

**ANALISIS DINAMIK MODEL PENYEBARAN VIRUS
KOMPUTER DENGAN INTERVENSI MANUSIA**

SKRIPSI

oleh:

RISNA LESMANA

0810943016-94



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2013**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



**ANALISIS DINAMIK MODEL PENYEBARAN VIRUS
KOMPUTER DENGAN INTERVENSI MANUSIA**

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh:

RISNA LESMANA

0810943016-94



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG**

2013

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

**ANALISIS DINAMIK MODEL PENYEBARAN VIRUS
KOMPUTER DENGAN INTERVENSI MANUSIA**

oleh:

RISNA LESMANA
0810943030-94

**Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 5 Maret 2013
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika**

Telah diperiksa dan disahkan oleh:

Dosen Pembimbing I

Dosen Pembimbing II

Dr. Agus Suryanto, M.Sc.
NIP. 196908071994121001

Dr. Abdul Rouf A., M.Sc.
NIP. 196709071992031001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Abdul Rouf A., M.Sc.
NIP. 196709071992031001

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Risna Lesmana
NIM : 0810943016
Jurusan : Matematika
Penulis skripsi berjudul : Analisis Dinamik Model Penyebaran
Virus Komputer dengan Intervensi
Manusia

dengan ini menyatakan bahwa :

1. skripsi ini adalah benar-benar karya saya sendiri dan bukan hasil plagiat dari karya orang lain. Karya-karya yang tercantum dalam daftar pustaka skripsi ini semata-mata digunakan sebagai acuan/referensi,
2. apabila di kemudian hari diketahui bahwa isi skripsi saya merupakan hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 5 Maret 2013
yang menyatakan,

Risna Lesmana
NIM. 0810943016

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



ANALISIS DINAMIK MODEL PENYEBARAN VIRUS KOMPUTER DENGAN INTERVENSI MANUSIA

ABSTRAK

Skripsi ini membahas perilaku penyebaran virus komputer dengan intervensi manusia. Model yang digunakan adalah model epidemik SIRS dengan tiga kelas subpopulasi, yaitu *susceptible*, *infective*, dan *recovered*. Dari hasil analisis diketahui bahwa model mempunyai dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas virus dan titik kesetimbangan endemik. Syarat eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan ditentukan oleh bilangan reproduksi dasar R_0 , yaitu bilangan yang menentukan ada atau tidaknya penyebaran virus pada suatu populasi. Titik kesetimbangan bebas virus bersifat stabil asimtotik global jika $R_0 < 1$, sedangkan titik kesetimbangan endemik bersifat stabil asimtotik global jika $R_0 > 1$. Analisis kestabilan global titik kesetimbangan dilakukan dengan menggunakan metode Lyapunov. Pada bagian akhir dilakukan simulasi numerik untuk memverifikasi hasil analisis yang telah diperoleh.

Kata kunci: virus komputer, model epidemik SIRS, bilangan reproduksi dasar, titik kesetimbangan, kestabilan global, metode Lyapunov.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DYNAMICAL ANALYSIS OF PROPAGATION OF COMPUTER VIRUS UNDER HUMAN INTERVENTION

ABSTRACT

This final project discusses the propagation behavior of computer virus under human intervention. The model using a SIRS epidemic model with three subpopulations, namely susceptible, infective, and recovered. Results of analysis show that the model has two equilibrium points, namely the virus-free equilibrium and the endemic equilibrium point. Existence and stability of equilibrium points are determined by basic reproduction number R_0 , the number that determines the presence or absence of the virus in a population. The virus-free equilibrium point is globally asymptotically stable if $R_0 < 1$, whereas the endemic equilibrium point is globally asymptotically stable if $R_0 > 1$. Lyapunov method are used to analyse the global stability of the equilibrium points. Finally, numerical simulation are carried out to verify the analytical result.

Keywords: computer virus, SIRS epidemic model, basic reproduction number, equilibrium point, global stability, Lyapunov method.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan bimbingan dan petunjuk-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “**Analisis Dinamik Model Penyebaran Virus Komputer dengan Intervensi Manusia**” dengan baik dan lancar. Shalawat serta salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW sebagai suri tauladan bagi penulis.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan serta motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada

1. Dr. Agus Suryanto, M.Sc selaku pembimbing I atas segala bimbingan, motivasi, saran, waktu, serta kesabaran yang telah diberikan selama pembimbingan skripsi dan selalu mendorong penulis untuk menyelesaikan skripsi ini,
2. Dr. Abdul Rouf A., M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika sekaligus pembimbing II atas segala bimbingan, motivasi, serta kesabaran yang telah diberikan selama pengerjaan skripsi,
3. Drs. Marsudi, M.S selaku dosen penguji atas segala saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini,
4. Dr. Sobri Abusini, M.T selaku Ketua Program Studi Matematika atas segala motivasi yang diberikan,
5. Indah Yanti, M.Si selaku dosen pembimbing akademik atas segala bimbingan dan motivasi yang telah diberikan,
6. seluruh bapak/ibu dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya,
7. Mama, Alm. Abah, kakak Agus, dan kakak Irul, serta seluruh anggota keluarga besar atas segala doa, dukungan dan kasih sayang yang selalu diberikan,
8. Robert, teman-teman D’Math Bee 2008, dan teman-teman matematika UB atas bantuan, dukungan, kebersamaan, serta keceriaan yang telah diberikan selama ini,
9. seluruh pihak yang telah membantu penulis dalam penyusunan skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Allah SWT memberikan anugerah dan barokah-Nya kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini. Penulis

menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat banyak kekurangan. Untuk itu penulis sangat mengharapkan kritik dan saran melalui email penulis *lesmanar@rocketmail.com*. Akhir kata, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak.

Malang, Maret 2013

Penulis



DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	iii
LEMBAR PERNYATAAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	2
1.3 Batasan Masalah.....	2
1.4 Tujuan Penulisan.....	3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Persamaan Diferensial.....	5
2.2 Sistem Dinamik.....	6
2.3 Sistem Otonomus Linear.....	7
2.4 Sistem Otonomus Nonlinear.....	8
2.5 Metode Lyapunov.....	11
BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN	13
3.1 Formulasi Model.....	13
3.1.1 Laju perubahan komputer <i>susceptible</i>	13
3.1.2 Laju perubahan komputer <i>infective</i>	15
3.1.3 Laju perubahan komputer <i>recovered</i>	16
3.1.4 Model epidemik SIRS.....	17
3.2 Titik Keseimbangan.....	19
3.3 Analisis Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan.....	22
3.3.1 Kestabilan lokal titik keseimbangan E^0	22
3.3.2 Kestabilan lokal titik keseimbangan E^*	23
3.4 Analisis Kestabilan Global Titik Keseimbangan.....	24
3.4.1 Kestabilan global titik keseimbangan E^0	24
3.4.2 Kestabilan global titik keseimbangan E^*	25

3.5 Simulasi Numerik.....	28
3.5.1 Simulasi numerik untuk $R_0 < 1$	28
3.5.2 Simulasi numerik untuk $R_0 = 1$	29
3.5.2 Simulasi numerik untuk $R_0 > 1$	30
BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN	33
4.1 Kesimpulan	33
4.2 Saran	33
DAFTAR PUSTAKA	35
LAMPIRAN	37



DAFTAR GAMBAR

Gambar 3. 1 Diagram Kompartemen	17
Gambar 3. 2 Potret Fase untuk $R_0 < 1$	29
Gambar 3. 3 Potret Fase untuk $R_0 = 1$	30
Gambar 3. 4 Potret Fase untuk $R_0 > 1$	31

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Virus komputer muncul pada tahun 1980-an dalam bentuk program yang mampu merusak operasi pada mesin. Pada saat itu, penyebaran dan kerusakannya masih rendah. Seiring perkembangan zaman, kemajuan teknologi komputer dan telekomunikasi saat ini memang tidak dipungkiri lagi keberadaannya, serta dikembangkannya teknologi *software*, *hardware*, dan jaringan komputer yang semakin canggih menjadikan komputer alat penting bagi seluruh umat manusia sebagai keperluan dalam kehidupan sehari-hari. Di sisi lain, dengan berkembangnya teknologi komputer yang semakin canggih, perkembangan virus komputer pun menjadi semakin canggih pula dalam perusakan dan penyebarannya (Piquiera, 2009).

Istilah virus untuk komputer digunakan oleh Cohen (1990) karena adanya suatu bentuk yang mampu mereplika diri sendiri. Istilah ini memang tepat karena adanya persamaan sifat virus komputer yang dimiliki dengan virus dalam dunia biologi yang melakukan penyebaran terhadap sel-sel makhluk hidup. Seperti halnya virus biologi, virus komputer juga memiliki kemampuan mereplika diri, menularkan, melakukan manipulasi, dan kemampuan menyembunyikan diri.

Virus komputer adalah sebuah kode *mobile* berbahaya termasuk virus, *worm*, *Trojan house*, *logic bomb*, dan sebagainya. Virus komputer memiliki kode yang berbeda-beda, kode yang berbeda pun memiliki cara yang berbeda pula dalam penyebarannya, terutama penyebaran di internet. Serangan virus yang utama adalah sistem file dan *worm* menggunakan kerentanan sistem untuk mencari dan menyerang sistem komputer. Pada *Trojan horse*, menggunakan penyamaran diri, sehingga mendorong pengguna untuk mendownload file yang sebenarnya adalah virus (Han, 2010).

Virus komputer dianggap sebagai salah satu senjata yang paling berbahaya dalam internet dan penyebarannya memiliki pengaruh besar pada dunia komputer. Keberadaan virus komputer merupakan pengganggu bagi pengguna komputer. Oleh karena itu, diperlukan suatu cara yang dapat menjaga keamanan komputer dari serangan virus, yaitu dengan menginstal *software* antivirus. Tetapi

penggunaan antivirus juga memiliki kelemahan karena memerlukan pembaharuan program antivirus secara periodik agar dapat bekerja optimal dalam memproteksi keamanan komputer. Pada kenyataannya, pengaruh dari manusia memainkan peran penting dalam memperlambat penyebaran virus komputer atau mencegah pelarian dari virus komputer. Manusia dapat mengendalikan komputer *susceptible* (rentan) menjadi *recovered* atau bebas virus secara langsung, serta komputer yang terinfeksi dapat menjadi rentan kembali. Diketahui bahwa, dalam pemodelan virus komputer sebelumnya tidak mempertimbangkan efek dari manusia. Oleh karena itu, pemodelan dinamik penyebaran virus komputer adalah pendekatan yang efektif untuk memahami perilaku virus komputer. Atas dasar ini, Gan (2012) melakukan beberapa langkah yang efektif untuk mencegah infeksi virus komputer dengan menambahkan intervensi dari manusia.

Skripsi ini akan mempelajari model penyebaran virus komputer dengan intervensi manusia menggunakan model epidemik SIRS (*Susceptible-Infective-Recovered-Susceptible*). Selanjutnya, akan ditentukan titik kesetimbangan model dan dilakukan analisis kestabilan pada titik kesetimbangan. Pada bagian akhir, hasil analisis yang telah diperoleh diilustrasikan dengan simulasi numerik.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, pokok permasalahan yang dibahas dalam skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana formulasi model epidemik SIRS untuk penyebaran virus komputer?
2. Bagaimana titik kesetimbangan model ?
3. Bagaimana kestabilan dari titik kesetimbangan model?
4. Bagaimana simulasi numerik model?

1.3 Batasan Masalah

Skripsi ini difokuskan pada pembahasan dengan beberapa batasan masalah sebagai berikut.

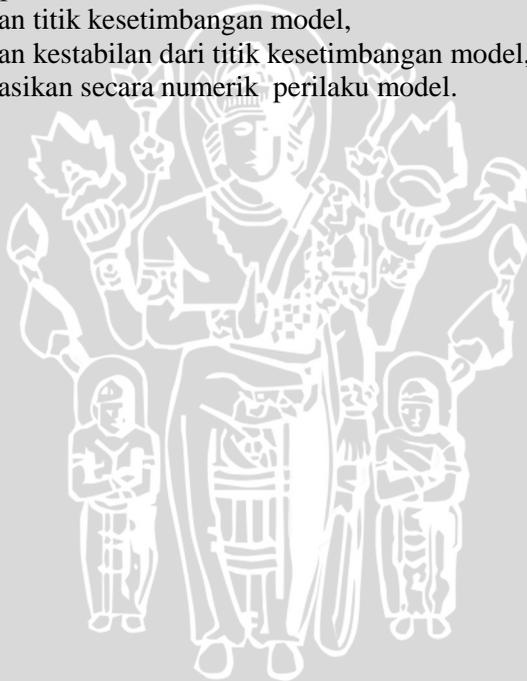
1. Penyebaran virus komputer seluruhnya berasal dari internet.
2. Seluruh komputer yang baru diakses melalui internet adalah bebas virus.
3. Pada suatu waktu, komputer diputuskan dari internet.

4. Pemberian antivirus setelah komputer terinfeksi dapat menjadikan komputer *recovered* atau menjadi *susceptible*.
5. Hilangnya kekebalan dari komputer yang telah diberi antivirus, menjadikan komputer kembali rentan.
6. Pemberian antivirus saat komputer berada dalam keadaan *susceptible*, menjadikan komputer *susceptible* masuk dalam kategori *recovered*.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah untuk

1. memformulasikan model epidemik SIRS untuk penyebaran virus komputer,
2. menentukan titik kesetimbangan model,
3. menentukan kestabilan dari titik kesetimbangan model, dan
4. mensimulasikan secara numerik perilaku model.



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial

Definisi 2.1.1 (Persamaan Diferensial)

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat hubungan antara suatu fungsi yang tidak diketahui dengan satu atau lebih turunannya (Finizio dan Ladas, 1982).

Definisi 2.1.2 (Persamaan Diferensial Biasa)

Persamaan diferensial biasa (PDB) adalah persamaan yang memuat turunan biasa dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebasnya (Finizio dan Ladas, 1982).

Definisi 2.1.3 (PDB Linear)

Persamaan diferensial biasa linear orde n dengan variabel tak bebas y dan variabel bebas x adalah persamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x), \quad (2.1)$$

dengan $a_0(x) \neq 0$. Pada persamaan tersebut $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ disebut koefisien persamaan diferensial dan $f(x)$ disebut bagian tak homogen. Persamaan diferensial tersebut dikatakan homogen jika $f(x) = 0$ (Ross, 1984).

Definisi 2.1.4 (PDB Nonlinear)

Persamaan diferensial biasa nonlinear adalah persamaan diferensial biasa yang variabel tak bebas atau turunannya berderajat lebih dari satu atau memuat perkalian antara variabel tak bebas dan turunannya (Finizio dan Ladas, 1982).

Definisi 2.1.5 (Sistem Persamaan Diferensial)

Sistem persamaan diferensial biasa berdimensi n adalah sistem yang terdiri dari n persamaan diferensial biasa dengan n fungsi yang

tidak diketahui di mana $n \geq 2$, $n \in \mathbb{Z}$. Bentuk umum sistem persamaan diferensial biasa linear berdimensi n adalah

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n, \end{aligned} \tag{2.2}$$

yang dapat dinyatakan sebagai $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$, dengan

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ dan } i, j = 1, \dots, n$$

(Finizio dan Ladas, 1982).

2.2 Sistem Dinamik

Definisi 2.2.1 (Sistem Dinamik)

Sistem dinamik adalah suatu sistem yang dapat diketahui kondisinya di masa yang akan datang jika diberikan kondisi pada masa sekarang atau pada masa yang lalu (Nagle dkk, 2004).

Definisi 2.2.2 (Sistem Otonomus)

Sistem persamaan diferensial orde satu yang berbentuk

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) \end{aligned} \tag{2.3}$$

dengan fungsi f dan g tidak bergantung secara eksplisit terhadap variabel bebas t tetapi hanya bergantung pada variabel tak bebas x dan y disebut sistem otonomus (Boyce dan Dprima, 2005).

Definisi 2.2.3 (Titik Kesetimbangan)

Misalkan diberikan sistem otonomus (2.3). Titik $\vec{x}^* = (x^*, y^*)$ yang memenuhi $f(x^*, y^*) = 0$ dan $g(x^*, y^*) = 0$, disebut titik kritis sistem otonomus (2.3). Titik kritis \vec{x}^* merupakan solusi sistem (2.3) yang bernilai konstan, sebab nilai $dx/dt = 0$ dan $dy/dt = 0$. Keadaan yang menyebabkan $dx/dt = 0$ dan $dy/dt = 0$ disebut dengan keadaan setimbang, sehingga titik kritis disebut juga titik kesetimbangan (Boyce dan Diprima, 2005).

Definisi 2.2.4 (Kestabilan Titik Kesetimbangan)

Titik kesetimbangan $\vec{x}^* = (x^*, y^*)$ dikatakan

- a. **stabil**, jika untuk semua $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi $\vec{x} = \vec{x}(t)$ yang memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta$$

maka berlaku

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \varepsilon, \text{ untuk semua } t > 0,$$

- b. **stabil asimtotik**, jika stabil dan terdapat $\delta_0, 0 < \delta_0 < \delta$, sedemikian sehingga setiap solusi $\vec{x} = \vec{x}(t)$ yang memenuhi

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \delta_0$$

maka

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^*,$$

- c. **tak stabil**, apabila titik tersebut tidak memenuhi kriteria (a) (Boyce dan Diprima, 2005).

2.3 Sistem Otonomus Linear

Secara umum, suatu sistem otonomus linear dengan n persamaan berbentuk

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n$$

⋮

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n,$$

yang dapat dinyatakan sebagai $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$, dimana

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ dan } \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

dengan $a_{ij} \in \mathbb{R}$ dan $\det(A) \neq 0$.

Sistem otonomus linear dengan dua persamaan, diperoleh bentuk umum

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y, \end{aligned}$$

yang dapat dinyatakan $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$,
dimana

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ dan } \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

dengan $a_{ij} \in \mathbb{R}$ dan $\det(A) \neq 0$.

Teorema 2.1 (Kestabilan Titik Kesetimbangan)

Misalkan λ_1 dan λ_2 adalah nilai eigen matriks A dengan $\det(A) \neq 0$. Titik kesetimbangan $(x^*, y^*) = (0,0)$ bersifat

1. **stabil asimtotik**, jika bagian real dari λ_1 dan λ_2 adalah negatif,
2. **stabil**, jika bagian real λ_1 dan λ_2 keduanya adalah nol, yaitu $\lambda_1 = i\beta$ dan $\lambda_2 = -i\beta$,
3. **tak stabil**, jika bagian real λ_1 dan λ_2 bernilai positif. Jika salah satu dari nilai eigen tersebut bernilai negatif, maka $(0,0)$ bersifat **tak stabil pelana** (Boyce dan Dprima, 2005).

2.4 Sistem Otonomus Nonlinear

Perhatikan sistem otonomus nonlinear berikut

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) \end{aligned} \tag{2.4}$$

dengan f dan g adalah fungsi nonlinear yang mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik kesetimbangan (x^*, y^*) . Deret Taylor fungsi f dan g di sekitar (x^*, y^*) sehingga fungsi f dan g dapat dinyatakan sebagai

$$f(x, y) = f(x^*, y^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y}(y - y^*) + \eta_1(x, y) \quad (2.5)$$

dan

$$g(x, y) = g(x^*, y^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y}(y - y^*) + \eta_2(x, y) \quad (2.6)$$

dengan $\eta_1(x, y)$ dan $\eta_2(x, y)$ adalah suku sisa. Untuk hampiran orde satu di atas, suku sisa memenuhi sifat-sifat

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x^*, y^*)} \frac{\eta_1(x, y)}{\|\vec{w}\|} = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x^*, y^*)} \frac{\eta_2(x, y)}{\|\vec{w}\|} = 0 \quad (2.7)$$

dengan $\vec{w} = (x - x^*, y - y^*)^T$. Selanjutnya, dengan menggunakan persamaan (2.5) dan (2.6), serta mengingat

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(x - x^*)}{dt}$$

dan

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d(y - y^*)}{dt}$$

persamaan (2.4) tersebut dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x^*, y^*) \\ g(x^*, y^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(x, y) \\ \eta_2(x, y) \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Matriks $\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} \end{bmatrix}$ disebut matriks Jacobi atau *partial*

derivative matrix dan dinotasikan sebagai $J(x^*, y^*)$.

Jika dimisalkan $u = x - x^*$, $v = y - y^*$, sehingga $\vec{w} = (u, v)^T$ dan mengingat bahwa $f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$, maka persamaan (2.8) dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(x, y) \\ \eta_2(x, y) \end{bmatrix}.$$

Bentuk di atas dapat ditulis sebagai

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w} + \vec{\eta}. \quad (2.9)$$

Berdasarkan persamaan (2.7), untuk (x, y) yang berada cukup dekat dengan (x^*, y^*) , (u, v) bernilai kecil sehingga $\|\vec{\eta}\| \leq \|\vec{w}\|$. Oleh karena itu, $\vec{\eta}$ dapat diabaikan dan di sekitar sistem nonlinear (2.4) dapat dihamperi oleh sistem linear

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w}. \quad (2.10)$$

Untuk $x = x^*$ dan $y = y^*$ diperoleh $(u^*, v^*) = (0, 0)$, sehingga sistem linear (2.10) memiliki titik kesetimbangan $(u^*, v^*) = (0, 0)$ (Boyce dan Diprima, 2005).

Teorema 2.2

Titik kesetimbangan sistem otonomus nonlinear (2.4) bersifat

1. **stabil asimtotik**, jika titik kesetimbangan sistem yang dilinearkan adalah stabil asimtotik.
2. **tak stabil**, jika titik kesetimbangan sistem yang dilinearkan bersifat tak stabil. (Edward dan Penney, 2001).

Teorema 2.2 menjelaskan bahwa kestabilan titik kesetimbangan sistem nonlinear dapat didekati dengan kestabilan titik kesetimbangan sistem linear hampiran di sekitar titik tersebut. Oleh

karena itu, kestabilan yang diperoleh hanya bersifat lokal atau di daerah sekitar titik kesetimbangan.

2.5 Metode Lyapunov

Definisi 2.5.1 (Definit Positif dan Definit Negatif)

Suatu fungsi $\mathcal{L} : N \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, di mana N adalah persekitaran pada $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ dikatakan definit positif (definit negatif) pada N jika $\mathcal{L}(\vec{x}) > 0$ ($\mathcal{L}(\vec{x}) < 0$) untuk $\vec{x} \in N \setminus \{\vec{0}\}$ dan $\mathcal{L}(\vec{0}) = 0$ (Arrowsmith, 1992).

Definisi 2.5.2 (Fungsi Lyapunov Lemah)

Misalkan \vec{x}^* adalah suatu titik kesetimbangan persamaan diferensial $d\vec{x}/dt = A(\vec{x})$. Suatu fungsi $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ disebut **fungsi Lyapunov lemah** jika terdapat suatu persekitaran $W \subseteq \mathbb{R}^n$ pada \vec{x}^* yang memenuhi

- (i) $\mathcal{L}(\vec{x}^*) = 0$ dan $\mathcal{L}(\vec{x}) > 0$, untuk semua $\vec{x} \neq \vec{x}^* \in W$
- (ii) $\dot{\mathcal{L}}(\vec{x}) \leq 0$, untuk semua $\vec{x} \in W$

(Alligood, 2000).

Definisi 2.5.3 (Fungsi Lyapunov Kuat)

Fungsi \mathcal{L} disebut **fungsi Lyapunov kuat** jika terdapat suatu persekitaran W pada \vec{x}^* yang memenuhi kondisi (i) pada Definisi 2.5.2 dan

$$\dot{\mathcal{L}}(\vec{x}) < 0, \text{ untuk semua } \vec{x} \neq \vec{x}^* \in W$$

(Alligood, 2000).

Teorema 2.3 (Kestabilan Global dengan Fungsi Lyapunov)

Misalkan \vec{x}^* adalah suatu titik kesetimbangan persamaan diferensial $d\vec{x}/dt = A(\vec{x})$. Titik kesetimbangan \vec{x}^* bersifat **stabil global** jika terdapat suatu fungsi Lyapunov lemah untuk \vec{x}^* . Jika terdapat suatu fungsi Lyapunov kuat untuk \vec{x}^* maka \vec{x}^* bersifat **stabil asimtotik global** (Alligood, dkk, 2000).

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Formulasi Model

Model penyebaran virus komputer dengan intervensi manusia yang dibahas dalam skripsi ini adalah model epidemik SIRS. Pada setiap saat, komputer di seluruh dunia diklasifikasikan sebagai komputer internal atau eksternal tergantung apakah saat ini diakses ke internet atau tidak. Seluruh komputer internal dikategorikan dalam tiga kelas subpopulasi, yaitu: (1) komputer *susceptible* (S) merupakan komputer rentan yang tidak memiliki kekebalan; (2) komputer *infective* (I) merupakan komputer yang terinfeksi virus komputer; (3) komputer *recovered* (R) merupakan komputer bebas virus yang memiliki kekebalan. Laju perubahan dari subpopulasi-subpopulasi tersebut diperoleh sebagai berikut.

3.1.1 Laju perubahan komputer *susceptible*

Subpopulasi komputer *susceptible* dalam kelas S merupakan kumpulan dari komputer rentan terhadap infeksi virus komputer. Seluruh komputer yang baru di akses ke internet adalah bebas virus dan mempunyai kemungkinan terinfeksi virus. Laju perubahan komputer *susceptible* berbanding lurus dengan bertambahnya laju pengaksesan ke internet pada waktu t , yaitu

$$\frac{dS}{dt} = \delta,$$

dimana δ menyatakan laju pengaksesan komputer ke internet.

Pada umumnya, jika terjadi wabah virus komputer di dalam populasi dan jumlah komputer yang terinfeksi semakin banyak, maka terjadi perubahan perilaku karena pengaruh psikologis, sehingga pengguna komputer yang melakukan koneksi ke internet menyadari bahwa rawan akan terjadi penginfeksian virus terhadap komputer. Para pengguna akan lebih waspada untuk mempertahankan keamanan komputernya dengan memberikan antivirus terlebih dahulu, yang dapat disebut melakukan vaksin terhadap komputernya sebelum terhubung dengan internet. Laju perubahan komputer *susceptible* berbanding lurus dengan berkurangnya subpopulasi komputer kelas S karena pemberian antivirus, yaitu

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha_1 SI,$$

dimana $\alpha_1 I$ menyatakan parameter yang mengukur pengaruh psikologis manusia atau penghambatan terhadap infeksi virus komputer.

Banyaknya komputer *susceptible* dapat berkurang disebabkan pemutusan koneksi internet pada setiap waktu yang dinyatakan dengan δ , sehingga laju perubahan komputer *susceptible* berbanding lurus dengan berkurangnya subpopulasi komputer kelas S karena pemutusan koneksi internet, yaitu

$$\frac{dS}{dt} = -\delta S$$

Adanya peluang virus menginfeksi komputer yang mengakibatkan komputer *susceptible* menjadi terinfeksi per unit waktu, sehingga subpopulasi komputer yang berada pada kelas S menjadi berkurang disebabkan laju kejadian infeksi β . Laju perubahan populasi komputer *susceptible* berkurang karena terinfeksi virus, yaitu

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI.$$

Komputer yang telah terinfeksi virus dari internet diproteksi dengan pemberian antivirus di mana γ_2 menyatakan laju pemberian antivirus untuk komputer yang terinfeksi menjadi *susceptible*. Hal ini terjadi karena antivirus yang diberikan memiliki kualitas rendah dalam memusnahkan virus dalam komputer yang terinfeksi. Ini mengakibatkan komputer yang terinfeksi dapat masuk ke dalam kelas S kembali, sehingga jumlah dari subpopulasi kelas S bertambah, yaitu

$$\frac{dS}{dt} = \gamma_2 I.$$

Banyaknya komputer *recovered* yang kehilangan kekebalan atau masa aktif dari antivirus telah habis menjadikan komputer kembali masuk dalam kelas S . Laju perubahan komputer *susceptible* bertambah karena masa aktif antivirus dari komputer *recovered* telah habis, yaitu

$$\frac{dS}{dt} = \alpha_2 R,$$

dimana α_2 menyatakan laju habisnya masa aktif antivirus dari komputer *recovered*.

Dengan demikian, dapat dibuat model laju perubahan subpopulasi komputer *susceptible* per unit waktu, yaitu

$$\frac{dS}{dt} = \delta - \alpha_1 SI - \delta S - \beta SI + \gamma_2 I + \alpha_2 R. \quad (3.1)$$

3.1.2 Laju perubahan komputer *infective*

Jumlah komputer *infective* (terinfeksi) dapat bertambah jika terdapat komputer *susceptible* yang terinfeksi oleh virus karena pengaksesan komputer ke internet. Oleh karena itu, laju perubahan komputer *infective* berbanding lurus dengan komputer kelas S yang terinfeksi virus atau karena adanya laju infeksi virus, yaitu

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI.$$

Banyaknya komputer yang terinfeksi dapat berkurang jika diberi antivirus. Pemberian antivirus ini dapat menjadikan komputer terinfeksi menjadi *recovered* atau menjadi *susceptible*, yang mana laju pemberian antivirus untuk komputer terinfeksi menjadi *susceptible* dinyatakan γ_2 , sedangkan laju pemberian antivirus untuk komputer terinfeksi menjadi *recovered* dinyatakan γ_1 . Ini terjadi sesuai dengan kapasitas antivirus yang diberikan. Jika kualitas dari antivirus yang diberikan memiliki kualitas rendah, maka komputer akan kembali *susceptible*. Laju perubahan dari komputer terinfeksi berkurang, yaitu

$$\frac{dI}{dt} = -\gamma_2 I.$$

Sedangkan, jika kualitas antivirus yang diberikan memiliki kualitas tinggi, maka komputer akan menjadi *recovered*. Laju perubahan dari komputer terinfeksi berkurang, yaitu

$$\frac{dI}{dt} = -\gamma_1 I.$$

Komputer yang terinfeksi juga dapat berkurang, jika pada saat komputer tersebut sedang terkoneksi dengan internet, tetapi pada waktu t , koneksi internet diputuskan, maka laju perubahan dari komputer terinfeksi berbanding lurus dengan berkurangnya komputer kelas I karena pemutusan koneksi internet, yaitu

$$\frac{dI}{dt} = -\delta I.$$

Model laju perubahan subpopulasi komputer terinfeksi per unit waktu adalah

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma_2 I - \gamma_1 I - \delta I. \quad (3.2)$$

3.1.3 Laju perubahan komputer *recovered*

Komputer yang terinfeksi virus dapat menjadi aman dari virus setelah diberikan antivirus yang memiliki kualitas tinggi. Hal ini menyebabkan bertambahnya jumlah komputer *recovered* pada kelas *R*, yaitu

$$\frac{dR}{dt} = \gamma_1 I.$$

Adanya tingkat kesadaran dari pengguna komputer, jika komputer yang terkoneksi di internet akan berpeluang terinfeksi virus, maka pengguna komputer melakukan tindakan pencegahan dengan *update* antivirus terlebih dahulu. Oleh karena itu, komputer yang berada dalam kelas *S* secara langsung dapat terbebas dari virus dan memasuki kelas *R*, sehingga menyebabkan bertambahnya jumlah komputer bebas virus, yaitu

$$\frac{dR}{dt} = \alpha_1 SI.$$

Komputer *recovered* yang berada dalam keadaan aman dari virus dapat berkurang karena adanya pemutusan koneksi dari internet, sehingga laju perubahan komputer *recovered* berbanding lurus dengan berkurangnya individu kelas *R* karena pemutusan koneksi internet, yaitu

$$\frac{dR}{dt} = -\delta R.$$

Banyaknya komputer *recovered* juga dapat berkurang karena, adanya tingkat keamanan dari komputer yang masa aktif dari antivirusnya telah habis, sehingga komputer *recovered* menjadi kehilangan kekebalan dan menjadi kembali rentan terhadap virus. Laju perubahan komputer *recovered* berbanding lurus dengan berkurangnya komputer dalam kelas *R* karena habisnya masa aktif antivirus, yaitu

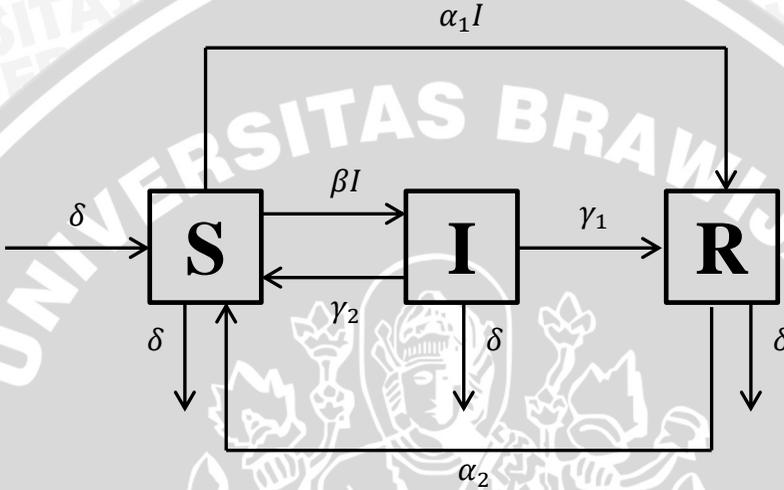
$$\frac{dR}{dt} = -\alpha_2 R.$$

Berdasarkan uraian di atas dapat diperoleh laju perubahan subpopulasi komputer sembuh per unit waktu adalah

$$\frac{dR}{dt} = \gamma_1 I + \alpha_1 SI - \delta R - \alpha_2 R. \quad (3.3)$$

3.1.4 Model Epidemik SIRS

Dari uraian sebelumnya didapatkan diagram kompartemen untuk model penyebaran virus komputer dari model epidemik SIRS yang disajikan pada Gambar 3.1 berikut.



Gambar 3.1 Diagram Kompartemen

Dari Gambar 3.1 diperoleh sistem persamaan diferensial nonlinear untuk laju perubahan subpopulasi komputer *susceptible*, laju perubahan subpopulasi komputer *infected*, dan laju perubahan subpopulasi komputer *recovered*, yaitu

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \delta - \alpha_1 SI - \delta S - \beta SI + \gamma_2 I + \alpha_2 R \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma_2 I - \gamma_1 I - \delta I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma_1 I + \alpha_1 SI - \delta R - \alpha_2 R, \end{aligned} \quad (3.4)$$

dengan kondisi awal $S(0) \geq 0, I(0) \geq 0$ dan $R(0) \geq 0$. $S(t), I(t)$, dan $R(t)$ menyatakan proporsi (yaitu persentase) dari masing-masing komputer *susceptible*, *infected*, dan *recovered*, pada waktu t .

Total populasi dinotasikan dengan N , yaitu jumlah dari komputer *susceptible*, *infected*, dan *recovered*:

$$N = S + I + R.$$

Sebelum menentukan titik kesetimbangan, akan ditunjukkan terlebih dahulu bahwa sistem (3.4) mempunyai solusi hanya berada pada oktan pertama. Untuk itu terlebih dahulu diperlihatkan perubahan total populasi dengan menyatakan semua persamaan (3.4) sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 \frac{dN(t)}{dt} &= \frac{dS(t)}{dt} + \frac{dI(t)}{dt} + \frac{dR(t)}{dt} \\
 &= \delta - \alpha_1 S(t)I(t) - \delta S(t) - \beta S(t)I(t) + \gamma_2 I(t) \\
 &\quad + \alpha_2 R(t) + \beta S(t)I(t) - \gamma_2 I(t) - \gamma_1 I(t) - \delta I(t) \\
 &\quad + \gamma_1 I(t) + \alpha_1 S(t)I(t) - \delta R(t) - \alpha_2 R(t) \\
 &= \delta - \delta S(t) - \delta I(t) - \delta R(t) \\
 &= \delta - \delta(S(t) + I(t) + R(t)) \\
 &= \delta - \delta N(t). \tag{3.5}
 \end{aligned}$$

Jelas bahwa $N(t) = 1$ merupakan solusi persamaan dari (3.5). Dengan menggunakan metode peubah terpisah pada persamaan (3.5) dilakukan penjabaran sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 \frac{dN(t)}{dt} &= \delta - \delta N(t) \\
 \frac{dN(t)}{\delta - \delta N(t)} &= dt \\
 \int \frac{dN(t)}{\delta - \delta N(t)} &= \int dt \\
 -\frac{1}{\delta} \ln(\delta - \delta N(t)) &= t + c_1 \\
 \ln(\delta - \delta N(t)) &= -\delta(t + c_1) \\
 e^{\ln(\delta - \delta N(t))} &= e^{-\delta(t+c_1)} \\
 \delta - \delta N(t) &= e^{-\delta(t+c_1)} \\
 \delta - \delta N(t) &= e^{-\delta t} c \\
 \delta N(t) &= \delta - ce^{-\delta t}
 \end{aligned}$$

Untuk setiap $N(0) \geq 0$, solusi umum persamaan (3.5) adalah

$$N(t) = \frac{1}{\delta} (\delta - ce^{-\delta t}). \tag{3.6}$$

Ketika $t=0$ diperoleh

$$N(0) = \frac{1}{\delta}(\delta - c),$$

atau

$$c = \delta - \delta N(0).$$

Oleh karena itu, persamaan (3.6) dapat dituliskan menjadi

$$N(t) = \frac{1}{\delta}(\delta - (\delta - \delta N(0))e^{-\delta t}).$$

Untuk $t \rightarrow \infty$, berlaku

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\delta}(\delta - (\delta - \delta N(0))e^{-\delta t}) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\delta}{\delta} - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\delta}((\delta - \delta N(0))e^{-\delta t}) \\ &= \frac{\delta}{\delta} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Jadi, $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 1$.

Dapat dilihat bahwa solusi $S + I + R$ selalu menuju 1. Oleh karena itu, R dapat dinyatakan dalam bentuk $R = 1 - S - I$, sehingga sistem (3.4) dapat direduksi menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \delta - \alpha_1 SI - \delta S - \beta SI + \gamma_2 I + \alpha_2(1 - S - I), \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma_2 I - \gamma_1 I - \delta I, \end{aligned} \quad (3.7)$$

dengan kondisi awal $S(0) \geq 0$ dan $I(0) \geq 0$.

3.2 Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan sistem persamaan (3.7) diperoleh jika

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = 0,$$

atau

$$\delta - \alpha_1 SI - \delta S - \beta SI + \gamma_2 I + \alpha_2(1 - S - I) = 0, \quad (3.8a)$$

$$\beta SI - \gamma_2 I - \gamma_1 I - \delta I = 0. \quad (3.8b)$$

Dari persamaan (3.8b) diperoleh

$$I = 0 \quad (3.9a)$$

atau

$$S = \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \delta}{\beta}. \quad (3.9b)$$

Jika $I = 0$ disubstitusikan ke persamaan (3.8a), maka diperoleh

$$\begin{aligned} \delta - \delta S + \alpha_2(1 - S) &= 0 \\ \delta - \delta S + \alpha_2 - \alpha_2 S &= 0 \\ \delta + \alpha_2 &= \delta S + \alpha_2 S \\ \delta + \alpha_2 &= (\delta + \alpha_2)S \\ S &= 1. \end{aligned}$$

Oleh karena itu, didapatkan titik kesetimbangan bebas virus, yaitu

$$E^0 = (1, 0).$$

Selanjutnya, jika persamaan (3.9b) disubstitusikan ke persamaan (3.8a) didapatkan

$$\begin{aligned} \delta - \alpha_1 SI - \delta S - \beta SI + \gamma_2 I + \alpha_2 - \alpha_2 S - \alpha_2 I &= 0 \\ \delta - \alpha_1 \left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \delta}{\beta} \right) I - \delta \left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \delta}{\beta} \right) + \gamma_2 I & \\ - \beta \left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \delta}{\beta} \right) I + \alpha_2 - \alpha_2 \left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \delta}{\beta} \right) & \\ - \alpha_2 I &= 0 \\ \delta - \delta \left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \delta}{\beta} \right) + \alpha_2 - \alpha_2 \left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \delta}{\beta} \right) & \\ - \alpha_1 \left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \delta}{\beta} \right) I - \gamma_2 I + \beta \left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \delta}{\beta} \right) I & \\ + \alpha_2 I &= 0 \\ \delta - \delta \left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \delta}{\beta} \right) + \alpha_2 - \alpha_2 \left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \delta}{\beta} \right) & \\ + I \left(-\alpha_1 \left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \delta}{\beta} \right) + \gamma_2 - \beta \left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \delta}{\beta} \right) \right. & \\ \left. - \alpha_2 \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Kedua ruas persamaan (3.10) dikalikan dengan

$$\frac{\beta}{\gamma_1 + \gamma_2 + \delta}$$

untuk mendapatkan

$$\begin{aligned}
& \delta \left(\frac{\beta}{\gamma_1 + \gamma_2 + \delta} \right) - \delta + \alpha_2 \left(\frac{\beta}{\gamma_1 + \gamma_2 + \delta} \right) - \alpha_2 \\
& + I \left(-\alpha_1 + \gamma_2 \left(\frac{\beta}{\gamma_1 + \gamma_2 + \delta} \right) - \beta \right. \\
& \quad \left. - \alpha_2 \left(\frac{\beta}{\gamma_1 + \gamma_2 + \delta} \right) \right) = 0. \\
I &= \frac{\delta \left(\frac{\beta}{\gamma_1 + \gamma_2 + \delta} \right) - \delta + \alpha_2 \left(\frac{\beta}{\gamma_1 + \gamma_2 + \delta} \right) - \alpha_2}{\alpha_1 - \gamma_2 \left(\frac{\beta}{\gamma_1 + \gamma_2 + \delta} \right) + \beta - \alpha_2 \left(\frac{\beta}{\gamma_1 + \gamma_2 + \delta} \right)} \\
I &= \frac{(\delta + \alpha_2) \left(\frac{\beta}{\gamma_1 + \gamma_2 + \delta} - 1 \right)}{\alpha_1 - \gamma_2 \left(\frac{\beta}{\gamma_1 + \gamma_2 + \delta} \right) + \beta - \alpha_2 \left(\frac{\beta}{\gamma_1 + \gamma_2 + \delta} \right)}. \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Selanjutnya, dimisalkan

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma_1 + \gamma_2 + \delta}, \quad (3.12)$$

sehingga persamaan (3.11) menjadi

$$I = \frac{(\delta + \alpha_2)(R_0 - 1)}{\alpha_1 - R_0\gamma_2 + \beta + \alpha_2 R_0}. \quad (3.13)$$

Persamaan (3.12) dapat juga dituliskan sebagai

$$\beta = R_0(\gamma_1 + \gamma_2 + \delta). \quad (3.14)$$

Persamaan (3.14) disubstitusikan ke persamaan (3.13), sehingga

$$I = \frac{(\delta + \alpha_2)(R_0 - 1)}{\alpha_1 + R_0(\gamma_1 + \delta + \alpha_2)}.$$

Dengan demikian, titik kesetimbangan kedua, yaitu

$$E^* = (S^*, I^*),$$

di mana

$$S^* = \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \delta}{\beta} = \frac{1}{R_0}, \quad (3.15)$$

$$I^* = \frac{(\delta + \alpha_2)(R_0 - 1)}{\alpha_1 + R_0(\gamma_1 + \delta + \alpha_2)}. \quad (3.16)$$

Titik $E^* = (S^*, I^*)$ disebut titik kesetimbangan endemik, yaitu adanya komputer yang terinfeksi pada populasi ($I \neq 0$). Jelas bahwa titik $E^* = (S^*, I^*)$ akan ada jika $R_0 > 1$. R_0 disebut bilangan reproduksi dasar, yaitu bilangan yang menentukan ada tidaknya penyebaran virus pada suatu populasi.

3.3 Analisis Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan

Dalam menganalisis kestabilan titik kesetimbangan E^0 dan E^* diperlukan matriks Jacobi dari persamaan (3.8a) dan (3.8b). Matriks Jacobi dari persamaan tersebut adalah

$$J(S, I) = \begin{bmatrix} -\delta - \alpha_2 - (\alpha_1 + \beta)I & -\alpha_1 S + \gamma_2 - \beta S - \alpha_2 \\ \beta I & \beta S - (\gamma_1 + \gamma_2 + \delta) \end{bmatrix}.$$

3.3.1 Kestabilan lokal titik kesetimbangan E^0

Matriks Jacobi persamaan (3.8a) dan (3.8b) di titik $E^0 = (1, 0)$ adalah

$$J(E^0) = \begin{bmatrix} -\delta - \alpha_2 & -\alpha_1 + \gamma_2 - \beta - \alpha_2 \\ 0 & \beta - (\gamma_1 + \gamma_2 + \delta) \end{bmatrix}.$$

Persamaan karakteristik matriks Jacobi $J(E^0)$ adalah

$$(-\delta - \alpha_2 - \lambda)(\beta - (\gamma_1 + \gamma_2 + \delta) - \lambda) = 0,$$

sehingga diperoleh akar karakteristik

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\delta - \alpha_2 \\ \lambda_2 &= \beta - (\gamma_1 + \gamma_2 + \delta). \end{aligned}$$

Jelas bahwa nilai $\lambda_1 = -\delta - \alpha_2 < 0$. Diketahui bahwa $R_0 = \beta / (\gamma_1 + \gamma_2 + \delta)$, sehingga $\lambda_2 = -(\gamma_1 + \gamma_2 + \delta)(1 - R_0)$.

Dari nilai eigen tersebut, jenis kestabilan titik kesetimbangan E^0 didapat ditinjau menjadi tiga kasus yaitu

- Jika $R_0 > 1$, maka titik E^0 bersifat tidak stabil, karena $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 > 0$,
- Jika $R_0 = 1$, maka akan diperoleh nilai $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 = 0$. Untuk kasus ini kestabilan titik kesetimbangan E^0 tidak dapat

ditentukan secara lokal. Kasus $R_0 = 1$ tidak dibahas pada skripsi ini.

- c. Jika $R_0 < 1$, maka kedua nilai eigen tersebut bernilai negatif, sehingga titik E^0 bersifat stabil asimtotik.

Berdasarkan nilai eigen tersebut, jika $R_0 < 1$ maka titik kesetimbangan E^0 bersifat stabil asimtotik lokal. Hasil analisis tersebut, terangkum dalam Teorema 3.1.

Teorema 3.1

Titik kesetimbangan bebas virus E^0 bersifat stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$ dan tidak stabil jika $R_0 > 1$.

3.3.2 Kestabilan lokal titik kesetimbangan E^*

Matriks Jacobi persamaan (3.8a) dan (3.8b) di titik $E^* = (S^*, I^*)$ adalah

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} -\delta - \alpha_2 - (\alpha_1 + \beta)I^* & -(\alpha_2 + \gamma_1 + \delta + \alpha_1 S^*) \\ \beta I^* & 0 \end{bmatrix}.$$

Persamaan karakteristik dari matriks Jacobi $J(E^*)$ adalah

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0, \quad (3.17)$$

di mana

$$\begin{aligned} a &= -\delta - \alpha_2 - (\alpha_1 + \beta)I^*, \\ b &= \beta I^*(\alpha_2 + \gamma_1 + \delta + \alpha_1 S^*). \end{aligned}$$

Untuk b dapat disederhanakan menjadi $b = \beta(\delta + \alpha_2)(R_0 - 1)$. Jika $R_0 > 1$, maka trace $a < 0$ dan determinan $b > 0$, sehingga persamaan kuadrat dari (3.17) menghasilkan dua nilai eigen real yang negatif. Jadi, titik $E^* = (S^*, I^*)$ stabil asimtotik lokal. Hasil ini terangkum dalam Teorema 3.2.

Teorema 3.2

Titik kesetimbangan endemik E^* bersifat stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$.

3.4 Analisis Kestabilan Global Titik Kesetimbangan

Berdasarkan Teorema 2.3, untuk menunjukkan kestabilan global dari E^0 dan E^* harus ditunjukkan bahwa terdapat suatu fungsi Lyapunov \mathcal{L} kuat atau lemah untuk masing-masing titik kesetimbangan tersebut.

3.4.1 Kestabilan global titik kesetimbangan E^0

Misalkan terdapat suatu fungsi \mathcal{L} untuk E^0 sebagaimana
 $\mathcal{L}(S, I) = I$.

Selanjutnya, untuk menunjukkan bahwa fungsi tersebut merupakan fungsi Lyapunov kuat atau lemah, perlu dibuktikan terlebih dahulu bahwa fungsi \mathcal{L} tersebut memenuhi kondisi (i) pada Definisi 2.5.2 yakni $\mathcal{L}(S^*, I^*) = 0$ dan $\mathcal{L}(S, I) > 0$, untuk semua $S \neq S^*, I \neq I^*$.

- (i) Pada titik kesetimbangan $E^0 = (1, 0)$ jelas bahwa
 $\mathcal{L}(1, 0) = 0$.
- (ii) Karena $\mathcal{L}(S, I) = I$ jelas bahwa I bernilai positif, sehingga terbukti $\mathcal{L}(S, I) > 0$, untuk semua $S \neq S^*, I \neq I^*$.
- (iii) Karena $\mathcal{L}(S, I) = I$, dengan menggunakan aturan rantai diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{dt} &= \frac{d\mathcal{L}}{dI} \cdot \frac{dI}{dt} \\ &= \frac{dI}{dt} \\ &= \beta SI - \gamma_2 I - \gamma_1 I - \delta I \\ &= \beta I \left(S - \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \delta}{\beta} \right) \\ &= \beta I \left(S - \frac{1}{R_0} \right). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Diketahui bahwa $\beta > 0$ dan $I > 0$, sehingga pada persamaan (3.18) nilai $\beta I > 0$. Jika nilai $0 < S \leq 1$ dan $R_0 < 1$, maka $(S - (1/R_0)) < 0$. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa jika $R_0 < 1$, maka $d\mathcal{L}/dt < 0$. Jadi, $\mathcal{L}(S, I) = I$ merupakan fungsi Lyapunov kuat karena memenuhi Definisi 2.5.3, sehingga E^0 bersifat

stabil asimtotik global. Kestabilan global titik E^0 terjamin jika Teorema 3.3 berikut terpenuhi.

Teorema 3.3

Titik kesetimbangan bebas virus E^0 bersifat stabil asimtotik global jika $R_0 < 1$.

3.4.2 Kestabilan global titik kesetimbangan E^*

Misalkan terdapat suatu fungsi \mathcal{L} untuk E^* , sebagaimana

$$\mathcal{L}(S, I) = S - S^* - S^* \ln \frac{S}{S^*} + (d + 1) \left(I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*} \right). \quad (3.19)$$

Selanjutnya, fungsi Lyapunov yang akan digunakan adalah pada persamaan (3.19) untuk menunjukkan bahwa fungsi tersebut merupakan fungsi Lyapunov kuat atau lemah, perlu dibuktikan terlebih dahulu bahwa fungsi \mathcal{L} tersebut memenuhi kondisi (i) pada Definisi 2.5.2 yakni $\mathcal{L}(S^*, I^*) = 0$ dan $\mathcal{L}(S, I) > 0$, untuk semua $S \neq S^*, I \neq I^*$.

(i) Pada titik kesetimbangan $E^* = (S^*, I^*)$ fungsi Lyapunov bernilai

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(S^*, I^*) &= S^* - S^* - S^* \ln \frac{S^*}{S^*} + (d + 1) \left(I^* - I^* - I^* \ln \frac{I^*}{I^*} \right) \\ &= 0 - S^* \ln 1 + (d + 1)(0 - I^* \ln 1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $\mathcal{L}(S^*, I^*) = 0$.

(ii) Perhatikan fungsi

$$f(x) = x - \ln x.$$

Turunan pertama $f(x)$ terhadap x adalah

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}.$$

Titik stationer $f(x)$ diperoleh ketika $f'(x) = 0$. Nilai x yang memenuhi $f'(x) = 0$ adalah

$$x = 1 \leftrightarrow f(1) = 1.$$

Untuk menguji apakah $f(1) = 1$ merupakan nilai minimum lokal, maka perlu dibuktikan bahwa $f''(1) > 0$.

Diberikan

$$f''(x) = \frac{1}{x^2}$$

sehingga

$$f''(1) = 1.$$

Karena $f''(1) > 0$, maka $f(1) = 1$ merupakan nilai minimum lokal dari $f(x)$. Fungsi $f(x) = x - \ln x$ mempunyai domain $\mathcal{D}_{f(x)} = (0, \infty)$. Sehingga, untuk membuktikan bahwa $f(1) = 1$ adalah nilai minimum global, maka harus dihitung nilai limit di titik ujung-ujungnya dan titik minimum lokalnya, kemudian hasil dari perhitungan dapat dibandingkan untuk menentukan nilai minimum.

Nilai limit di sekitar titik-titik ujung adalah

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x - \ln x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln x) = +\infty,$$

sedangkan nilai minimum lokalnya adalah $f(1) = 1$. Karena nilai minimum lokalnya kurang dari nilai limit di titik-titik ujungnya, jelas bahwa $f(1) = 1$ adalah nilai minimum global $f(x)$ dan dapat disimpulkan bahwa $f(x) = x - \ln x \geq 1$.

(a) Misalkan $x = \frac{S}{S^*}$, diperoleh

$$f\left(\frac{S}{S^*}\right) = \frac{S}{S^*} - \ln \frac{S}{S^*} \geq 1$$

sehingga

$$\frac{S}{S^*} \geq 1 + \ln \frac{S}{S^*}.$$

Karena $S^* > 0$ diperoleh

$$S \geq S^* \left(1 + \ln \frac{S}{S^*}\right) = S^* + S^* \ln \frac{S}{S^*},$$

$$S - S^* - S^* \ln \frac{S}{S^*} \geq 0. \quad (3.20)$$

(b) Misalkan $x = \frac{I}{I^*}$, diperoleh

$$f\left(\frac{I}{I^*}\right) = \frac{I}{I^*} - \ln \frac{I}{I^*} \geq 1$$

$$\frac{I}{I^*} \geq 1 + \ln \frac{I}{I^*}.$$

Karena $I^* > 0$ diperoleh

$$I \geq I^* \left(1 + \ln \frac{I}{I^*}\right) = I^* + I^* \ln \frac{I}{I^*},$$

$$I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*} \geq 0. \quad (3.21)$$

Dari persamaan (3.22) dan (3.23) terbukti bahwa

$S - S^* - S^* \ln \frac{S}{S^*} \geq 0$ dan $I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*} \geq 0$, sehingga diperoleh

$$\mathcal{L}(S, I) = S - S^* - S^* \ln \frac{S}{S^*} + (d + 1) \left(I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*} \right) > 0,$$

dengan kata lain,

$$\mathcal{L}(S, I) > 0, \text{ untuk semua } S \neq S^*, I \neq I^*.$$

(iii) Turunan fungsi Lyapunov dapat ditentukan dengan aturan rantai, yaitu

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{dt} &= \frac{d\mathcal{L}}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} + \frac{d\mathcal{L}}{dI} \cdot \frac{dI}{dt} \\ &= \left(1 - \frac{S^*}{S} \right) [\delta - \alpha_1 SI - \delta S - \beta SI + \gamma_2 I \\ &\quad + \alpha_2 (1 - S - I)] \\ &\quad + (d + 1) \left(1 - \frac{I^*}{I} \right) (\beta SI - \gamma_2 I - \delta I - \gamma_1 I) \\ &= \left(1 - \frac{S^*}{S} \right) [\delta - \alpha_1 SI - \delta S - \beta SI + \gamma_2 I \\ &\quad + \alpha_2 (1 - S - I)] + (d + 1) \left(1 - \frac{I^*}{I} \right) \left(1 - \frac{S^*}{S} \right) \beta SI \\ &= \left(1 - \frac{S^*}{S} \right) [\alpha_1 S^* I^* - \alpha_1 SI + \delta (S^* - S) + \gamma_2 (I - I^*) \\ &\quad + \alpha_2 (S^* - S) + \alpha_2 (I^* - I) + \beta d SI + \beta d S^* I^* \\ &\quad - \beta (d + 1) S I^*] \\ &= \left(1 - \frac{S^*}{S} \right) \left[(S^* - S) (\alpha_1 I^* + \delta + \alpha_2 + \beta I^*) \right. \\ &\quad \left. + (I - I^*) (\beta d - \alpha_1) \left(S - \frac{\alpha_2 - \gamma_2}{\beta d - \alpha_1} \right) \right]. \end{aligned}$$

Hasil tersebut kemudian disederhanakan, agar mudah untuk dilihat apakah turunan \mathcal{L} positif atau negatif dengan menghubungkan nilai parameter yang ada dan memisalkan

$$\frac{\alpha_2 - \gamma_2}{\beta d - \alpha_1} = S^*,$$

sehingga

$$d = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\alpha_2 - \gamma_2}{S^*} + \alpha_1 \right),$$

dan

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = -\frac{(S^* - S)^2}{S} \left(\delta + \alpha_2 + \beta I^* - \frac{\alpha_2 - \gamma_2}{S^*} I + \frac{\alpha_2 - \gamma_2}{S^*} I^* + \alpha_1 I^* \right).$$

Karena semua parameter dan titik kesetimbangan S^* dan I^* positif, terbukti bahwa turunan fungsi Lyapunov negatif. Oleh karena itu, fungsi Lyapunov untuk E^* merupakan fungsi Lyapunov kuat yang memenuhi Definisi 2.5.3, sehingga E^* bersifat stabil asimtotik global. Kestabilan global titik E^* terjamin jika Teorema 3.4 berikut terpenuhi.

Teorema 3.4

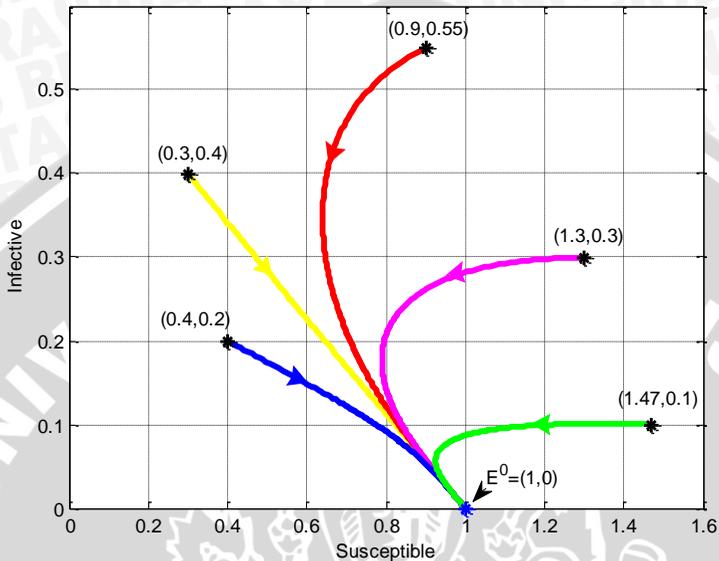
Titik kesetimbangan endemik E^* bersifat stabil asimtotik global jika $R_0 > 1$.

3.5 Simulasi Numerik

Pada sub bab ini, untuk mendukung hasil analisis pada sub bab sebelumnya, disimulasikan solusi dari sistem persamaan (3.7) dengan tiga kondisi, yaitu kondisi $R_0 < 1$, $R_0 = 1$ dan $R_0 > 1$. Untuk mensimulasikan hasil analisis model, digunakan metode Runge Kutta orde empat. *Source code* dari program dapat dilihat pada Lampiran 1.

3.5.1 Simulasi numerik untuk $R_0 < 1$

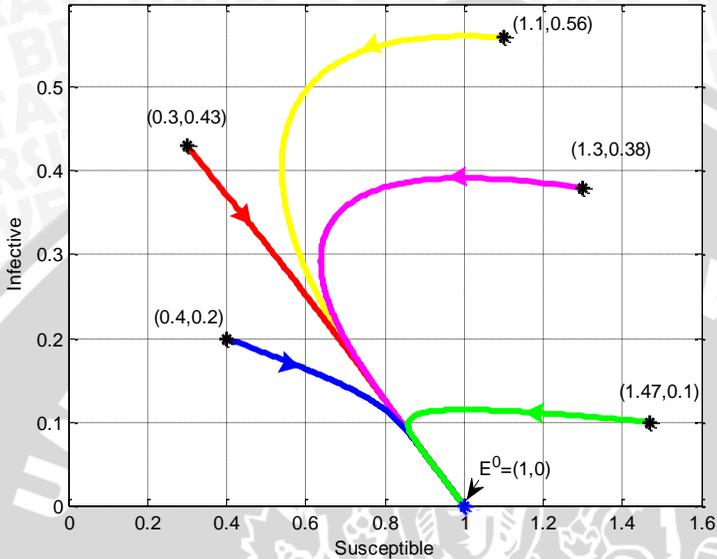
Dalam simulasi ini, digunakan parameter $\beta = 0.3$, $\delta = 0.1$, $\alpha_1 = 0.2$, $\alpha_2 = 0.4$, $\gamma_1 = 0.1$, dan $\gamma_2 = 0.2$, sehingga diperoleh $R_0 = 0.75 < 1$. Berdasarkan hasil analisis jika $R_0 < 1$, maka hanya terdapat satu titik kesetimbangan yang eksis dan stabil, yaitu titik kesetimbangan bebas virus $E^0 = (1,0)$. Berdasarkan Gambar 3.3 memperlihatkan bahwa dengan lima nilai awal yang diberikan, semua orbit akan menuju ke titik kesetimbangan E^0 . Hal ini membuktikan bahwa titik kesetimbangan $E^0 = (1,0)$ bersifat stabil asimtotik dan menunjukkan bahwa pada akhirnya tidak ada populasi komputer yang terinfeksi virus komputer.



Gambar 3.2 Potret Fase untuk $R_0 < 1$

3.5.2 Simulasi numerik untuk $R_0 = 1$

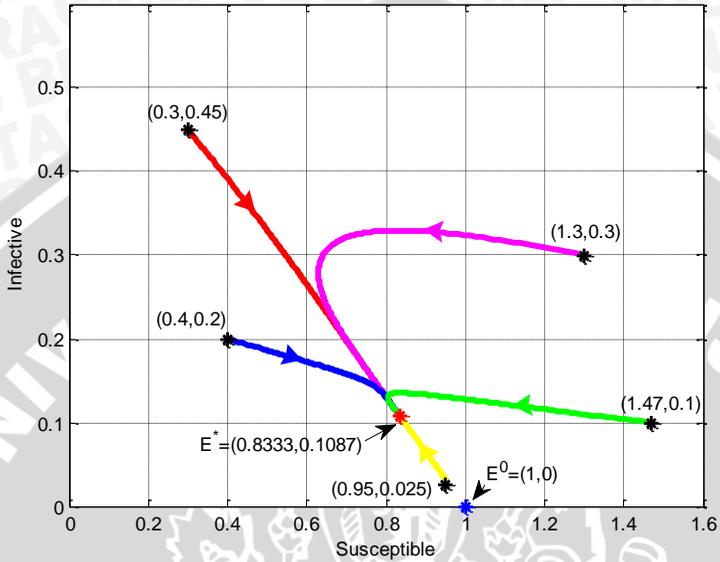
Dalam simulasi ini, digunakan parameter $\beta = 0.3$, $\delta = 0.1$, $\alpha_1 = 0.2$, $\alpha_2 = 0.4$, $\gamma_1 = 0.1$, dan $\gamma_2 = 0.1$, sehingga diperoleh $R_0 = 1$. Dengan pengambilan kondisi awal yang berbeda, Gambar 3.3 menunjukkan bahwa semua orbit menuju ke titik E^0 , sehingga dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan E^0 bersifat stabil untuk $R_0 = 1$. Hal ini menunjukkan bahwa tidak ada populasi komputer yang terinfeksi virus komputer.



Gambar 3.3 Potret Fase untuk $R_0 = 1$

3.5.3 Simulasi numerik untuk $R_0 > 1$

Untuk $R_0 > 1$, diperoleh dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas virus dan titik kesetimbangan endemik. Dalam simulasi ini digunakan parameter $\beta = 0.3$, $\delta = 0.1$, $\alpha_1 = 0.2$, $\alpha_2 = 0.4$, $\gamma_1 = 0.1$, dan $\gamma_2 = 0.05$, sehingga diperoleh $R_0 = 1.2 > 1$. Berdasarkan Gambar 3.4, dalam pengambilan kondisi awal yang berbeda, semua orbit menuju ke titik kesetimbangan endemik E^* . Dari potret fase tersebut, nampak jelas bahwa titik kesetimbangan bebas virus $E^0 = (1, 0)$ tetap eksis, namun tidak stabil. Hasil simulasi numerik mendukung hasil analisis bahwa untuk $R_0 > 1$ terdapat dua titik kesetimbangan yang eksis, tetapi hanya terdapat satu titik kesetimbangan yang stabil, yaitu titik kesetimbangan endemik E^* , sehingga pada populasi komputer tersebut sedang terjadi endemik atau mewabahnya virus komputer.



Gambar 3.4 Potret Fase untuk $R_0 > 1$

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan tujuan pengerjaan skripsi ini yang diuraikan pada Bab I dan hasil pembahasan pada Bab III, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut

1. Model penyebaran virus komputer dengan intervensi manusia dengan model epidemik SIRS merupakan sistem otonomus dengan tiga variabel dan enam parameter. Karena total $S + I + R = 1$ merupakan manifold invarian. Oleh karena itu, persamaan dapat direduksi, sehingga dalam pembahasan skripsi ini hanya dibahas dua persamaan dengan enam parameter.
2. Pada model epidemik SIRS terdapat dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas virus E^0 dan titik kesetimbangan endemik E^* . Kestabilan titik kesetimbangan ditentukan oleh suatu bilangan yang disebut sebagai bilangan reproduksi dasar R_0 . Titik kesetimbangan bebas virus selalu eksis, namun titik kesetimbangan endemik akan eksis bila $R_0 > 1$.
3. Titik kesetimbangan bebas virus bersifat stabil asimtotik global bila titik kesetimbangan endemik tidak eksis, sedangkan titik kesetimbangan endemik bersifat stabil asimtotik global bila titik endemik tersebut eksis.
4. Simulasi numerik menunjukkan hasil yang sama dengan analisis kestabilan titik kesetimbangan model. Untuk parameter-parameter model yang tidak memenuhi syarat eksistensi titik E^* diperoleh hasil bahwa solusi konvergen menuju E^0 .

4.2 Saran

Dalam pembasmian virus komputer pengguna harus mengambil tindakan untuk menjaga $R_0 < 1$. Dari bentuk R_0 dapat dilihat bahwa virus akan meningkat sebesar β dan menurun sebesar γ_1, γ_2 , dan δ . Hal ini menunjukkan bahwa pencegahan lebih penting daripada memberi antivirus saat komputer sudah terinfeksi virus, serta pemutusan koneksi dari internet memberikan kontribusi dalam penindasan difusi virus. Sangat dianjurkan bahwa salah satu cara dalam pencegahan virus adalah dengan secara teratur melakukan

pembaharuan *software* antivirus bahkan jika komputer tidak terjadi infeksi.

Skripsi ini hanya membahas model penyebaran virus komputer melalui internet. Diharapkan pada pengkajian selanjutnya, juga memperhatikan model penyebaran virus komputer melalui *removable storage device*.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR PUSTAKA

- Alligood, K.T., T.D. Sauer dan J.A. Yorke. 2000. *CHAOS : An Introduction to Dynamical Systems*. Springer-Verlag. New York.
- Arrowsmith, D.K. dan C.M. Place. 1992. *Dynamical Systems, Differential Equation, Maps and Chaotic Behaviour*. Chapman & Hall. London.
- Boyce, W.E. dan R.C. DiPrima. 2008. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Ninth Edition. John Wiley & Sons. New York.
- Cohen, F. 1984. *A Short Course on Computer Viruses*. ASP Press. USA.
- Edward, C.H. dan D.E. Penney. 2001. *Differential Equations and Linear Algebra*. Prentice-Hall. New Jersey.
- Finizio, N. dan G. Ladas. 1982. *Ordinary Differential Equations with Modern Applications*. Second Edition. Wadsworth. USA.
- Gan, C., X. Yang, W. Liu, Q. Zhu, dan X. Zhang. 2012. Propagation of Computer Virus Under Human Intervention: A Dynamical Model. *Discrete Dynamics in Nature and Society*.
- Han, X dan Q.L. Tan. 2010. Dynamical Behavior of Computer Virus on Internet. *Applied Mathematics and computation* Vol 217, hal. 2520-2526.
- Nagle, R.K. dan E.B. Saff. 1993. *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems*. Addison-Wesley. Florida.
- Piqueira, J.S.C. dan V.O. Araujo. 2009. A Modified Epidemiological Model for Computer Virus. *Applied Mathematics and computation* Vol 213, hal. 355-360.

Ross, S.L. 1984. *Differential Equations*. Third Edition. John Wiley & Sons. New York.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LAMPIRAN

Lampiran 1. Program

```
%input nilai pada persamaan populasi rentan
function dS=f1(S,I,delta,alfal,gamma2,beta,alfa2);
dS=delta-alfal*S*I-delta*S+gamma2*I-
beta*S*I+alfa2*(1-S-I);
```

```
%input nilai pada persamaan populasi terinfeksi
function dI=f2(S,I,beta,gamma2,delta,gamma1);
dI=beta*S*I-gamma2*I-delta*I-gamma1*I;
```

```
%perhitungan dengan metode Runge Kutta
Function
```

```
p=RK4(S,I,delta,alfal,gamma2,beta,alfa2,gamma1,h);
k11=h*f1(S,I,delta,alfal,gamma2,beta,alfa2);
k12=h*f2(S,I,beta,gamma2,delta,gamma1);
k21=h*f1(S+k11/2,I+k12/2,delta,alfal,gamma2,beta,alfa2);
k22=h*f2(S+k11/2,I+k12/2,beta,gamma2,delta,gamma1);
k31=h*f1(S+k21/2,I+k22/2,delta,alfal,gamma2,beta,alfa2);
k32=h*f2(S+k21/2,I+k22/2,beta,gamma2,delta,gamma1);
k41=h*f1(S+k31,I+k32,delta,alfal,gamma2,beta,alfa2);
k42=h*f2(S+k31,I+k32,beta,gamma2,delta,gamma1);
S=S+(k11+2*k21+2*k31+k41)/6;
I=I+(k12+2*k22+2*k32+k42)/6;
p=[S I];
```

```
clc;
clear all;
h=0.05; %iterasi langkah
t=0:h:200; %iterasi waktu yang diperlukan
n=length(t)-1;
```

```
%inputan nilai parameter
beta=0.3;
delta=0.1;
alfal=0.2;
```

```

alfa2=0.4;
gamma1=0.1;
gamma2=0.05;

%inputan nilai awal
S1_t(1)=0.95;
I1_t(1)=0.025;

S2_t(1)=0.3;
I2_t(1)=0.45;

S3_t(1)=1.3;
I3_t(1)=0.3;

S4_t(1)=0.4;
I4_t(1)=0.2;

S5_t(1)=1.47;
I5_t(1)=0.1;

for i=1:n
    S=S1_t(i);
    I=I1_t(i);

cc=RK4(S,I,delta,alfa1,gamma2,beta,alfa2,gamma1,h);
    S1_t(i+1)=cc(1);
    I1_t(i+1)=cc(2);
    S=S2_t(i);
    I=I2_t(i);

cc=RK4(S,I,delta,alfa1,gamma2,beta,alfa2,gamma1,h);
    S2_t(i+1)=cc(1);
    I2_t(i+1)=cc(2);
    S=S3_t(i);
    I=I3_t(i);

cc=RK4(S,I,delta,alfa1,gamma2,beta,alfa2,gamma1,h);
    S3_t(i+1)=cc(1);
    I3_t(i+1)=cc(2);
    S=S4_t(i);
    I=I4_t(i);

cc=RK4(S,I,delta,alfa1,gamma2,beta,alfa2,gamma1,h);

```

```

S4_t(i+1)=cc(1);
I4_t(i+1)=cc(2);
S=S5_t(i);
I=I5_t(i);

cc=RK4(S,I,delta,alfa1,gamma2,beta,alfa2,gamma1,h);
S5_t(i+1)=cc(1);
I5_t(i+1)=cc(2);

end;

%Menggambarkan potret fase sistem
figure(1);
plot(S1_t,I1_t,'y','LineWidth',2);
hold on;
plot(S2_t,I2_t,'r','LineWidth',2);
hold on;
plot(S3_t,I3_t,'m','LineWidth',2);
hold on;
plot(S4_t,I4_t,'b','LineWidth',2);
hold on;
plot(S5_t,I5_t,'g','LineWidth',2);
hold on;
xlabel('Susceptible');
ylabel('Infective');
axis([0 1.6 0 0.6]);
grid on;hold on;

R0=beta/(gamma1+gamma2+delta)
%E*
A=(gamma1+gamma2+delta)/beta
B=((delta+alfa2)*(R0-1))/(alfa1+(delta+gamma1+alfa2)*R0)

%plot titik E0
plot(1,0,'b*','LineWidth',2);

%plot titik E*
plot(A,B,'r*','LineWidth',2);

%plot nilai awall
plot(S1_t(1),I1_t(1),'k*','LineWidth',2);

```

```
%plot nilai awal 2  
plot(S2_t(1),I2_t(1),'k*','LineWidth',2);  
  
%plot nilai awal 3  
plot(S3_t(1),I3_t(1),'k*','LineWidth',2);  
  
%plot nilai awal 4  
plot(S4_t(1),I4_t(1),'k*','LineWidth',2);  
  
%plot nilai awal 5  
plot(S5_t(1),I5_t(1),'k*','LineWidth',2);
```

