_2 akibat memangsa NTP dan TPP dapat dimodelkan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dZ_1}{dt} &= \frac{\xi_1 P_1}{D_1 + P_1} Z_1 \\ \frac{dZ_2}{dt} &= -\frac{\xi_2 P_2}{D_2 + P_2} Z_2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Populasi zooplankton juga dapat berkurang akibat kematian alami dari zooplankton tersebut. Laju perubahan populasi zooplankton berbanding lurus dengan laju kematian alamiahnya, yaitu

$$\begin{aligned} \frac{dZ_1}{dt} &= -cZ_1 \\ \frac{dZ_2}{dt} &= -cZ_2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

dengan c adalah laju kematian alami zooplankton.

Berdasarkan persamaan (3.7), (3.8), dan (3.9) diperoleh model perubahan populasi Z_1 dan Z_2 secara keseluruhan, yaitu

$$\begin{aligned} \frac{dZ_1}{dt} &= (K_{12}Z_2 - K_{21}Z_1) + \frac{\xi_1 P_1}{D_1 + P_1} Z_1 - cZ_1 \\ \frac{dZ_2}{dt} &= (K_{21}Z_1 - K_{12}Z_2) - \frac{\xi_2 P_2}{D_2 + P_2} Z_2 - cZ_2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Berdasarkan (3.6) dan (3.10), maka model perpindahan pemangsaan zooplankton terhadap NTP dan TPP dinyatakan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\frac{dP_1}{dt} &= P_1 \left(r_1 \left(1 - \frac{P_1 + \alpha_1 P_2}{K} \right) - \frac{w_1 Z_1}{D_1 + P_1} \right) \\
\frac{dP_2}{dt} &= P_2 \left(r_2 \left(1 - \frac{P_2 + \alpha_2 P_1}{K} \right) - \frac{w_2 Z_2}{D_2 + P_2} \right) \\
\frac{dZ_1}{dt} &= (K_{12} Z_2 - K_{21} Z_1) + \frac{\xi_1 P_1}{D_1 + P_1} Z_1 - c Z_1 \\
\frac{dZ_2}{dt} &= (K_{21} Z_1 - K_{12} Z_2) - \frac{\xi_2 P_2}{D_2 + P_2} Z_2 - c Z_2
\end{aligned} \quad (3.11)$$

Fitoplankton dan zooplankton merupakan suatu populasi sehingga kondisi awal untuk sistem (3.11) adalah

$$P_1(0) \geq 0, \quad P_2(0) \geq 0, \quad Z_1(0) \geq 0, \quad Z_2(0) \geq 0 .$$

3.2.3 Agregasi Sistem

Pada subbab (2.8), diketahui bahwa laju perpindahan suatu subpopulasi memiliki skala waktu lebih cepat daripada laju pertumbuhan, pemangsaan, maupun kematian. Pada kasus ini, perpindahan subpopulasi yang dimaksud adalah beralihnya Z_1 menjadi Z_2 atau sebaliknya. Berdasarkan hal tersebut, maka nilai K_{21} dan K_{12} pada sistem (3.11) diasumsikan bernilai lebih tinggi daripada nilai parameter yang lain sehingga diperoleh persamaan

$$K_{12} = \frac{k_{12}}{\epsilon} \text{ dan } K_{21} = \frac{k_{21}}{\epsilon}, \quad (3.12)$$

dengan ϵ adalah konstanta positif yang bernilai cukup kecil ($\epsilon \ll 1$). k_{12} dan k_{21} adalah laju pengalihan zooplankton yang besarnya sama dengan parameter lain.

Jika (3.12) disubstitusikan ke dalam sistem (3.11), maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\epsilon \frac{dP_1}{dt} &= \epsilon P_1 \left(r_1 \left(1 - \frac{P_1 + \alpha_1 P_2}{K} \right) - \frac{w_1 Z_1}{D_1 + P_1} \right) \\
\epsilon \frac{dP_2}{dt} &= \epsilon P_2 \left(r_2 \left(1 - \frac{P_2 + \alpha_2 P_1}{K} \right) - \frac{w_2 Z_2}{D_2 + P_2} \right) \\
\epsilon \frac{dZ_1}{dt} &= (k_{12} Z_2 - k_{21} Z_1) + \epsilon \left(\frac{\xi_1 P_1}{D_1 + P_1} Z_1 - c Z_1 \right) \\
\epsilon \frac{dZ_2}{dt} &= (k_{21} Z_1 - k_{12} Z_2) - \epsilon \left(\frac{\xi_2 P_2}{D_2 + P_2} Z_2 + c Z_2 \right)
\end{aligned} \quad (3.13)$$

Selanjutnya adalah skala waktu diubah menjadi skala waktu cepat dengan mengambil nilai $T = \frac{t}{\epsilon}$, kemudian disubstitusikan ke dalam sistem (3.13) sehingga diperoleh suatu hubungan, yakni

$$\epsilon \frac{dZ_i}{dt} = \frac{dZ_i}{dT}, \quad \epsilon \frac{dP_i}{dt} = \frac{dP_i}{dT}, \quad i = 1, 2. \quad (3.14)$$

Berdasarkan (3.14), maka diperoleh model dengan skala waktu cepat sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dP_1}{dT} &= \epsilon P_1 \left(r_1 \left(1 - \frac{P_1 + \alpha_1 P_2}{K} \right) - \frac{w_1 Z_1}{D_1 + P_1} \right) \\ \frac{dP_2}{dT} &= \epsilon P_2 \left(r_2 \left(1 - \frac{P_2 + \alpha_2 P_1}{K} \right) - \frac{w_2 Z_2}{D_2 + P_2} \right) \\ \frac{dZ_1}{dT} &= (k_{12} Z_2 - k_{21} Z_1) + \epsilon \left(\frac{\xi_1 P_1}{D_1 + P_1} Z_1 - c Z_1 \right) \\ \frac{dZ_2}{dT} &= (k_{21} Z_1 - k_{12} Z_2) - \epsilon \left(\frac{\xi_2 P_2}{D_2 + P_2} Z_2 + c Z_2 \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Untuk mengagregasi $\frac{dZ_1}{dT}$ dan $\frac{dZ_2}{dT}$, langkah awal adalah mencari titik kesetimbangan dari sistem

$$\begin{aligned} \frac{dZ_1}{dT} &= (k_{12} Z_2 - k_{21} Z_1) \\ \frac{dZ_2}{dT} &= (k_{21} Z_1 - k_{12} Z_2) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Pengambilan nilai ϵ yang sangat kecil (mendekati nol), dimaksudkan agar diperoleh nilai kecepatan laju pengalihan yang paling tinggi sehingga laju pengalihan pemangsa zooplankton bernilai lebih cepat daripada parameter yang lain. Nilai ϵ yang sangat kecil tersebut juga diperlukan agar nilai $\epsilon P_1 \left(r_1 \left(1 - \frac{P_1 + \alpha_1 P_2}{K} \right) - \frac{w_1 Z_1}{D_1 + P_1} \right)$, $\epsilon P_2 \left(r_2 \left(1 - \frac{P_2 + \alpha_2 P_1}{K} \right) - \frac{w_2 Z_2}{D_2 + P_2} \right)$, $\epsilon \left(\frac{\xi_1 P_1}{D_1 + P_1} Z_1 - c Z_1 \right)$ dan $\epsilon \left(\frac{\xi_2 P_2}{D_2 + P_2} Z_2 + c Z_2 \right)$ pada sistem (3.15) dapat diabaikan sehingga diperoleh sistem (3.16)

Titik kesetimbangan sistem (3.16) diperoleh ketika

$$\begin{aligned} \frac{dZ_1}{dT} &= (k_{12}Z_2 - k_{21}Z_1) = 0 \\ \frac{dZ_2}{dT} &= (k_{21}Z_1 - k_{12}Z_2) = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Berdasarkan (3.17), maka diperoleh titik kesetimbangan $Z_1 = \frac{k_{12}}{k_{21}}Z_2$ dan $Z_2 = \frac{k_{21}}{k_{12}}Z_1$. Total populasi zooplankton dapat dinyatakan sebagai

$$Z(T) = Z_1(T) + Z_2(T). \quad (3.18)$$

Jika $Z_1 = \frac{k_{12}}{k_{21}}Z_2$ dan $Z_2 = \frac{k_{21}}{k_{12}}Z_1$ disubstitusikan ke dalam persamaan (3.18), maka diperoleh titik kesetimbangan yang berhubungan dengan $Z(T)$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} Z_1(T) &= \frac{k_{12}}{k_{21} + k_{12}}Z(T) \\ Z_2(T) &= \frac{k_{21}}{k_{21} + k_{12}}Z(T) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Persamaan (3.19) juga dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} Z_1(T) &= v_1Z(T) \\ Z_2(T) &= v_2Z(T) \end{aligned} \quad (3.20)$$

dengan $v_1 = \frac{k_{12}}{k_{21} + k_{12}}$ dan $v_2 = \frac{k_{21}}{k_{21} + k_{12}}$.

Berdasarkan persamaan (3.18), maka diperoleh

$$\frac{dZ}{dT} = \frac{dZ_1}{dT} + \frac{dZ_2}{dT}. \quad (3.21)$$

Persamaan (3.20) disubstitusikan ke dalam (3.21), maka diperoleh sistem $\frac{dZ_1}{dT}$ dan $\frac{dZ_2}{dT}$ yang telah diagregasi menjadi $\frac{dZ}{dT}$ sebagai berikut

$$\frac{dZ}{dT} = \epsilon Z \left(\frac{\xi_1 v_1 P_1}{D_1 + P_1} - \frac{\xi_2 v_2 P_2}{D_2 + P_2} - c \right). \quad (3.22)$$

Jika $T = \frac{t}{\epsilon}$ disubstitusikan ke dalam persamaan (3.22), maka diperoleh

$$\frac{dZ}{dt} = Z \left(\frac{\xi_1 v_1 P_1}{D_1 + P_1} - \frac{\xi_2 v_2 P_2}{D_2 + P_2} - c \right). \quad (3.23)$$

$T = \frac{t}{\epsilon}$ juga disubstitusikan ke dalam $\frac{dP_1}{dT}$ dan $\frac{dP_2}{dT}$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dP_1}{dt} &= P_1 \left(r_1 \left(1 - \frac{P_1 + \alpha_1 P_2}{K} \right) - \frac{w_1 v_1 Z}{D_1 + P_1} \right) \\ \frac{dP_2}{dt} &= P_2 \left(r_2 \left(1 - \frac{P_2 + \alpha_2 P_1}{K} \right) - \frac{w_2 v_2 Z}{D_2 + P_2} \right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Berdasarkan (3.23) dan (3.24), maka diperoleh sistem baru dengan skala waktu yang sebenarnya, yaitu

$$\begin{aligned} \frac{dP_1}{dt} &= P_1 \left(r_1 \left(1 - \frac{P_1 + \alpha_1 P_2}{K} \right) - \frac{\bar{w}_1 Z}{D_1 + P_1} \right) \\ \frac{dP_2}{dt} &= P_2 \left(r_2 \left(1 - \frac{P_2 + \alpha_2 P_1}{K} \right) - \frac{\bar{w}_2 Z}{D_2 + P_2} \right), \\ \frac{dZ}{dt} &= Z \left(\frac{\eta_1 P_1}{D_1 + P_1} - \frac{\eta_2 P_2}{D_2 + P_2} - c \right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

dengan $\eta_1 = \xi_1 v_1$, $\eta_2 = \xi_2 v_2$, $\bar{w}_1 = w_1 v_1$, dan $\bar{w}_2 = w_2 v_2$. Selanjutnya, sistem (3.25) nantinya yang akan dianalisis titik kesetimbangan dan kestabilannya.

3.3 Titik Kesetimbangan Model

Berdasarkan subbab 2.4, titik kesetimbangan sistem (3.25) diperoleh ketika

$$\begin{aligned} \frac{dP_1}{dt}(P_1, P_2, Z) &= 0 \\ \frac{dP_2}{dt}(P_1, P_2, Z) &= 0. \\ \frac{dZ}{dt}(P_1, P_2, Z) &= 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Berdasarkan (3.26), titik kesetimbangan sistem (3.25) diperoleh dengan cara menyelesaikan

$$\begin{aligned} P_1 \left(r_1 \left(1 - \frac{P_1 + \alpha_1 P_2}{K} \right) - \frac{\bar{w}_1 Z}{D_1 + P_1} \right) &= 0 \\ P_2 \left(r_2 \left(1 - \frac{P_2 + \alpha_2 P_1}{K} \right) - \frac{\bar{w}_2 Z}{D_2 + P_2} \right) &= 0 . \\ Z \left(\frac{\eta_1 P_1}{D_1 + P_1} - \frac{\eta_2 P_2}{D_2 + P_2} - c \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Persamaan (3.27) menghasilkan

$$\begin{aligned} P_1 &= 0 \text{ atau } r_1 \left(1 - \frac{P_1 + \alpha_1 P_2}{K} \right) - \frac{\bar{w}_1 Z}{D_1 + P_1} = 0, \\ P_2 &= 0 \text{ atau } r_2 \left(1 - \frac{P_2 + \alpha_2 P_1}{K} \right) - \frac{\bar{w}_2 Z}{D_2 + P_2} = 0, \\ Z &= 0 \text{ atau } \frac{\eta_1 P_1}{D_1 + P_1} - \frac{\eta_2 P_2}{D_2 + P_2} - c = 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Solusi (3.28) menghasilkan beberapa kombinasi kemungkinan, yakni

- $P_1 = 0, P_2 = 0, Z = 0,$
- $r_1 \left(1 - \frac{P_1 + \alpha_1 P_2}{K} \right) - \frac{\bar{w}_1 Z}{D_1 + P_1} = 0, P_2 = 0, Z = 0,$
- $P_1 = 0, r_2 \left(1 - \frac{P_2 + \alpha_2 P_1}{K} \right) - \frac{\bar{w}_2 Z}{D_2 + P_2} = 0, Z = 0,$
- $r_1 \left(1 - \frac{P_1 + \alpha_1 P_2}{K} \right) - \frac{\bar{w}_1 Z}{D_1 + P_1} = 0, r_2 \left(1 - \frac{P_2 + \alpha_2 P_1}{K} \right) - \frac{\bar{w}_2 Z}{D_2 + P_2} = 0,$
 $Z = 0$
- $r_1 \left(1 - \frac{P_1 + \alpha_1 P_2}{K} \right) - \frac{\bar{w}_1 Z}{D_1 + P_1} = 0, P_2 = 0,$
 $\frac{\eta_1 P_1}{D_1 + P_1} - \frac{\eta_2 P_2}{D_2 + P_2} - c = 0 = 0,$ dan
- $r_1 \left(1 - \frac{P_1 + \alpha_1 P_2}{K} \right) - \frac{\bar{w}_1 Z}{D_1 + P_1} = 0, r_2 \left(1 - \frac{P_2 + \alpha_2 P_1}{K} \right) - \frac{\bar{w}_2 Z}{D_2 + P_2} = 0,$
 $\frac{\eta_1 P_1}{D_1 + P_1} - \frac{\eta_2 P_2}{D_2 + P_2} - c = 0 .$

Selanjutnya, titik kesetimbangan model dituliskan sebagai titik $E = (P_1, P_2, Z)$.

Titik kesetimbangan dari kombinasi 1

Pada saat $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, dan $Z = 0$, diperoleh titik kesetimbangan $E_0 = (0,0,0)$. Titik kesetimbangan tersebut menunjukkan situasi ketika populasi NTP, TPP, dan zooplankton punah.

Titik kesetimbangan dari kombinasi 2

Titik kesetimbangan diperoleh pada saat $r_1 \left(1 - \frac{P_1 + \alpha_1 P_2}{K}\right) - \frac{\overline{w_1} Z}{D_1 + P_1} = 0$, $P_2 = 0$, dan $Z = 0$. Nilai $P_2 = 0$ dan $Z = 0$ disubstitusikan ke dalam $r_1 \left(1 - \frac{P_1 + \alpha_1 P_2}{K}\right) - \frac{\overline{w_1} Z}{D_1 + P_1} = 0$, maka diperoleh $P_1 = K$. Berdasarkan hal tersebut, maka diperoleh titik kesetimbangan $E_1 = (K, 0, 0)$. Titik kesetimbangan E_1 menunjukkan situasi ketika jumlah populasi TPP dan zooplankton punah, sedangkan jumlah populasi NTP sama dengan kapasitas lingkungan.

Titik kesetimbangan dari kombinasi 3

Titik kesetimbangan diperoleh pada saat $P_1 = 0$, $r_2 \left(1 - \frac{P_2 + \alpha_2 P_1}{K}\right) - \frac{\overline{w_2} Z}{D_2 + P_2} = 0$, dan $Z = 0$. Nilai $P_1 = 0$ dan $Z = 0$ disubstitusikan ke dalam $r_2 \left(1 - \frac{P_2 + \alpha_2 P_1}{K}\right) - \frac{\overline{w_2} Z}{D_2 + P_2} = 0$, maka diperoleh $P_2 = K$. Berdasarkan hal tersebut, maka diperoleh titik kesetimbangan $E_2 = (0, K, 0)$. Titik kesetimbangan E_2 menunjukkan situasi ketika jumlah populasi NTP dan zooplankton punah, sedangkan jumlah populasi TPP sama dengan kapasitas lingkungan.

Titik kesetimbangan dari kombinasi 4

Titik kesetimbangan diperoleh pada saat $r_1 \left(1 - \frac{P_1 + \alpha_1 P_2}{K}\right) - \frac{\overline{w_1} Z}{D_1 + P_1} = 0$, $r_2 \left(1 - \frac{P_2 + \alpha_2 P_1}{K}\right) - \frac{\overline{w_2} Z}{D_2 + P_2} = 0$, dan $Z = 0$. Jika $Z = 0$ disubstitusikan ke dalam $r_1 \left(1 - \frac{P_1 + \alpha_1 P_2}{K}\right) - \frac{\overline{w_1} Z}{D_1 + P_1} = 0$, dan $r_2 \left(1 - \frac{P_2 + \alpha_2 P_1}{K}\right) - \frac{\overline{w_2} Z}{D_2 + P_2} = 0$, maka diperoleh $P_1 = K - \alpha_1 P_2$ dan $P_2 = K - \alpha_2 P_1$.

Jika $P_1 = K - \alpha_1 P_2$ disubstitusikan ke dalam $P_2 = K - \alpha_2 P_1$ dan $P_2 = K - \alpha_2 P_1$ disubstitusikan ke dalam $P_1 = K - \alpha_1 P_2$, maka diperoleh $P_2 = \frac{K(\alpha_2-1)}{\alpha_1\alpha_2-1}$ dan $P_1 = \frac{K(\alpha_1-1)}{\alpha_1\alpha_2-1}$. Berdasarkan hal tersebut, diperoleh titik kesetimbangan $E_3 = (\widehat{P}_1, \widehat{P}_2, 0)$ dengan $\widehat{P}_1 = \frac{K(\alpha_1-1)}{\alpha_1\alpha_2-1}$ dan $\widehat{P}_2 = \frac{K(\alpha_2-1)}{\alpha_1\alpha_2-1}$. Titik kesetimbangan E_3 menunjukkan situasi populasi zooplankton punah pada saat jumlah populasi NTP bernilai $\frac{K(\alpha_1-1)}{\alpha_1\alpha_2-1}$ dan populasi TPP bernilai $\frac{K(\alpha_2-1)}{\alpha_1\alpha_2-1}$. Titik kesetimbangan tersebut eksis jika $\frac{K(\alpha_1-1)}{\alpha_1\alpha_2-1} > 0$ dan $\frac{K(\alpha_2-1)}{\alpha_1\alpha_2-1} > 0$.

Nilai $\frac{K(\alpha_1-1)}{\alpha_1\alpha_2-1} > 0$ terpenuhi jika $K(\alpha_1 - 1) > 0$ dan $(\alpha_1\alpha_2 - 1) > 0$, atau $K(\alpha_1 - 1) < 0$ dan $(\alpha_1\alpha_2 - 1) < 0$. Nilai $\frac{K(\alpha_2-1)}{\alpha_1\alpha_2-1} > 0$ terpenuhi jika $K(\alpha_2 - 1) > 0$ dan $(\alpha_1\alpha_2 - 1) > 0$, atau $K(\alpha_2 - 1) < 0$ dan $(\alpha_1\alpha_2 - 1) < 0$. Semua parameter bernilai positif sehingga nilai $K > 0$. Oleh karena itu, diperoleh nilai $(\alpha_1 - 1) > 0$, $(\alpha_1 - 1) < 0$, $(\alpha_2 - 1) > 0$, dan $(\alpha_2 - 1) < 0$. Berdasarkan bentuk tersebut, maka diperoleh $\alpha_1 > 1$, $\alpha_1 < 1$, $\alpha_2 > 1$, dan $\alpha_2 < 1$.

Jika $\alpha_1 > 1$, $\alpha_2 > 1$, atau $\alpha_1 < 1$, $\alpha_2 < 1$, maka nilai $(\alpha_1\alpha_2 - 1) > 0$ atau $(\alpha_1\alpha_2 - 1) < 0$ juga terpenuhi. Jadi, $\alpha_1 > 1$, $\alpha_2 > 1$ atau $\alpha_1 < 1$, $\alpha_2 < 1$ adalah syarat eksistensi titik $E_3 = (\widehat{P}_1, \widehat{P}_2, 0)$.

Titik kesetimbangan dari kombinasi 5

Titik kesetimbangan diperoleh pada saat $r_1 \left(1 - \frac{P_1 + \alpha_1 P_2}{K}\right) - \frac{\overline{w}_1 Z}{D_1 + P_1} = 0$, $P_2 = 0$, dan $\frac{\eta_1 P_1}{D_1 + P_1} - \frac{\eta_2 P_2}{D_2 + P_2} - c = 0$.

Jika $P_2 = 0$ disubstitusikan ke dalam $r_1 \left(1 - \frac{P_1 + \alpha_1 P_2}{K}\right) - \frac{\overline{w}_1 Z}{D_1 + P_1} = 0$, maka diperoleh

$$r_1 \left(1 - \frac{P_1}{K}\right) - \frac{\overline{w}_1 Z}{D_1 + P_1} = 0 . \quad (3.29)$$

Jika $P_2 = 0$ disubstitusikan ke dalam $\frac{\eta_1 P_1}{D_1 + P_1} - \frac{\eta_2 P_2}{D_2 + P_2} - c = 0$, maka diperoleh

$$P_1 = \frac{cD_1}{\eta_1 - c}. \quad (3.30)$$

Persamaan (3.29) disubstitusikan ke (3.30), diperoleh

$$Z = \frac{\eta_1 r_1 D_1 (K\eta_1 - c(K + D_1))}{\bar{w}_1 K (\eta_1 - c)^2}. \quad (3.31)$$

Berdasarkan (3.30) dan (3.31), diperoleh titik kesetimbangan $E_4 = (\bar{P}_1, 0, \bar{Z})$, dengan $\bar{P}_1 = \frac{cD_1}{\eta_1 - c}$ dan $\bar{Z} = \frac{\eta_1 r_1 D_1 (K\eta_1 - c(K + D_1))}{\bar{w}_1 K (\eta_1 - c)^2}$.

Titik kesetimbangan E_4 eksis jika $\frac{cD_1}{\eta_1 - c} > 0$ dan $\frac{\eta_1 r_1 D_1 (K\eta_1 - c(K + D_1))}{\bar{w}_1 K (\eta_1 - c)^2} > 0$.

Nilai $\frac{cD_1}{\eta_1 - c} > 0$ terpenuhi jika $cD_1 > 0$ dan $\eta_1 - c > 0$, atau $cD_1 < 0$ dan $\eta_1 - c < 0$. Berdasarkan hal tersebut, maka diperoleh $\eta_1 > c$ atau $\eta_1 < c$. Nilai $\eta_1 < c$ memperlihatkan bahwa laju kematian lebih pesat daripada laju pertumbuhan zooplankton. Hal tersebut tidak mungkin terjadi, sehingga terjadi suatu kontradiksi. Oleh karena itu, $\eta_1 < c$ tidak dapat dimasukkan ke dalam syarat eksistensi.

Nilai $\frac{\eta_1 r_1 D_1 (K\eta_1 - c(K + D_1))}{\bar{w}_1 K (\eta_1 - c)^2} > 0$ terpenuhi jika $\eta_1 r_1 D_1 (K\eta_1 - c(K + D_1)) > 0$ dan $\bar{w}_1 K (\eta_1 - c)^2 > 0$, atau $\eta_1 r_1 D_1 (K\eta_1 - c(K + D_1)) < 0$ dan $\bar{w}_1 K (\eta_1 - c)^2 < 0$.

1. $\eta_1 r_1 D_1 (K\eta_1 - c(K + D_1)) > 0$ dan $\bar{w}_1 K (\eta_1 - c)^2 > 0$
 - a. $\eta_1 > 0$, $r_1 > 0$, dan $D_1 > 0$, maka $(K\eta_1 - c(K + D_1)) > 0$.
Bentuk tersebut dapat ditulis menjadi $\eta_1 > c \left(1 + \frac{D_1}{K}\right)$.
 - b. $\bar{w}_1 > 0$ dan $K > 0$, maka $(\eta_1 - c)^2 > 0$, sehingga diperoleh $\eta_1 > c$.
2. $\eta_1 r_1 D_1 (K\eta_1 - c(K + D_1)) < 0$ dan $\bar{w}_1 K (\eta_1 - c)^2 < 0$.
 $\eta_1 > 0$, $r_1 > 0$, dan $D_1 > 0$, maka $(K\eta_1 - c(K + D_1)) < 0$, sehingga diperoleh $\eta_1 < c \left(1 + \frac{D_1}{K}\right)$ atau dapat juga ditulis dalam bentuk $\eta_1 \left(\frac{K}{K + D_1}\right) < c$. Hal tersebut menunjukkan bahwa laju pertumbuhan lebih kecil daripada laju kematian sehingga dapat menyebabkan kepunahan zooplankton. Terjadi kontradiksi, oleh

karena itu kemungkinan ini tidak dapat dimasukkan ke dalam syarat eksistensi.

Jika $\eta_1 > c \left(1 + \frac{D_1}{K}\right)$, maka sudah pasti $\eta_1 > c$. Jadi, syarat eksistensi titik $E_4 = (\bar{P}_1, 0, \bar{Z})$ adalah $\eta_1 > c \left(1 + \frac{D_1}{K}\right)$.

Titik kesetimbangan dari kombinasi 6

Titik kesetimbangan diperoleh pada saat $r_1 \left(1 - \frac{P_1 + \alpha_1 P_2}{K}\right) - \frac{\bar{w}_1 Z}{D_1 + P_1} = 0$, $r_2 \left(1 - \frac{P_2 + \alpha_2 P_1}{K}\right) - \frac{\bar{w}_2 Z}{D_2 + P_2} = 0$, dan $\frac{\eta_1 P_1}{D_1 + P_1} - \frac{\eta_2 P_2}{D_2 + P_2} - c = 0$. Persamaan $\frac{\eta_1 P_1}{D_1 + P_1} - \frac{\eta_2 P_2}{D_2 + P_2} - c = 0$ dapat dinyatakan dalam bentuk

$$P_1 = \frac{D_1(\eta_2 P_2 + c D_2 + c P_2)}{\eta_1 D_2 + \eta_1 P_2 - \eta_2 P_2 - c D_2 - c P_2}. \quad (3.32)$$

Persamaan $r_2 \left(1 - \frac{P_2 + \alpha_2 P_1}{K}\right) - \frac{\bar{w}_2 Z}{D_2 + P_2} = 0$ dapat dinyatakan dalam bentuk

$$Z = \frac{r_2(D_2 + P_2)(K - P_2 - \alpha_2 P_1)}{K \bar{w}_2}. \quad (3.33)$$

Apabila persamaan (3.32) disubstitusikan ke dalam (3.33), maka diperoleh

$$Z = \frac{r_2(D_2 + P_2) \left(K - P_2 - \alpha_2 \frac{D_1(\eta_2 P_2 + c D_2 + c P_2)}{\eta_1 D_2 + \eta_1 P_2 - \eta_2 P_2 - c D_2 - c P_2}\right)}{K \bar{w}_2}. \quad (3.34)$$

Persamaan (3.32) dan (3.34) disubstitusikan ke dalam $r_1 \left(1 - \frac{P_1 + \alpha_1 P_2}{K}\right) - \frac{\bar{w}_1 Z}{D_1 + P_1} = 0$ diperoleh nilai P_2^* yang ditunjukkan sebagai berikut

$$\theta_1 (P_2^*)^3 + \theta_2 (P_2^*)^2 + \theta_3 P_2^* + \theta_4 = 0, \quad (3.35)$$

Keterangan

$$\theta_1 = \bar{w}_1 r_2 (\eta_1 - \eta_2 - c)^2,$$

$$\theta_2 = -(\eta_1 - \eta_2 - c)(-r_2 \bar{w}_1 (K + D_1 \alpha_2) \eta_2 + (-2r_2 \bar{w}_1 D_2 + r_2 \bar{w}_1 K + r_1 \bar{w}_2 D_1 \alpha_1) \eta_1 - r_2 \bar{w}_1 c (D_1 \alpha_2 + K - 2D_2)),$$

$$\begin{aligned} \theta_3 = & (r_2 \bar{w}_1 D_2^2 + (-2r_2 \bar{w}_1 K - r_1 \bar{w}_2 D_1 \alpha_1) D_2 + r_1 \bar{w}_2 D_1 K) \eta_1^2 \\ & + (-r_1 \bar{w}_2 (c + \eta_2) D_1^2 + ((-r_1 \bar{w}_2 K + r_2 \bar{w}_1 D_2 \alpha_2) \eta_2 \\ & - r_1 \bar{w}_2 K C + 2r_2 \bar{w}_1 \alpha_2 c D_2 + r_1 \bar{w}_2 \alpha_1 D_2 c) D_1 \\ & + 2r_2 \bar{w}_1 D_2 K (\eta_2 + 2c) - 2r_2 \bar{w}_1 D_2^2 c) \eta_1 - r_2 \bar{w}_1 D_2 c ((2\alpha_2 c \\ & + 2\alpha_2 \eta_2) D_1 - c D_2 + K(2\eta_2 + 2c)), \text{ dan} \end{aligned}$$

$$\theta_4 = D_2 (K(-2r_2 w_1 D_2 + r_1 w_2 D_1) \eta_1^2 - c(r_1 w_2 D_1^2 - 2r_2 w_1 D_2 K - r_2 w_1 \alpha_2 D_1 D_2 + r_1 w_2 D_1 K) \eta_1 - r_2 w_1 c^2 D_2 (K + D_1 \alpha_2)).$$

Berdasarkan (3.32), (3.34), dan (3.35), maka diperoleh titik kesetimbangan interior $E^* = (P_1^*, P_2^*, Z^*)$, dengan

$$P_1^* = \frac{D_1(\eta_2 P_2^* + c D_2 + c P_2^*)}{\eta_1 D_2 + \eta_1 P_2^* - \eta_2 P_2^* - c D_2 - c P_2^*}, \quad Z^* = \frac{r_2 (D_2 + P_2^*) (K - P_2^* - \alpha_2 P_1^*)}{K \bar{w}_2}, \text{ dan}$$

$$P_2^* \text{ adalah akar dari } \theta_1 (P_2^*)^3 + \theta_2 (P_2^*)^2 + \theta_3 P_2^* + \theta_4 = 0.$$

Titik E^* eksis jika $P_1^* > 0$, $P_2^* > 0$, dan $Z^* > 0$. Persamaan (3.35) dapat juga ditulis dalam bentuk

$$\theta_1 (P_2^*)^3 = -\theta_2 (P_2^*)^2 - \theta_3 (P_2^*) - \theta_4.$$

Jika $P_2^* > 0$, maka $\theta_2 < 0$, $\theta_3 < 0$, $\theta_4 < 0$, jika $P_1^* > 0$, maka

$$\frac{D_1(\eta_2 P_2^* + c D_2 + c P_2^*)}{\eta_1 D_2 + \eta_1 P_2^* - \eta_2 P_2^* - c D_2 - c P_2^*} > 0, \quad \text{dan} \quad \text{jika} \quad Z^* > 0, \quad \text{maka}$$

$$\frac{r_2 (D_2 + P_2^*) (K - P_2^* - \alpha_2 P_1^*)}{K \bar{w}_2} > 0.$$

Nilai $\frac{D_1(\eta_2 P_2^* + c D_2 + c P_2^*)}{\eta_1 D_2 + \eta_1 P_2^* - \eta_2 P_2^* - c D_2 - c P_2^*} > 0$ terpenuhi jika

$$D_1(\eta_2 P_2^* + c D_2 + c P_2^*) > 0 \quad \text{dan} \quad \eta_1 D_2 + \eta_1 P_2^* - \eta_2 P_2^* - c D_2 - c P_2^* > 0, \text{ atau } D_1(\eta_2 P_2^* + c D_2 + c P_2^*) < 0 \text{ dan } \eta_1 D_2 + \eta_1 P_2^* - \eta_2 P_2^* - c D_2 - c P_2^* < 0.$$

$$1. \quad D_1(\eta_2 P_2^* + c D_2 + c P_2^*) > 0 \quad \text{dan} \quad \eta_1 D_2 + \eta_1 P_2^* - \eta_2 P_2^* - c D_2 - c P_2^* > 0.$$

a. $D_1 > 0$, maka $(\eta_2 P_2^* + c D_2 + c P_2^*) > 0$. Bentuk tersebut dapat ditulis menjadi $\frac{\eta_2 P_2^*}{D_2 + P_2^*} + c > 0$

b. Bentuk $\eta_1 D_2 + \eta_1 P_2^* - \eta_2 P_2^* - c D_2 - c P_2^* > 0$ dapat ditulis dalam bentuk $\eta_1 > \frac{\eta_2 P_2^*}{D_2 + P_2^*} + c$

Berdasarkan uraian tersebut, maka diperoleh

$\eta_1 > \frac{\eta_2 P_2^*}{D_2 + P_2^*} + c > 0$, bentuk tersebut cukup hanya ditulis

$$\eta_1 > \frac{\eta_2 P_2^*}{D_2 + P_2^*} + c.$$

2. $D_1(\eta_2 P_2^* + cD_2 + cP_2^*) < 0$ dan $\eta_1 D_2 + \eta_1 P_2^* - \eta_2 P_2^* - cD_2 - cP_2^* < 0$.

a. $D_1 > 0$, maka $(\eta_2 P_2^* + cD_2 + cP_2^*) < 0$. Bentuk tersebut juga dapat ditulis menjadi $\frac{\eta_2 P_2^*}{D_2 + P_2^*} + c < 0$

b. Bentuk $\eta_1 D_2 + \eta_1 P_2^* - \eta_2 P_2^* - cD_2 - cP_2^* < 0$ dapat ditulis dalam bentuk $\eta_1 < \frac{\eta_2 P_2^*}{D_2 + P_2^*} + c$

Bentuk $\eta_1 < \frac{\eta_2 P_2^*}{D_2 + P_2^*} + c$ menunjukkan bahwa nilai hambatan pertumbuhan lebih besar daripada laju pertumbuhan. Terjadi kontradiksi, oleh karena itu kemungkinan tersebut tidak dapat dimasukkan ke dalam syarat eksistensi.

Titik $\frac{r_2(D_2 + P_2^*)(K - P_2^* - \alpha_2 P_1^*)}{K\bar{w}_2} > 0$ terpenuhi jika

$r_2(D_2 + P_2^*)(K - P_2^* - \alpha_2 P_1^*) > 0$ dan $K\bar{w}_2 > 0$, atau $r_2(D_2 + P_2^*)(K - P_2^* - \alpha_2 P_1^*) < 0$ dan $K\bar{w}_2 < 0$.

1. $r_2(D_2 + P_2^*)(K - P_2^* - \alpha_2 P_1^*) > 0$ dan $K\bar{w}_2 > 0$.

$r_2 > 0, D_2 > 0$, dan $P_2^* > 0$, maka $r_2(D_2 + P_2^*) > 0$. Oleh karena itu nilai $(K - P_2^* - \alpha_2 P_1^*) > 0$. Bentuk tersebut dapat ditulis menjadi $K > P_2^* + \alpha_2 P_1^*$.

2. $r_2(D_2 + P_2^*)(K - P_2^* - \alpha_2 P_1^*) < 0$ dan $K\bar{w}_2 < 0$.

$r_2 > 0, D_2 > 0$, dan $P_2^* > 0$, maka $r_2(D_2 + P_2^*) > 0$. Oleh karena itu nilai $(K - P_2^* - \alpha_2 P_1^*) < 0$ atau dapat juga ditulis dalam bentuk $K < P_2^* + \alpha_2 P_1^*$. Hal ini menunjukkan bahwa nilai kapasitas lingkungan (*carrying capacity*) lebih kecil daripada laju interaksi NTP dan TPP dalam memperebutkan nutrisi. Terjadi kontradiksi, oleh karena itu kemungkinan ini tidak dapat dimasukkan ke dalam syarat eksistensi.

Jadi, syarat eksistensi untuk titik kesetimbangan interior

$E^* = (P_1^*, P_2^*, Z^*)$ adalah $\theta_2 < 0, \theta_3 < 0, \theta_4 < 0, \eta_1 > \frac{\eta_2 P_2^*}{D_2 + P_2^*} + c$, dan $K > P_2^* + \alpha_2 P_1^*$.

3.4 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Model

Matriks Jacobi (J) yang diperoleh dari sistem (3.25) berbentuk

$$J = \begin{bmatrix} r_1 - \frac{2P_1r_1}{K} - \frac{r_1\alpha_1P_2}{K} - \frac{\overline{w_1}ZD_1}{(D_1+P_1)^2} & -\frac{r_1\alpha_1P_1}{K} & -\frac{P_1\overline{w_1}}{D_1+P_1} \\ -\frac{r_2\alpha_2P_2}{K} & r_2 - \frac{2P_2r_2}{K} - \frac{r_2\alpha_2P_1}{K} - \frac{\overline{w_2}ZD_2}{(D_2+P_2)^2} & -\frac{P_2\overline{w_2}}{D_2+P_2} \\ \frac{\eta_1ZD_1}{(D_1+P_1)^2} & -\frac{\eta_2ZD_2}{(D_2+P_2)^2} & \frac{\eta_1P_1}{(D_1+P_1)} - \frac{\eta_2P_2}{(D_2+P_2)} - c \end{bmatrix}$$

3.4.1. Titik Kesetimbangan $E_0 = (0, 0, 0)$

Jika titik E_0 disubstitusikan pada matriks J , maka diperoleh

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix}$$

Nilai eigen matriks $J(E_0)$ diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $|J(E_0) - \lambda I| = 0$, yakni

$$(r_1 - \lambda)(r_2 - \lambda)(-c - \lambda) = 0. \quad (3.36)$$

Dari persamaan karakteristik (3.36), diperoleh $\lambda_1 = r_1$, $\lambda_2 = r_2$, dan $\lambda_3 = -c$. Semua parameter bernilai positif, oleh karena itu $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, dan $\lambda_3 < 0$. Jadi, jenis kestabilan titik E_0 adalah tidak stabil.

3.4.2. Titik Kesetimbangan $E_1 = (K, 0, 0)$

Jika titik E_1 disubstitusikan pada matriks J , maka diperoleh

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -r_1 & -r_1\alpha_1 & -\frac{K\overline{w_1}}{D_1+K} \\ 0 & r_2(1 - \alpha_2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\eta_1K}{D_1+K} - c \end{bmatrix}$$

Nilai eigen matriks $J(E_1)$ diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $|J(E_1) - \lambda I| = 0$, yakni

$$(-r_1 - \lambda)(r_2(1 - \alpha_2) - \lambda) \left(\frac{\eta_1K}{D_1+K} - c - \lambda \right) = 0. \quad (3.37)$$

Dari persamaan karakteristik (3.37), diperoleh $\lambda_1 = -r_1$, $\lambda_2 = r_2(1 - \alpha_2)$, dan $\lambda_3 = \frac{\eta_1 K}{D_1 + K} - c$. Semua parameter bernilai positif, oleh karena itu $\lambda_1 < 0$, sedangkan $r_2(1 - \alpha_2)$ dan $\frac{\eta_1 K}{D_1 + K} - c$ dapat bernilai positif atau negatif. Titik E_1 stabil asimtotik lokal jika memenuhi $\lambda_2 < 0$ dan $\lambda_3 < 0$, maka

- $r_2(1 - \alpha_2) < 0$, maka diperoleh $\alpha_2 > 1$,
- $\frac{\eta_1 K}{D_1 + K} - c < 0$, bentuk tersebut juga dapat ditulis $\eta_1 \frac{K}{D_1 + K} < c$.

Jadi, titik kesetimbangan $E_1 = (K, 0, 0)$ stabil asimtotik lokal dengan syarat $\alpha_2 > 1$ dan $\eta_1 \frac{K}{D_1 + K} < c$. Sebaliknya, titik E_1 tidak stabil jika $\alpha_2 < 1$ atau $\eta_1 \frac{K}{D_1 + K} > c$.

3.4.3. Titik Kesetimbangan $E_2 = (0, K, 0)$

Jika titik E_2 disubstitusikan pada matriks J , maka diperoleh

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} r_1(1 - \alpha_1) & 0 & 0 \\ -r_2\alpha_2 & -r_2 & -\frac{Kw_2}{D_2 + K} \\ 0 & 0 & -\frac{\eta_2 K}{D_2 + K} - c \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen matriks $J(E_2)$ diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $|J(E_2) - \lambda I| = 0$, yakni

$$(r_1(1 - \alpha_1) - \lambda)(-r_2 - \lambda) \left(-\frac{\eta_2 K}{D_2 + K} - c - \lambda \right) = 0. \quad (3.38)$$

Dari persamaan karakteristik (3.38) diperoleh $\lambda_1 = r_1(1 - \alpha_1)$, $\lambda_2 = -r_2$, dan $\lambda_3 = -\left(\frac{\eta_2 K}{D_2 + K} + c \right)$.

Semua parameter bernilai positif, oleh karena itu $\lambda_2 < 0$ dan $\lambda_3 < 0$, sedangkan $r_1(1 - \alpha_1)$ dapat bernilai positif atau negatif. Titik E_3 stabil asimtotik lokal jika memenuhi $\lambda_1 < 0$, maka $r_1(1 - \alpha_1) < 0$. Oleh karena itu, diperoleh $\alpha_1 > 1$. Jadi, titik kesetimbangan $E_2 = (0, K, 0)$ stabil asimtotik lokal jika $\alpha_1 > 1$. Sebaliknya, titik E_2 tidak stabil jika $\alpha_1 < 1$.

3.4.4. Titik Kesetimbangan $E_3 = (\widehat{P}_1, \widehat{P}_2, 0)$, dengan $\widehat{P}_1 = \frac{K(\alpha_1 - 1)}{\alpha_1 \alpha_2 - 1}$ dan $\widehat{P}_2 = \frac{K(\alpha_2 - 1)}{\alpha_1 \alpha_2 - 1}$

Misalkan $\widehat{P}_1 = P_1$ dan $\widehat{P}_2 = P_2$. Jika titik E_3 disubstitusikan pada matriks J , maka diperoleh

$$J(E_3) = \begin{bmatrix} r_1 - \frac{2P_1 r_1}{K} - \frac{r_1 \alpha_1 P_2}{K} & -\frac{r_1 \alpha_1 P_1}{K} & -\frac{P_1 \overline{W}_1}{D_1 + P_1} \\ -\frac{r_2 \alpha_2 P_2}{K} & r_2 - \frac{2P_2 r_2}{K} - \frac{r_2 \alpha_2 P_1}{K} & -\frac{P_2 \overline{W}_2}{D_2 + P_2} \\ 0 & 0 & \frac{\eta_1 P_1}{(D_1 + P_1)} - \frac{\eta_2 P_2}{(D_2 + P_2)} - c \end{bmatrix}$$

Pada titik E_4 berlaku $r_1 \left(1 - \frac{P_1 + \alpha_1 P_2}{K}\right) = 0$ dan $r_2 \left(1 - \frac{P_2 + \alpha_2 P_1}{K}\right) = 0$, oleh karena itu matriks $J(E_3)$ dapat dinyatakan dalam bentuk

$$J(E_3) = \begin{bmatrix} -\frac{r_1 P_1}{K} & -\frac{r_1 \alpha_1 P_1}{K} & -\frac{P_1 \overline{W}_1}{D_1 + P_1} \\ -\frac{r_2 \alpha_2 P_2}{K} & -\frac{r_2 P_2}{K} & -\frac{P_2 \overline{W}_2}{D_2 + P_2} \\ 0 & 0 & \frac{\eta_1 P_1}{(D_1 + P_1)} - \frac{\eta_2 P_2}{(D_2 + P_2)} - c \end{bmatrix}$$

Nilai eigen matriks $J(E_3)$ diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $|J(E_3) - \lambda I| = 0$, yakni :

$$\left(\lambda^2 + \left(\frac{r_1 P_1 + r_2 P_2}{K}\right) \lambda + P_1 P_2 \left(\frac{r_1 r_2 (1 - \alpha_1 \alpha_2)}{K^2}\right)\right) \left(\frac{\eta_1 P_1}{(D_1 + P_1)} - \frac{\eta_2 P_2}{(D_2 + P_2)} - c - \lambda\right) = 0. \quad (3.39)$$

Persamaan karakteristik (3.39) menghasilkan

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(-\left(\frac{r_1 P_1 + r_2 P_2}{K}\right) + \sqrt{\left(\frac{r_1 P_1 + r_2 P_2}{K}\right)^2 - 4P_1 P_2 \left(\frac{r_1 r_2 (1 - \alpha_1 \alpha_2)}{K^2}\right)} \right),$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left(-\left(\frac{r_1 P_1 + r_2 P_2}{K}\right) - \sqrt{\left(\frac{r_1 P_1 + r_2 P_2}{K}\right)^2 - 4P_1 P_2 \left(\frac{r_1 r_2 (1 - \alpha_1 \alpha_2)}{K^2}\right)} \right),$$

$$\text{dan } \lambda_3 = \frac{\eta_1 P_1}{(D_1 + P_1)} - \frac{\eta_2 P_2}{(D_2 + P_2)} - c.$$

Semua parameter bernilai positif, oleh karena itu diperoleh

a. jika $\alpha_1 \alpha_2 < 1$, maka

$$\frac{r_1 P_1 + r_2 P_2}{K} > \sqrt{\left(\frac{r_1 P_1 + r_2 P_2}{K}\right)^2 - 4P_1 P_2 \left(\frac{r_1 r_2 (1 - \alpha_1 \alpha_2)}{K^2}\right)},$$

Berdasarkan bentuk tersebut, maka diperoleh nilai $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 < 0$,

b. jika $\alpha_1\alpha_2 > 1$, maka

$$\frac{r_1P_1 + r_2P_2}{K} < \sqrt{\left(\frac{r_1P_1 + r_2P_2}{K}\right)^2 - 4P_1P_2\left(\frac{r_1r_2(1 - \alpha_1\alpha_2)}{K^2}\right)},$$

Berdasarkan bentuk tersebut, maka diperoleh nilai $\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 < 0$

c. $\frac{\eta_1P_1}{(D_1+P_1)} - \frac{\eta_2P_2}{(D_2+P_2)} - c$ dapat bernilai positif atau negatif.

Jika $\frac{\eta_1P_1}{(D_1+P_1)} - \frac{\eta_2P_2}{(D_2+P_2)} - c > 0$, maka $\lambda_3 > 0$, sehingga diperoleh

$$\frac{\eta_1P_1}{(D_1+P_1)} > \frac{\eta_2P_2}{(D_2+P_2)} + c. \quad \text{Jika } \frac{\eta_1P_1}{(D_1+P_1)} - \frac{\eta_2P_2}{(D_2+P_2)} - c < 0, \quad \text{maka}$$

$$\lambda_3 < 0, \text{ sehingga diperoleh } \frac{\eta_1P_1}{(D_1+P_1)} < \frac{\eta_2P_2}{(D_2+P_2)} + c.$$

Titik E_3 stabil asimtotik lokal jika memenuhi $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, dan $\lambda_3 < 0$. Kondisi tersebut terpenuhi jika $\alpha_1\alpha_2 < 1$ dan $\frac{\eta_1P_1}{(D_1+P_1)} < \frac{\eta_2P_2}{(D_2+P_2)} + c$. Bentuk $\frac{\eta_1P_1}{(D_1+P_1)} < \frac{\eta_2P_2}{(D_2+P_2)} + c$ dapat juga ditulis dalam bentuk

$$P_2(P_1(\eta_1 - \eta_2 - c) - D_1(\eta_2 + c)) + D_2(P_1(\eta_1 - c) - cD_1) < 0. \quad (3.40)$$

Persamaan (3.40) terpenuhi jika $P_2(P_1(\eta_1 - \eta_2 - c) - D_1(\eta_2 + c)) < 0$ dan $D_2(P_1(\eta_1 - c) - cD_1) < 0$,

i. $P_2 > 0$, maka diperoleh $P_1(\eta_1 - \eta_2 - c) - D_1(\eta_2 + c) < 0$, bentuk tersebut terpenuhi apabila $P_1(\eta_1 - \eta_2 - c) < 0$ dan $-D_1(\eta_2 + c) < 0$. $P_1 > 0$, maka $\eta_1 - \eta_2 - c < 0$, atau dapat juga ditulis dalam bentuk

$$\eta_1 < \eta_2 + c.$$

ii. Bentuk $P_1(\eta_1 - \eta_2 - c) - D_1(\eta_2 + c) < 0$ dapat diubah menjadi bentuk

$$P_1 < \frac{D_1(\eta_2 + c)}{\eta_1 - \eta_2 - c}. \quad (3.41)$$

$D_2 > 0$, maka $P_1(\eta_1 - c) - cD_1 < 0$. Bentuk tersebut dapat diubah menjadi

$$P_1 < \frac{cD_1}{\eta_1 - c}. \quad (3.42)$$

Berdasarkan (3.41) dan (3.42), dan karena $\widehat{P}_1 = P_1$, maka diperoleh

$$\widehat{P}_1 < \min \left\{ \frac{D_1(\eta_2 + c)}{\eta_1 - \eta_2 - c}, \frac{cD_1}{\eta_1 - c} \right\}.$$

Jadi, titik kesetimbangan $E_3 = (\widehat{P}_1, \widehat{P}_2, 0)$ stabil asimtotik lokal jika $\alpha_1\alpha_2 < 1$, $\widehat{P}_1 < \min \left\{ \frac{D_1(\eta_2+c)}{\eta_1-\eta_2-c}, \frac{cD_1}{\eta_1-c} \right\}$, dan $\eta_1 < \eta_2 + c$. Sebaliknya, titik E_3 tidak stabil jika $\alpha_1\alpha_2 > 1$, $\widehat{P}_1 > \max \left\{ \frac{D_1(\eta_2+c)}{\eta_1-\eta_2-c}, \frac{cD_1}{\eta_1-c} \right\}$ dan $\eta_1 > \eta_2 + c$.

3.4.5. Titik Kesetimbangan $E_4 = (\overline{P}_1, 0, \overline{Z})$, dengan $\overline{P}_1 = \frac{cD_1}{\eta_1 - c}$

$$\text{dan } \overline{Z} = \frac{\eta_1 r_1 D_1 (K \eta_1 - c (K + D_1))}{w_1 K (\eta_1 - c)^2}$$

Jika titik E_4 disubstitusikan pada matriks \mathcal{J} , maka diperoleh

$$\mathcal{J}(E_4) = \begin{bmatrix} r_1 - \frac{2\overline{P}_1 r_1}{K} - \frac{w_1 \overline{Z} D_1}{(D_1 + \overline{P}_1)^2} & -\frac{r_1 \alpha_1 \overline{P}_1}{K} & -\frac{\overline{P}_1 w_1}{D_1 + \overline{P}_1} \\ 0 & r_2 - \frac{r_2 \alpha_2 \overline{P}_1}{K} - \frac{w_2 \overline{Z}}{D_2} & 0 \\ \frac{\eta_1 \overline{Z} D_1}{(D_1 + \overline{P}_1)^2} & -\frac{\eta_2 \overline{Z}}{D_2} & \frac{\eta_1 \overline{P}_1}{(D_1 + \overline{P}_1)} - c \end{bmatrix}.$$

Pada titik E_4 berlaku $r_1 \left(1 - \frac{\overline{P}_1}{K}\right) - \frac{w_1 \overline{Z}}{D_1 + \overline{P}_1} = 0$, dan $\frac{\eta_1 \overline{P}_1}{D_1 + \overline{P}_1} - c = 0$, oleh karena itu matriks $\mathcal{J}(E_4)$ dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\mathcal{J}(E_4) = \begin{bmatrix} \frac{w_1 \overline{Z} \overline{P}_1}{(D_1 + \overline{P}_1)^2} - \frac{r_1 \overline{P}_1}{K} & -\frac{r_1 \alpha_1 \overline{P}_1}{K} & -\frac{\overline{P}_1 w_1}{D_1 + \overline{P}_1} \\ 0 & r_2 - \frac{r_2 \alpha_2 \overline{P}_1}{K} - \frac{w_2 \overline{Z}}{D_2} & 0 \\ \frac{\eta_1 \overline{Z} D_1}{(D_1 + \overline{P}_1)^2} & -\frac{\eta_2 \overline{Z}}{D_2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen matriks $\mathcal{J}(E_4)$ diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $|\mathcal{J}(E_4) - \lambda I| = 0$, yakni

$$\left(\lambda^2 - \left(\frac{w_1 \overline{Z} \overline{P}_1}{(D_1 + \overline{P}_1)^2} - \frac{r_1 \overline{P}_1}{K} \right) \lambda + \frac{\eta_1 D_1 w_1 \overline{Z} \overline{P}_1}{(D_1 + \overline{P}_1)^3} \right) \left(r_2 \left(1 - \frac{\alpha_2 \overline{P}_1}{K} \right) - \frac{w_2 \overline{Z}}{D_2} - \lambda \right) = 0. \quad (3.43)$$

Persamaan karakteristik (3.43) menghasilkan

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\bar{w}_1 \bar{Z} \bar{P}_1}{(D_1 + \bar{P}_1)^2} - \frac{r_1 \bar{P}_1}{K} \right) + \sqrt{\left(\frac{\bar{w}_1 \bar{Z} \bar{P}_1}{(D_1 + \bar{P}_1)^2} - \frac{r_1 \bar{P}_1}{K} \right)^2 - 4 \frac{\eta_1 D_1 \bar{w}_1 \bar{Z} \bar{P}_1}{(D_1 + \bar{P}_1)^3}} \right),$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\bar{w}_1 \bar{Z} \bar{P}_1}{(D_1 + \bar{P}_1)^2} - \frac{r_1 \bar{P}_1}{K} \right) - \sqrt{\left(\frac{\bar{w}_1 \bar{Z} \bar{P}_1}{(D_1 + \bar{P}_1)^2} - \frac{r_1 \bar{P}_1}{K} \right)^2 - 4 \frac{\eta_1 D_1 \bar{w}_1 \bar{Z} \bar{P}_1}{(D_1 + \bar{P}_1)^3}} \right),$$

$$\text{dan } \lambda_3 = r_2 \left(1 - \frac{\alpha_2 \bar{P}_1}{K} \right) - \frac{\bar{w}_2 \bar{Z}}{D_2}.$$

Semua parameter bernilai positif, oleh karena itu nilai

$$\left(\frac{\bar{w}_1 \bar{Z} \bar{P}_1}{(D_1 + \bar{P}_1)^2} - \frac{r_1 \bar{P}_1}{K} \right) > \sqrt{\left(\frac{\bar{w}_1 \bar{Z} \bar{P}_1}{(D_1 + \bar{P}_1)^2} - \frac{r_1 \bar{P}_1}{K} \right)^2 - 4 \frac{\eta_1 D_1 \bar{w}_1 \bar{Z} \bar{P}_1}{(D_1 + \bar{P}_1)^3}}. \quad \text{Bentuk}$$

tersebut mengakibatkan $\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 > 0$. $r_2 \left(1 - \frac{\alpha_2 \bar{P}_1}{K} \right) - \frac{\bar{w}_2 \bar{Z}}{D_2}$

dapat bernilai positif atau negatif. Titik E_4 tidak stabil jika memenuhi $\lambda_3 > 0$ dan tidak stabil pelana jika memenuhi $\lambda_3 < 0$. Untuk

memenuhi $\lambda_3 > 0$, maka $r_2 \left(1 - \frac{\alpha_2 \bar{P}_1}{K} \right) - \frac{\bar{w}_2 \bar{Z}}{D_2} > 0$. Bentuk tersebut

$$\text{dapat diubah menjadi } r_2 \left(1 - \frac{\alpha_2 \bar{P}_1}{K} \right) > \frac{\bar{w}_2 \bar{Z}}{D_2}.$$

Jadi, titik kesetimbangan $E_4 = (\bar{P}_1, 0, \bar{Z})$ bersifat tidak stabil jika

$$r_2 \left(1 - \frac{\alpha_2 \bar{P}_1}{K} \right) > \frac{\bar{w}_2 \bar{Z}}{D_2}, \quad \text{atau dapat juga ditulis dalam bentuk}$$

$$\frac{\alpha_2 \bar{P}_1}{K} + \frac{\bar{w}_2 \bar{Z}}{r_2 D_2} < 1.$$

3.4.6. Titik Kesetimbangan $E^* = (P_1^*, P_2^*, Z^*)$

P_2^* adalah akar persamaan dari $\theta_1 (P_2^*)^3 + \theta_2 (P_2^*)^2 + \theta_3 P_2^* + \theta_4 = 0$,

$$P_1^* = \frac{D_1 (\eta_2 P_2^* + c D_2 + c P_2^*)}{\eta_1 D_2 + \eta_1 P_2^* - \eta_2 P_2^* - c D_2 - c P_2^*}, \quad \text{dan}$$

$Z^* = \frac{r_2 (D_2 + P_2^*) (K - P_2^* - \alpha_2 P_1^*)}{K \bar{w}_2}$. Pada titik E^* berlaku

$$r_1 \left(1 - \frac{P_1^* + \alpha_1 P_2^*}{K} \right) - \frac{\bar{w}_1 Z^*}{D_1 + P_1^*} = 0, \quad r_2 \left(1 - \frac{P_2^* + \alpha_2 P_1^*}{K} \right) - \frac{\bar{w}_2 Z^*}{D_2 + P_2^*} = 0,$$

$$\text{dan } \frac{\eta_1 P_1^*}{D_1 + P_1^*} - \frac{\eta_2 P_2^*}{D_2 + P_2^*} - c = 0.$$

Jika titik E^* disubstitusikan ke dalam matriks J , maka diperoleh

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} -\frac{r_1 P_1^*}{K} + \frac{\bar{w}_1 Z^* P_1^*}{(D_1 + P_1^*)^2} & -\frac{r_1 \alpha_1 P_1^*}{K} & -\frac{P_1^* \bar{w}_1}{D_1 + P_1^*} \\ -\frac{r_2 \alpha_2 P_2^*}{K} & -\frac{r_2 P_2^*}{K} + \frac{\bar{w}_2 Z^* P_2^*}{(D_2 + P_2^*)^2} & -\frac{P_2^* \bar{w}_2}{D_2 + P_2^*} \\ \frac{\eta_1 Z^* D_1}{(D_1 + P_1^*)^2} & -\frac{\eta_2 Z^* D_2}{(D_2 + P_2^*)^2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan matriks $J(E^*)$, diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut

$$\begin{aligned} \lambda^3 + \left(\frac{r_1 P_1^*}{K} - \frac{\bar{w}_1 Z^* P_1^*}{(D_1 + P_1^*)^2} + \frac{r_2 P_2^*}{K} - \frac{\bar{w}_2 Z^* P_2^*}{(D_2 + P_2^*)^2} \right) \lambda^2 + \left(-\frac{r_1 P_1^*}{K} \right. \\ \left. + \frac{\bar{w}_1 Z^* P_1^*}{(D_1 + P_1^*)^2} \right) \left(-\frac{r_2 P_2^*}{K} + \frac{\bar{w}_2 Z^* P_2^*}{(D_2 + P_2^*)^2} \right) + \left(\frac{P_1^* \bar{w}_1}{D_1 + P_1^*} \right) \left(\frac{\eta_1 Z^* D_1}{(D_1 + P_1^*)^2} \right) - \left(\frac{P_2^* \bar{w}_2}{D_2 + P_2^*} \right) \\ \left(\frac{\eta_2 Z^* D_2}{(D_2 + P_2^*)^2} \right) - \left(\frac{r_1 \alpha_1 P_1^*}{K} \right) \left(\frac{r_2 \alpha_2 P_2^*}{K} \right) \lambda + \left(-\frac{r_1 P_1^*}{K} + \frac{\bar{w}_1 Z^* P_1^*}{(D_1 + P_1^*)^2} \right) \left(\frac{P_2^* \bar{w}_2}{D_2 + P_2^*} \right) \\ \left(\frac{\eta_2 Z^* D_2}{(D_2 + P_2^*)^2} \right) + \left(\frac{P_1^* \bar{w}_1}{D_1 + P_1^*} \right) \left(\frac{r_2 \alpha_2 P_2^*}{K} \right) \left(\frac{\eta_2 Z^* D_2}{(D_2 + P_2^*)^2} \right) - \left(-\frac{r_2 P_2^*}{K} + \frac{\bar{w}_2 Z^* P_2^*}{(D_2 + P_2^*)^2} \right) \\ \left(\frac{P_1^* \bar{w}_1}{D_1 + P_1^*} \right) \left(\frac{\eta_1 Z^* D_1}{(D_1 + P_1^*)^2} \right) - \left(\frac{P_2^* \bar{w}_2}{D_2 + P_2^*} \right) \left(\frac{\eta_1 Z^* D_1}{(D_1 + P_1^*)^2} \right) \left(\frac{r_1 \alpha_1 P_1^*}{K} \right) = 0. \quad (3.44) \end{aligned}$$

Misalkan koefisien-koefisien dari persamaan karakteristik (3.44)

$$\begin{aligned} \text{adalah } a_1 = \left(\frac{r_1 P_1^*}{K} - \frac{\bar{w}_1 Z^* P_1^*}{(D_1 + P_1^*)^2} + \frac{r_2 P_2^*}{K} - \frac{\bar{w}_2 Z^* P_2^*}{(D_2 + P_2^*)^2} \right), \quad a_2 = \left(-\frac{r_1 P_1^*}{K} \right. \\ \left. + \frac{\bar{w}_1 Z^* P_1^*}{(D_1 + P_1^*)^2} \right) \left(-\frac{r_2 P_2^*}{K} + \frac{\bar{w}_2 Z^* P_2^*}{(D_2 + P_2^*)^2} \right) + \left(\frac{P_1^* \bar{w}_1}{D_1 + P_1^*} \right) \left(\frac{\eta_1 Z^* D_1}{(D_1 + P_1^*)^2} \right) - \left(\frac{P_2^* \bar{w}_2}{D_2 + P_2^*} \right) \\ \left(\frac{\eta_2 Z^* D_2}{(D_2 + P_2^*)^2} \right) - \left(\frac{r_1 \alpha_1 P_1^*}{K} \right) \left(\frac{r_2 \alpha_2 P_2^*}{K} \right), \quad \text{dan } a_3 = \left(-\frac{r_1 P_1^*}{K} + \frac{\bar{w}_1 Z^* P_1^*}{(D_1 + P_1^*)^2} \right) \\ \left(\frac{P_2^* \bar{w}_2}{D_2 + P_2^*} \right) \left(\frac{\eta_2 Z^* D_2}{(D_2 + P_2^*)^2} \right) + \left(\frac{P_1^* \bar{w}_1}{D_1 + P_1^*} \right) \left(\frac{r_2 \alpha_2 P_2^*}{K} \right) \left(\frac{\eta_2 Z^* D_2}{(D_2 + P_2^*)^2} \right) - \left(-\frac{r_2 P_2^*}{K} \right. \\ \left. + \frac{\bar{w}_2 Z^* P_2^*}{(D_2 + P_2^*)^2} \right) \left(\frac{P_1^* \bar{w}_1}{D_1 + P_1^*} \right) \left(\frac{\eta_1 Z^* D_1}{(D_1 + P_1^*)^2} \right) - \left(\frac{P_2^* \bar{w}_2}{D_2 + P_2^*} \right) \left(\frac{\eta_1 Z^* D_1}{(D_1 + P_1^*)^2} \right) \left(\frac{r_1 \alpha_1 P_1^*}{K} \right). \end{aligned}$$

Titik E^* stabil asimtotik lokal jika memenuhi kriteria Routh-Hurwitz sebagai berikut

$$H_1 = [a_1] > 0 \quad \text{dan} \quad H_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix} > 0.$$

a. $H_1 = [a_1] > 0$

$$H_1 = \left(\frac{r_1 P_1^*}{K} - \frac{\bar{w}_1 Z^* P_1^*}{(D_1 + P_1^*)^2} \right) + \left(\frac{r_2 P_2^*}{K} - \frac{\bar{w}_2 Z^* P_2^*}{(D_2 + P_2^*)^2} \right).$$

$H_1 = [a_1] > 0$ terpenuhi jika $\left(\frac{r_1 P_1^*}{K} - \frac{\bar{w}_1 Z^* P_1^*}{(D_1 + P_1^*)^2} \right) + \left(\frac{r_2 P_2^*}{K} - \frac{\bar{w}_2 Z^* P_2^*}{(D_2 + P_2^*)^2} \right) > 0$. Bentuk tersebut terpenuhi jika

$$\left(\frac{r_1 P_1^*}{K} - \frac{\bar{w}_1 Z^* P_1^*}{(D_1 + P_1^*)^2} \right) > 0 \text{ dan } \left(\frac{r_2 P_2^*}{K} - \frac{\bar{w}_2 Z^* P_2^*}{(D_2 + P_2^*)^2} \right) > 0.$$

i. Bentuk $\left(\frac{r_1 P_1^*}{K} - \frac{\bar{w}_1 Z^* P_1^*}{(D_1 + P_1^*)^2} \right) > 0$ dapat ditulis menjadi $P_1^* \left(\frac{r_1}{K} - \frac{\bar{w}_1 Z^*}{(D_1 + P_1^*)^2} \right) > 0$. $P_1^* > 0$, sehingga nilai $\left(\frac{r_1}{K} - \frac{\bar{w}_1 Z^*}{(D_1 + P_1^*)^2} \right) > 0$. Bentuk tersebut dapat diubah menjadi

$$Z^* < \frac{r_1 (D_1 + P_1^*)^2}{\bar{w}_1 K}. \quad (3.45)$$

ii. Bentuk $\left(\frac{r_2 P_2^*}{K} - \frac{\bar{w}_2 Z^* P_2^*}{(D_2 + P_2^*)^2} \right) > 0$ dapat ditulis menjadi $P_2^* \left(\frac{r_2}{K} - \frac{\bar{w}_2 Z^*}{(D_2 + P_2^*)^2} \right) > 0$, $P_2^* > 0$, sehingga nilai $\left(\frac{r_2}{K} - \frac{\bar{w}_2 Z^*}{(D_2 + P_2^*)^2} \right) > 0$. Bentuk tersebut dapat diubah menjadi

$$Z^* < \frac{r_2 (D_2 + P_2^*)^2}{\bar{w}_2 K}. \quad (3.46)$$

Berdasarkan (3.45) dan (3.46), maka diperoleh kondisi

$$Z^* < \min \left\{ \frac{r_1 (D_1 + P_1^*)^2}{\bar{w}_1 K}, \frac{r_2 (D_2 + P_2^*)^2}{\bar{w}_2 K} \right\}. \quad (3.47)$$

b. $H_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix} > 0$

$$H_2 = \left(\left(\frac{r_1 P_1^*}{K} - \frac{\bar{w}_1 Z^* P_1^*}{(D_1 + P_1^*)^2} \right) + \left(\frac{r_2 P_2^*}{K} - \frac{\bar{w}_2 Z^* P_2^*}{(D_2 + P_2^*)^2} \right) \right) \left(\frac{r_1 P_1^*}{K} - \frac{\bar{w}_1 Z^* P_1^*}{(D_1 + P_1^*)^2} \right) \left(\frac{r_2 P_2^*}{K} - \frac{\bar{w}_2 Z^* P_2^*}{(D_2 + P_2^*)^2} \right) - \frac{\alpha_1 \alpha_2 r_1 r_2 P_1^* P_2^*}{K^2} + Z^* \left(\frac{\eta_1 D_1}{(D_1 + P_1^*)^2} \left(\frac{P_1^* \bar{w}_1}{D_1 + P_1^*} \left(\frac{r_1 P_1^*}{K} - \frac{\bar{w}_1 Z^* P_1^*}{(D_1 + P_1^*)^2} \right) + \frac{r_1 \alpha_1 P_1^*}{K} \right) \right.$$

$$\left(\frac{P_2^* \bar{w}_2}{D_2 + P_2^*} \right) - \frac{\eta_2 D_2}{(D_2 + P_2^*)^2} \left(\frac{P_2^* \bar{w}_2}{D_2 + P_2^*} \left(\frac{r_2 P_2^*}{K} - \frac{\bar{w}_2 Z^* P_2^*}{(D_2 + P_2^*)^2} \right) + \frac{r_2 \alpha_2 P_2^*}{K} \left(\frac{P_1^* \bar{w}_1}{D_1 + P_1^*} \right) \right).$$

$H_2 > 0$ terpenuhi jika $\left(\left(\frac{r_1 P_1^*}{K} - \frac{\bar{w}_1 Z^* P_1^*}{(D_1 + P_1^*)^2} \right) + \left(\frac{r_2 P_2^*}{K} - \frac{\bar{w}_2 Z^* P_2^*}{(D_2 + P_2^*)^2} \right) \right) \left(\left(\frac{r_1 P_1^*}{K} - \frac{\bar{w}_1 Z^* P_1^*}{(D_1 + P_1^*)^2} \right) \left(\frac{r_2 P_2^*}{K} - \frac{\bar{w}_2 Z^* P_2^*}{(D_2 + P_2^*)^2} \right) - \frac{\alpha_1 \alpha_2 r_1 r_2 P_1^* P_2^*}{K^2} \right) > 0$ dan $Z^* \left(\frac{\eta_1 D_1}{(D_1 + P_1^*)^2} \left(\frac{P_1^* \bar{w}_1}{D_1 + P_1^*} \left(\frac{r_1 P_1^*}{K} - \frac{\bar{w}_1 Z^* P_1^*}{(D_1 + P_1^*)^2} \right) + \frac{r_1 \alpha_1 P_1^*}{K} \left(\frac{P_2^* \bar{w}_2}{D_2 + P_2^*} \right) - \frac{\eta_2 D_2}{(D_2 + P_2^*)^2} \left(\frac{P_2^* \bar{w}_2}{D_2 + P_2^*} \left(\frac{r_2 P_2^*}{K} - \frac{\bar{w}_2 Z^* P_2^*}{(D_2 + P_2^*)^2} \right) + \frac{r_2 \alpha_2 P_2^*}{K} \left(\frac{P_1^* \bar{w}_1}{D_1 + P_1^*} \right) \right) \right) > 0$.

i. $\left(\left(\frac{r_1 P_1^*}{K} - \frac{\bar{w}_1 Z^* P_1^*}{(D_1 + P_1^*)^2} \right) + \left(\frac{r_2 P_2^*}{K} - \frac{\bar{w}_2 Z^* P_2^*}{(D_2 + P_2^*)^2} \right) \right) \left(\left(\frac{r_1 P_1^*}{K} - \frac{\bar{w}_1 Z^* P_1^*}{(D_1 + P_1^*)^2} \right) \left(\frac{r_2 P_2^*}{K} - \frac{\bar{w}_2 Z^* P_2^*}{(D_2 + P_2^*)^2} \right) - \frac{\alpha_1 \alpha_2 r_1 r_2 P_1^* P_2^*}{K^2} \right) > 0$.

Nilai $P_1^* P_2^* > 0$ dan $\left(\frac{r_1 P_1^*}{K} - \frac{\bar{w}_1 Z^* P_1^*}{(D_1 + P_1^*)^2} \right) + \left(\frac{r_2 P_2^*}{K} - \frac{\bar{w}_2 Z^* P_2^*}{(D_2 + P_2^*)^2} \right) > 0$, maka $\left(\frac{r_1}{K} - \frac{\bar{w}_1 Z^*}{(D_1 + P_1^*)^2} \right) \left(\frac{r_2}{K} - \frac{\bar{w}_2 Z^*}{(D_2 + P_2^*)^2} \right) - \frac{\alpha_1 \alpha_2 r_1 r_2}{K^2} > 0$. Bentuk tersebut dapat diubah menjadi

$$\left(\frac{r_1}{K} - \frac{d_1^2 Z^*}{\bar{w}_1} \right) \left(\frac{r_2}{K} - \frac{d_2^2 Z^*}{\bar{w}_2} \right) > \frac{\alpha_1 \alpha_2 r_1 r_2}{K^2}, \quad (3.48)$$

dengan $d_1 = \frac{\bar{w}_1}{(D_1 + P_1^*)}$ dan $d_2 = \frac{\bar{w}_2}{(D_2 + P_2^*)}$.

ii. $Z^* \left(\frac{\eta_1 D_1}{(D_1 + P_1^*)^2} \left(\frac{P_1^* \bar{w}_1}{D_1 + P_1^*} \left(\frac{r_1 P_1^*}{K} - \frac{\bar{w}_1 Z^* P_1^*}{(D_1 + P_1^*)^2} \right) + \frac{r_1 \alpha_1 P_1^*}{K} \left(\frac{P_2^* \bar{w}_2}{D_2 + P_2^*} \right) - \frac{\eta_2 Z^* D_2}{(D_2 + P_2^*)^2} \left(\frac{P_2^* \bar{w}_2}{D_2 + P_2^*} \left(\frac{r_2 P_2^*}{K} - \frac{\bar{w}_2 Z^* P_2^*}{(D_2 + P_2^*)^2} \right) + \frac{r_2 \alpha_2 P_2^*}{K} \left(\frac{P_1^* \bar{w}_1}{D_1 + P_1^*} \right) \right) \right) > 0$. Nilai $Z^* > 0$, maka $\frac{\eta_1 D_1}{(D_1 + P_1^*)^2} \left(\frac{P_1^* \bar{w}_1}{D_1 + P_1^*} \right) \left(\frac{r_1 P_1^*}{K} - \frac{\bar{w}_1 Z^* P_1^*}{(D_1 + P_1^*)^2} \right) + \frac{r_1 \alpha_1 P_1^*}{K} \left(\frac{P_2^* \bar{w}_2}{D_2 + P_2^*} \right) - \frac{\eta_2 D_2}{(D_2 + P_2^*)^2} \left(\frac{P_2^* \bar{w}_2}{D_2 + P_2^*} \right) \left(\frac{r_2 P_2^*}{K} - \frac{\bar{w}_2 Z^* P_2^*}{(D_2 + P_2^*)^2} \right) + \frac{r_2 \alpha_2 P_2^*}{K} \left(\frac{P_1^* \bar{w}_1}{D_1 + P_1^*} \right) > 0$.

$$\left(\frac{r_1 P_1^*}{K} - \frac{\bar{w}_1 Z^* P_1^*}{(D_1 + P_1^*)^2} \right) + \frac{r_1 \alpha_1 P_1^*}{K} \left(\frac{P_2^* \bar{w}_2}{D_2 + P_2^*} \right) - \frac{\eta_2 D_2}{(D_2 + P_2^*)^2} \left(\frac{P_2^* \bar{w}_2}{D_2 + P_2^*} \right) \left(\frac{r_2 P_2^*}{K} - \frac{\bar{w}_2 Z^* P_2^*}{(D_2 + P_2^*)^2} \right) + \frac{r_2 \alpha_2 P_2^*}{K} \left(\frac{P_1^* \bar{w}_1}{D_1 + P_1^*} \right) > 0$$

$$\left(\frac{r_2 P_2^*}{K} - \frac{\overline{w_2} Z^* P_2^*}{(D_2 + P_2^*)^2}\right) + \frac{r_2 \alpha_2 P_2^*}{K} \left(\frac{P_1^* \overline{w_1}}{D_1 + P_1^*}\right) > 0. \text{Bentuk tersebut}$$

dapat diubah menjadi

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} > \frac{D_2 P_2^* \overline{w_1}^3 d_2^2}{D_1 P_1^* \overline{w_2}^3 d_1^2} \frac{\left(d_2 P_2^* (r_2 \overline{w_2} - d_2^2 K Z^*) + r_2 \alpha_2 \overline{w_2} d_1 P_1^*\right)}{\left(d_1 P_1^* (r_1 \overline{w_1} - d_1^2 K Z^*) + r_1 \alpha_1 \overline{w_1} d_2 P_2^*\right)}. \quad (3.49)$$

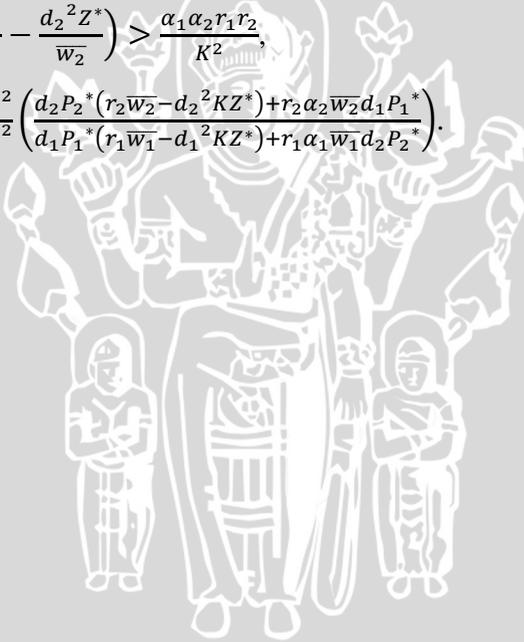
$$\text{dengan } d_1 = \frac{\overline{w_1}}{(D_1 + P_1^*)} \text{ dan } d_2 = \frac{\overline{w_2}}{(D_2 + P_2^*)}.$$

Berdasarkan (3.47), (3.48), dan (3.49), maka titik $E^* = (P_1^*, P_2^*, Z^*)$ stabil asimtotik lokal dengan syarat

$$\text{a. } Z^* < \min \left\{ \frac{r_1 (D_1 + P_1^*)^2}{\overline{w_1} K}, \frac{r_2 (D_2 + P_2^*)^2}{\overline{w_2} K} \right\},$$

$$\text{b. } \left(\frac{r_1}{K} - \frac{d_1^2 Z^*}{\overline{w_1}}\right) \left(\frac{r_2}{K} - \frac{d_2^2 Z^*}{\overline{w_2}}\right) > \frac{\alpha_1 \alpha_2 r_1 r_2}{K^2},$$

$$\text{c. } \frac{\eta_1}{\eta_2} > \frac{D_2 P_2^* \overline{w_1}^3 d_2^2}{D_1 P_1^* \overline{w_2}^3 d_1^2} \frac{\left(d_2 P_2^* (r_2 \overline{w_2} - d_2^2 K Z^*) + r_2 \alpha_2 \overline{w_2} d_1 P_1^*\right)}{\left(d_1 P_1^* (r_1 \overline{w_1} - d_1^2 K Z^*) + r_1 \alpha_1 \overline{w_1} d_2 P_2^*\right)}.$$



Tabel 3.1. Syarat eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan model

Titik Kesetimbangan	Syarat Eksistensi	Syarat Kestabilan	Jenis Kestabilan
$E_0 = (0, 0, 0)$	-	-	Tidak Stabil
$E_1 = (K, 0, 0)$	-	$\alpha_2 > 1$ dan $\eta_1 \frac{K}{D_1+K} < c$.	Stabil Asimtotik lokal
$E_2 = (0, K, 0)$	-	$\alpha_1 > 1$	Stabil Asimtotik lokal
$E_3 = (\widehat{P}_1, \widehat{P}_2, 0)$ $\widehat{P}_1 = \frac{K(\alpha_1-1)}{\alpha_1\alpha_2-1}$ dan $\widehat{P}_2 = \frac{K(\alpha_2-1)}{\alpha_1\alpha_2-1}$	$\alpha_1 > 1, \alpha_2 > 1,$ atau $\alpha_1 < 1,$ $\alpha_2 < 1.$	<ol style="list-style-type: none"> 1. $\alpha_1\alpha_2 < 1$ 2. $\widehat{P}_1 < \min \left\{ \frac{D_1(\eta_2+c)}{\eta_1-\eta_2-c}, \frac{cD_1}{\eta_1-c} \right\}$ 3. $\eta_1 < \eta_2 + c$ 	Stabil Asimtotik lokal
$E_4 = (\overline{P}_1, 0, \overline{Z})$ $\overline{P}_1 = \frac{cD_1}{\eta_1-c}$ dan $\overline{Z} = \frac{\eta_1 r_1 D_1 (K\eta_1 - c(K+D_1))}{w_1 K (\eta_1 - c)^2}$	$\eta_1 > c \left(1 + \frac{D_1}{K} \right)$	$\frac{\alpha_2 \overline{P}_1}{K} + \frac{w_2 \overline{Z}}{r_2 D_2} < 1$	Tidak Stabil

Titik Kesetimbangan	Syarat Eksistensi	Syarat Kestabilan	Jenis Kestabilan
$E^* = (P_1^*, P_2^*, Z^*)$ $P_1^* = \frac{D_1(\eta_2 P_2^* + cD_2 + cP_2^*)}{\eta_1 D_2 + \eta_1 P_2^* - \eta_2 P_2^* - cD_2 - cP_2^*}$ $\theta_1(P_2^*)^3 + \theta_2(P_2^*)^2 + \theta_3 P_2^* + \theta_4 = 0,$ <p>dan</p> $Z^* = \frac{r_2(D_2 + P_2^*)(K - P_2^* - \alpha_2 P_1^*)}{Kw_2},$	<ol style="list-style-type: none"> 1. $\theta_2 < 0,$ $\theta_3 < 0,$ dan $\theta_4 < 0,$ 2. $\eta_1 > \frac{\eta_2 P_2^*}{D_2 + P_2^*} + c,$ dan 3. $K > P_2^* + \alpha_2 P_1^*$ 	<ol style="list-style-type: none"> 1. $Z^* < \min \left\{ \frac{r_1(D_1 + P_1)^2}{w_1 K}, \frac{r_2(D_2 + P_2)^2}{w_2 K} \right\}$ 2. $\left(\frac{r_1}{K} - \frac{d_1^2 Z^*}{w_1} \right) \left(\frac{r_2}{K} - \frac{d_2^2 Z^*}{w_2} \right) > \frac{\alpha_1 \alpha_2 r_1 r_2}{K^2}$ 3. $\frac{\eta_1}{\eta_2} > \frac{D_2 P_2^* w_1^3 d_2^2}{D_1 P_1^* w_2^3 d_1^2} \frac{\left(d_2 P_2^* (r_2 w_2 - d_2^2 K Z^*) + r_2 \alpha_2 w_2 d_1 P_1^* \right)}{\left(d_1 P_1^* (r_1 w_1 - d_1^2 K Z^*) + r_1 \alpha_1 w_1 d_2 P_2^* \right)}$ 	<p>Stabil Asimtotik lokal</p>

3.3 Simulasi Numerik dan Interpretasi Model

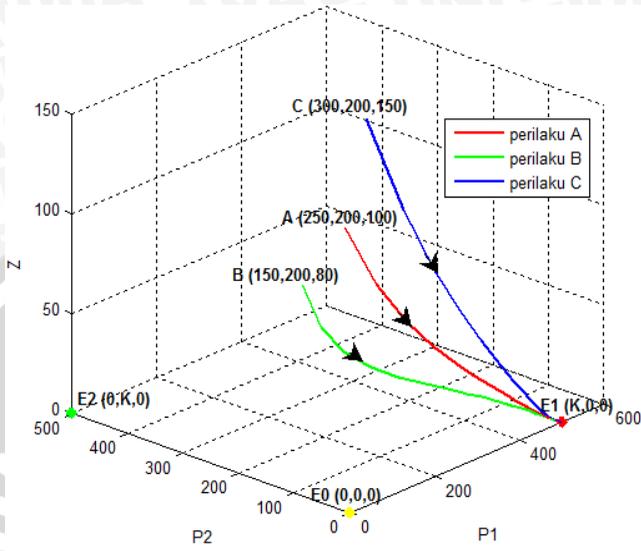
Untuk memperlihatkan eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan model pengalihan pemangsaan zooplankton terhadap NTP dan TPP, serta untuk mengetahui pengaruh pengalihan pemangsaan zooplankton terhadap dinamika populasi NTP, TPP, dan zooplankton, maka dilakukan simulasi numerik terhadap model tersebut. Diberikan tiga titik awal yang berbeda dari masing-masing populasi yakni titik $A(P_1, P_2, Z) = (250, 200, 100)$, $B(P_1, P_2, Z) = (150, 200, 80)$, dan $C(P_1, P_2, Z) = (300, 200, 150)$. Selanjutnya, dilakukan simulasi numerik menggunakan *software Matlab*.

3.5.1 Simulasi Numerik untuk Kestabilan Titik E_1

Simulasi numerik untuk kestabilan titik E_1 menggunakan nilai-nilai parameter yang ditunjukkan pada Tabel 3.2 berikut ini.

Tabel 3.2. Nilai parameter untuk simulasi kestabilan titik E_1

Parameter	Nilai
r_1	0.5515 per hari
r_2	0.525 per hari
K	500 nos/ml
w_1	0.6 per hari
w_2	0.412 per hari
D_1	50 nos/ml
D_2	30 nos/ml
α_1	0.02
α_2	1.1
ξ_1	0.502
ξ_2	0.575
k_{12}	1
k_{21}	5
c	0.1 per hari



Gambar 3.2. Simulasi numerik untuk kestabilan titik E_1

Pada simulasi numerik, digunakan nilai parameter seperti pada Tabel 3.2 dimana nilai parameter tersebut memenuhi syarat kestabilan titik kesetimbangan $E_1 = (K, 0, 0)$, yakni $\alpha_2 > 1$ dan $\eta_1 \frac{K}{D_1+K} < c$. Hasil dari simulasi numerik tersebut disajikan dalam bentuk Gambar 3.2.

Pada Tabel 3.2 diketahui bahwa nilai $\alpha_2 = 1,1$. Hal tersebut menunjukkan bahwa nilai hambatan NTP terhadap TPP sangat besar, sehingga NTP mendominasi persaingan dalam memperebutkan nutrisi dan ruang untuk berkembang. Pertumbuhan TPP menjadi terhambat karena kalah bersaing dengan NTP, sehingga populasi TPP menjadi menurun.

Pada tabel 3.2 juga dapat diketahui nilai $k_{12} = 1$ dan $k_{21} = 5$. Nilai tersebut menyebabkan $\eta_1 \frac{K}{D_1+K} < c$, yang berarti laju pertumbuhan zooplankton lebih kecil daripada laju kematian dikarenakan jumlah zooplankton yang memangsa NTP hanya sedikit. Nilai $k_{21} > k_{12}$ menunjukkan bahwa zooplankton yang beralih dari memangsa NTP ke TPP lebih besar daripada beralih dari TPP ke

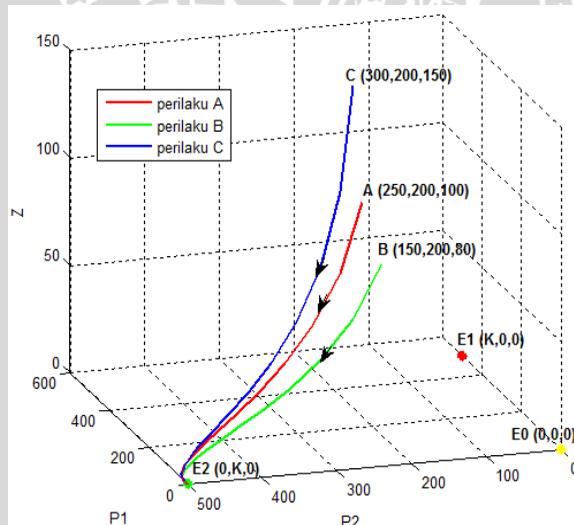
NTP. Hal tersebut menyebabkan populasi zooplankton semakin menurun.

Penurunan populasi TPP dan zooplankton menyebabkan populasi NTP berkembang pesat karena populasi pesaing dan pemangsa yang semakin menurun. Populasi NTP terus mengalami kenaikan hingga mencapai *carrying capacity*, yakni 500 nos/ml, sedangkan populasi TPP dan zooplankton akan mengalami kepunahan.

Pada Gambar 3.1 juga dapat diketahui bahwa ketiga titik awal yang diberikan menuju ke titik $E_1 = (K, 0, 0)$ sehingga titik E_1 stabil. Pada saat titik E_1 stabil, terdapat titik-titik lain yang eksis tetapi tidak stabil yakni titik $E_0 = (0, 0, 0)$ dan $E_2 = (0, K, 0)$, sedangkan titik $E_3 = (\bar{P}_1, \bar{P}_2, 0)$, $E_4 = (\bar{P}_1, 0, \bar{Z})$, dan $E^* = (P_1^*, P_2^*, Z^*)$ tidak eksis.

3.5.2 Simulasi Numerik untuk Kestabilan titik E_2

Pada Tabel 3.2, diubah beberapa nilai parameter yakni $\alpha_1 = 1,2$ dan $\alpha_2 = 0,01$ sehingga diperoleh gambar sebagai berikut.



Gambar 3.3. Simulasi numerik untuk kestabilan titik E_2

Pada Gambar 3.2 dapat diketahui bahwa populasi NTP mengalami penurunan. Hal tersebut dikarenakan nilai $\alpha_1 > 1$ yang berarti tingkat hambatan TPP terhadap NTP sangat besar, sehingga NTP kalah bersaing dengan TPP. Penurunan populasi NTP menyebabkan populasi TPP menjadi naik. Naiknya populasi TPP dan menurunnya populasi NTP menyebabkan zooplankton lebih banyak memangsa TPP daripada memangsa NTP sehingga populasi zooplankton mengalami penurunan karena racun dari TPP.

Penurunan populasi NTP dan zooplankton menyebabkan populasi TPP menjadi berkembang pesat karena tidak adanya pesaing dan pemangsa. Populasi TPP akan terus mengalami kenaikan hingga mencapai *carrying capacity*, sedangkan populasi NTP dan zooplankton akan mengalami kepunahan. Hal tersebut menunjukkan bahwa populasi NTP, TPP, dan zooplankton bergerak menuju ke titik $E_2 = (0, K, 0)$, yang berarti titik $E_2 = (0, K, 0)$ stabil.

Pada saat titik E_2 stabil, terdapat titik-titik lain yang eksis tetapi tidak stabil yakni titik $E_0 = (0, 0, 0)$ dan $E_1 = (K, 0, 0)$, sedangkan titik $E_3 = (\widehat{P}_1, \widehat{P}_2, 0)$, $E_4 = (\overline{P}_1, 0, \overline{Z})$, dan $E^* = (P_1^*, P_2^*, Z^*)$ tidak eksis. Pengalihan pemangsaan zooplankton tidak berpengaruh terhadap kestabilan titik kesetimbangan E_2 karena jika populasi TPP terus naik menuju *carrying capacity* (K) dan populasi NTP mengalami penurunan menuju ke titik nol, maka apapun nilai pengalihan zooplankton, pasti populasi zooplankton akan tetap semakin menurun menuju ke titik nol.

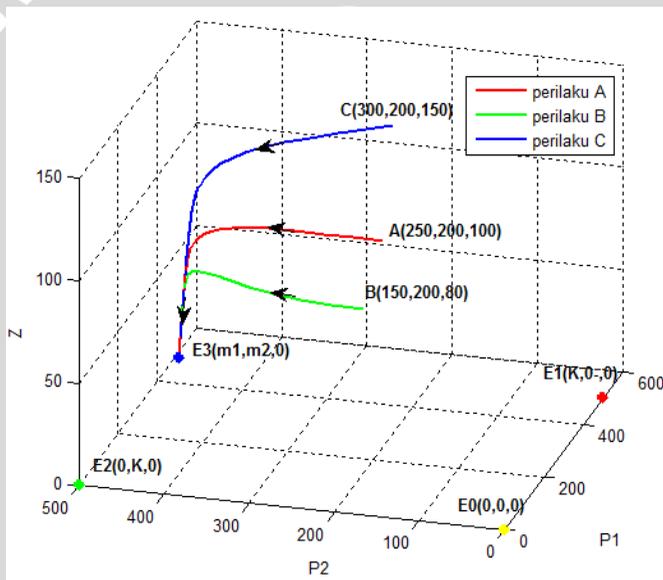
3.5.3 Simulasi Numerik untuk Kestabilan Titik E_3 , E_4 , dan E^*

Pada Tabel 3.2, diubah beberapa nilai parameter yakni $\alpha_1 = 0,02$, $\alpha_2 = 0,01$, $k_{12} = 3$ dan $k_{21} = 2$. Nilai-nilai parameter tersebut memenuhi syarat kestabilan titik kesetimbangan $E_3 = (\widehat{P}_1, \widehat{P}_2, 0)$, yakni $\alpha_1 \alpha_2 < 1$, dan $\frac{\eta_1 P_1}{(D_1 + P_1)} < \frac{\eta_2 P_2}{(D_2 + P_2)} + c$.

Nilai $k_{12} = 3$ dan $k_{21} = 2$ menunjukkan bahwa jumlah zooplankton yang beralih dari memangsa TPP ke NTP sedikit lebih banyak daripada beralih dari NTP ke TPP. Nilai tersebut mengakibatkan $\frac{\eta_1 P_1}{(D_1 + P_1)} < \frac{\eta_2 P_2}{(D_2 + P_2)} + c$ yang berarti bahwa laju pertumbuhan populasi zooplankton akibat memangsa NTP lebih kecil daripada nilai hambatan pertumbuhannya. Oleh karena itu,

meskipun jumlah zooplankton yang beralih untuk memangsa NTP sedikit lebih besar daripada zooplankton yang memangsa TPP, populasi zooplankton tetap menurun.

Penurunan populasi zooplankton mengakibatkan NTP dan TPP tumbuh dan berkembang dengan baik karena tidak adanya pemangsa. Akan tetapi, karena nilai $\alpha_1 = 0,02$ dan $\alpha_2 = 0,01$, menyebabkan NTP dan TPP bersaing ketat untuk tumbuh dan tingkat pertumbuhan TPP sedikit lebih besar daripada NTP. Populasi NTP akan mencapai $\widehat{P}_1 = 490,0980$ nos/ml dan TPP mencapai $\widehat{P}_2 = 495,0990$ nos/ml, sedangkan zooplankton akan mengalami kepunahan. Hasil simulasi numerik yang menunjukkan dinamika populasi NTP, TPP, dan zooplankton tersebut diperlihatkan dalam Gambar 3.3 berikut.

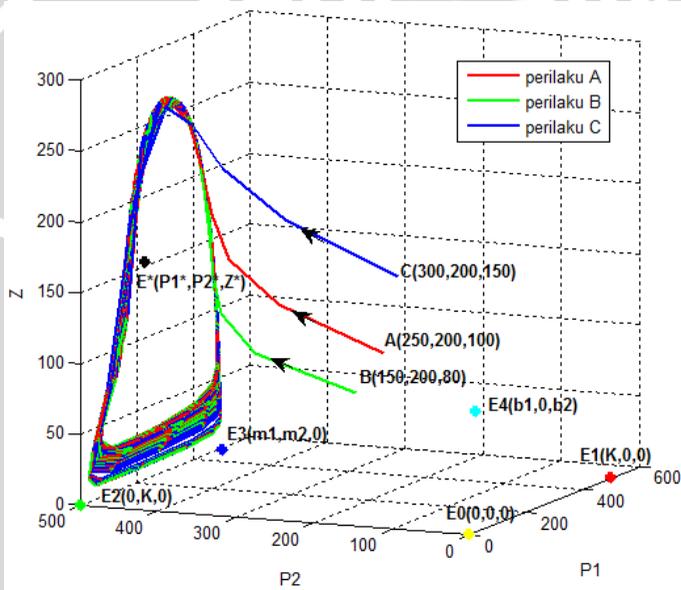


Gambar 3.4. Simulasi numerik untuk kestabilan titik E_3

Pada Gambar 3.3 dapat diketahui bahwa ketiga titik awal yang diberikan bergerak menuju titik kesetimbangan $E_3 = (\widehat{P}_1, \widehat{P}_2, 0)$, dimana pada gambar tersebut nilai \widehat{P}_1 dan \widehat{P}_2 dimisalkan sebagai m_1 dan m_2 . Hal tersebut menunjukkan bahwa titik $E_3 = (\widehat{P}_1, \widehat{P}_2, 0)$ stabil. Pada saat titik E_3 stabil, terdapat titik-titik lain yang eksis

tetapi tidak stabil yakni titik $E_0 = (0, 0, 0)$, $E_1 = (K, 0, 0)$, dan $E_2 = (0, K, 0)$, sedangkan titik $E_4 = (\overline{P}_1, 0, \overline{Z})$, dan $E^* = (P_1^*, P_2^*, Z^*)$ tidak eksis.

Jika laju peralihan zooplankton diubah menjadi $k_{12} = 5$ dan $k_{21} = 2$, maka nilai parameter yang diberikan memenuhi kondisi $\frac{\alpha_2 \overline{P}_1}{K} + \frac{\overline{w}_2 \overline{Z}}{r_2 D_2} < 1$. Simulasi numerik dengan menggunakan nilai parameter tersebut menghasilkan gambar berikut.



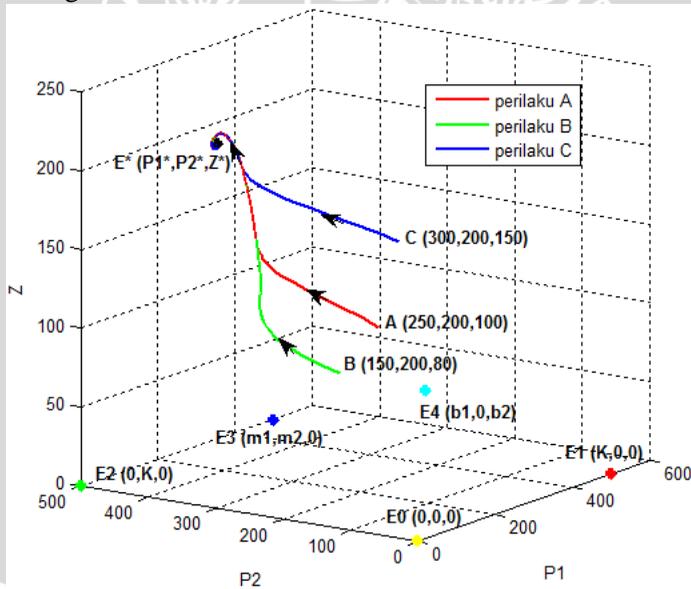
Gambar 3.5. Simulasi numerik untuk kestabilan titik E_4

Pada Gambar 3.4 dapat diketahui bahwa ketiga titik awal yang diberikan menjauhi titik $E_4 = (\overline{P}_1, 0, \overline{Z})$. Pada gambar tersebut nilai \overline{P}_1 dan \overline{Z} dimisalkan sebagai b_1 dan b_2 . Hal tersebut menunjukkan bahwa titik E_4 tidak stabil. Nilai $k_{12} = 5$ dan $k_{21} = 2$ menunjukkan bahwa laju pengalihan pemangsa zooplankton dari TPP ke NTP jauh lebih besar daripada laju pengalihan dari memangsa NTP ke TPP. Hal tersebut menyebabkan zooplankton lebih banyak memangsa NTP daripada TPP sehingga pada saat populasi NTP naik

maka populasi zooplankton juga ikut naik. Jumlah zooplankton yang beralih untuk memangsa TPP lebih sedikit menyebabkan TPP dapat tumbuh lebih baik daripada NTP.

Pada saat populasi TPP dan NTP mengalami kenaikan, maka populasi zooplankton juga bertambah. Kemudian, pada saat populasi zooplankton bertambah maka populasi NTP dan TPP menjadi menurun. Pada saat populasi NTP dan TPP turun, maka populasi zooplankton juga mengalami penurunan. Menurunnya populasi zooplankton menyebabkan populasi NTP dan TPP mengalami kenaikan lagi. Hal tersebut akan terus terjadi berulang-ulang atau sering disebut sebagai osilasi. Pada saat titik E_4 tidak stabil, terdapat titik-titik lain yang eksis tetapi tidak stabil yakni titik $E_0 = (0, 0, 0)$, $E_1 = (K, 0, 0)$, $E_2 = (0, K, 0)$, $E_3 = (\widehat{P}_1, \widehat{P}_2, 0)$, dan $E^* = (P_1^*, P_2^*, Z^*)$.

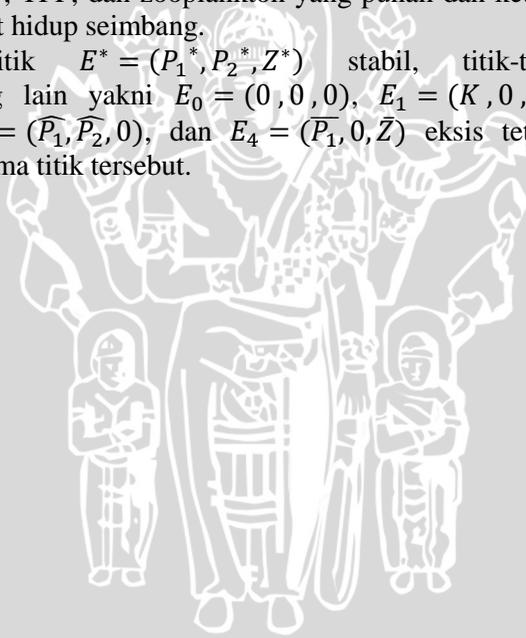
Jika nilai pengalihan pemangsaan zooplankton terhadap NTP dan TPP diubah menjadi $k_{12} = 4$, dan $k_{21} = 2$, maka nilai parameter tersebut memenuhi syarat kestabilan dari titik $E^* = (P_1^*, P_2^*, Z^*)$. Simulasi numerik menggunakan parameter tersebut menghasilkan gambar sebagai berikut.



Gambar 3.6. Simulasi numerik untuk kestabilan titik E^*

Pada Gambar 3.5 dapat diketahui bahwa ketiga titik awal yang diberikan bergerak menuju titik kesetimbangan $E^* = (P_1^*, P_2^*, Z^*)$, yang berarti titik E^* bersifat stabil. Nilai $k_{12} = 4$, dan $k_{21} = 2$ menunjukkan bahwa populasi zooplankton yang beralih untuk memangsa NTP lebih banyak daripada memangsa TPP, sehingga jumlah populasi TPP selalu lebih tinggi daripada jumlah NTP. Akan tetapi, karena selisih $k_{12} = 4$, dan $k_{21} = 2$ tidak terlalu kecil dan tidak terlalu besar, maka pertumbuhan populasi NTP, TPP, dan zooplankton akan mengalami kesetimbangan. Populasi NTP akan mencapai 253,2928 nos/ml, populasi TPP akan mencapai 442,3881 nos/ml, dan populasi zooplankton mencapai 198,9290 nos/ml dalam jangka waktu yang panjang. Hal tersebut menunjukkan bahwa tidak ada spesies dari NTP, TPP, dan zooplankton yang punah dan ketiga spesies tersebut dapat hidup seimbang.

Pada saat titik $E^* = (P_1^*, P_2^*, Z^*)$ stabil, titik-titik kesetimbangan yang lain yakni $E_0 = (0, 0, 0)$, $E_1 = (K, 0, 0)$, $E_2 = (0, K, 0)$, $E_3 = (\bar{P}_1, \bar{P}_2, 0)$, dan $E_4 = (\bar{P}_1, 0, \bar{Z})$ eksis tetapi tidak stabil pada kelima titik tersebut.



BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan, diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Model pengalihan pemangsa zooplankton terhadap NTP dan TPP yang berbentuk sistem otonomus tak linear berdimensi empat dapat direduksi menjadi sistem berdimensi tiga dengan cara mengagregasi sistem.
2. Terdapat enam titik kesetimbangan untuk masing-masing model. Titik kesetimbangan $E_1 = (K, 0, 0)$, $E_2 = (0, K, 0)$, $E_3 = (\widehat{P}_1, \widehat{P}_2, 0)$, dan $E^* = (P_1^*, P_2^*, Z^*)$ stabil asimtotik apabila memenuhi syarat kestabilannya, sedangkan titik $E_0 = (0, 0, 0)$ dan $E_4 = (\overline{P}_1, 0, \overline{Z})$ tidak stabil.
3. Simulasi numerik menunjukkan bahwa kestabilan yang diperoleh sesuai dengan kestabilan dari perhitungan analitik.
4. Hasil simulasi numerik juga menunjukkan bahwa pengalihan zooplankton dalam memangsa NTP dan TPP mempengaruhi kestabilan dinamika populasi NTP, TPP, dan zooplankton.

4.2. Saran

Pada pembahasan selanjutnya terdapat beberapa hal yang masih dapat dikembangkan dari skripsi ini, yakni membentuk model pengalihan pemangsa zooplankton terhadap NTP dan TPP yang bersifat tak konstan atau berubah-ubah bergantung pada jumlah populasi NTP dan TPP. Selain itu, dapat pula dikaji model interaksi dengan ekosistem yang bersifat terbuka.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR PUSTAKA

- Auger, P. dan J.C. Poggiale. 1996. Emergence of Population Growth Models: Fast Migration and Slow Growth. *Journal of Theoretical Biology*. 182:99-108. Marseille: Academic Press Limited.
- Boyce, W.E. dan R.C. DiPrima. 2000. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Seventh edition. John Willey & Sons, Inc. United State of America.
- Chattopadhyay, J., S. Alam., dan S. Roy. 2006. Competitive Effects of Toxin-Producing Phytoplankton on the Overall Plankton Populations in the Bay of Bengal. *Bulletin of Mathematical Biology*. 68:2303-2320.
- Glass, L. dan J.D. Murray. 2001. *Mathematical Biology : an Introduction 3rd Edition*. New York : Springer-Verlag.
- Lalli, C.M. dan T.R. Parsons. 1997. *Biological Oceanography: an Introduction*. Second Edition. Oxford: Elsevier Ltd.
- Moss, B. 1998. *Ecology of Fresh Water*. Third Edition. London: Blackwell Science Ltd.
- Nagle, R.K. dan E.B. Saff. 1993. *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems*. New York : Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- Robinson, R. C. 2004. *An Introduction to Dynamical Systems : Continuous and Discrete*. New Jersey : Prentice Hall Education.
- Roy, S., T. Chowdhury., dan J. Chattopadhyay. 2008. Modelling Migratory Grazing of Zooplankton on Toxic and Non-Toxic Phytoplankton. *Applied Mathematics and Computation*. 197: 659-671. Elsevier.

Sarkar, S., S. Mandal., dan J. Chattopadhyay. 2001. Toxin-producing Plankton May Act as a Biological Control for Planktonic Blooms - Field Study and Mathematical Modelling. *Journal of Theoretical Biology*. 215:333-344. Embyology Research Unit. Indian Statistical Institute. India.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



Lampiran 1 Listing program

```
function dy=MODEL(t,y);

%nilai parameter :
r1=0.5515;
r2=0.525;
K=500;
w1=0.6;
w2=0.412;
D1=50;
D2=30;
alpha1=0.02;
alpha2=0.01;
xi1=0.502;
xi2=0.575;
k12=4;
k21=2;
c=0.1;

v1=k12/(k21+k12);
v2=k21/(k21+k12);
eta1=v1*xi1;
eta2=v2*xi2;
j1=v1*w1;
j2=v2*w2;

%model interaksi NTP-TPP-zooplankton:
dy(1)=y(1)*r1*(1-(y(1)/K)-(alpha1*y(2)/K))-
(j1*y(1)*y(3)/(D1+y(1)));
dy(2)=y(2)*r2*(1-(y(2)/K)-(alpha2*y(1)/K))-
(j2*y(2)*y(3)/(D2+y(2)));
dy(3)=(y(3)*eta1*y(1)/(D1+y(1)))-
(y(3)*eta2*y(2)/(D2+y(2)))-(y(3)*c);

function [t,z]=RK4(MODELCOBA1,a,b,za,M)

h=(b-a)/M;
t=a:h:b;
z=zeros(M+1,length(za));
```

```
z(1,:)=za;
```

```
for i=1:M
```

```
    k1=feval(MODELCOB1,t(i),z(i,:));
```

```
    k2=feval(MODELCOB1,t(i)+h/2,z(i,:)+k1*h/2);
```

```
    k3=feval(MODELCOB1,t(i)+h/2,z(i,:)+k2*h/2);
```

```
    k4=feval(MODELCOB1,t(i)+h,z(i,:)+k3*h);
```

```
    z(i+1,:)=z(i,:)+h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
```

```
end;
```

```
[t y]=RK4('MODELCOB1',0,500,[250 200 100],600);
```

```
figure(1);
```

```
plot(t,y);
```

```
hold on;
```

```
xlabel('waktu (hari)');
```

```
ylabel('populasi plankton (nos/ml)');
```

```
axis square
```

```
legend('NTP','TPP','Zooplankton');grid;
```

```
[t y]=RK4('MODELCOB1',0,500,[150 200 80],600);
```

```
figure(1);
```

```
plot(t,y);
```

```
hold on;
```

```
xlabel('waktu (hari)');
```

```
ylabel('populasi plankton (nos/ml)');
```

```
axis square
```

```
legend('NTP','TPP','Zooplankton');grid;
```

```
[t y]=RK4('MODELCOB1',0,500,[300 200 150],600);
```

```
figure(1);
```

```
plot(t,y);
```

```
hold on;
```

```
xlabel('waktu (hari)');
```

```
ylabel('populasi plankton (nos/ml)');
```

```
axis square
```

```
legend('NTP','TPP','Zooplankton');grid;
```

```
[t y]=RK4('MODELCOB1',0,2000,[250 200 100],600);
```

```
figure(2);
```

```
plot3(y(:,1),y(:,2),y(:,3),'r','LineWidth',2);
```

```
hold on;
```

```
xlabel('P1');
```

```

ylabel('P2');
zlabel('Z');
legend('perilaku A','perilaku B','perilaku
C');grid;

[t y]=RK4('MODELCOBA1',0,2000,[150 200 80],600);
figure(2);
plot3(y(:,1),y(:,2),y(:,3),'g','LineWidth',2);
hold on;
xlabel('P1');
ylabel('P2');
zlabel('Z');
legend('perilaku A','perilaku B','perilaku
C');grid;

```

```

[t y]=RK4('MODELCOBA1',0,2000,[300 200 150],600);
figure(2);
plot3(y(:,1),y(:,2),y(:,3),'b','LineWidth',2);
hold on;
xlabel('P1');
ylabel('P2');
zlabel('Z');
legend('perilaku A','perilaku B','perilaku
C');grid;

```

```

%nilai parameter :
r1=0.5515;
r2=0.525;
K=500;
w1=0.6;
w2=0.412;
D1=50;
D2=30;
alpha1=0.02;
alpha2=0.01;
xi1=0.502;
xi2=0.575;
k12=4;
k21=2;
c=0.1;

```

```

v1=k12/(k21+k12);
v2=k21/(k21+k12);
eta1=v1*xi1;
eta2=v2*xi2;
j1=v1*w1;
j2=v2*w2;

```

```
%syarat kestabilan E1
```

```
%e1<(c=0.1)
e1=eta1*(K/(D1+K))
```

```
%titik kesetimbangan E3
```

```
m1=K*(alpha1-1)/((alpha1*alpha2)-1)
m2=K*(alpha2-1)/((alpha1*alpha2)-1)
```

```
%syarat kestabilan titik E3
```

```
n1=eta1-eta2-c
n2=(m1*n1)-D1*(eta2+c)
```

```
%titik kesetimbangan E4
```

```
b1=c*D1/(eta1-c)
b2=eta1*r1*D1*((K*eta1)-(c*(K+D1)))/((j1*K*((eta1-c)^2))
```

```
%syarat kestabilan titik E4
```

```
b3=(alpha2*b1/K)+(j2*b2/(r2*D2))
```

```
%syarat eksistensi
```

```
g=eta1-(c*(1+(D1/K)))
```

```
%titik kesetimbangan E*
```

```
theta1=j1*r2*((eta1-eta2-c)^2)
theta2=- (eta1-eta2-c)*(-
r2*j1*eta2*(K+(D1*alpha2))+((-
2*r2*j1*D2)+(r2*j1*K)+(r1*j2*D1*alpha1))*eta1)-
(r2*j1*c*((D1*alpha2)+K-(2*D2)))
theta3=((r2*j1*(D2^2))+((-2*r2*j1*K)-
(r1*j2*D1*alpha1))*D2)+(r1*j2*D1*K))* (eta1^2))+((-
r1*j2*(c+eta2)*(D1^2))+((( (-
r1*j2*K)+(r2*j1*D2*alpha2))*eta2)-
(r1*j2*K*c)+(2*r2*j1*alpha2*c*D2)+(r1*j2*alpha1*D2*
c))*D1)+(2*r2*j1*D2*K*(eta2+(2*c)))-
(2*r2*j1*(D2^2)*c))*eta1)-
(r2*j1*D2*c*(( (2*alpha2*c)+(2*alpha2*eta2))*D1)-
(c*D2)+(K*((2*eta2)+(2*c))))
```

```

theta4=D2*((K*((-r2*j1*D2)+(r1*j2*D1))*(eta1^2))-
(c*((r1*j2*(D1^2))-(2*r2*j1*D2*K)-
(r2*j1*alpha2*D1*D2)+(r1*j2*D1*K))*eta1)-
(r2*j1*(c^2)*D2*(K+(D1*alpha2))))
%h=(theta1*(P2^3))+(theta2*(P2^2))+(theta3*P2)+thet
a4=0;
P2=442.3881166 %(nilai P2 dicari menggunakan Maple)
P1=(D1*((eta2*P2)+(c*D2)+(c*P2)))/((eta1*D2)+(eta1*
P2)-(eta2*P2)-(c*D2)-(c*P2))
Z=(r2*(D2+P2)*(K-P2-(alpha2*P1)))/(K*j2)
%syarat eksistensi
h1=(eta1*D2)+(eta1*P2)-(eta2*P2)-(c*D2)-(c*P2)
h2=K-P2-(alpha2*P1)
%syarat kestabilan
u1=j1/(D1+P1);
u2=j2/(D2+P2);
a1=eta1/eta2
a2=D2*P2*(j1^3)*(u2^2)*(u2*P2*(r2*j2-
((u2^2)*K*Z))+r2*alpha2*j2*u1*P1)/(D1*P1*(j2^3)*(u1
^2)*(u1*P1*(r1*j1-
((u1^2)*K*Z))+r1*alpha1*j1*u2*P2))
e1=r1*((D1+P1)^2)/(j1*K)
e2=r2*((D2+P2)^2)/(j2*K)
f1=((r1/K)-(((u1^2)*Z)/j1))*((r2/K)-
(((u2^2)*Z)/j2))
f2=alpha1*alpha2*r1*r2/(K^2)

figure(2);
%plot3(0,0,0,'y*',K,0,0,'r*',0,K,0,'g*','LineWidth'
,3);
%plot3(0,0,0,'y*',K,0,0,'r*',0,K,0,'g*',m1,m2,0,'b*
','LineWidth',3);
%plot3(0,0,0,'y*',K,0,0,'r*',0,K,0,'g*',m1,m2,0,'b*
',b1,0,b2,'c*','LineWidth',3);
plot3(0,0,0,'y*',K,0,0,'r*',0,K,0,'g*',m1,m2,0,'b*
',b1,0,b2,'c*',P1,P2,Z,'k*','LineWidth',3);

```

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

