KONTROL OPTIMAL PADA MODEL EPIDEMIK *SIR*

SKRIPSI

oleh

ANA FADILA

0910943042-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

MALANG

2013

KONTROL OPTIMAL PADA MODEL EPIDEMIK *SIR*

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh
ANA FADILA
0910943042-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG

2013

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

KONTROL OPTIMAL PADA MODEL EPIDEMIK *SIR*

oleh
ANA FADILA
0910943042-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 14 Maret 2013
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Pembimbing

Dr. Agus Suryanto., MSc.
NIP. 196908071994121001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Abdul Rouf A., MSc.
NIP. 196709071992031001

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Ana Fadila
NIM : 0910943042
Jurusan : Matematika
Penulis skripsi berjudul : Kontrol Optimal pada Model Epidemik *SIR*

dengan ini menyatakan bahwa :

1. **Tugas Akhir ini adalah benar-benar karya saya sendiri dan bukan hasil plagiat dari karya orang lain. Rujukan-rujukan yang tercantum dalam daftar pustaka hanya digunakan sebagai acuan atau referensi.**
2. **Apabila kemudian hari diketahui bahwa isi skripsi saya merupakan hasil plagiat, maka saya bersedia menanggung akibat hukum dari keadaan tersebut.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 26 Maret 2013
yang menyatakan,

Ana Fadila
NIM. 0910943042

KONTROL OPTIMAL PADA MODEL EPIDEMIK *SIR*

ABSTRAK

Pada skripsi ini dibahas kontrol optimal pada model epidemik *SIR* (*Susceptible-Infective-Recovered*) dengan vaksinasi. Tujuan kontrol optimal adalah untuk mengurangi jumlah individu terinfeksi dan meminimumkan biaya vaksinasi. Kontrol optimal diperoleh dengan menerapkan prinsip Pontryagin. Selanjutnya, sistem optimal yang akan diselesaikan secara numerik dengan metode Sweep Maju-Mundur. Simulasi numerik menunjukkan keefektifan vaksinasi dalam mengendalikan penyebaran penyakit sehingga dapat mengurangi jumlah individu rentan dan terinfeksi, meningkatkan jumlah individu yang sembuh dan meminimumkan biaya vaksinasi.

Kata kunci : model epidemik *SIR*, kontrol optimal, vaksinasi prinsip Pontryagin, metode Sweep Maju-Mundur.

OPTIMAL CONTROL ON SIR EPIDEMIC MODEL

ABSTRACT

This final project studies optimal control on the SIR (Susceptible-Infective-Recovered) epidemic model with vaccination. The optimal control goal is to reduce the number of infected individuals and to minimize the cost of vaccination. Optimal control is obtained by applying the Pontryagin's principle. Here, the optimal system will be solved numerically by the Forward-Backward Sweep method. Numerical simulations show the effectiveness of vaccination in controlling the spread of disease so that it can reduce the number of infected and susceptible individuals, increase the number of the removed individuals and minimize the cost of vaccination.

Keywords : The SIR epidemic model, optimal control, vaccination, Pontryagin's principle, the Forward-Backward Sweep method.

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur kehadirat Allah SWT yang telah memberikan bimbingan dan petunjuk-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **Kontrol Optimal pada Model Epidemik *SIR*** dengan baik dan lancar. Shalawat serta salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW sebagai suri tauladan bagi penulis.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan serta motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada :

1. Dr. Agus Suryanto, M.Sc. selaku dosen pembimbing atas segala bimbingan, motivasi, saran, waktu, serta kesabaran yang telah diberikan selama pembimbingan skripsi ini.
2. Drs. Marsudi, MS dan Dra. Trisilowati, M.Sc. selaku dosen penguji atas segala saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
3. Dr. Abdul Rouf Al-Ghofari, M.Si dan Dr. Sobri Abusini, MT selaku Ketua Jurusan Matematika dan Ketua Program Studi Matematika
4. Semua bapak/ibu dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
5. Bapak, Ibu, adikku, mas rizal, Ibu Sum, Pak Dhe dan semua anggota keluarga besarku atas segala yang telah diberikan berupa dukungan yang tak pernah habis.
6. Riska, candra, dan teman-teman Math'B 2009 serta rekan-rekan di LSM, atas bantuan yang telah diberikan dan kebersamaannya selama ini.
7. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Allah SWT memberikan anugerah dan barokah-Nya kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini. Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat banyak kekurangan. Untuk itu penulis sangat mengharapkan kritik dan saran melalui email penulis ana_fadila@yahoo.com. Akhir kata,

semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak.

Malang, 26 Maret 2013

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

HALAMAN JUDUL i
LEMBAR PENGESAHAN iii
LEMBAR PERNYATAAN v
ABSTRAK vii
ABSTRACT ix
KATA PENGANTAR xi
DAFTAR ISI xiii
DAFTAR GAMBAR xv
DAFTAR TABEL xvii
DAFTAR LAMPIRAN xix

BAB I PENDAHULUAN 1
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 2
1.3 Pembatasan Kajian 3
1.4 Tujuan 3

BAB II TINJAUAN PUSTAKA 5
2.1 Persamaan Diferensial 6
2.2 Sistem Dinamik 6
2.2.1 Sistem Otonumus 6
2.2.2 Sistem Otonomus Linear 7
2.2.3 Sistem Otonomus Nonlinear 9
2.3 Model *SIR* 13
2.4 Angka Reproduksi Dasar 14
2.5 Teori Kontrol Optimal 14
2.5.1 Fungsi Hamilton 15
2.5.2 Prinsip Pontryagin 15
2.6 Metode Sweep Maju-Mundur 16

BAB III PEMBAHASAN 19
3.1 Formulasi Model Epidemik *SIR* dengan Kontrol 19
3.1.1 Perubahan Subpopulasi Individu Rentan 20
3.1.2 Perubahan Subpopulasi Individu Terinfeksi 20
3.1.3 Perubahan Subpopulasi Individu Sembuh 21

3.2 Titik Kesetimbangan Sistem dan Angka Reproduksi Dasar 22
3.2.1 Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit E_1 24
3.2.2 Titik Kesetimbangan Endemik E_2 24

3.3 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan 25
3.3.1 Kestabilan Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit E_1 26
3.3.2 Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik E_2 26
3.4 Penyelesaian Kontrol Optimal 27
3.5 Simulasi Numerik 31
3.5.1 Algoritma Metode Sweep Maju-Mundur 31
3.5.2 Simulasi I 33
3.5.3 Simulasi II 35

BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN 41
4.1 Kesimpulan 41
4.2 Saran 41

DAFTAR PUSTAKA 43

LAMPIRAN 45

DAFTAR GAMBAR

Halaman

Gambar 2.1	Diagram kompartemen model epidemik *SIR*.....	13
Gambar 3.1	Diagram kompartemen model epidemik *SIR* dengan kontrol	19
Gambar 3.2	Potret fase untuk $R_0 = 0.7512$	33
Gambar 3.3	Potret fase untuk $R_0 = 0$	34
Gambar 3.4	Potret fase untuk $R_0 = 1.5$	34
Gambar 3.5	Jumlah subpopulasi individu terinfeksi $I(t)$ tanpa dan dengan kontrol	36
Gambar 3.6	Jumlah subpopulasi individu rentan $S(t)$ tanpa dan dengan kontrol	37
Gambar 3.7	Jumlah subpopulasi individu sembuh $R(t)$ tanpa dan dengan kontrol	38
Gambar 3.8	Kontrol optimal $u^*(t)$.....	39
Gambar 3.9	Fungsi tujuan (J).....	40

DAFTAR TABEL

Halaman

Tabel 2.1	Kriteria kestabilan titik kesetimbangan sistem otonomus linear	9
Tabel 2.2	Kriteria kestabilan titik kesetimbangan sistem otonomus yang dilinearkan.....	12
Tabel 3.1	Nilai awal yang digunakan	34
Tabel 3.2	Nilai parameter yang digunakan.....	34

DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

Lampiran 1	Penurunan persamaan (3.13), (3.14), (3.15), dan (3.16).....	45
Lampiran 2	Perhitungan dari persamaan karakteristik (3.18)	47
Lampiran 3	Penyederhanaan dari λ_3	48
Lampiran 4	Listing program model *SIR* tanpa kontrol.....	49
Lampiran 5	Listing program model *SIR* tanpa dan dengan kontrol.....	50

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Penyakit *measles* (campak), *mumps* (gondong), *rubella* (campak jerman), dan *poliomyelitis* (polio) merupakan penyakit infeksi yang sangat berbahaya. Penyakit tersebut disebabkan oleh virus yang dapat menyebar melalui udara atau kontak langsung dengan penderita.

Munculnya penyakit tersebut mendapat perhatian dari berbagai kalangan, khususnya para ahli dalam bidang kedokteran yang memang mempunyai peranan yang penting dalam mencegah meluasnya penyebaran penyakit. Perkembangan ilmu pengetahuan di bidang matematika juga turut memberikan peranan yang penting dalam mencegah meluasnya penyebaran penyakit. Peranan tersebut berupa model matematika yang dapat menggambarkan penyebaran suatu penyakit di masa yang akan datang dengan melihat kondisi masa sekarang atau masa lalu. Model matematika tersebut disebut model epidemik.

Terdapat beberapa model epidemik yang dibentuk dari suatu penyebaran penyakit. Salah satunya adalah model epidemik *SIR* klasik. Hethcote (1990) menyebutkan bahwa pada model epidemik *SIR* klasik, populasi dibagi menjadi tiga kelompok yaitu *susceptible* (subpopulasi individu yang rentan), *infective* (subpopulasi individu yang terinfeksi), dan *recovered* (subpopulasi individu yang sembuh). Model epidemik *SIR* menyatakan suatu penyakit dimana subpopulasi yang sembuh dari penyakit memperoleh kekebalan terhadap penyakit tersebut sehingga subpopulasi yang sembuh tidak akan kembali menjadi subpopulasi rentan.

Dengan menganalisis model epidemik akan didapatkan titik kesetimbangan dan kestabilan dari titik kesetimbangan model. Dengan demikian, pola penyebaran penyakit dapat diketahui sehingga dapat segera mengambil tindakan untuk mencegah terjadinya wabah penyakit menular dalam suatu daerah. Hal ini yang nantinya berkaitan erat dengan pengendalian penyebaran suatu penyakit.

Penyebaran suatu penyakit dapat dikendalikan dengan pemberian vaksin. Vaksinasi dilakukan dengan memberikan senyawa antigen yang berfungsi untuk meningkatkan imunitas tubuh terhadap virus atau penyakit. Menurut *World Health Organization (WHO*), pemberian vaksin *Measles Mumps Rubella (MMR)* terbukti mampu menekan jumlah kematian yang disebabkan oleh penyakit *measles*, *mumps*, dan *rubella* sekitar 68% pada tahun 2000-2006. Penurunan yang signifikan juga ditunjukkan pada penyakit *poliomyelitis* yang dapat ditekan penyebarannya dengan pemberian vaksin *Oral poliomyelitis Vaccine (OPV).* Oleh karena itu, vaksinasi perlu diperhatikan sebagai salah satu upaya untuk mencegah penyebaran penyakit.

Dalam penelitian sebelumnya, Nugroho (2009) telah menganalisis pengaruh vaksinasi pada model epidemik *SIR*. Sementara itu, El hia dkk. (2012) telah membahas vaksinasi yang optimal dalam mencegah penyebaran penyakit pada model epidemik *SIR*. Pemberian vaksin seringkali terkendala oleh biaya sehingga belum tentu optimal secara ekonomis. Dengan demikian perlu ditentukan vaksinasi yang optimal agar biaya yang dibutuhkan minimum tetapi vaksinasi masih tetap efektif berfungsi sebagai pengendali penyebaran penyakit.

Pada skripsi ini akan dibahas tentang analisis kestabilan titik kesetimbangan model epidemik *SIR* untuk mengetahui perilaku model di sekitar titik kesetimbangan dan menentukan kontrol (vaksinasi) yang optimal untuk meminimumkan jumlah individu terinfeksi dan biaya vaksinasi. Secara garis besar, skripsi ini mengulas kembali artikel El hia dkk. (2012).

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, pokok permasalahan dalam skripsi ini adalah

1. bagaimana konstruksi model epidemik *SIR* dengan kontrol,
2. bagaimana analisis kestabilan titik kesetimbangan model epidemik *SIR*,
3. bagaimana menentukan kontrol optimal pada model epidemik *SIR*, dan
4. bagaimana simulasi numerik model epidemik *SIR* tanpa dan dengan kontrol optimal.

1.3 Pembatasan Kajian

Kajian skripsi ini dibatasi oleh

1. laju kelahiran dan kematian dianggap konstan,
2. populasi bersifat tertutup yaitu tidak ada migrasi,
3. penularan penyakit hanya terjadi secara horizontal yaitu tidak diturunkan dari orang tua ke anak, dan
4. kekebalan akibat pemberian vaksin bersifat permanen.

1.4 Tujuan

Tujuan skripsi ini adalah

1. mengkonstruksi model epidemik *SIR* dengan kontrol,
2. menganalisis kestabilan titik kesetimbangan model epidemik *SIR*,
3. mendapatkan kontrol optimal pada model epidemik *SIR*, dan
4. mengetahui pengaruh adanya kontrol optimal pada model epidemik *SIR* secara numerik.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial

Definisi 2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat hubungan antara suatu fungsi yang tidak diketahui dengan satu atau lebih turunannya (*Edward dan Penney, 2001*).

Definisi 2.2 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa (PDB) adalah persamaan diferensial yang hanya memuat satu variabel bebas (*Erward dan Penney, 2001*).

Definisi 2.3 Orde Persamaan Diferensial

Orde persamaan diferensial adalah tingkat dari turunan tertinggi dalam suatu persamaan diferensial (*Ross, 1984*).

Definisi 2.4 PDB linear

Suatu persamaan diferensial biasa dengan variabel bebas x dan variabel tak bebas y disebut linear dengan orde n, jika persamaan tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x) \quad (2.1)$$

dengan $a_0 \neq 0$ (*Ross, 1984*).

Definisi 2.5 PDB nonlinear

Persamaan diferensial biasa nonlinear adalah persamaan diferensial biasa yang variabel tak bebas atau turunannya berderajat lebih dari satu atau memuat perkalian antara variabel tak bebas dan turunannya (*Boyce dan DiPrima, 1986*).

Definisi 2.6 Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial biasa berdimensi n adalah sistem yang terdiri dari n persamaaan diferensial biasa dengan n fungsi

yang tidak diketahui dengan $n \geq 2$, $n \epsilon \mathbb{Z}$. Bentuk umum sistem persamaan diferensial biasa linear berdimensi n adalah

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \dot{x}_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Bentuk (2.2) dapat ditulis secara singkat sebagai

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + f_i(t), \qquad i = 1,2,\dots,n,$$

atau dalam bentuk matriks sebagai

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f}(t),$$

dengan $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, dan $\vec{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$

(*Finizio dan Ladas, 1982*).

2.2 Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah suatu sistem yang dapat diketahui kondisinya di masa yang akan datang jika diberikan kondisi pada masa sekarang atau masa yang lalu

(*Naggle dan Saff, 2004*).

2.2.1 Sistem Otonomus

Definisi 2.7

Suatu sistem persamaan diferensial yang berbentuk

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(x,y,z) \\ \frac{dy}{dt} &= G(x,y,z) \\ \frac{dz}{dt} &= H(x,y,z), \end{aligned} \tag{2.3}$$

dengan fungsi *F, G,* dan H tidak bergantung secara eksplisit terhadap waktu t disebut sistem persamaan diferensial yang bersifat otonomus (*Finizio dan Ladas, 1982*).

Definisi 2.8 Titik Kesetimbangan

Pandang sistem otonomus (2.3). Titik $\vec{x}^* = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ yang memenuhi $F(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = 0$, $G(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = 0$, dan $H(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = 0$ disebut **titik kritis sistem otonomus** (2.3). Titik kritis $\vec{x}^*$ merupakan solusi sistem (2.3) yang bernilai konstan sebab $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$, dan $\frac{dz}{dt} = 0$. Keadaan yang menyebabkan $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$, dan $\frac{dz}{dt} = 0$ disebut keadaan setimbang dan titik yang memenuhinya disebut titik kesetimbangan

(*Ross, 1984*).

Definisi 2.9 Kestabilan Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan $\vec{x}^* = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ dikatakan

1. **stabil**, jika $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi sistem $\vec{x} = \vec{x}(t)$ yang memenuhi
$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta$$
maka berlaku
$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \varepsilon, \forall t > 0,$$
2. **stabil asimtotik**, jika stabil dan $\exists \delta_0, 0 < \delta_0 < \delta$ sedemikian sehingga sebuah solusi sistem $\vec{x} = \vec{x}(t)$ yang memenuhi
$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \delta_0$$
bersifat
$$\lim_{t \to \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^*,$$
3. **tak stabil** apabila tidak memenuhi kriteria pertama

(*Boyce dan DiPrima, 2005*).

2.2.2 Sistem Otonomus Linear

Secara umum, suatu sistem otonomus linear dengan n persamaan berbentuk

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n$$
$$\vdots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n$$

yang dapat dinyatakan sebagai $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$, dengan

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix}, \; A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{ dan } \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

dengan $a_{ij} \epsilon \mathbb{R}$ dan $det(A) \neq 0$.

Untuk sistem otonomus linear dengan tiga persamaan, diperoleh bentuk umum

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z$$
$$\frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z$$
$$\frac{dz}{dt} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z,$$

yang dapat dinyatakan sebagai $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$, di mana

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \text{ dan } \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

dengan $a_{ij} \epsilon \mathbb{R}$ dan $det(A) \neq 0$.

Teorema 2.1 Kestabilan Sistem Otonomus Linear

Misalkan λ_1, λ_2 dan λ_3 adalah nilai eigen matriks A. Titik kesetimbangan $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ bersifat

1. **stabil asimtotik** jika bagian riil dari λ_1, λ_2 dan λ_3 adalah negatif,
2. **stabil** tetapi tidak stabil asimtotik jika ketiga nilai eigen λ_1, λ_2 dan λ_3 mempunyai bagian riil tak positif,
3. **tidak stabil** jika sedikitnya satu nilai eigen memiliki bagian riil yang positif

(*Finizio dan Ladas, 1982*).

Untuk sistem otonomus dengan dua persamaan, Teorema 2.1 dapat disajikan dalam Tabel 2.1 berikut.

Tabel 2.1 Kriteria kestabilan titik kesetimbangan sistem otonomus linear

Nilai Eigen	Kriteria	Kestabilan	Jenis
$\lambda_1, \lambda_2 \epsilon \mathbb{R}$	$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	Tak stabil	Simpul
	$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	Stabil asimtotik	Simpul
	$\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 < 0$	Tak stabil	Pelana
$\lambda_{1,2} = a \pm ib \in \mathbb{C}$	$a > 0$	Tak stabil	Spiral
	$a < 0$	Stabil asimtotik	Spiral
	$a = 0$	Stabil	Pusat

(*Boyce dan Diprima, 2005*).

2.2.3 Sistem Otonomus Nonlinear

Perhatikan sistem otonomus nonlinear berikut

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x,y,z) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x,y,z) \\ \frac{dz}{dt} &= h(x,y,z). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Anggap bahwa fungsi f, g dan h mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$. Deret Taylor fungsi f, g dan h di sekitar $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ adalah

$$\begin{aligned} f(x,y,z) = f(\hat{x},\hat{y},\hat{z}) &+ \frac{\partial f(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial x}(x-\hat{x}) + \frac{\partial f(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial y}(y-\hat{y}) \\ &+ \frac{\partial f(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial z}(z-\hat{z}) + \eta_1(x,y,z) \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$g(x,y,z) = g(\hat{x},\hat{y},\hat{z}) + \frac{\partial g(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial x}(x-\hat{x}) + \frac{\partial g(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial y}(y-\hat{y}) + \frac{\partial g(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial z}(z-\hat{z}) + \eta_2(x,y,z) \tag{2.6}$$

$$h(x,y,z) = h(\hat{x},\hat{y},\hat{z}) + \frac{\partial h(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial x}(x-\hat{x}) + \frac{\partial h(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial y}(y-\hat{y}) + \frac{\partial h(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial z}(z-\hat{z}) + \eta_3(x,y,z), \tag{2.7}$$

dengan $\eta_1(x,y,z), \eta_2(x,y,z)$, dan $\eta_3(x,y,z)$ adalah suku sisa.

Untuk hampiran orde satu di atas, suku sisa memenuhi sifat-sifat

$$\lim_{(x,y,z)\to(\hat{x},\hat{y},\hat{z})} \frac{\eta_1(x,y,z)}{\|\vec{w}\|} = 0$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(\hat{x},\hat{y},\hat{z})} \frac{\eta_2(x,y,z)}{\|\vec{w}\|} = 0 \tag{2.8}$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(\hat{x},\hat{y},\hat{z})} \frac{\eta_3(x,y,z)}{\|\vec{w}\|} = 0,$$

dengan $\vec{w} = (x-\hat{x}, y-\hat{y}, z-\hat{z})$.

Berdasarkan persamaan (2.5), (2.6), dan (2.7), serta mengingat $\frac{dx}{dt} = \frac{d(x-\hat{x})}{dt}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{d(y-\hat{y})}{dt}$, $\frac{dz}{dt} = \frac{d(z-\hat{z})}{dt}$, maka persamaan (2.4) dapat ditulis dalam bentuk matriks berikut.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x-\hat{x} \\ y-\hat{y} \\ z-\hat{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\hat{x},\hat{y},\hat{z}) \\ g(\hat{x},\hat{y},\hat{z}) \\ h(\hat{x},\hat{y},\hat{z}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial x}(x-\hat{x}) + \frac{\partial f(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial y}(y-\hat{y}) + \frac{\partial f(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial z}(z-\hat{z}) \\ \frac{\partial g(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial x}(x-\hat{x}) + \frac{\partial g(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial y}(y-\hat{y}) + \frac{\partial g(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial z}(z-\hat{z}) \\ \frac{\partial h(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial x}(x-\hat{x}) + \frac{\partial h(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial y}(y-\hat{y}) + \frac{\partial h(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial z}(z-\hat{z}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(x,y,z) \\ \eta_2(x,y,z) \\ \eta_3(x,y,z) \end{bmatrix}$$

atau

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x-\hat{x} \\ y-\hat{y} \\ z-\hat{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\hat{x},\hat{y},\hat{z}) \\ g(\hat{x},\hat{y},\hat{z}) \\ h(\hat{x},\hat{y},\hat{z}) \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial x} & \frac{\partial f(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial y} & \frac{\partial f(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial z} \\ \frac{\partial g(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial x} & \frac{\partial g(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial y} & \frac{\partial g(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial z} \\ \frac{\partial h(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial x} & \frac{\partial h(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial y} & \frac{\partial h(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x-\hat{x}) \\ (y-\hat{y}) \\ (z-\hat{z}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(x,y,z) \\ \eta_2(x,y,z) \\ \eta_3(x,y,z) \end{bmatrix}. \tag{2.9}$$

Matriks $\begin{bmatrix} \frac{\partial f(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial x} & \frac{\partial f(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial y} & \frac{\partial f(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial z} \\ \frac{\partial g(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial x} & \frac{\partial g(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial y} & \frac{\partial g(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial z} \\ \frac{\partial h(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial x} & \frac{\partial h(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial y} & \frac{\partial h(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial z} \end{bmatrix}$ disebut matriks Jacobi atau *partial derivative matrix*, dinotasikan dengan $J(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$ atau J saja bila dianggap jelas.

Jika dimisalkan $u = x-\hat{x}$, $v = y-\hat{y}$, $w = z-\hat{z}$ maka $\vec{w} = (u,v,w)$. Karena

$$f(\hat{x},\hat{y},\hat{z}) = g(\hat{x},\hat{y},\hat{z}) = h(\hat{x},\hat{y},\hat{z}) = 0,$$

persamaan (2.9) dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \\ \frac{dw}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial x} & \frac{\partial f(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial y} & \frac{\partial f(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial z} \\ \frac{\partial g(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial x} & \frac{\partial g(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial y} & \frac{\partial g(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial z} \\ \frac{\partial h(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial x} & \frac{\partial h(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial y} & \frac{\partial h(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(x,y,z) \\ \eta_2(x,y,z) \\ \eta_3(x,y,z) \end{bmatrix}.$$

Bentuk di atas dapat ditulis sebagai

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w} + \vec{\eta}. \tag{2.10}$$

Untuk (x,y,z) yang berada cukup dekat dengan $(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$, (u,v,w) bernilai kecil sehingga $\|\vec{\eta}\| \leq \|\vec{w}\|$. Oleh karena itu, $\vec{\eta}$ dapat diabaikan dan sistem nonlinear (2.10) dapat dihampiri oleh sistem linear

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w}. \tag{2.11}$$

Untuk $x = \hat{x}$, $y = \hat{y}$, dan $z = \hat{z}$ diperoleh $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = (0,0,0)$ sehingga sistem linear (2.11) memiliki titik kesetimbangan $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = (0,0,0)$

(*Boyce dan DiPrima, 2005*).

Teorema 2.2 Kestabilan Sistem Otonomus Nonlinear

Hubungan antara sifat kestabilan sistem otonomus nonlinear dan sifat kestabilan sistem yang dilinearkan adalah

1. Titik kesetimbangan sistem otonomus nonlinear (2.4) bersifat stabil asimtotik jika titik kesetimbangan sistem yang dilinearkan stabil asimtotik,
2. Titik kesetimbangan sistem otonomus nonlinear (2.4) bersifat tak stabil jika titik kesetimbangan sistem yang dilinearkan tak stabil

(*Finizio dan Ladas, 1982*).

Untuk sifat dan jenis kestabilan titik kesetimbangan berdasarkan nilai eigen matriks Jacobi sesuai Teorema 2.2, disajikan dalam Tabel 2.2.

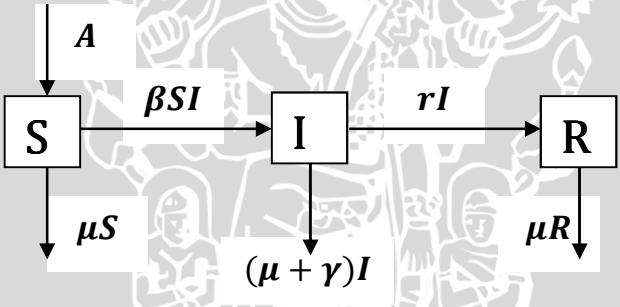
Tabel 2.2 Kriteria kestabilan titik kesetimbangan sistem otonomus yang dilinearkan

Nilai Eigen	Kriteria	Kestabilan	Jenis
$\lambda_1, \lambda_2 \epsilon \mathbb{R}$	$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	Tak stabil	Simpul
	$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	Stabil asimtotik	Simpul
	$\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 < 0$	Tak stabil	Pelana
$\lambda_{1,2} = a \pm ib \in \mathbb{C}$	$a > 0$	Tak stabil	Spiral
	$a < 0$	Stabil asimtotik	Spiral
	$a = 0$	Tidak dapat ditentukan	

(*Boyce dan Diprima, 2005*).

2.3 Model *SIR*

Model *SIR* pertama kali dikemukakan oleh H. E. Soper (Shim, 2004). Secara garis besar, model *SIR* menggambarkan penyebaran penyakit dimana subpopulasi individu yang rentan dapat terinfeksi melalui proses interaksi, baik secara langsung maupun tidak langsung dengan subpopulasi individu yang terinfeksi. Selanjutnya, subpopulasi individu terinfeksi yang mampu bertahan terhadap penyakit akan sembuh dan memasuki subpopulasi individu yang sembuh. Model tersebut mengasumsikan bahwa total populasi, penambahan populasi, dan laju kematian adalah konstan. Pada tahun 1932, Kermack dan Mc Kendrik mengusulkan adanya kematian pada semua subpopulasi. Selanjutnya, Hethcote (1976) mengasumsikan bahwa penyakit menimbulkan kematian untuk beberapa individu yang terinfeksi dan terdapat individu terinfeksi yang sembuh dan memperoleh kekebalan. Modifikasi model *SIR* oleh Kermack, Mc Kendrik, dan Hethcote disajikan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Diagram kompartemen model epidemik *SIR*

dengan $\beta, \gamma, r, \mu,$ dan A berturut-turut menyatakan laju kontak antara subpopulasi yang rentan dengan subpopulasi yang terinfeksi, laju kematian yang disebabkan oleh penyakit, laju individu terinfeksi yang sembuh karena memperoleh kekebalan, laju kematian alami, dan laju penambahan populasi.

2.4 Angka Reproduksi Dasar

Untuk mengetahui dinamika penyebaran suatu penyakit dengan model *SIR*, digunakan suatu angka yang menjadi ukuran untuk mengetahui apakah dalam suatu populasi terjadi epidemik atau tidak. Angka tersebut dikenal sebagai angka reproduksi dasar. Angka reproduksi dasar (R_0) didefinisikan sebagai angka rata-rata banyaknya infeksi berikutnya (infeksi baru) yang disebabkan oleh satu individu yang terinfeksi selama individu tersebut hidup sebagai individu yang terinfeksi. Oleh karena itu, kestabilan titik kesetimbangan dapat dianalisis menggunakan R_0.

Titik kesetimbangan bebas penyakit adalah titik kesetimbangan dimana dalam populasi tidak terdapat individu terinfeksi atau semua individu dalam keadaan sehat. Titik kesetimbangan endemik adalah titik kesetimbangan dimana terdapat individu terifeksi pada populasi, sehingga penyakit akan menyebar dalam kurun waktu yang lama (*Shim, 2004*).

2.5 Teori Kontrol Optimal

Minimumkan : $J(y,u) = \int_0^T F(t, y(t), u(t))\, dt$

Kendala : $\frac{dy}{dt} = y' = f(t, y(t), u(t))$ (2.12)

$y(0) = y_0$ dan $y(T) = y_T$

$u(t) \in U$ untuk setiap $t \in [0, T]$.

Hal terpenting dalam teori kontrol optimal adalah suatu kondisi yang memenuhi turunan pertama atau disebut juga sebagai suatu prinsip minimum. Persamaan *state* (2.12) dianggap sebagai kendala yang dapat diterapkan dengan mengenalkan suatu fungsi Lagrange dan variabel pengali Langrange. Dalam masalah kontrol optimal, fungsi Lagrange dan variabel pengali Langrange disebut fungsi Hamilton dan variabel *costate*.

2.5.1 Fungsi Hamilton

Dalam persamaan *state* (2.12) terdapat tiga variabel yaitu variabel waktu (t), *state* (y), dan kontrol (u). Selanjutnya, variabel *costate* yang dinotasikan dengan $p(t)$ dilibatkan dalam masalah kontrol optimal melalui suatu fungsi Hamilton. Fungsi Hamilton didefinisikan sebagai berikut

$$H(t,y,u,p) = F(t,y,u) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t) f_i(t,y,u) \qquad (2.13)$$

dengan H dinotasikan sebagai fungsi Hamilton dengan empat variabel yaitu t, y, u, dan p.

2.5.2 Prinsip Pontryagin

Prinsip Pontryagin merupakan prinsip penting dalam menyelesaikan masalah kontrol optimal karena prinsip ini menyatakan kondisi yang diperlukan agar diperoleh solusi yang optimal sehingga harus ditentukan u yang dapat meminimumkan fungsi Hamilton (H) pada saat t.

Selain variabel kontrol (u), H juga memuat variabel *state* (y) dan variabel *costate* (p), prinsip minimum juga menyatakan bahwa y dan p akan berubah terhadap waktu, baik melalui persamaan *state* maupun co*state*. Persamaan *state* (2.12) berdasarkan persamaan (2.13) menunjukkan $\partial H/\partial p = f(t,y,u)$, sehingga persamaan *state* dinyatakan sebagai berikut

$$y' = f(t, y(t), u(t)) \text{ atau } y' = \frac{\partial H}{\partial p}. \qquad (2.14)$$

Sebaliknya variabel *costate* (p) tidak tampak dalam persamaan (2.12) tetapi variabel tersebut muncul menjadi bagian dari persamaan (2.13) hanya berfungsi sebagai suatu kondisi optimasi. Persamaan co*state* dinyatakan sebagai berikut

$$p' = \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}. \qquad (2.15)$$

Perhatikan bahwa jika dengan munculnya dua turunan yaitu y' dan p' maka untuk menentukan solusi optimal diperlukan dua kondisi batas. Jika telah diberikan nilai awal $y(0)$ dan nilai akhir $y(T)$ maka dapat langsung menentukan nilai dari dua turunan tersebut, tetapi jika tidak diberikan kondisi akhir maka suatu kondisi yang disebut sebagai kondisi transversal yaitu $p(T) = 0$ harus dimasukkan sebagai kondisi akhir.

Dengan demikian dapat diperoleh beberapa komponen dalam prinsip Pontryagin yaitu

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & H(t,y,u^*,p) \le H(t,y,u,p) & \text{untuk setiap } t \in [0.T] \\ \text{(ii)} & y' = \frac{\partial H}{\partial p} & \text{(persamaan } \textit{state}\text{)} \\ \text{(iii)} & p' = -\frac{\partial H}{\partial y} & \text{(persamaan } \textit{costate}\text{)} \\ \text{(iv)} & p(T) = 0 & \text{(kondisi tranversal).} \end{array} \quad (2.16)$$

Kondisi (i) pada persamaan (2.16) menyatakan bahwa kontrol optimal dari $u(t)$ dalam setiap waktu t harus ditentukan agar dapat meminimumkan fungsi Hamilton untuk setiap nilai yang memenuhi $u(t)$. Pada kasus tertentu yang menyatakan bahwa jika fungsi Hamilton dapat diturunkan terhadap u maka kondisi (i) dapat diganti oleh

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0.$$

Kondisi (ii) dan (iii) dalam prinsip Pontryagin merupakan sistem Hamilton. Kondisi (iv) adalah kondisi tranversal yang sesuai untuk masalah kondisi akhir yang tidak diberikan

(*Chiang, 1992*).

2.6 Metode Sweep Maju-Mundur

Terdapat beberapa metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal, salah satunya ialah

metode Sweep Maju-Mundur. Secara garis besar, algoritma metode ini sebagai berikut.

Langkah 1 : Membuat dugaan awal nilai u dan menyimpan dugaan awal u.

Langkah 2 : Menggunakan kondisi awal $y(0) = y_0$ dan nilai dugaan u untuk menyelesaikan persamaaan *state* (y) dengan langkah maju metode Runge Kutta orde 4.

Langkah 3 : Menggunakan kondisi transversal $p(T) = 0$ dan nilai u dan y untuk menyelesaikan persamaan *costate* (p) dengan langkah mundur metode Runge Kutta orde 4.

Langkah 4 : Memperbarui nilai kontrol u dengan memasukkan nilai y dan p yang baru ke dalam karakteristik dari u.

Langkah 5 : Memeriksa konvergensi. Jika nilai error dari setiap variabel dalam iterasi saat ini dan iterasi sebelumnya sangat kecil maka cetak nilai-nilai saat ini sebagai solusi. Tetapi, jika nilai errornya tidak sangat kecil maka kembali ke langkah 2

(*Lenhart dan Workman, 2007*).

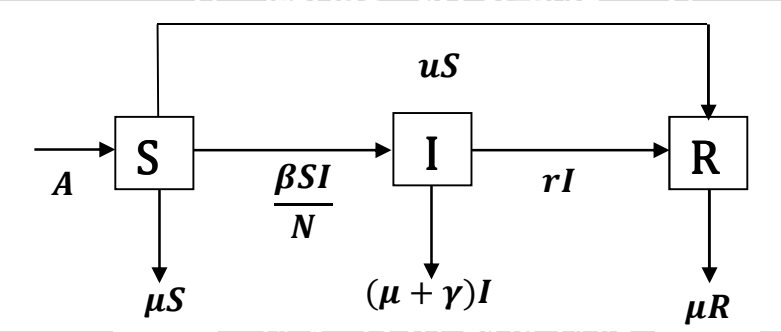
BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas formulasi model epidemik *SIR* dengan kontrol. Pembahasan dalam skripsi ini lebih ditekankan pada analisis penyelesaian kontrol optimal dengan menerapkan prinsip Pontryagin. Selanjutnya, sistem optimal yang diperoleh diselesaikan secara numerik dengan metode Sweep Maju-Mundur. Pada tahap akhir dilakukan interpretasi gambar model epidemik *SIR* tanpa dan dengan kontrol.

3.1 Formulasi Model Epidemik *SIR* dengan Kontrol

Pada model epidemik *SIR*, populasi dibagi menjadi tiga subpopulasi yaitu subpopulasi individu yang rentan terhadap penyakit (*S*), subpopulasi individu terinfeksi (*I*), dan subpopulasi individu yang sembuh (*R*). Pada model ini ditambahkan kontrol $u(t)$ yang menyatakan laju vaksinasi pada saat t.



Gambar 3.1 Diagram kompartemen model epidemik *SIR* dengan kontrol

3.1.1 Perubahan subpopulasi individu rentan

Perubahan subpopulasi individu yang rentan sebanding dengan laju penambahan populasi A yang dinyatakan sebagai

$$\frac{dS}{dt} = A.$$

Selain laju penambahan populasi, perubahan subpopulasi individu rentan dipengaruhi oleh kematian alami μ yang akan mengakibatkan berkurangnya jumlah subpopulasi, sehingga

$$\frac{dS}{dt} = -\mu S.$$

Laju kontak antara subpopulasi individu rentan dengan subpopulasi individu terinfeksi yang dinyatakan sebagai $\frac{\beta SI}{N}$ akan mengurangi jumlah subpopulasi individu rentan, sehingga

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta IS}{N}.$$

Dari uraian tersebut maka perubahan subpopulasi individu yang rentan dirumuskan sebagai

$$\frac{dS}{dt} = A - \mu S - \frac{\beta SI}{N}. \qquad (3.1)$$

3.1.2 Perubahan subpopulasi individu terinfeksi

Untuk perubahan subpopulasi individu yang terinfeksi, jumlah subpopulasi rentan yang terinfeksi akan menambah jumlah subpopulasi terinfeksi yang dinyatakan sebagai

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta IS}{N}.$$

Laju kematian alami μ dan laju kematian karena penyakit γ serta laju penyembuhan r akan menyebabkan berkurangnya jumlah subpopulasi ini dinyatakan sebagai

$$\frac{dI}{dt} = -(\mu + \gamma + r)I.$$

Dengan demikian perubahan subpopulasi individu yang terinfeksi dapat dirumuskan sebagai

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - (\mu + \gamma + r)I. \tag{3.2}$$

3.1.3 Perubahan subpopulasi individu sembuh

Perubahan subpopulasi individu yang sembuh sebanding dengan laju penyembuhan individu yang terinfeksi rI yang dinyatakan sebagai

$$\frac{dR}{dt} = rI.$$

Laju kematian alami μR mengurangi jumlah subpopulasi, sehingga

$$\frac{dR}{dt} = -\mu R.$$

Perubahan subpopulasi individu yang sembuh dirumuskan sebagai

$$\frac{dR}{dt} = rI - \mu R. \tag{3.3}$$

Dari persamaan (3.1), (3.2), dan (3.3), didapat sistem persamaan otonomus berikut

$$\frac{dS(t)}{dt} = A - \mu S(t) - \frac{\beta S(t)I(t)}{N(t)}, \tag{3.4.a}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\beta S(t)I(t)}{N(t)} - (\mu + \gamma + r)I(t), \tag{3.4.b}$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = rI(t) - \mu R(t). \tag{3.4.c}$$

Laju penyebaran suatu penyakit dapat dikendalikan dengan vaksinasi. Sementara itu, $u(t)S(t)$ menyatakan banyaknya individu rentan yang diberikan vaksin pada saat t. Sehingga sistem persamaan (3.4) dengan kontrol $u(t)$ menjadi

$$\frac{dS(t)}{dt} = A - \mu S(t) - \frac{\beta S(t)I(t)}{N(t)} - u(t)S(t), \quad (3.5.a)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\beta S(t)I(t)}{N(t)} - (\mu + \gamma + r)I(t), \quad (3.5.b)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = rI(t) - \mu R(t) + u(t)S(t), \quad (3.5.c)$$

dengan $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$, $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$, dan $R(0) = R_0$ sedangkan A, μ, β, γ, dan r merupakan parameter positif (*El hia dkk, 2012*).

3.2 Titik Kesetimbangan Sistem dan Angka Reproduksi Dasar

Menurut bab II, titik kesetimbangan pada suatu sistem diperoleh jika laju perubahan pada sistem bernilai nol, sehingga model *SIR* akan mengalami kesetimbangan jika

$$A - \mu S(t) - \frac{\beta S(t)I(t)}{N(t)} = 0, \quad (3.6.a)$$

$$\frac{\beta S(t)I(t)}{N(t)} - (\mu + \gamma + r)I(t) = 0, \quad (3.6.b)$$

$$rI(t) - \mu R(t) = 0. \quad (3.6.c)$$

Jika persamaan (3.6.a) dijumlahkan dengan (3.6.b) maka

$$A - \mu S - (\mu + \gamma + r)I = 0,$$

$$A - \mu S = (\mu + \gamma + r)I,$$

$$\hat{I} = \frac{A - \mu S}{(\mu + \gamma + r)}. \quad (3.7)$$

Persamaan (3.6.c) menghasilkan

$$rI - \mu R = 0,$$

$$\hat{R} = \frac{r\hat{I}}{\mu}. \quad (3.8)$$

Substitusi (3.7) ke dalam persamaan (3.8) dihasilkan

$$\hat{R} = \frac{r(A - \mu S)}{\mu(\mu + \gamma + r)}. \tag{3.9}$$

Dari persamaan (3.6.b) diperoleh

$$\left[\frac{\beta S}{S + I + R} - (\mu + \gamma + r)\right] I = 0.$$

Misalkan $I(t) \neq 0$ maka

$$\frac{\beta S}{S + I + R} - (\mu + \gamma + r) = 0,$$

$$\beta S = (\mu + \gamma + r)(S + I + R),$$

$$\beta S = (\mu + \gamma + r)\left(S + \frac{A - \mu S}{(\mu + \gamma + r)} + \frac{r(A - \mu S)}{\mu(\mu + \gamma + r)}\right),$$

$$\beta S = (\mu + \gamma + r)\left(\frac{S\mu(\mu + \gamma + r) + \mu(A - \mu S) + r(A - \mu S)}{\mu(\mu + \gamma + r)}\right),$$

$$\beta \mu S = \mu S(\mu + \gamma + r) + (\mu + r)(A - \mu S),$$

$$\beta \mu S - \mu S(\mu + \gamma + r) + \mu S(\mu + r) = A(\mu + r),$$

$$\mu S\big(\beta - (\mu + \gamma + r) + (\mu + r)\big) = A(\mu + r),$$

$$\mu S(\beta - \gamma) = A(\mu + r),$$

$$\widehat{S} = \frac{A(\mu + r)}{\mu(\beta - \gamma)}. \tag{3.10}$$

3.2.1 Titik kesetimbangan bebas penyakit E_1

Titik kesetimbangan bebas penyakit menandakan bahwa tidak terdapat individu terinfeksi dalam populasi yang berarti $\hat{I} = 0$, sehingga persamaan (3.7) menjadi

$$\frac{A-\mu\widehat{S}}{(\mu+\gamma+r)}=0,$$

$$A-\mu\widehat{S}=0,$$

$$\widehat{S}=\frac{A}{\mu},$$

sehingga diperoleh $E_1=(\frac{A}{\mu},0,0)$.

3.2.2 Titik kesetimbangan endemik E_2

Titik kesetimbangan endemik memperlihatkan bahwa terdapat individu terinfeksi dalam populasi artinya $\hat{I}\neq 0$, sehingga diperoleh $E_2=(\widehat{S},\hat{I},\widehat{R})$ yaitu

$$\hat{S}=\frac{A(\mu+r)}{\mu(\beta-\gamma)},\ \hat{I}=\frac{A-\mu\hat{S}}{(\mu+\gamma+r)},\text{ dan }\ \widehat{R}=\frac{r(A-\mu\hat{S})}{\mu(\mu+\gamma+r)}.$$

Jika nilai $\hat{S}$ disubstitusi ke nilai $\hat{I}$ maka dihasilkan

$$\hat{I}=\frac{A(\beta-(\mu+\gamma+r))}{(\mu+\gamma+r)(\beta-\gamma)}. \tag{3.11}$$

Titik endemik $E_2=(\widehat{S},\hat{I},\widehat{R})$ terjadi jika $\hat{I}>0$. Dari persamaan (3.11) diperoleh bahwa $\hat{I}>0$ jika

$$\beta>(\mu+\gamma+r)$$

atau

$$\frac{\beta}{(\mu+\gamma+r)}>1.$$

Selanjutnya akan dimisalkan bahwa

$$R_0=\frac{\beta}{(\mu+\gamma+r)}. \tag{3.12}$$

Berdasarkan persamaan (3.12) dan dengan penurunan pada Lampiran 1 dapat diperoleh persamaan (3.13), (3.14), (3.15), dan (3.16) berikut

$$\hat{S} = \frac{1}{R_0}\hat{N}, \tag{3.13}$$

$$\hat{I} = \frac{\mu(R_0 - 1)}{R_0(\mu + r)}\hat{N}, \tag{3.14}$$

$$\hat{R} = \frac{r(R_0 - 1)}{R_0(\mu + r)}\hat{N}, \tag{3.15}$$

$$\hat{N} = \frac{AR_0(\mu + r)}{\mu\big((R_0 - 1)\gamma + R_0(\mu + r)\big)}. \tag{3.16}$$

Jadi, titik kesetimbangan endemik dapat ditulis kembali sebagai $E_2 = (\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})$ dengan $\hat{S}$, $\hat{I}$, dan $\hat{R}$ seperti pada persamaan (3.13), (3.14), dan (3.15).

3.3 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Model *SIR*

Dengan menggunakan teori linearisasi sistem otonomus nonlinear yang terdapat dalam subsubbab 2.2.3, linearisasi sistem persamaan (3.5) menghasilkan matriks Jacobi sebagai berikut

$$J\big(x'(t), y'(t), z'(t)\big) = \begin{bmatrix} -\mu - \frac{\beta\hat{I}}{\hat{N}}\left(1 - \frac{\hat{S}}{\hat{N}}\right) & -\frac{\beta\hat{S}}{\hat{N}}\left(1 - \frac{\hat{I}}{\hat{N}}\right) & -\frac{\beta\hat{S}\hat{I}}{(\hat{N})^2} \\ \frac{\beta\hat{I}}{\hat{N}}\left(1 - \frac{\hat{S}}{\hat{N}}\right) & \frac{\beta\hat{S}}{\hat{N}}\left(1 - \frac{\hat{I}}{\hat{N}}\right) - (\mu + \gamma + r) & \frac{\beta\hat{S}\hat{I}}{(\hat{N})^2} \\ 0 & r & -\mu \end{bmatrix}.$$

Persamaan karakteristik untuk matriks Jacobi adalah

$$\begin{vmatrix} -\mu - \frac{\beta\hat{I}}{\hat{N}}\left(1-\frac{\hat{S}}{\hat{N}}\right) - \lambda & -\frac{\beta\hat{S}}{\hat{N}}\left(1-\frac{\hat{I}}{\hat{N}}\right) & -\frac{\beta\hat{S}\hat{I}}{\left(\hat{N}\right)^2} \\ \frac{\beta\hat{I}}{\hat{N}}\left(1-\frac{\hat{S}}{\hat{N}}\right) & \frac{\beta\hat{S}}{\hat{N}}\left(1-\frac{\hat{I}}{\hat{N}}\right) - (\mu+\gamma+r) - \lambda & \frac{\beta\hat{S}\hat{I}}{\left(\hat{N}\right)^2} \\ 0 & r & -\mu-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$\left(\frac{\beta\hat{S}}{\hat{N}}\left(1-\frac{\hat{I}}{\hat{N}}\right) - (\mu+\gamma+r) - \lambda\right)\left(-\mu - \frac{\beta\hat{I}}{\hat{N}}\left(1-\frac{\hat{S}}{\hat{N}}\right) - \lambda\right)(-\mu-\lambda) = 0. \quad (3.17)$$

3.3.1 Kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit E_1

Jika titik kesetimbangan E_1 disubstitusikan ke persamaan (3.17) maka didapat persamaan karakteristik di titik E_1 yaitu

$$(\beta - (\mu+\gamma+r) - \lambda)(-\mu-\lambda)(-\mu-\lambda) = 0.$$

Akar-akar persamaan karakteristik untuk titik kesetimbangan E_1 adalah $\lambda_1 = -\mu$, $\lambda_2 = -\mu$, dan $\lambda_3 = \beta - (\mu+\gamma+r)$. Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (3.12), maka λ_3 dapat ditulis kembali sebagai $\lambda_3 = (R_0 - 1)(\mu+\gamma+r)$. Berdasarkan akar-akar persamaan karakteristik ini, jenis kestabilan titik kesetimbangan E_1 dibagi menjadi tiga kasus adalah

1. jika $R_0 > 1$ maka E_1 bersifat tidak stabil pelana karena $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ dan $\lambda_3 > 0$,
2. jika $R_0 = 1$ maka diperoleh $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ dan $\lambda_3 = 0$. Kasus ini tidak dibahas dalam skripsi ini, dan
3. jika $R_0 < 1$ maka E_1 bersifat stabil asimtotik karena $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ dan $\lambda_3 < 0$.

Berdasarkan tiga kasus kestabilan titik E_1, maka dapat dikatakan titik kesetimbangan E_1 stabil jika $R_0 < 1$.

3.3.2 Kestabilan titik kesetimbangan endemik E_2

Dengan mensubstitusikan titik kesetimbangan $E_2 = (\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})$ ke persamaan (3.17) dan penurunan pada Lampiran 2 dihasilkan persamaan karakteristik untuk titik kesetimbangan E_2 yaitu

$$\left(\frac{\beta(rR_0+\mu)}{{R_0}^2(\mu+r)}-(\mu+\gamma+r)-\lambda\right)\left(-\mu-\frac{\beta\mu(R_0-1)^2}{{R_0}^2(\mu+r)}-\lambda\right)(-\mu-\lambda)=0. \quad (3.18)$$

Akar-akar persamaan karakteristik untuk titik kesetimbangan E_2 adalah $\lambda_1=-\mu$, $\lambda_2=-\mu-\frac{\beta\mu(R_0-1)^2}{{R_0}^2(\mu+r)}$, dan $\lambda_3=\frac{\beta(rR_0+\mu)}{{R_0}^2(\mu+r)}-(\mu+\gamma+r)$. Selanjutnya, λ_3 dapat disederhanakan seperti pada Lampiran 3 sehingga diperoleh $\lambda_3=\frac{\beta\mu(1-R_0)}{{R_0}^2(\mu+r)}$. Dari akar persamaan karakteristik λ, dapat ditentukan jenis kestabilan titik E_2 yaitu

1. jika $R_0>1$ maka E_2 bersifat stabil asimtotik karena $\lambda_1<0$, $\lambda_2<0$ dan $\lambda_3<0$,
2. jika $R_0=1$ maka diperoleh $\lambda_1<0$, $\lambda_2<0$ dan $\lambda_3=0$. Kasus ini tidak dibahas dalam skripsi ini, dan
3. jika $R_0<1$ maka E_2 bersifat tidak stabil pelana karena $\lambda_1<0$, $\lambda_2<0$ dan $\lambda_3>0$.

Dengan demikian titik kesetimbangan E_2 dikatakan stabil jika $R_0>1$.

Titik kesetimbangan bebas penyakit $E_1=(\frac{A}{\mu},0,0)$ stabil jika $R_0<1$ dan titik kesetimbangan endemik $E_2=(\hat{S},\hat{I},\hat{R})$ stabil jika $R_0>1$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa R_0 merupakan angka reproduksi dasar.

3.4 Penyelesaian Kontrol Optimal

Tujuan dalam menyelesaikan masalah kontrol optimal adalah mendapatkan vaksinasi yang optimal untuk mengurangi jumlah individu terinfeksi dan biaya vaksinasi dengan meminimumkan fungsi tujuan berikut

$$J(u)=\int_{t_0}^{t_f}\left(I(t)+\frac{C}{2}u^2(t)\right)dt,$$

dengan kendala sistem persamaan (3.5). Sedangkan C adalah bobot pada biaya vaksinasi, t_0 adalah waktu awal, dan t_f adalah waktu akhir. Kemudian akan diperoleh u^* sehingga berlaku

$$J(u^*)=\min\{J(u):u\in U\},$$

dengan $U = \{u(t) : 0 \leq u \leq 0.9, t \in [t_0, t_f]\}$ (*El hia dkk, 2012*).

Langkah pertama yang harus dilakukan untuk mendapatkan kontrol optimal adalah membetuk fungsi Hamilton yaitu

$$H(S, I, R, u, p) = I(t) + \frac{C}{2}u^2(t) + \sum_{i=1}^{3} p_i f_i ,$$

dengan p_i dan f_i berturut-turut menyatakan variabel *costate* dan ruas kanan dari sistem persamaan (3.5) sehingga fungsi Hamilton dapat ditulis kembali sebagai berikut

$$\begin{aligned} H(S, I, R, u, p) = I(t) &+ \frac{C}{2}u^2(t) \\ &+ p_1(t)\left(A - \mu S(t) - \frac{\beta S(t) I(t)}{N} - u(t)S(t)\right) \\ &+ p_2(t)\left(\frac{\beta S(t) I(t)}{N} - (\mu + \gamma + r)I(t)\right) \\ &+ p_3(t)\big(rI(t) - \mu R(t) + u(t)S(t)\big). \end{aligned}$$

Menurut Prinsip Pontryagin, fungsi Hamilton mencapai solusi optimal jika berlaku persamaan *state* dan *costate* serta kondisi stasioner.

i. Persamaan *state*

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{dS(t)}{dt} = A - \mu S(t) - \frac{\beta S(t) I(t)}{N(t)} - u(t)S(t), \quad (3.19.a)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{dI(t)}{dt} = \frac{\beta S(t) I(t)}{N(t)} - (\mu + \gamma + r)I(t), \quad (3.19.b)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_3} = \frac{dR(t)}{dt} = rI(t) - \mu R(t) + u(t)S(t), \quad (3.19.c)$$

dengan kondisi awal $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$ dan $R(0) = R_0$.

ii. Persamaan *costate*

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial S} = \mu p_1(t) + (p_1(t) - p_3(t))u(t) + \left(p_1(t) - p_2(t)\right)\frac{\beta I(t)}{N(t)}\left(1 - \frac{S(t)}{N(t)}\right), \quad (3.20.a)$$

$$\frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial I} = +\left(p_1(t) - p_2(t)\right)\frac{\beta S(t)}{N(t)}\left(1 - \frac{I(t)}{N(t)}\right) + p_2(t)(\mu + \gamma + r) - rp_3(t) - 1, \quad (3.20.b)$$

$$\frac{dp_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial R} = \left(p_2(t) - p_1(t)\right)\frac{\beta S(t) I(t)}{N(t)^2} + \mu p_3(t), \quad (3.20.c)$$

dengan kondisi transversal $p_1(t_f) = p_2(t_f) = p_3(t_f) = 0$.

iii. Kondisi stasioner

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0,$$
$$Cu(t) - p_1(t)S(t) + p_3(t)S(t) = 0,$$
$$Cu(t) = p_1(t)S(t) - p_3(t)S(t),$$
$$\bar{u}(t) = \frac{(p_1(t) - p_3(t))S^*(t)}{C}.$$

Karena $0 \le u(t) \le 0.9$ sehingga

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & , \bar{u}(t) \le 0 \\ \bar{u}(t) & , 0 < \bar{u}(t) < 0.9 \\ 0.9 & , \bar{u}(t) \ge 0.9 \end{cases}.$$

Jadi, kontrol optimal $u^*(t)$ dinyatakan sebagai

$u^*(t) = \min(0.9, \max(0, \bar{u}(t)))$ atau

$$u^*(t) = \min\left(0.9, \max(0, \frac{(p_1(t) - p_3(t))S^*(t)}{C})\right). \quad (3.21)$$

Sistem optimal didapat dengan memasukkan kontrol optimal $u^*(t)$ ke sistem persamaan *state* (3.19) dan *costate* (3.20) sehingga didapat sistem (3.5) yang optimal sebagai berikut

$$\frac{dS^*(t)}{dt} = A - \big(\mu + u^*(t)\big)S^*(t) - \frac{\beta S^*(t)I^*(t)}{N^*(t)},$$

$$\frac{dI^*(t)}{dt} = \frac{\beta S^*(t)I^*(t)}{N^*(t)} - (\mu + \gamma + r)I^*(t),$$

$$\frac{dR^*(t)}{dt} = rI(t) - \mu R^*(t) + u^*(t)S^*(t),$$

$$\frac{dp_1}{dt} = \mu p_1(t) + (p_1(t) - p_3(t))u^*(t)$$

$$+\big(p_1(t) - p_2(t)\big)\frac{\beta I^*(t)}{N^*(t)}\Big(1 - \frac{S^*(t)}{N(t)}\Big),$$

$$\frac{dp_2}{dt} = -1 + \big(p_1(t) - p_2(t)\big)\frac{\beta S^*(t)}{N^*(t)}\Big(1 - \frac{I^*(t)}{N^*(t)}\Big)$$

$$+p_2(t)(\mu + \gamma + r) - rp_3(t),$$

$$\frac{dp_3}{dt} = \big(p_2(t) - p_1(t)\big)\frac{\beta S^*(t)I^*(t)}{N^*(t)^2} + \mu p_3(t),$$

dengan kondisi batas yaitu $S(0) = S_0,\ I(0) = I_0,\ R(0) = R_0,$ $p_1(t_f) = 0,\ p_2(t_f) = 0,$ dan $p_3(t_f) = 0.$

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh teorema berikut.

Teorema 3.1

Terdapat kontrol optimal $u^*(t)$ dan solusi state optimal $S^*(t)$, $I^*(t)$, dan $R^*(t)$ yang meminimumkan fungsi tujuan $J(u)$. Selain itu, terdapat variabel costate $p_1(t)$, $p_2(t)$, dan $p_3(t)$ yang memenuhi

$$\frac{dp_1}{dt} = \mu p_1(t) + (p_1(t) - p_3(t))u^*(t)$$

$$+\big(p_1(t) - p_2(t)\big)\frac{\beta I^*(t)}{N^*(t)}\Big(1 - \frac{S^*(t)}{N^*(t)}\Big),$$

$$\frac{dp_2}{dt} = -1 + \left(p_1(t) - p_2(t)\right)\frac{\beta S^*(t)}{N^*(t)}\left(1 - \frac{I^*(t)}{N^*(t)}\right)$$

$$+p_2(t)(\mu + \gamma + r) - rp_3(t),$$

$$\frac{dp_3}{dt} = \left(p_2(t) - p_1(t)\right)\frac{\beta S^*(t)I^*(t)}{N^*(t)^2} + \mu p_3(t),$$

dengan kondisi transversal

$$p_1(t_f) = p_2(t_f) = p_3(t_f) = 0.$$

Selanjutnya, kontrol optimal $u^*(t)$ *dinyatakan sebagai*

$$u^*(t) = \min\left(0.9, \max(0, \frac{(p_1(t) - p_3(t))S^*(t)}{c})\right).$$

3.5 Simulasi Numerik

3.5.1 Algoritma Metode Sweep Maju-Mundur

Metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal dalam skripsi ini adalah metode Sweep Maju-Mundur dengan mendiskritisasi interval $[t_0, t_f]$ di titik-titik $t_i = t_0 + ih$ $(i = 0,1, \dots, n)$, dengan h merupakan ukuran langkah waktu sehingga $t_n = t_f$. Selanjutnya, variabel S, I, R, p_1, p_2, p_3 dan u dinyatakan dalam bentuk titik-titik nodal yaitu S^i, I^i, R^i, p_1^i, p_2^i, p_3^i, dan u^i.

Variabel *state* $S, I,$ dan R didekati dengan metode Runge Kutta orde 4 dengan nilai awal $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$, dan $R(0) = R_0$. Sedangkan variabel *costate* p_1, p_2, dan p_3 juga didekati dengan Runge Kutta orde 4 dengan nilai awal $p_1(n) = 0, p_2(n) = 0$, dan $p_3(n) = 0$.

Langkah-langkah algoritma tersebut sebagai berikut.

Langkah 1

Inisialisasi nilai $u, u_{old}, S, I, R, S_{old}, I_{old}, R_{old}, p_1, p_2, p_3$, p_{1old}, p_{2old}, dan p_{3old} dalam bentuk vektor 0 dengan banyak elemen n, $it = 0$ dan $tes = 1$.

Langkah 2

Mengganti nilai $u_{old}, S_{old}, I_{old}, R_{old}, p_{1old}, p_{2old},$ dan p_{3old} dengan $u, S, I, R,\ p_1, p_2,$ dan p_3.

Langkah 3

Mengganti nilai $S(0) = S_0, I(0) = I_0, R(0) = R_0,\ p_1(n) = 0,$ $p_2(n) = 0, p_3(n) = 0,$ dan $u(n) = 0$.

Langkah 4

Untuk $i = 0 : n - 1$ Hitung

$S(i+1), I(i+1),$ dan $R(i+1)$ menggunakan Runge Kutta orde 4 dan memakai u_{old}.

Langkah 5

Menghitung : $u(n) = \min(0.9, \max(0, \frac{(p_1(n) - p_3(n))S(n)}{C}))$.

Langkah 6

Untuk $k = n : 1$ Hitung

$p_1(k-1), p_2(k-1), p_3(k-1)$ menggunakan Runge Kutta orde 4.

$u(k-1) = \min(0.9, \max(0, \frac{(p_1(k-1) - p_3(k-1))S(k-1)}{C}))$.

Langkah 7

Hitung : $eror\ S = sum(abs(S - S_{old}))$

$eror\ I = sum(abs(I - I_{old}))$

$eror\ R = sum(abs(R - R_{old}))$

$eror\ p_1 = sum\ (abs(p_1 - p_{1old}))$

$eror\ p_2 = sum\ (abs(p_2 - p_{2old})$

$eror\ p_3 = sum\ (abs(p_3 - p_{3old}))$

$eror\ u = sum\ (abs(u - u_{old}))$

$tes = eror\ p_1 + eror\ p_2 + eror\ p_3 + eror\ S + eror\ I + eror\ R + eror\ u$

$it = it + 1$

$u = (0.5u + 0.5u_{old})$

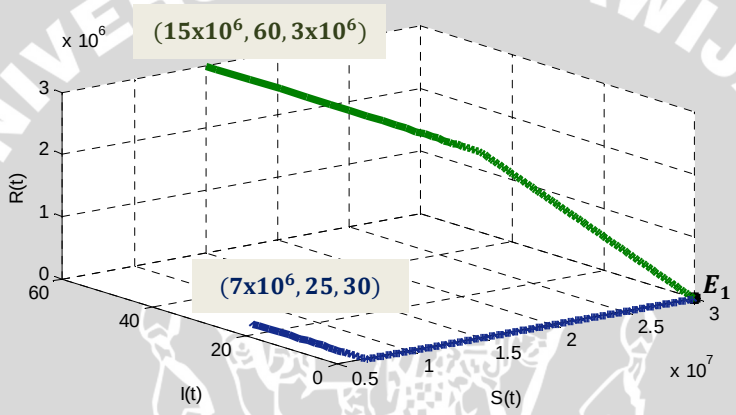
Jika $tes > 10^{-3},$ maka kembali ke langkah 2.

Langkah 8

Cetak $S^* = S, I^* = I, R^* = R, u^* = u$.

3.5.2 Simulasi I

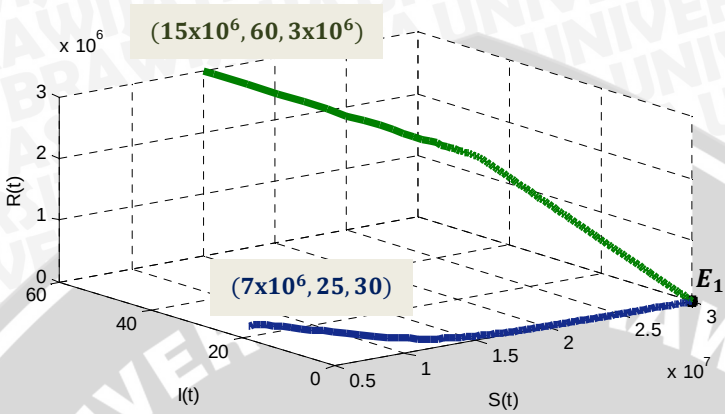
Pada simulasi I ditunjukkan potret fase dari model epidemik *SIR* tanpa kontrol untuk mengetahui perubahan kestabilan atau dinamika penyebaran suatu penyakit. Dengan menggunakan parameter $A = 1174.17$, $r = 0.2$, $\mu = 3.9139 \times 10^{-5}$, $\gamma = 0.0063$, dan $\beta = 0.155$ diperoleh $R_0 = 0.7512$ dan titik kesetimbangan bebas penyakit $E_1 = (30 \times 10^6, 0, 0)$, sedangkan titik kesetimbangan endemik tidak eksis. Hasil simulasi numerik untuk $R_0 = 0.7512$ ditampilkan pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2 Potret fase untuk $R_0 = 0.7512$.

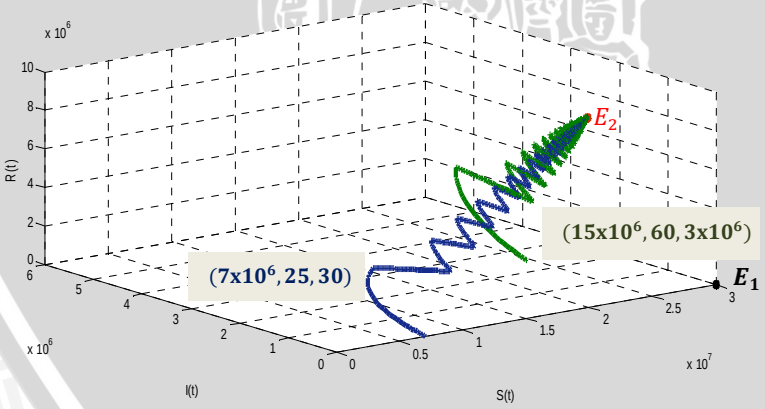
Dari Gambar 3.2 diketahui bahwa dengan dua nilai awal yang berbeda, populasi menuju ke titik kesetimbangan bebas penyakit, hal tersebut sesuai dengan hasil analisis yang menyatakan bahwa jika $R_0 < 1$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil.

Syarat eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan bergantung pada angka reproduksi dasar. Jika nilai β diubah menjadi 0.2063 maka diperoleh $R_0 = 1$ dan hanya terdapat satu titik kesetimbangan yang eksis dan stabil yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit $E_1 = (30 \times 10^6, 0, 0)$. Potret fase untuk $R_0 = 1$ disajikan pada Gambar 3.3.



Gambar 3.3 Potret fase untuk $R_0 = 1$.

Pada simulasi untuk $R_0 > 1$ digunakan nilai $\beta = 0.3095$ diperoleh $R_0 = 1.5$ dan terdapat dua titik kesetimbangan yang eksis yaitu $E_1 = (30 \times 10^6, 0, 0)$ dan $E_2 = (1.9793 \times 10^7, 1.9361 \times 10^3, 9.8936 \times 10^6)$ seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.4. Berdasarkan Gambar 3.4 tampak bahwa kedua solusi numerik konvergen ke titik E_2. Hal ini menunjukkan bahwa titik E_2 stabil asimtotik sesuai dengan hasil analisis yang menyatakan bahwa jika $R_0 > 1$ maka titik kesetimbangan endemik stabil.



Gambar 3.4 Potret fase untuk $R_0 = 1.5$.

3.5.3 Simulasi II

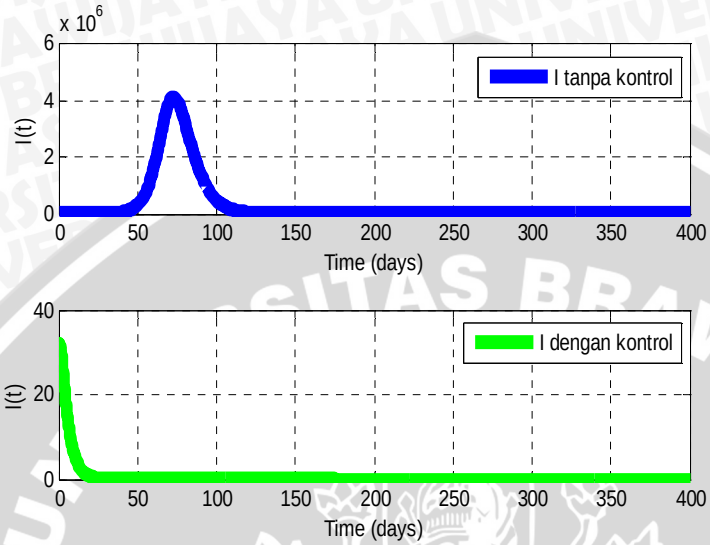
Untuk memperlihatkan pengaruh kontrol pada sistem persamaan (3.5), digunakan nilai awal yang diberikan pada Tabel 3.1 dan nilai parameter yang diberikan pada Tabel 3.2.

Tabel 3.1 Nilai awal yang digunakan

Nilai awal	
S_0	30×10^6
I_0	30
R_0	28

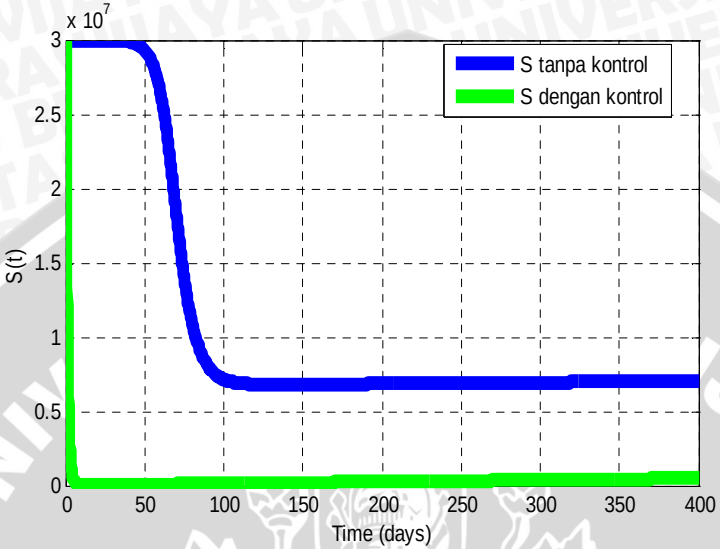
Tabel 3.2 Nilai parameter yang digunakan

Nilai Parameter	
r	0.2
A	1174.17
μ	3.9139×10^{-5}
γ	0.0063
β	0.3095
C	1



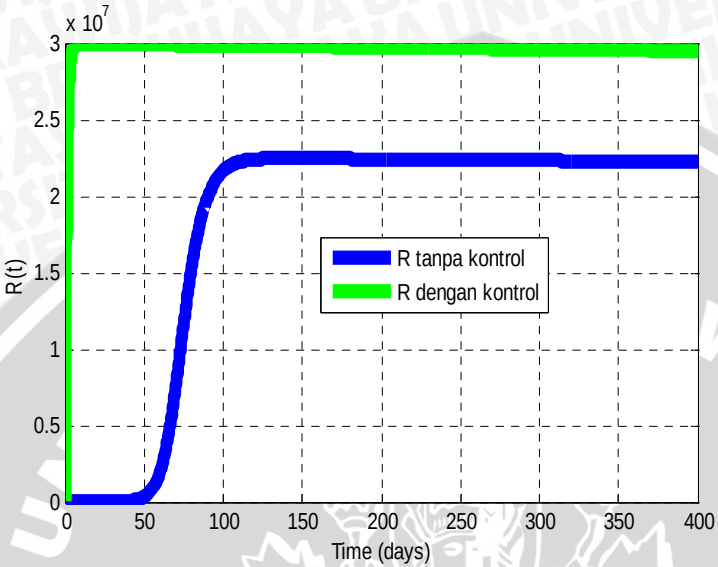
Gambar 3.5 Jumlah subpopulasi individu terinfeksi $I(t)$ tanpa dan dengan kontrol.

Pada Gambar 3.5 terlihat bahwa jumlah individu terinfeksi setelah dikontrol mengalami penurunan dengan cepat. Jumlah maksimum individu terinfeksi setelah dikontrol hanya mencapai 31 pada hari ke-3. Sedangkan, jumlah maksimum individu terinfeksi sebelum dikontrol sebesar 4.065×10^6 pada hari ke-72. Hal ini menunjukkan adanya penurunan jumlah individu terinfeksi yang sangat signifikan setelah dikontrol.



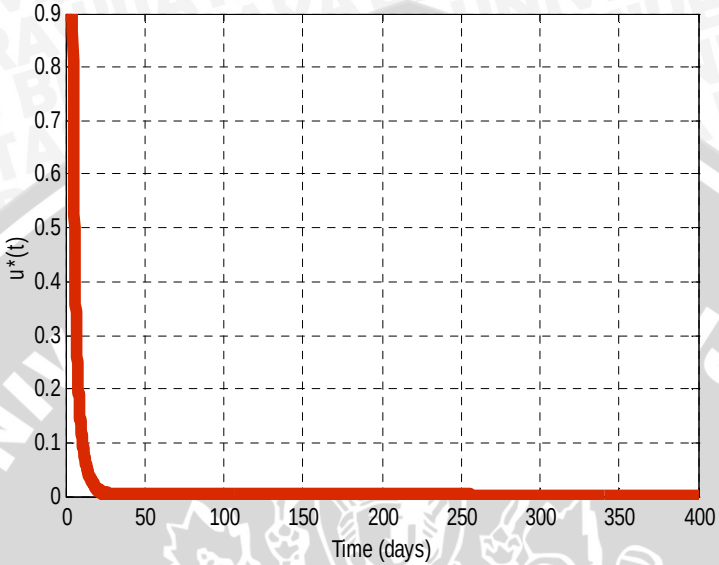
Gambar 3.6 Jumlah subpopulasi individu rentan $S(t)$ tanpa dan dengan kontrol.

Berdasarkan Gambar 3.6 diketahui bahwa jumlah individu rentan menurun dengan cepat setelah dikontrol hingga mencapai jumlah 1.200×10^6 pada hari ke-8. Sebaliknya, jumlah individu rentan sebelum dikontrol sebesar 7.124×10^6 pada hari ke-90, sehingga besarnya pengurangan jumlah individu rentan setelah dikontrol sekitar 5.124×10^6.



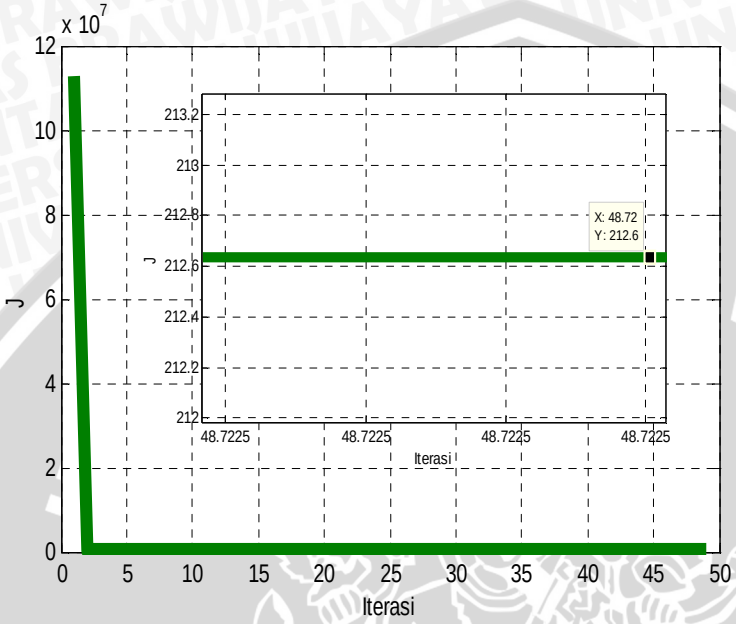
Gambar 3.7 Jumlah subpopulasi individu sembuh $R(t)$ tanpa dan dengan kontrol.

Dari Gambar 3.7 tampak bahwa jumlah individu yang sembuh mengalami penambahan setelah dikontrol. Bertambahnya jumlah individu yang sembuh setelah dikontrol mulai terjadi pada hari pertama dan mencapai jumlah yang maksimum pada hari ke-13 sebesar 3×10^7. Sebaliknya, bertambahnya jumlah individu yang sembuh sebelum dikontrol mulai terjadi pada hari ke-41 dan mencapai jumlah maksimum pada hari ke-100 sebesar 2.325×10^7. Hal ini menunjukkan adanya penambahan jumlah individu sembuh setelah dikontrol sebesar 6.750×10^6.



Gambar 3.8 Kontrol optimal $u^*(t)$

Pada Gambar 3.8 terlihat bahwa banyaknya kontrol optimal $u^*(t)$ pada awal periode pemberian vaksin adalah maksimum yaitu sebesar 0.9 kemudian bergerak menurun dan pada akhir periode pemberian vaksin mencapai minimum yaitu 0. Hal ini menunjukkan pemberian vaksin pada populasi yang rentan semakin berkurang karena populasi tersebut mulai mengalami kesembuhan. Dengan menerapkan kontrol $u(t)$ dalam mengendalikan penyebaran suatu penyakit diperoleh hasil yang optimal yang mengakibatkan fungsi tujuan (J) bernilai minimum sebesar 212.6369. Fungsi tujuan (J) ditunjukkan oleh Gambar 3.9 berikut.



Gambar 3.9 Fungsi tujuan (*J*)

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan skripsi ini, dapat disimpulkan hal-hal berikut.

1. Dengan menggunakan model kompartemen, diperoleh model epidemik *SIR* dengan kontrol berupa sistem persamaan diferensial nonlinear dengan tiga variabel tak bebas.
2. Model epidemik *SIR* mempunyai dua titik kesetimbangan yaitu
   a. titik kesetimbangan bebas penyakit yang bersifat stabil saat angka reproduksi dasarnya bernilai kurang dari sama dengan satu, dan
   b. titik kesetimbangan endemik yang bersifat stabil saat angka reproduksi dasarnya bernilai lebih dari satu.
3. Dengan menerapkan prinsip Pontriagyn pada model epidemik *SIR* dengan kontrol dapat diperoleh kontrol yang optimal. Selanjutnya, sistem optimal yang diperoleh diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metode Sweep maju-mundur
4. Simulasi numerik menunjukkan keefektifan kontrol dalam mengendalikan penyebaran suatu penyakit sehingga dapat mengurangi jumlah individu terinfeksi dan meminimumkan biaya vaksinasi.

4.2 Saran

Pada penulisan selanjutnya hal yang dapat dikembangkan dari skripsi ini adalah menentukan kestabilan titik kesetimbangan sistem otonomus yang dilinearkan jika bagian real dari nilai eigen imajiner murni bernilai sama dengan nol.

DAFTAR PUSTAKA

Boyce, W.E. dan R.C. DiPrima. 2005. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Ninth Edition. John Wiley & Sons. New York.

Chiang, A.C. 1992. *Elements of Dynamic Optimization*. McGraw-Hill. New York.

Edward, C.H. dan D.E. Penney. 1996. *Differential Equations and Linear Algebra.* Prentice-Hall. New Jersey.

El hia, M., O. Balatif, J. Bouyaghroumni, E. Labriji, dan M. Rachik. 2012. Optimal Control Applied to the Spread of Influenza A(H1N1). *Applied Mathematical Sciences*. Vol. 6. No. 4057-4065.

Finizio, N. dan G. Ladas. 1982. *Ordinary Diferential Equations with Modern Applications*. Second Edition. Wadsworth. USA.

Hattaf, K. dan N. Yousfi. 2009. Mathematical Model of the Influenza A(H1N1) Infection. *Advanced Studies in Biology*. Vol. 1. No. 383-390.

Hethcote, H.W. dan P.V.D. Driessche. 1990. *Some Epidemiological Models with Nonlinier Incidence, DMS-528-IR.*

Lenhart, S. dan J.T. Workman. 2007. *Numerical Solutions of Optimal Control Problems*. Chapman and Hall, CRC Press. USA.

Nagle, R.K. dan E.B. Saff. 2004. *Fundamental of Differential Equation and Boundary Value Problem.* Addison-Wesley Publishing Company. USA.

Nugroho, S. 2009. *Pengaruh Vaksinasi Terhadap Penyebaran Penyakit dengan Model Epidemi SIR*. Skripsi FMIPA Universitas Sebelas Maret.

Ross, S.L. 1984. *Differential Equations.* Third Edition. John Wiley & Sons. New York.

Shim, E. 2004. *An Epidemic Model with Immigration of Infectives and Vaccination*. Msc.Thesis. The University of British Columbia.

LAMPIRAN 1

Penurunan persamaan (3.16) adalah sebagai berikut

$$\widehat{N} = \frac{\beta S}{(\mu+\gamma+r)}$$

$$= \frac{\beta A(\mu+r)}{\mu(\mu+\gamma+r)(\beta-\gamma)}$$

$$= \frac{AR_0(\mu+r)}{\mu((R_0-1)\gamma+R_0(\mu+r))}.$$

Penurunan persamaan (3.13) dari persamaan (3.10) adalah sebagai berikut

$$\hat{S} = \frac{A(\mu+r)}{\mu(\beta-\gamma)}$$

$$= \frac{A(\mu+r)}{\mu(R_0(\mu+\gamma+r)-\gamma)}$$

$$= \frac{A(\mu+r)}{\mu((R_0-1)\gamma+R_0(\mu+r))}$$

$$= \frac{1}{R_0}\widehat{N}.$$

Penurunan persamaan (3.14) dari persamaan (3.7) adalah sebagai berikut

$$\hat{I} = \frac{A-\mu S}{(\mu+\gamma+r)}$$

$$= \frac{A(\beta-(\mu+\gamma+r))}{(\mu+\gamma+r)(\beta-\gamma)}$$

$$= \frac{A\left(\frac{\beta}{(\mu+\gamma+r)} - 1\right)(\mu+\gamma+r)}{(\mu+\gamma+r)(R_0(\mu+\gamma+r)-\gamma)}$$

$$= \frac{A(R_0-1)}{\frac{AR_0(\mu+r)}{\mu\widehat{N}}}$$

$$= \frac{\mu(R_0-1)}{R_0(\mu+r)}\widehat{N}.$$

Penurunan persamaan (3.15) dari persamaan (3.8) adalah sebagai berikut

$$\hat{R} = \frac{r\hat{I}}{\mu}$$

$$= \frac{r}{\mu}\left(\frac{\mu(R_0-1)}{R_0(\mu+r)}\widehat{N}\right)$$

$$= \frac{r(R_0-1)}{R_0(\mu+r)}\widehat{N}.$$

LAMPIRAN 2

Perhitungan dari persamaan karakteristik (3.18) adalah

$$\frac{\beta\widehat{S}}{\widehat{N}}\left(1-\frac{\widehat{I}}{\widehat{N}}\right)=\frac{\frac{\beta}{R_0}\widehat{N}}{\widehat{N}}\left(1-\frac{\frac{\mu(R_0-1)}{R_0(\mu+r)}\widehat{N}}{\widehat{N}}\right)$$

$$=\frac{\beta}{R_0}\left(\frac{R_0(\mu+r)-\mu(R_0-1)}{R_0(\mu+r)}\right)$$

$$=\frac{\beta(rR_0+\mu)}{{R_0}^2(\mu+r)}.$$

$$\frac{\beta\widehat{I}}{\widehat{N}}\left(1-\frac{\widehat{S}}{\widehat{N}}\right)=\frac{\frac{\beta\mu(R_0-1)}{R_0(\mu+r)}\widehat{N}}{\widehat{N}}\left(1-\frac{\frac{1}{R_0}\widehat{N}}{\widehat{N}}\right)$$

$$=\frac{\beta\mu(R_0-1)}{R_0(\mu+r)}\left(1-\frac{1}{R_0}\right)$$

$$=\frac{\beta\mu(R_0-1)}{R_0(\mu+r)}\left(\frac{R_0-1}{R_0}\right)$$

$$=\frac{\beta\mu(R_0-1)^2}{{R_0}^2(\mu+r)}.$$

LAMPIRAN 3

Penyederhanaan dari λ_3 adalah

$$\lambda_3 = \frac{\beta(rR_0 + \mu)}{{R_0}^2(\mu + r)} - (\mu + \gamma + r)$$

$$= \frac{\beta(rR_0 + \mu)}{{R_0}^2(\mu + r)} - \frac{\beta}{R_0}$$

$$= \frac{\beta\mu(1 - R_0)}{{R_0}^2(\mu + r)}$$

$$= \frac{\beta(rR_0 + \mu) - \beta R_0(\mu + r)}{{R_0}^2(\mu + r)}$$

$$= \frac{\beta\mu(1 - R_0)}{{R_0}^2(\mu + r)}.$$

LAMPIRAN 4

Program MATLAB Gambar *SIR* tanpa Kontrol

```
function epidemi
options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-7);
figure(1);
[t,y]=ode23(@epidemikg,[0 500000],[15e6 60 3e6],
options);
plot3(y(:,1),y(:,2),y(:,3),'b');hold on;
ylabel('I(t)');
xlabel('S(t)');
zlabel('R(t)');
grid on;
hold on;
```

```
function epid=epidemikg(t,y)
A=1174.17; m = 3.9139e-5; g = 0.63/100;
r = 0.2; b= 0.155;
Ro=b/(m+g+r)
N0 = y(1)+y(2)+y(3);
epid= [A - m*y(1) - b*y(1)*y(2)/N0;
          b*y(1)*y(2)/N0 - (m+g+r)*y(2);
          r*y(2) - m*y(3)];
```

LAMPIRAN 5

Program MATLAB Gambar *SIR* tanpa dan dengan Kontrol

```
clear all;
clc;
S0 = 30e6;
I0 = 30;
R0 = 28;
N0 = S0+I0+R0;
m = 3.9139e-5;
A = 1174.17;
C = 1;
g = 0.63/100;
r = 0.2;
umax = 0.9;
b = 1.9*(m+g+r);
Ro = b/(m+g+r);

h = 0.1;
t=0:h:400;
N = length(t);

u = zeros(N,1);
uold = zeros(N,1);
S = zeros(N,1);
I = zeros(N,1);
R = zeros(N,1);
Sold = zeros(N,1);
Iold = zeros(N,1);
Rold = zeros(N,1);
p1 = zeros(N,1);
p2 = zeros(N,1);
p3 = zeros(N,1);
p1o = zeros(N,1);
p2o = zeros(N,1);
p3o = zeros(N,1);

tes = 1;
it = 0;
```

```
while tes > 1e-3
    uold = u;
    Sold = S; Iold = I; Rold = R;
    p1o = p1; p2o = p2; p3o = p3;
    S(1) = S0; I(1) = I0; R(1) = R0;
    J(it+1) = 0;
    for i = 1:N-1
        J(it+1) = J(it+1)+h*(I(i) +
                  1/2*C*uold(i)^2);

        y = [S(i) I(i) R(i)];
        k1 = h*RKDiff(y,uold(i),A,m,b,g,r);
        k2 = h*RKDiff(y+0.5*k1,uold(i),A,m,b,g,r);
        k3 = h*RKDiff(y+0.5*k2,uold(i),A,m,b,g,r);
        k4 = h*RKDiff(y+k3,uold(i),A,m,b,g,r);
        y = y + (1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);

        S(i+1) = y(1);
        I(i+1) = y(2);
        R(i+1) = y(3);

    end
    J(it+1) = J(it+1)+h*(I(N) + 1/2*C*uold(N)^2);

    if it == 0
        figure(1)
        plot(t,S,'b-'); hold on;
        xlabel('Time (days)');
        ylabel('S(t)');grid;
        figure(2)
        subplot(2,1,1)
        plot(t,I,'b-'); hold on;
        xlabel('Time (days)');
        ylabel('I(t)');grid;
        figure(3)
        plot(t,R,'b-'); hold on;
        xlabel('Time (days)');
        ylabel('R(t)');grid;
        figure(4)
        plot(t,u,'r-'); hold on;
        xlabel('Time (days)');
        ylabel('u*(t)'); grid;
```

```
    end

    p1(N) = 0; p2(N) = 0; p3(N) = 0;
    u(N) = 0;

    temp2 = min([(p1(N) - p3(N))*S(N)/tau umax]);
    u(N) = max([temp2 0]);

    for i = 1:N-1
        j = N-i;

        y = [p1(j+1) p2(j+1) p3(j+1)];
        k1 = h*RKp(y,S(j+1),I(j+1),R(j+1),
             uold(j+1),m,b,g,r);
        k2 = h*RKp(y+0.5*k1,S(j+1),I(j+1),R(j+1),
             uold(j+1),m,b,g,r);
        k3 = h*RKp(y+0.5*k2,S(j+1),I(j+1),R(j+1),
             uold(j+1),m,b,g,r);
        k4 = h*RKp(y+k3,S(j+1),I(j+1),R(j+1),
             uold(j+1),m,b,g,r);
        y = y - (1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);

        p1(j) = y(1);
        p2(j) = y(2);
        p3(j) = y(3);

        temp2 = min([(p1(j) - p3(j))*S(j)/tau
                umax]);
        u(j) = max([temp2 0]);
    end;
    eS = sum(abs(S-Sold));
    eI = sum(abs(I-Iold));
    eR = sum(abs(R-Rold));
    ep1 = sum(abs(p1-p1o));
    ep2 = sum(abs(p2-p2o));
    ep3 = sum(abs(p3-p3o));
    eu = sum(abs(u-uold));
    tes = eS+eI+eR+ep1+ep2+ep3+eu
    it = it+1;
    u=(0.5*u+0.5*uold);
end
```

```
figure(1)
plot(t,S,'g-');
figure(2)
subplot(2,1,2)
plot(t,I,'g-');
xlabel('Time (days)');
ylabel('I(t)');grid;
figure(3)
plot(t,R,'g-');
figure(4)
plot(t,u,'r-');
xlabel('Time (days)');
ylabel('u*(t)');grid;
figure(5);
plot(1:it,J,'g');
xlabel('Iterasi');
ylabel('J'); grid;
```

```
function dy = RKDiff(y,u,A,m,b,g,r)
    N0 = y(1)+y(2)+y(3);
    x(1) = A - (m+u)*y(1) - b*y(1)*y(2)/N0;
    x(2) = b*y(1)*y(2)/N0 - (m+g+r)*y(2);
    x(3) = r*y(2) - m*y(3) + u*y(1);


    dy = [x(1) x(2) x(3)];
```

```
function dp = RKp(y,S,I,R,u,m,b,g,r)
    N0 = S+I+R;
    p1 = y(1); p2 = y(2); p3 = y(3);
    x(1) = p1*m + (p1-p3)*u  + (p1-p2)*b*I/N0*(1-
           S/N0);
    x(2) = - 1 + (p1-p2)*b*S/N0*(1-I/N0) +
           p2*(m+r+g) - p3*r;
    x(3) = (p2-p1)*b*S*I/N0^2+p3*m;


    dp = [x(1) x(2) x(3)];
```