

**ANALISIS DINAMIK MODEL *PREDATOR-PREY*
LESLIE-GOWER DISKRET DENGAN PERLINDUNGAN
DAN EFEK *ALLEE* PADA *PREY***

SKRIPSI

oleh
FANDIAH IKAWATI
0910943050-94



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2013**

**ANALISIS DINAMIK MODEL *PREDATOR-PREY*
LESLIE-GOWER DISKRET DENGAN PERLINDUNGAN
DAN EFEK *ALLEE* PADA *PREY***

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh
FANDIAH IKAWATI
0910943050-94



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2013**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

**ANALISIS DINAMIK MODEL *PREDATOR-PREY*
LESLIE-GOWER DISKRET DENGAN PERLINDUNGAN
DAN EFEK *ALLEE* PADA *PREY***

oleh
FANDIAH IKAWATI
0910943050-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 23 Januari 2013
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Dosen Pembimbing

Dr. Agus Suryanto., M.Sc.
NIP. 196908071994121001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Abdul Rouf A., M.Sc.
NIP.196709071992031001

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini

Nama : Fandiah Ikawati
NIM : 0910943050
Jurusan : Matematika
Penulis skripsi berjudul : Analisis Dinamik Model *Predator-Prey* Leslie-Gower Diskret dengan Perlindungan dan Efek *Allee* pada *Prey*

dengan ini menyatakan bahwa

1. skripsi ini adalah benar-benar karya saya sendiri dan bukan hasil plagiat dari karya orang lain. Karya-karya yang tercantum dalam Daftar Pustaka skripsi ini semata-mata digunakan sebagai acuan/referensi.
2. Apabila di kemudian hari diketahui bahwa isi skripsi saya merupakan hasil plagiat, maka saya bersedia menanggung akibat hukum dari keadaan tersebut.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 23 Januari 2013
yang menyatakan,

(Fandiah Ikawati)
NIM. 0910943050

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



**ANALISIS DINAMIK MODEL *PREDATOR-PREY*
LESLIE-GOWER DISKRET DENGAN PERLINDUNGAN
DAN EFEK *ALLEE* PADA *PREY***

ABSTRAK

Pada skripsi ini dibahas analisis dinamik model *predator-prey* Leslie-Gower diskret dengan perlindungan *prey* tanpa dan dengan efek *Allee*. Kedua model dianalisis sehingga diperoleh jenis kestabilan lokal titik kesetimbangan. Masing-masing model mempunyai tiga titik kesetimbangan, namun hanya dua yang dapat ditentukan jenis kestabilannya. Titik kesetimbangan batas mempunyai dua kemungkinan jenis kestabilan dengan syarat tertentu, yaitu tak stabil pelana atau tak stabil. Titik kesetimbangan interior mempunyai tiga kemungkinan jenis kestabilan dengan syarat tertentu, yaitu stabil asimtotik, tak stabil pelana, atau tak stabil. Analisis kestabilan diilustrasikan dengan melakukan simulasi numerik untuk menguji hasil analisis yang telah diperoleh.

Kata kunci : *analisis dinamik diskret, predator-prey, model Leslie-Gower, perlindungan prey, efek Allee.*

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DYNAMICAL ANALYSIS OF DISCRETE LESLIE-GOWER PREDATOR-PREY MODEL WITH REFUGE AND ALLEE EFFECT FOR PREY

ABSTRACT

In this final project we discuss a dynamical analysis on a discrete Leslie-Gower predator-prey model with prey refuge, without and with Allee effect. Both models are analyzed to obtain the local stability of the equilibrium points. Each model has three equilibrium points, but only two equilibrium points which its stability can be determined. Boundary equilibrium point is not stable which can be characterized as a saddle or source. Under certain condition, interior equilibrium point has three stability properties, namely sink, saddle, or source. The stability analysis was illustrated by using numerical simulations to test the analytical results.

Keywords : discrete dynamical analysis, predator-prey, Leslie-Gower model, prey refuge, Allee effect.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul *Analisis Dinamik Model Predator-Prey Leslie-Gower Diskret dengan Perlindungan dan Efek Allee pada Prey* dengan baik dan lancar. Shalawat serta salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW sebagai suri tauladan bagi penulis.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan serta motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada

1. Dr. Agus Suryanto, M.Sc. selaku pembimbing atas segala bimbingan, motivasi, saran, waktu, serta kesabaran yang telah diberikan selama pembimbingan skripsi ini dan selalu mendorong penulis untuk menyelesaikan skripsi ini,
2. Dr. Wuryansari M.K., M.Si. dan Drs. M. Muslikh, M.Si. selaku dosen penguji atas segala saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini,
3. Dr. Abdul Rouf A., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika dan Dr. Sobri Abusini, M.T. selaku Ketua Program Studi Matematika,
4. semua bapak/ibu dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya,
5. Ibu, Ayah, dan Jefri Dwi Kurniawan serta semua anggota keluarga besarku atas segala yang telah diberikan berupa doa dan dukungan yang tak pernah habis,
6. Aisyah, Anggun, Oci, Cynthia, Ninda, Inggrid, Reza, Fitri, Putri, Niarti, dan Aning atas semua motivasi dan kesediaan bantuannya kapan pun penulis perlukan,
7. keluarga *HARAHAB* dan teman-teman seperjuangan Matematika B 2009 FMIPA UB atas bantuan yang telah diberikan dan kebersamaannya selama ini,
8. semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Allah SWT memberikan anugerah dan barokah-Nya kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini. Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat banyak kekurangan. Untuk itu penulis sangat mengharapkan kritik dan saran melalui email penulis fanlucky@yahoo.co.id. Akhir kata, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Malang, 23 Januari 2013

Penulis



DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	iii
LEMBAR PERNYATAAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR LAMPIRAN	xvii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah.....	2
1.3 Tujuan	2
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	3
2.1 Model Pertumbuhan Logistik.....	3
2.2 Model Lotka-Volterra	4
2.3 Model Leslie-Gower	5
2.4 Efek Perlindungan <i>Prey</i>	6
2.5 Efek <i>Allee</i>	6
2.6 Sistem Dinamik Diskret	7
2.7 Sistem Dinamik Diskret Tak Linear	7
2.8 Metode Euler.....	11
BAB III PEMBAHASAN	13
3.1 Diskretisasi Model tanpa Efek <i>Allee</i>	13
3.2 Titik Keseimbangan Model tanpa Efek <i>Allee</i>	14
3.3 Analisis Kestabilan Model tanpa Efek <i>Allee</i>	16
3.3.1 Kestabilan titik keseimbangan E_1	16
3.3.2 Kestabilan titik keseimbangan E_2	17
3.3.3 Kestabilan titik keseimbangan E_3	17
3.4 Diskretisasi Model dengan Efek <i>Allee</i>	20
3.5 Titik Keseimbangan Model dengan Efek <i>Allee</i>	21

3.6 Analisis Kestabilan Model dengan Efek <i>Allee</i>	23
3.6.1 Kestabilan titik kesetimbangan E_4	24
3.6.2 Kestabilan titik kesetimbangan E_5	24
3.6.3 Kestabilan titik kesetimbangan E_6	25
3.7 Simulasi Numerik	30
3.7.1 Simulasi model tanpa efek <i>Allee</i>	30
3.7.2 Simulasi model dengan efek <i>Allee</i>	32
3.7.3 Perbandingan hasil simulasi model tanpa efek <i>Allee</i> dan model dengan efek <i>Allee</i>	35
BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN	37
4.1 Kesimpulan	37
4.2 Saran	37
DAFTAR PUSTAKA	39
LAMPIRAN	41



DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1	Pertumbuhan logistik 4
Gambar 3.1	Potret fase model tanpa efek <i>Allee</i> untuk kasus 1 31
Gambar 3.2	Potret fase model tanpa efek <i>Allee</i> untuk kasus 2 32
Gambar 3.3	Potret fase model dengan efek <i>Allee</i> untuk kasus 3 33
Gambar 3.4	Potret fase model dengan efek <i>Allee</i> untuk kasus 4 34
Gambar 3.5	Perbandingan model tanpa efek <i>Allee</i> dan dengan efek <i>Allee</i> 35



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1 Perhitungan Matriks J_3	41
Lampiran 2 Perhitungan Syarat Kestabilan E_3 (<i>Sink</i>)	42
Lampiran 3 Perhitungan Syarat Kestabilan E_3 (<i>Saddle</i>)	44
Lampiran 4 Perhitungan Syarat Kestabilan E_3 (<i>Source</i>)	45
Lampiran 5 Perhitungan Syarat Kestabilan E_3 (<i>Non-Hyperbolic</i>).....	47
Lampiran 6 Perhitungan Nilai $E_6 = (H^*, P^*)$	49
Lampiran 7 Perhitungan Matriks J_6	52
Lampiran 8 Program Model tanpa dan dengan Efek <i>Allee</i>	53



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Predasi merupakan hubungan antara *predator* dan *prey* dalam interaksi dua populasi. *Predasi* berpengaruh negatif bagi pertumbuhan populasi *prey*, namun berpengaruh positif bagi pertumbuhan populasi *predator*. Model *predator-prey* pertama kali diperkenalkan oleh Lotka dan Volterra (1928) yang dikenal sebagai model Lotka-Volterra. Model sederhana ini kemudian mengalami banyak modifikasi. Salah satu modifikasi dilakukan oleh Leslie dan Gower (1969) dengan menganggap *carrying capacity* populasi *predator* dipengaruhi oleh populasi *prey*.

Model *predator-prey* yang banyak dikaji adalah model *predator-prey* Lotka-Volterra kontinu. Sebagai contoh, Sakinah (2011) melakukan analisis global model *predator-prey* dengan perlindungan *prey*. Selain itu, Widayani (2012) juga melakukan analisis dinamik model *predator-prey* dengan perlindungan terhadap *prey* terinfeksi. Model ini dianalisis dengan menentukan titik kesetimbangan dan syarat eksistensinya, serta menentukan jenis kestabilan titik kesetimbangan.

Model kontinu dapat didiskretisasi dengan menggunakan berbagai metode, salah satunya adalah dengan menggunakan metode Euler, yaitu metode beda hingga dengan pendekatan turunan pertama dengan beda maju atau beda mundur. Sebagai contoh, Isniana (2012) mengaplikasikan metode Euler maju pada model *predator-prey* diskret dengan efek *Allee*.

Berbeda dari kajian yang telah dilakukan Sakinah (2011), Widayani (2012), dan Isniana (2012), pada skripsi ini dilakukan analisis dinamik model *predator-prey* yang diperkenalkan oleh Leslie dan Gower. Selain itu, adanya faktor perlindungan *prey* juga dibahas dalam formulasi model. Naluri *prey* untuk berlindung dari *predator* merupakan faktor yang perlu diperhitungkan dalam pemodelan. Faktor perlindungan *prey* dapat mengurangi kemungkinan *predator* memangsa *prey* sehingga *prey* terhindar dari kepunahan. Penambahan faktor perlindungan *prey* pada model *predator-prey* membuat model yang diperoleh nantinya lebih realistis daripada model yang telah dipelajari sebelumnya. Pada

skripsi ini, model *predator-prey* dengan perlindungan *prey* didiskretisasi dengan menggunakan metode Euler.

Model *predator-prey* diskret dengan adanya efek *Allee* juga dikaji dalam skripsi ini. Efek *Allee* merupakan penurunan atau berkurangnya laju pertumbuhan populasi pada kepadatan populasi rendah. Hal ini mengakibatkan individu sukar untuk berinteraksi. Efek *Allee* dapat terjadi apabila individu kesulitan menemukan pasangan. Selain itu, efek *Allee* dapat disebabkan oleh kesulitan *prey* untuk berlindung dari *predator* dan kompetisi dalam mencari kebutuhan hidup, seperti makanan dan tempat tinggal.

1.2 Rumusan Masalah

Pokok permasalahan yang dikaji dalam skripsi ini adalah

1. bagaimana diskretisasi model *predator-prey* dengan perlindungan *prey* tanpa dan dengan efek *Allee*,
2. bagaimana titik kesetimbangan model,
3. bagaimana kestabilan titik kesetimbangan model,
4. bagaimana simulasi numerik model *predator-prey* dengan perlindungan *prey* tanpa dan dengan efek *Allee*.

1.3 Tujuan

Tujuan yang ingin dicapai dalam skripsi ini adalah

1. menentukan model *predator-prey* diskret dengan perlindungan *prey* tanpa dan dengan efek *Allee*,
2. menentukan titik kesetimbangan model,
3. menentukan kestabilan titik kesetimbangan model,
4. melakukan simulasi numerik model *predator-prey* diskret dengan perlindungan *prey* tanpa dan dengan efek *Allee*.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Model Pertumbuhan Logistik

Model pertumbuhan logistik adalah model pertumbuhan populasi dengan sumber daya lingkungan yang terbatas. Ketika ukuran populasi bertambah, laju pertumbuhan akhirnya melemah dan kemudian berhenti pada ukuran populasi tertentu. Ukuran populasi yang menghentikan pertumbuhan tersebut secara umum disebut *carrying capacity*, yaitu jumlah individu maksimal yang dapat didukung oleh lingkungannya (Molles, 2002).

Laju pertumbuhan populasi bergantung pada ukuran populasi, sehingga secara matematis laju pertumbuhan populasi dinyatakan sebagai

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Misalkan K adalah *carrying capacity*. Jika dalam populasi terdapat x individu, maka lingkungan masih dapat mendukung $(K - x)$ individu. Jadi masih terdapat bagian lingkungan yang dapat ditempati, yaitu sebesar

$$\frac{(K - x)}{K}. \quad (2.1)$$

Persamaan (2.1) inilah yang sebanding dengan pertumbuhan per kapita. Oleh karena itu, persamaan logistik didefinisikan sebagai

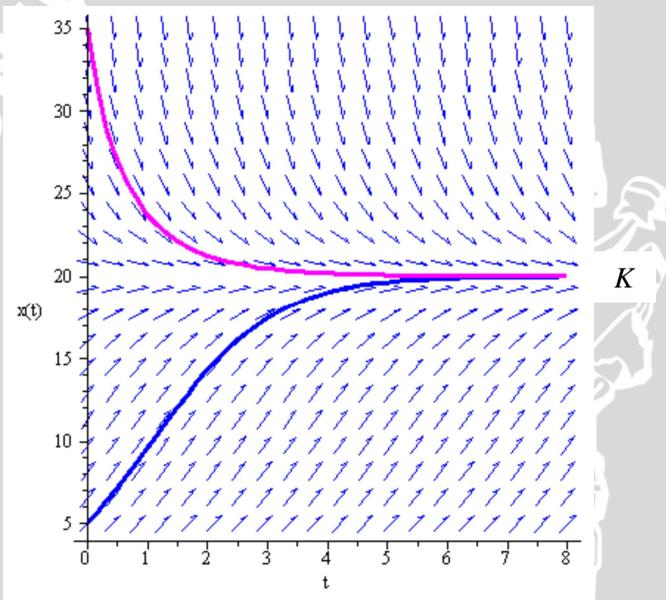
$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = r \frac{(K - x)}{K}$$

atau

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right),$$

di mana K dan r diasumsikan positif. Parameter r merupakan tingkat pertumbuhan intrinsik populasi, sehingga tingkat pertumbuhan untuk x sebanding dengan r . Parameter K menyatakan daya kapasitas lingkungan yaitu kapasitas maksimum habitat (Boyce dan Dprima, 2005).

Jika jumlah populasi awal $x(0) < K$, maka model logistik meramalkan bahwa jumlah populasi meningkat menuju *carrying capacity* K . Tetapi jika nilai awal $x(0) > K$, maka model logistik meramalkan bahwa jumlah populasi akan berkurang menuju *carrying capacity* K . Sebagai contoh, jika populasi awal $x(0) = 5$, dan $K = 20$ maka jumlah populasi meningkat dan akhirnya laju pertumbuhan populasi berhenti saat $x(t) = 20$. Sebaliknya jika $x(0) = 35$ maka jumlah populasi menurun dan akhirnya laju pertumbuhan populasi berhenti saat $x(t) = 20$. Grafik pertumbuhan logistik diperlihatkan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Pertumbuhan logistik

2.2 Model Lotka-Volterra

Model Lotka-Volterra adalah suatu model yang digunakan untuk menunjukkan adanya interaksi dua spesies x dan y , di mana x merupakan populasi *prey* dan y merupakan populasi *predator*. Model ini menggambarkan interaksi antara *predator* dan *prey* di mana *carrying capacity* yang menyebabkan pertumbuhan *prey* terbatas

dinyatakan sebagai $\frac{r_1}{b_1}$, sedangkan *carrying capacity* yang menyebabkan pertumbuhan *predator* terbatas dinyatakan sebagai $\frac{r_2}{a_2}$. Model Lotka-Volterra dapat dinyatakan dalam bentuk sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(r_1 - a_1y - b_1x) \\ \frac{dy}{dt} &= y(r_2 - a_2y + b_2x). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Semua parameter pada sistem persamaan (2.2) bernilai positif. Parameter r_1 dan r_2 berturut-turut menunjukkan pertumbuhan intrinsik *prey* dan *predator*. Parameter a_1 dan b_2 merupakan parameter interaksi pemangsaan *predator* terhadap *prey*. Parameter b_1 adalah parameter interaksi antar *prey*, sedangkan a_2 adalah parameter interaksi antar *predator* (Zhuang dan Wen, 2011).

2.3 Model Leslie-Gower

Pada tahun 1969 Leslie dan Gower memodifikasi model Lotka-Volterra dengan menganggap *carrying capacity* populasi *predator* dipengaruhi oleh populasi *prey*. Model ini dikenal sebagai model Leslie-Gower. Model ini menggambarkan interaksi antara *predator* dan *prey* di mana *carrying capacity* yang menyebabkan pertumbuhan *prey* terbatas dinyatakan sebagai $\frac{r_1}{b_1}$, sedangkan *carrying capacity* yang menyebabkan pertumbuhan *predator* terbatas dipengaruhi oleh populasi *prey* yang dinyatakan sebagai $\frac{r_2x}{a_2}$.

Model Leslie-Gower dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(r_1 - a_1y - b_1x) \\ \frac{dy}{dt} &= y\left(r_2 - a_2\frac{y}{x}\right). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Parameter r_1 dan r_2 berturut-turut menunjukkan pertumbuhan intrinsik *prey* dan *predator*. Parameter a_1 merupakan parameter interaksi pemangsaan *predator* terhadap *prey*. Parameter b_1 adalah parameter interaksi antar *prey*, sedangkan a_2 adalah parameter interaksi antar *predator* (Zhuang dan Wen, 2011).

2.4 Efek Perlindungan *Prey*

Dalam proses *predasi*, populasi *predator* memangsa populasi *prey* secara terus-menerus sehingga populasi *prey* berkurang dan terancam punah. Untuk menghindari kepunahan diperlukan faktor perlindungan *prey*. Di alam bebas, naluri *prey* untuk berlindung dari *predator* merupakan faktor yang perlu diperhitungkan dalam pemodelan. *Prey* hanya keluar dari tempat berlindungnya ketika ia merasa aman dari *predator*. Efek perlindungan mengurangi kemungkinan *prey* untuk dimangsa sehingga terhindar dari kepunahan (Pal dan Samanta, 2010).

Misalkan m menyatakan laju *prey* yang berlindung, maka laju *prey* yang dapat dimangsa oleh *predator* adalah $(1 - m)x$ dengan $m \in [0,1]$. Jika faktor perlindungan *prey* diperhitungkan, maka sistem persamaan (2.3) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (r_1 - b_1x)x - a_1(1 - m)xy \\ \frac{dy}{dt} &= \left(r_2 - a_2 \frac{y}{(1 - m)x} \right) y \end{aligned} \quad (2.4)$$

(Zhuang dan Wen, 2011).

2.5 Efek *Allee*

Efek *Allee* merupakan penurunan laju pertumbuhan populasi pada kepadatan populasi rendah yang disebabkan oleh beberapa mekanisme, seperti kesulitan dalam menemukan pasangan di kepadatan rendah. Sebagai contoh, populasi alamiah dari kupu-kupu yang terancam punah, yaitu *Melitaea cinxia*. Selain itu penyebab terjadinya efek *Allee* lainnya adalah perkawinan sedarah dan hilangnya heterozigositas dalam sel yaitu hilangnya fungsi normal dari satu alel dari gen di mana alel lainnya sudah tidak aktif sehingga menyebabkan penurunan kebugaran. Efek *Allee* dapat menyebabkan kepunahan spesies ketika kepadatan terlalu rendah. Pada ukuran populasi yang sangat kecil, beberapa spesies yang terancam punah, seperti Kakapo (*Strigops habroptilus*), memiliki probabilitas rendah untuk menemukan pasangan (Courchamp dkk, 1999).

Jika efek *Allee* pada populasi *prey* dinyatakan sebagai fungsi $\frac{x}{u+x}$, maka sistem persamaan (2.4) menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (r_1 - b_1x) \frac{x}{u+x} - a_1(1-m)xy \\ \frac{dy}{dt} &= \left(r_2 - a_2 \frac{y}{(1-m)x} \right) y,\end{aligned}\tag{2.5}$$

dengan $u > 0$ menyatakan parameter *Allee* (Zhuang dan Wen, 2011).

2.6 Sistem Dinamik Diskret

Sistem dinamik merupakan suatu keadaan yang dipengaruhi oleh waktu (t). Dalam penerapannya, terdapat dua jenis sistem dinamik, yaitu sistem dinamik diskret ($t \in \mathbb{Z}$ atau \mathbb{N}) dan sistem dinamik kontinu ($t \in \mathbb{R}$). Sistem dinamik diskret dinyatakan sebagai persamaan beda, yaitu

$$x_{t+1} = f(x_t), t \in \mathbb{Z} \text{ atau } \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}^n$$

(Arrowsmith dan Place, 1992).

Sistem dinamik diskret dua dimensi dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n),\end{aligned}\tag{2.6}$$

di mana f dan g disebut fungsi pembangkit sistem. Titik (x^*, y^*) disebut titik kesetimbangan sistem persamaan (2.6) jika $f(x^*, y^*) = x^*$ dan $g(x^*, y^*) = y^*$ (Elaydi, 2005).

2.7 Sistem Dinamik Diskret Tak Linear

Jika f dan g pada sistem persamaan (2.6) memuat perkalian antara variabel tak bebas, maka sistem persamaan (2.6) disebut sistem dinamik diskret tak linear. Misalkan titik (x^*, y^*) adalah titik kesetimbangan sistem tak linear. Penyelidikan jenis kestabilan titik kesetimbangan tersebut dapat dilakukan dengan menganalisis sistem hasil linearisasi. Proses linearisasi sistem tak linear dilakukan dengan ekspansi deret Taylor terhadap masing-masing fungsi f dan g yaitu

$$f(x_n, y_n) = f(x^*, y^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x_n} (x_n - x^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y_n} (y_n - y^*) + \eta_1(x_n, y_n)$$

$$g(x_n, y_n) = g(x^*, y^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x_n} (x_n - x^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y_n} (y_n - y^*) + \eta_2(x_n, y_n),$$

di mana $\eta_1(x_n, y_n)$ dan $\eta_2(x_n, y_n)$ adalah suku sisa. Jika $(x_n, y_n) \rightarrow (x^*, y^*)$ maka suku sisa tersebut memenuhi

$$\lim_{(x_n, y_n) \rightarrow (x^*, y^*)} \frac{\eta_1(x_n, y_n)}{\|\bar{w}_n\|} = 0 \text{ dan } \lim_{(x_n, y_n) \rightarrow (x^*, y^*)} \frac{\eta_2(x_n, y_n)}{\|\bar{w}_n\|} = 0,$$

dengan $\bar{w}_n = (x_n - x^*, y_n - y^*)$. Oleh karena itu, $\eta_1(x_n, y_n)$ dan $\eta_2(x_n, y_n)$ dapat diabaikan.

Karena (x^*, y^*) adalah titik kesetimbangan, maka sistem persamaan (2.6) dapat didekati dengan

$$x_{n+1} = x^* + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x_n} (x_n - x^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y_n} (y_n - y^*)$$

$$y_{n+1} = y^* + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x_n} (x_n - x^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y_n} (y_n - y^*)$$

atau

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x^* &= \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x_n} (x_n - x^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y_n} (y_n - y^*) \\ y_{n+1} - y^* &= \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x_n} (x_n - x^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y_n} (y_n - y^*). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Jika dimisalkan $u_n = x_n - x^*$ dan $v_n = y_n - y^*$, maka sistem persamaan (2.7) dapat ditulis sebagai

$$\bar{w}_{n+1} = J^* \bar{w}_n, \quad (2.8)$$

dengan $\bar{w}_n = (u_n, v_n)$ dan $J^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x_n} & \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y_n} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x_n} & \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y_n} \end{bmatrix}$ adalah matriks

Jacobi di titik (x^*, y^*) . Sistem persamaan linear (2.8) mempunyai titik kesetimbangan $(x^*, y^*) = (0, 0)$ (Elaydi, 2005).

Persamaan karakteristik sistem persamaan (2.8) diperoleh dari

$$\det(\lambda I - J^*) = 0.$$

Jika matriks Jacobi sistem persamaan (2.8) yang dilinearkan adalah

$$J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

maka nilai eigen matriks Jacobinya adalah akar persamaan karakteristik

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0.$$

Persamaan karakteristik dapat ditulis dalam bentuk

$$\lambda^2 - p\lambda + q = 0,$$

dengan $p = \text{trace } J$ dan $q = \det J$ (Elaydi, 2005).

Lemma 2.1

Secara umum solusi analitik untuk sistem persamaan (2.8) adalah

$$w_n = s_1 \lambda_1^n + s_2 \lambda_2^n \text{ untuk } \lambda_1 \neq \lambda_2$$

dan

$$w_n = (s_1 + s_2 n) \lambda^n \text{ untuk } \lambda_1 = \lambda_2$$

(Elaydi, 2005).

Lemma 2.2

Jika λ_1 dan λ_2 adalah akar-akar persamaan karakteristik untuk sistem persamaan (2.8), maka solusi sistem persamaan (2.8) konvergen menuju 0 jika dan hanya jika maksimum $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$ (Elaydi, 2005).

Lemma 2.3

Jika $F(\lambda) = \lambda^2 - p\lambda + q$ dengan λ_1 dan λ_2 adalah dua akar dari $F(\lambda) = 0$ maka

- (i) $|\lambda_1| < 1$ dan $|\lambda_2| < 1$ jika dan hanya jika $F(1) > 0$, $F(-1) > 0$, dan $q < 1$,
- (ii) $|\lambda_1| < 1$ dan $|\lambda_2| > 1$ (atau $|\lambda_1| > 1$ dan $|\lambda_2| < 1$) jika dan hanya jika $F(1) > 0$ dan $F(-1) < 0$,
- (iii) $|\lambda_1| > 1$ dan $|\lambda_2| > 1$ jika dan hanya jika $F(1) > 0$, $F(-1) > 0$, dan $q > 1$,
- (iv) λ_1 dan λ_2 adalah kompleks dan $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ jika dan hanya jika $F(1) > 0$, $p^2 - 4q < 0$, dan $q = 1$

(Zhuang dan Wen, 2011).

Berdasarkan Lemma 2.1, Lemma 2.2, dan Lemma 2.3 diperoleh Akibat 2.4 berikut.

Akibat 2.4

Jika (x^*, y^*) adalah titik kesetimbangan sistem persamaan (2.8) dan λ_1, λ_2 adalah nilai eigen untuk matriks Jacobi J di titik (x^*, y^*) , maka jenis kestabilan titik kesetimbangan (x^*, y^*) dapat ditentukan berdasarkan Lemma 2.1, Lemma 2.2, dan Lemma 2.3.

- (i) Titik kesetimbangan (x^*, y^*) bersifat stabil asimtotik (*sink*) jika $F(1) > 0$, $F(-1) > 0$, dan $q < 1$.
- (ii) Titik kesetimbangan (x^*, y^*) bersifat tak stabil pelana (*saddle*) jika $F(1) > 0$ dan $F(-1) < 0$.
- (iii) Titik kesetimbangan (x^*, y^*) bersifat tak stabil (*source*) jika $F(1) > 0$, $F(-1) > 0$, dan $q > 1$.
- (iv) Titik kesetimbangan (x^*, y^*) merupakan titik kesetimbangan *non-hyperbolic* jika $F(1) > 0$, $p^2 - 4q < 0$, dan $q = 1$

(Zhuang dan Wen, 2011).

2.8 Metode Euler

Metode Euler merupakan metode beda hingga dengan pendekatan turunan pertama dengan beda maju atau beda mundur. Metode Euler maju adalah salah satu skema diskret paling sederhana yang menggunakan pendekatan beda maju. Pada metode Euler maju ini turunan pertama $\frac{dx}{dt}$ digantikan oleh $\frac{x(t_n+h)-x(t_n)}{h}$ dengan $h > 0$ adalah ukuran langkah.

Untuk sistem persamaan diferensial

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y),$$

ruas kiri digantikan oleh pendekatan dengan beda maju, yaitu

$$\frac{x(t_n + h) - x(t_n)}{h} = f(x(t_n), y(t_n))$$

$$\frac{y(t_n + h) - y(t_n)}{h} = g(x(t_n), y(t_n)).$$

Diskretisasi dengan metode Euler maju dapat dituliskan dalam bentuk

$$x(t_n + h) = x(t_n) + hf(x(t_n), y(t_n)) \quad (2.9)$$

$$y(t_n + h) = y(t_n) + hg(x(t_n), y(t_n)).$$

Misalkan $x_n = x(t_n)$, $x_{n+1} = x(t_n + h)$, $y_n = y(t_n)$, dan $y_{n+1} = y(t_n + h)$, maka sistem persamaan (2.9) dapat dinyatakan sebagai

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + hg(x_n, y_n)$$

(Boyce dan Dprima, 2005).

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB III PEMBAHASAN

Pada bagian ini dibahas analisis dinamik model *predator-prey* Leslie-Gower diskret dengan perlindungan *prey* tanpa dan dengan efek *Allee*. Pembahasan skripsi ini adalah penentuan titik kesetimbangan dan penentuan jenis kestabilan titik kesetimbangan. Pada tahap akhir dilakukan simulasi numerik model *predator-prey* diskret dengan perlindungan *prey* tanpa dan dengan efek *Allee* untuk mengilustrasikan hasil analisis dinamik yang telah diperoleh.

3.1 Diskretisasi Model tanpa Efek *Allee*

Konstruksi model *predator-prey* Leslie-Gower kontinu dengan perlindungan *prey* adalah

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= (r_1 - b_1 H)H - a_1(1 - m)HP \\ \frac{dP}{dt} &= \left(r_2 - a_2 \frac{P}{(1 - m)H} \right) P,\end{aligned}\tag{3.1}$$

dengan H menyatakan kepadatan populasi *prey* dan P menyatakan kepadatan populasi *predator*.

Sistem persamaan (3.1) didiskretisasi menggunakan metode Euler dengan menerapkan beda maju, yaitu

$$\begin{aligned}\frac{H(t_n + h) - H(t_n)}{h} &= (r_1 - b_1 H(t_n))H(t_n) - a_1(1 - m)H(t_n)P(t_n) \\ \frac{P(t_n + h) - P(t_n)}{h} &= \left(r_2 - a_2 \frac{P(t_n)}{(1 - m)H(t_n)} \right) P(t_n),\end{aligned}\tag{3.2}$$

dengan $t_n = (n - 1)h$. Misalkan $H(t_n) = H_n$, $H(t_n + h) = H_{n+1}$, $P(t_n) = P_n$, dan $P(t_n + h) = P_{n+1}$. Bentuk eksplisit sistem persamaan (3.2) adalah

$$\begin{aligned}H_{n+1} &= H_n + hH_n [r_1 - b_1 H_n - a_1(1 - m)P_n] = f(H_n, P_n), \\ P_{n+1} &= P_n + hP_n \left[r_2 - a_2 \frac{P_n}{(1 - m)H_n} \right] = g(H_n, P_n).\end{aligned}\tag{3.3}$$

Sistem persamaan (3.3) merupakan model *predator-prey* Leslie-Gower diskret dengan perlindungan *prey* di mana h adalah ukuran langkah dan semua parameter bernilai positif.

3.2 Titik Kesetimbangan Model tanpa Efek *Allee*

Titik kesetimbangan sistem persamaan (3.3) adalah solusi dari $f(H^*, P^*) = H^*$ dan $g(H^*, P^*) = P^*$ yaitu

$$\begin{aligned} H^* + hH^* [r_1 - b_1H^* - a_1(1-m)P^*] &= H^* \\ H^* [r_1 - b_1H^* - a_1(1-m)P^*] &= 0, \end{aligned} \quad (3.4 \text{ a})$$

dan

$$\begin{aligned} P^* + hP^* \left[r_2 - a_2 \frac{P^*}{(1-m)H^*} \right] &= P^* \\ P^* \left[r_2 - a_2 \frac{P^*}{(1-m)H^*} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (3.4 \text{ b})$$

Solusi persamaan (3.4 a) dan (3.4 b) secara berturut-turut dapat dinyatakan dalam bentuk

$$H^* = 0 \quad (3.5)$$

atau

$$r_1 - b_1H^* - a_1(1-m)P^* = 0, \quad (3.6)$$

dan

$$P^* = 0 \quad (3.7)$$

atau

$$r_2 - a_2 \frac{P^*}{(1-m)H^*} = 0. \quad (3.8)$$

Kombinasi keempat solusi di atas menghasilkan empat kemungkinan titik kesetimbangan sebagai berikut.

Kasus 1. Pada kasus ini ditinjau persamaan (3.5) dan (3.7). Karena $H^* = 0$ dan $P^* = 0$, sehingga diperoleh titik kesetimbangan $E_1 = (0,0)$. Titik kesetimbangan ini merupakan titik kesetimbangan trivial.

Kasus 2. Pada kasus ini ditinjau persamaan (3.5) dan (3.8) yaitu $H^* = 0$ dan $r_2 - a_2 \frac{P^*}{(1-m)H^*} = 0$. Nilai P^* dicari dengan cara substitusi persamaan (3.5) ke dalam persamaan (3.8). Dari substitusi tersebut tidak dapat diperoleh nilai P^* , sehingga kasus ini tidak menghasilkan titik kesetimbangan.

Kasus 3. Kombinasi solusi persamaan (3.6) dan (3.7) menghasilkan titik kesetimbangan $E_2 = \left(\frac{r_1}{b_1}, 0\right)$. Titik kesetimbangan ini disebut titik kesetimbangan kepunahan *predator* atau titik kesetimbangan batas.

Kasus 4. Pada kasus ini ditinjau persamaan (3.6) dan (3.8) yaitu $r_1 - b_1 H^* - a_1(1-m)P^* = 0$ dan $r_2 - a_2 \frac{P^*}{(1-m)H^*} = 0$.

Untuk memperoleh H^* , maka ditinjau persamaan (3.8) yaitu

$$r_2 - a_2 \frac{P^*}{(1-m)H^*} = 0$$

sehingga

$$P^* = \frac{r_2(1-m)H^*}{a_2}. \quad (3.9)$$

Jika persamaan (3.9) disubstitusikan ke persamaan (3.6) maka

$$r_1 - b_1 H^* - \frac{a_1(1-m)r_2(1-m)H^*}{a_2} = 0$$

sehingga diperoleh

$$H^* = \frac{a_2 r_1}{a_1 r_2 (1-m)^2 + a_2 b_1}. \quad (3.10)$$

Untuk memperoleh P^* , maka ditinjau persamaan (3.8) yaitu

$$r_2 - a_2 \frac{P^*}{(1-m)H^*} = 0$$

sehingga

$$H^* = \frac{a_2 P^*}{(1-m)r_2}. \quad (3.11)$$

Jika persamaan (3.11) disubstitusikan ke persamaan (3.6) maka

$$r_1 - \frac{b_1 a_2 P^*}{(1-m)r_2} - a_1(1-m)P^* = 0$$

sehingga diperoleh

$$P^* = \frac{r_1 r_2 (1-m)}{a_1 r_2 (1-m)^2 + a_2 b_1}. \quad (3.12)$$

Persamaan (3.10) dan (3.12) merupakan titik kesetimbangan $E_3 = (H^*, P^*)$. Titik kesetimbangan ini disebut titik kesetimbangan interior.

3.3 Analisis Kestabilan Model tanpa Efek *Allee*

Sebelum menentukan jenis kestabilan titik kesetimbangan, terlebih dahulu ditentukan matriks Jacobi untuk sistem persamaan (3.3). Matriks Jacobi untuk sistem persamaan (3.3) adalah

$$J = \begin{bmatrix} 1 + h\{r_1 - 2b_1 H^* - a_1(1-m)P^*\} & h\{-a_1 H^*(1-m)\} \\ h\left\{\frac{a_2(P^*)^2}{(1-m)(H^*)^2}\right\} & 1 + h\left\{r_2 - \frac{2a_2 P^*}{(1-m)H^*}\right\} \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

3.3.1 Kestabilan titik kesetimbangan $E_1 = (0, 0)$

Jika titik kesetimbangan $E_1 = (0, 0)$ disubstitusikan ke dalam matriks Jacobi (3.13), maka hasilnya tidak dapat didefinisikan. Oleh karena itu, jenis kestabilan titik kesetimbangan $E_1 = (0, 0)$ tidak dapat ditentukan dengan linearisasi. Jenis kestabilan titik kesetimbangan $E_1 = (0, 0)$ harus ditentukan dengan cara lain, tetapi tidak dibahas pada skripsi ini.

3.3.2 Kestabilan titik kesetimbangan $E_2 = \left(\frac{r_1}{b_1}, 0\right)$

Matriks Jacobi sistem persamaan (3.3) di E_2 adalah

$$J_2 = \begin{bmatrix} 1 - hr_1 & -\frac{a_1 r_1 h(1-m)}{b_1} \\ 0 & 1 + hr_2 \end{bmatrix}.$$

Karena J_2 adalah matriks segitiga atas, jelas bahwa nilai eigennya adalah $\lambda_1 = 1 - r_1 h$ dan $\lambda_2 = 1 + r_2 h > 1$. Menurut Akibat 2.4, E_2 bersifat tak stabil pelana (*saddle*) jika $0 < r_1 h < 2$ dan E_2 bersifat tak stabil (*source*) jika $r_1 h > 2$.

3.3.3 Kestabilan titik kesetimbangan $E_3 = (H^*, P^*)$

Matriks Jacobi sistem persamaan (3.3) di E_3 adalah

$$J_3 = \begin{bmatrix} 1 - hb_1 H^* & -a_1 h(1-m)H^* \\ \frac{r_2^2 h(1-m)}{a_2} & 1 - hr_2 \end{bmatrix}.$$

Perhitungan matriks Jacobi sistem persamaan (3.3) di E_3 tercantum di Lampiran 1.

Nilai eigen J_3 diperoleh dari

$$|\lambda I - J_3| = 0$$

sehingga

$$\begin{vmatrix} (1 - hb_1 H^*) - \lambda & -a_1 h(1-m)H^* \\ \frac{r_2^2 h(1-m)}{a_2} & (1 - hr_2) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - (1 - hr_2 + 1 - hb_1 H^*)\lambda + (1 - hb_1 H^*)(1 - hr_2) + \frac{a_1 r_2^2 h^2 (1-m)^2 H^*}{a_2} = 0$$

$$\lambda^2 - (2 - h(r_2 + b_1 H^*))\lambda + (1 - hb_1 H^*)(1 - hr_2) + \frac{a_1 r_2^2 h^2 (1-m)^2 H^*}{a_2} = 0.$$

Persamaan karakteristik dapat ditulis sebagai

$$\lambda^2 - p\lambda + q = 0,$$

dengan

$$p = 2 - h(r_2 + b_1H^*),$$

$$q = (1 - hb_1H^*)(1 - hr_2) + \frac{a_1h^2r_2^2(1 - m)^2H^*}{a_2}.$$

Menurut Akibat 2.4, terdapat empat kemungkinan jenis kestabilan titik kesetimbangan E_3 , yaitu

(i) E_3 bersifat stabil asimtotik (*sink*) jika dan hanya jika

$$(i.1) \quad f(1) > 0,$$

$$(i.2) \quad f(-1) > 0,$$

$$(i.3) \quad q < 1,$$

untuk $f(1) > 0$ diperoleh

$$1 - p + q > 0,$$

dengan substitusi p dan q sebagaimana tercantum di Lampiran 2, diperoleh

$$a_2r_2b_1h^2H^* + a_1h^2r_2^2(1 - m)^2H^* > 0,$$

untuk $f(-1) > 0$ diperoleh

$$1 + p + q > 0,$$

dengan substitusi p dan q sebagaimana tercantum di Lampiran 2, diperoleh

$$a_1 > \frac{a_2}{h^2r_2^2(1 - m)^2H^*} (2r_2h + 2b_1hH^* - r_2b_1h^2H^* - 4),$$

untuk $q < 1$ (perhitungan dapat dilihat di Lampiran 2) diperoleh

$$a_1 < \frac{a_2}{h^2r_2^2(1 - m)^2H^*} (r_2h + b_1hH^* - r_2b_1h^2H^*),$$

(ii) E_3 bersifat tak stabil pelana (*saddle*) jika dan hanya jika

(ii.1) $f(1) > 0$,

(ii.2) $f(-1) < 0$,

untuk $f(1) > 0$ diperoleh

$$1 - p + q > 0,$$

dengan substitusi p dan q sebagaimana tercantum di Lampiran 3, diperoleh

$$a_2 r_2 b_1 h^2 H^* + a_1 h^2 r_2^2 (1 - m)^2 H^* > 0,$$

untuk $f(-1) < 0$ diperoleh

$$1 + p + q < 0,$$

dengan substitusi p dan q sebagaimana tercantum di Lampiran 3, diperoleh

$$a_1 < \frac{a_2}{h^2 r_2^2 (1 - m)^2 H^*} (2r_2 h + 2b_1 h H^* - r_2 b_1 h^2 H^* - 4),$$

(iii) E_3 bersifat tak stabil (*source*) jika dan hanya jika

(iii.1) $f(1) > 0$,

(iii.2) $f(-1) > 0$,

(iii.3) $q > 1$,

untuk $f(1) > 0$ diperoleh

$$1 - p + q > 0,$$

dengan substitusi p dan q sebagaimana tercantum di Lampiran 4, diperoleh

$$a_2 r_2 b_1 h^2 H^* + a_1 h^2 r_2^2 (1 - m)^2 H^* > 0,$$

untuk $f(-1) > 0$ diperoleh

$$1 + p + q > 0,$$

dengan substitusi p dan q sebagaimana tercantum di Lampiran 4, diperoleh

$$a_1 > \frac{a_2}{h^2 r_2^2 (1-m)^2 H_0^*} (2r_2 h + 2b_1 h H^* - r_2 b_1 h^2 H^* - 4),$$

untuk $q > 1$ (perhitungan dapat dilihat di Lampiran 4) diperoleh

$$a_1 > \frac{a_2}{h^2 r_2^2 (1-m)^2 H^*} (r_2 h + b_1 h H^* - r_2 b_1 h^2 H^*),$$

(iv) E_3 merupakan titik kesetimbangan *non-hyperbolic* jika dan hanya jika

$$(iv.1) f(1) > 0$$

$$(iv.2) p^2 - 4q < 0,$$

$$(iv.3) q = 1,$$

untuk $f(1) > 0$ diperoleh

$$1 - p + q > 0,$$

dengan substitusi p dan q sebagaimana tercantum di Lampiran 5, diperoleh

$$a_2 r_2 b_1 h^2 H^* + a_1 h^2 r_2^2 (1-m)^2 H^* > 0,$$

untuk $p^2 - 4q < 0$ (perhitungan dapat dilihat di Lampiran 5) diperoleh

$$a_1 < \frac{a_2}{h^2 r_2^2 (1-m)^2 H^*} (-h^2 r_2^2 + 2h^2 r_2 b_1 H^* - h^2 b_1^2 (H^*)^2),$$

untuk $q = 1$ (perhitungan dapat dilihat di Lampiran 5) diperoleh

$$a_1 = \frac{a_2}{h^2 r_2^2 (1-m)^2 H^*} (r_2 h + b_1 h H^* - r_2 b_1 h^2 H^*).$$

3.4 Diskretisasi Model dengan Efek *Allee*

Pada bagian ini, dibahas model *predator-prey* dengan perlindungan dan efek *Allee* pada *prey*. Jika efek *Allee* pada populasi *prey* dinyatakan sebagai fungsi $\frac{H}{u+H}$ maka sistem persamaan (3.1) menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= (r_1 - b_1H) \frac{H}{u + H} - a_1(1 - m)HP \\ \frac{dP}{dt} &= \left[r_2 - a_2 \frac{P}{(1 - m)H} \right] P.\end{aligned}\quad (3.14)$$

Sistem persamaan (3.14) didiskretisasi menggunakan metode Euler dengan menerapkan beda maju, yaitu

$$\begin{aligned}\frac{H(t_n + h) - H(t_n)}{h} &= (r_1 - b_1H(t_n)) \frac{H(t_n)}{u + H(t_n)} - a_1(1 - m)H(t_n)P(t_n) \\ \frac{P(t_n + h) - P(t_n)}{h} &= \left(r_2 - a_2 \frac{P(t_n)}{(1 - m)H(t_n)} \right) P(t_n),\end{aligned}\quad (3.15)$$

dengan $t_n = (n - 1)h$. Misalkan $H(t_n) = H_n$, $H(t_n + h) = H_{n+1}$, $P(t_n) = P_n$, dan $P(t_n + h) = P_{n+1}$. Bentuk eksplisit sistem persamaan (3.15) adalah

$$\begin{aligned}H_{n+1} &= H_n + hH_n \left[(r_1 - b_1H_n) \frac{H_n}{u + H_n} - a_1(1 - m)P_n \right] \\ P_{n+1} &= P_n + hP_n \left[r_2 - a_2 \frac{P_n}{(1 - m)H_n} \right],\end{aligned}\quad (3.16)$$

di mana $H_{n+1} = f(H_n, P_n)$ dan $P_{n+1} = g(H_n, P_n)$. Suku $\frac{H_n}{u + H_n}$ adalah fungsi efek *Allee* dan u adalah parameter *Allee*.

3.5 Titik Keseimbangan Model dengan Efek *Allee*

Titik keseimbangan sistem persamaan (3.16) adalah solusi dari $f(H^*, P^*) = H^*$ dan $g(H^*, P^*) = P^*$ yaitu

$$\begin{aligned}H^* + hH^* \left[(r_1 - b_1H^*) \frac{H^*}{u + H^*} - a_1(1 - m)P^* \right] &= H^* \\ H^* \left[(r_1 - b_1H^*) \frac{H^*}{u + H^*} - a_1(1 - m)P^* \right] &= 0,\end{aligned}\quad (3.17 \text{ a})$$

dan

$$P^* + hP^* \left[r_2 - a_2 \frac{P^*}{(1-m)H^*} \right] = P^* \quad (3.17 \text{ b})$$
$$P^* \left[r_2 - a_2 \frac{P^*}{(1-m)H^*} \right] = 0.$$

Solusi persamaan (3.17 a) dan (3.17 b) secara berturut-turut dapat dinyatakan dalam bentuk

$$H^* = 0 \quad (3.18)$$

atau

$$(r_1 - b_1 H^*) \frac{H^*}{u + H^*} - a_1 (1 - m) P^* = 0, \quad (3.19)$$

dan

$$P^* = 0 \quad (3.20)$$

atau

$$r_2 - a_2 \frac{P^*}{(1-m)H^*} = 0. \quad (3.21)$$

Kombinasi keempat solusi di atas menghasilkan empat kemungkinan titik kesetimbangan sebagai berikut.

Kasus 1. Pada kasus ini ditinjau persamaan (3.18) dan (3.20). Karena $H^* = 0$ dan $P^* = 0$, sehingga diperoleh titik kesetimbangan $E_4 = (0,0)$. Titik kesetimbangan ini merupakan titik kesetimbangan trivial.

Kasus 2. Pada kasus ini ditinjau persamaan (3.18) dan (3.21) yaitu $H^* = 0$ dan $r_2 - a_2 \frac{P^*}{(1-m)H^*} = 0$. Nilai P^* dicari dengan cara substitusi persamaan (3.18) ke dalam persamaan (3.21). Dari substitusi tersebut tidak dapat diperoleh nilai P^* , sehingga kasus ini tidak menghasilkan titik kesetimbangan.

Kasus 3. Kombinasi solusi persamaan (3.19) dan (3.20) menghasilkan titik kesetimbangan $E_5 = \left(\frac{r_1}{b_1}, 0\right)$. Titik kesetimbangan ini merupakan titik kesetimbangan batas.

Kasus 4. Pada kasus ini ditinjau persamaan (3.19) dan (3.21). Perhitungan persamaan tersebut dapat dilihat di Lampiran 6.

Dari hasil perhitungan di Lampiran 6 diperoleh

$$H^* = \frac{a_2 r_1 - a_1 r_2 u (1 - m)^2}{a_1 r_2 (1 - m)^2 + a_2 b_1} \quad (3.22)$$

dan

$$P^* = \frac{r_2 (1 - m) H^*}{a_2}. \quad (3.23)$$

Persamaan (3.22) dan (3.23) merupakan titik kesetimbangan $E_6 = (H^*, P^*)$. Titik kesetimbangan ini disebut titik kesetimbangan interior. Titik kesetimbangan $E_6 = (H^*, P^*)$ eksis jika memenuhi $\frac{r_1}{r_2} > \frac{a_1 u (1 - m)^2}{a_2}$.

3.6 Analisis Kestabilan Model dengan Efek Allee

Sebelum menentukan jenis kestabilan titik kesetimbangan, terlebih dahulu ditentukan matriks Jacobi untuk sistem persamaan (3.16). Matriks Jacobi untuk sistem persamaan (3.16) adalah

$$J = \begin{bmatrix} \alpha & h\{-a_1 H^* (1 - m)\} \\ h\left\{\frac{a_2 (P^*)^2}{(1 - m)(H^*)^2}\right\} & 1 + h\left\{r_2 - \frac{2a_2 P^*}{(1 - m)H^*}\right\} \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

dengan

$$\alpha = 1 + h\left(\frac{2r_1 H^* - 3b_1 (H^*)^2}{u + H^*} - \frac{r_1 (H^*)^2 + b_1 (H^*)^3}{(u + H^*)^2} - a_1 (1 - m)P^*\right).$$

3.6.1 Kestabilan titik kesetimbangan $E_4 = (0, 0)$

Jika titik kesetimbangan $E_4 = (0,0)$ disubstitusikan ke dalam matriks Jacobi (3.24), maka hasilnya tidak dapat didefinisikan. Oleh karena itu, jenis kestabilan titik kesetimbangan $E_4 = (0,0)$ tidak dapat ditentukan dengan linearisasi. Jenis kestabilan titik kesetimbangan $E_4 = (0,0)$ harus ditentukan dengan cara lain, tetapi tidak dibahas pada skripsi ini.

3.6.2 Kestabilan titik kesetimbangan $E_5 = \left(\frac{r_1}{b_1}, 0\right)$

Matriks Jacobi sistem persamaan (3.16) di E_5 adalah

$$J_5 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\frac{a_1 r_1 h(1-m)}{b_1} \\ 0 & 1 + h r_2 \end{bmatrix},$$

dengan

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 + h \left(\frac{2\frac{r_1^2}{b_1} - 3b_1\frac{r_1^2}{b_1^2} - \frac{r_1^3}{b_1^2} + b_1\frac{r_1^3}{b_1^3}}{u + \frac{r_1}{b_1} - \left(u + \frac{r_1}{b_1}\right)^2} \right) \\ &= 1 + h \left(-\frac{r_1^2}{ub_1 + r_1} - \frac{2r_1^3}{u^2 b_1^2 + 2r_1 u b_1 + r_1^2} \right) \\ &= 1 - \frac{r_1^2 h}{ub_1 + r_1} - \frac{2r_1^3 h}{u^2 b_1^2 + 2r_1 u b_1 + r_1^2} \\ &= 1 - \frac{r_1^2 h (u^2 b_1^2 + 2r_1 u b_1 + r_1^2) + 2r_1^3 h (ub_1 + r_1)}{(ub_1 + r_1)(u^2 b_1^2 + 2r_1 u b_1 + r_1^2)} \\ &= 1 - \beta. \end{aligned}$$

Karena J_5 adalah matriks segitiga atas, maka jelas bahwa nilai eigennya adalah $\lambda_1 = 1 - \beta$ dan $\lambda_2 = 1 + r_2 h > 1$. Menurut Akibat 2.4, E_5 bersifat tak stabil pelana (*saddle*) jika $0 < \beta < 2$ dan E_5 bersifat tak stabil (*source*) jika memenuhi $\beta > 2$.

3.6.3 Kestabilan titik kesetimbangan $E_6 = (H^*, P^*)$

Matriks Jacobi sistem persamaan (3.16) di E_6 adalah

$$J_6 = \begin{bmatrix} \alpha_2 & -a_1 h(1-m)H^* \\ \frac{r_2^2 h(1-m)}{a_2} & 1 - hr_2 \end{bmatrix},$$

dengan

$$\alpha_2 = 1 + h \left(\frac{2r_1 H^* - 3b_1 (H^*)^2}{u + H^*} - \frac{r_1 (H^*)^2 + b_1 (H^*)^3}{(u + H^*)^2} - a_1 (1-m)P^* \right).$$

Perhitungan J_6 tercantum di Lampiran 7.

Nilai eigen J_6 diperoleh dari

$$|\lambda I - J_6| = 0$$

sehingga

$$\begin{vmatrix} \alpha_2 - \lambda & -a_1 h(1-m)H^* \\ \frac{r_2^2 h(1-m)}{a_2} & (1 - hr_2) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - (\alpha_2 + 1 - hr_2)\lambda + \alpha_2(1 - hr_2) + \frac{a_1 r_2^2 h^2 (1-m)^2 H^*}{a_2} = 0.$$

Persamaan karakteristik dapat dinyatakan sebagai

$$\lambda^2 - p_1 \lambda + q_1 = 0,$$

dengan

$$p_1 = \alpha_2 + 1 - r_2 h,$$

$$q_1 = \alpha_2(1 - hr_2) + \frac{a_1 h^2 r_2^2 (1-m)^2 H^*}{a_2}.$$

Menurut Akibat 2.4, terdapat empat kemungkinan jenis kestabilan titik kesetimbangan E_6 , yaitu

(i) E_6 bersifat stabil asimtotik (*sink*) jika dan hanya jika

(i.1) $f(1) > 0$,

$$(i.2) f(-1) > 0,$$

$$(i.3) q_1 < 1,$$

untuk $f(1) > 0$ diperoleh

$$1 - p_1 + q_1 > 0$$

$$1 - (\alpha_2 + 1 - r_2h) + \alpha_2(1 - r_2h) + \frac{a_1h^2r_2^2(1-m)^2H^*}{a_2} > 0$$

$$1 - \alpha_2 - 1 + r_2h + \alpha_2 - \alpha_2r_2h + \frac{a_1h^2r_2^2(1-m)^2H^*}{a_2} > 0$$

$$r_2h - \alpha_2r_2h + \frac{a_1h^2r_2^2(1-m)^2H^*}{a_2} > 0$$

$$r_2h(1 - \alpha_2) + \frac{a_1h^2r_2^2(1-m)^2H^*}{a_2} > 0,$$

jika $\alpha_2 < 1$ maka $f(1) > 0$, sehingga kondisi (i.1) terpenuhi pada saat $\alpha_2 < 1$,

untuk $f(-1) > 0$ diperoleh

$$1 + p_1 + q_1 > 0$$

$$1 + \alpha_2 + 1 - r_2h + \alpha_2(1 - r_2h) + \frac{a_1h^2r_2^2(1-m)^2H^*}{a_2} > 0$$

$$2 + 2\alpha_2 - r_2h - \alpha_2r_2h + \frac{a_1h^2r_2^2(1-m)^2H^*}{a_2} > 0$$

$$2 + 2\alpha_2 - r_2h(1 + \alpha_2) + \frac{a_1h^2r_2^2(1-m)^2H^*}{a_2} > 0,$$

jika $r_2h < 1$ maka $f(-1) > 0$, dengan kata lain kondisi (i.2) terpenuhi jika $r_2h < 1$,

untuk $q_1 < 1$ diperoleh

$$\alpha_2(1 - r_2h) + \frac{a_1h^2r_2^2(1-m)^2H^*}{a_2} < 1,$$

(ii) E_6 bersifat tak stabil pelana (*saddle*) jika dan hanya jika

$$(ii.1) f(1) > 0,$$

$$(ii.2) f(-1) < 0,$$

untuk $f(1) > 0$ diperoleh

$$1 - p_1 + q_1 > 0$$

$$1 - (\alpha_2 + 1 - r_2h) + \alpha_2(1 - r_2h) + \frac{a_1h^2r_2^2(1-m)^2H^*}{a_2} > 0$$

$$1 - \alpha_2 - 1 + r_2h + \alpha_2 - \alpha_2r_2h + \frac{a_1h^2r_2^2(1-m)^2H^*}{a_2} > 0$$

$$r_2h - \alpha_2r_2h + \frac{a_1h^2r_2^2(1-m)^2H^*}{a_2} > 0$$

$$r_2h(1 - \alpha_2) + \frac{a_1h^2r_2^2(1-m)^2H^*}{a_2} > 0,$$

jika $\alpha_2 < 1$ maka $f(1) > 0$, sehingga kondisi (ii.1) terpenuhi pada saat $\alpha_2 < 1$,

untuk $f(-1) < 0$ diperoleh

$$1 + p_1 + q_1 < 0$$

$$1 + \alpha_2 + 1 - r_2h + \alpha_2(1 - r_2h) + \frac{a_1h^2r_2^2(1-m)^2H^*}{a_2} < 0$$

$$2 + 2\alpha_2 - r_2h - \alpha_2r_2h + \frac{a_1h^2r_2^2(1-m)^2H^*}{a_2} < 0$$

$$2 + 2\alpha_2 - r_2h(1 + \alpha_2) + \frac{a_1h^2r_2^2(1-m)^2H^*}{a_2} < 0,$$

(iii) E_6 bersifat tak stabil (*source*) jika dan hanya jika

$$(iii.1) f(1) > 0,$$

$$(iii.2) f(-1) > 0,$$

$$(iii.3) q_1 > 1,$$

untuk $f(1) > 0$ diperoleh

$$1 - p_1 + q_1 > 0$$

$$1 - (\alpha_2 + 1 - r_2h) + \alpha_2(1 - r_2h) + \frac{a_1h^2r_2^2(1-m)^2H^*}{a_2} > 0$$

$$1 - \alpha_2 - 1 + r_2h + \alpha_2 - \alpha_2r_2h + \frac{a_1h^2r_2^2(1-m)^2H^*}{a_2} > 0$$

$$r_2h - \alpha_2r_2h + \frac{a_1h^2r_2^2(1-m)^2H^*}{a_2} > 0$$

$$r_2h(1 - \alpha_2) + \frac{a_1h^2r_2^2(1-m)^2H^*}{a_2} > 0,$$

jika $\alpha_2 < 1$ maka $f(1) > 0$, dengan kata lain kondisi (iii.1) terpenuhi jika $\alpha_2 < 1$,

untuk $f(-1) > 0$ diperoleh

$$1 + p_1 + q_1 > 0$$

$$1 + \alpha_2 + 1 - r_2h + \alpha_2(1 - r_2h) + \frac{a_1h^2r_2^2(1-m)^2H^*}{a_2} > 0$$

$$2 + 2\alpha_2 - r_2h - \alpha_2r_2h + \frac{a_1h^2r_2^2(1-m)^2H^*}{a_2} > 0$$

$$2 + 2\alpha_2 - r_2h(1 + \alpha_2) + \frac{a_1h^2r_2^2(1-m)^2H^*}{a_2} > 0,$$

jika $r_2h < 1$ maka $f(-1) > 0$, sehingga kondisi (iii.1) terpenuhi saat $r_2h < 1$,

untuk $q_1 > 1$ diperoleh

$$\alpha_2(1 - r_2h) + \frac{a_1h^2r_2^2(1-m)^2H^*}{a_2} > 1,$$

(iv) E_6 merupakan titik kesetimbangan *non-hyperbolic* jika dan hanya jika

$$(iv.1) \quad f(1) > 0,$$

$$(iv.2) \quad p_1^2 - 4q_1 < 0,$$

$$(iv.3) \quad q_1 = 1,$$

untuk $f(1) > 0$ diperoleh

$$1 - p_1 + q_1 > 0$$

$$1 - (\alpha_2 + 1 - r_2h) + \alpha_2(1 - r_2h) + \frac{a_1 h^2 r_2^2 (1 - m)^2 H^*}{a_2} > 0$$

$$1 - \alpha_2 - 1 + r_2h + \alpha_2 - \alpha_2 r_2h + \frac{a_1 h^2 r_2^2 (1 - m)^2 H^*}{a_2} > 0$$

$$r_2h - \alpha_2 r_2h + \frac{a_1 h^2 r_2^2 (1 - m)^2 H^*}{a_2} > 0$$

$$r_2h(1 - \alpha_2) + \frac{a_1 h^2 r_2^2 (1 - m)^2 H^*}{a_2} > 0,$$

jika $\alpha_2 < 1$ maka $f(1) > 0$, dengan kata lain kondisi (iv.1) terpenuhi jika $\alpha_2 < 1$,

untuk $p_1^2 - 4q_1 < 0$ diperoleh

$$(\alpha_2 + 1 - r_2h)^2 - 4 \left(\alpha_2 - \alpha_2 r_2h + \frac{a_1 h^2 r_2^2 (1 - m)^2 H^*}{a_2} \right) < 0,$$

untuk $q_1 = 1$ diperoleh

$$\alpha_2(1 - r_2h) + \frac{a_1 h^2 r_2^2 (1 - m)^2 H^*}{a_2} = 1.$$

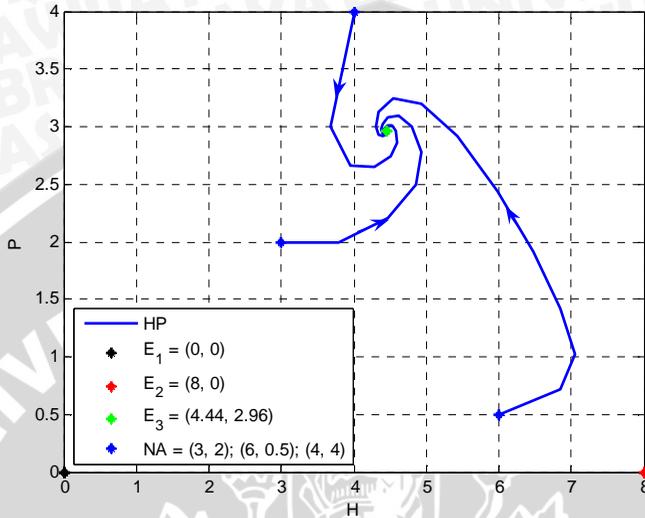
3.7 Simulasi Numerik

Pada bagian ini dibahas simulasi numerik dengan menggunakan *software* MATLAB. Hal ini bertujuan untuk mengilustrasikan hasil analisis dinamik yang telah diperoleh pada subbab sebelumnya. Hasil simulasi numerik menggambarkan solusi H terhadap P di sekitar titik kesetimbangan yang digambarkan dalam bentuk potret fase. *Source code* program model *predator-prey* tanpa dan dengan efek *Allee* dapat dilihat di Lampiran 8.

3.7.1 Simulasi model tanpa efek *Allee*

Berdasarkan hasil analisis yang telah diperoleh, model *predator-prey* diskret tanpa efek *Allee* mempunyai dua titik kesetimbangan yang dapat ditentukan jenis kestabilannya, yaitu $E_2 = (\frac{r_1}{b_1}, 0)$ dan $E_3 = (H^*, P^*)$. Titik kesetimbangan E_3 mempunyai tiga kemungkinan jenis kestabilan dengan syarat tertentu, yaitu stabil asimtotik, tak stabil pelana, atau tak stabil. Titik kesetimbangan E_2 mempunyai dua kemungkinan jenis kestabilan dengan syarat tertentu, yaitu tak stabil pelana atau tak stabil. Karena titik kesetimbangan E_2 selalu tak stabil, maka simulasi model *predator-prey* diskret tanpa efek *Allee* dibagi menjadi dua kasus berikut.

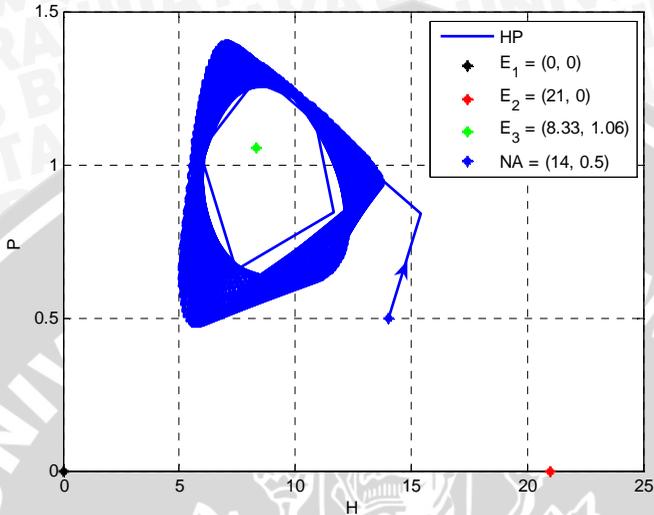
Kasus 1. Pada kasus ini digunakan beberapa nilai parameter, yaitu $h = 1$, $r_1 = 0.8$, $r_2 = 0.5$, $a_1 = 0.3$, $a_2 = 0.3$, $b_1 = 0.1$, dan $m = 0.6$. Berdasarkan hasil analisis yang telah diperoleh, titik kesetimbangan $E_3 = (H^*, P^*)$ bersifat stabil asimtotik jika $m^* < a_1 < n^*$, dengan $m^* = \frac{a_2}{h^2 r_2^2 (1-m)^2 H^*} (2r_2 h + 2b_1 h H^* - r_2 b_1 h^2 H^* - 4)$ dan $n^* = \frac{a_2}{h^2 r_2^2 (1-m)^2 H^*} (r_2 h + b_1 h H^* - r_2 b_1 h^2 H^*)$. Nilai parameter pada kasus 1 menghasilkan $m^* = -3.94$ dan $n^* = 1.22$. Karena nilai $a_1 = 0.3$, jelas bahwa $m^* < a_1 < n^*$, sehingga syarat kestabilan $E_3 = (4.44, 2.96)$ terpenuhi.



Gambar 3.1 Potret fase model tanpa efek *Allee* untuk kasus 1

Dari Gambar 3.1 terlihat bahwa dengan beberapa nilai awal, yaitu $(3, 2)$, $(6, 0.5)$, dan $(4, 4)$, titik kesetimbangan $E_1 = (0, 0)$ dan $E_2 = (8, 0)$ tidak didekati oleh trayektori di sekitarnya, sedangkan titik kesetimbangan $E_3 = (4.44, 2.96)$ didekati oleh trayektori di sekitarnya. Dengan kata lain, titik kesetimbangan $E_1 = (0, 0)$ dan $E_2 = (8, 0)$ bersifat tak stabil, sedangkan titik kesetimbangan $E_3 = (4.44, 2.96)$ bersifat stabil asimtotik. Hal ini berarti kedua populasi *prey* dan *predator* dapat hidup berdampingan dalam batasan nilai tertentu.

Kasus 2. Nilai parameter yang digunakan pada kasus 2, yaitu $h = 1$, $r_1 = 2.1$, $r_2 = 0.95$, $a_1 = 3$, $a_2 = 3$, $b_1 = 0.1$, dan $m = 0.6$. Berdasarkan hasil analisis yang telah diperoleh, titik kesetimbangan $E_3 = (H^*, P^*)$ bersifat tak stabil jika dan hanya jika memenuhi $a_1 > m^*$ dan $a_1 > n^*$. Nilai parameter pada kasus 2 menghasilkan $m^* = -3.05$ dan $n^* = 2.47$. Karena nilai $a_1 = 3$, jelas bahwa $a_1 > m^*$ dan $a_1 > n^*$, sehingga $E_3 = (H^*, P^*)$ bersifat tak stabil.



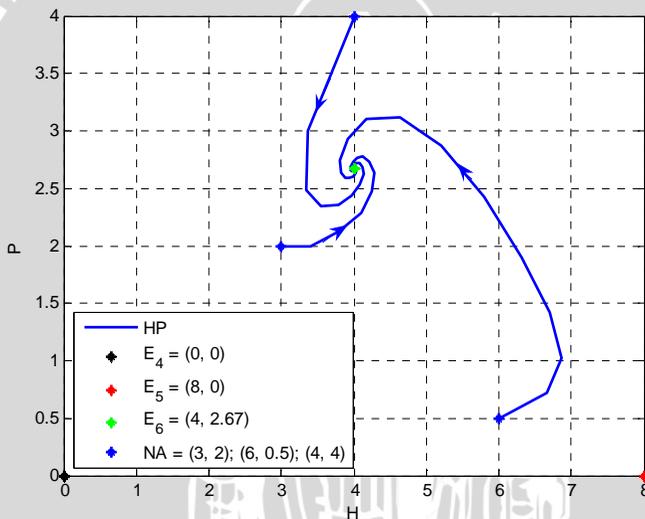
Gambar 3.2 Potret fase model tanpa efek *Allee* untuk kasus 2

Gambar 3.2 menunjukkan bahwa dengan nilai awal $(14, 0.5)$, solusi tidak konvergen ke titik kesetimbangan $E_1 = (0, 0)$, $E_2 = (21, 0)$, dan $E_3 = (8.33, 1.06)$. Hal ini berarti bahwa E_1, E_2 , dan E_3 bersifat tak stabil. Dengan kata lain, kedua populasi *prey* dan *predator* tidak akan mencapai nilai $(0, 0)$, $(21, 0)$, dan $(8.33, 1.06)$. Solusi pada kasus ini berupa solusi periodik yang menunjukkan adanya bifurkasi Neimark-Sacker.

3.7.2 Simulasi model dengan efek *Allee*

Pada bagian ini dibahas simulasi numerik model *predator-prey* diskret dengan efek *Allee*. Model dengan efek *Allee* mempunyai dua titik kesetimbangan yang dapat ditentukan jenis kestabilannya, yaitu $E_5 = (\frac{r_1}{b_1}, 0)$ dan $E_6 = (H^*, P^*)$. Titik kesetimbangan E_6 mempunyai tiga kemungkinan jenis kestabilan dengan syarat tertentu, yaitu stabil asimtotik, tak stabil pelana, atau tak stabil. Titik kesetimbangan E_5 mempunyai dua kemungkinan jenis kestabilan, yaitu tak stabil pelana atau tak stabil. Karena titik kesetimbangan E_5 selalu tak stabil, maka simulasi model *predator-prey* diskret dengan efek *Allee* dibagi menjadi dua kasus berikut.

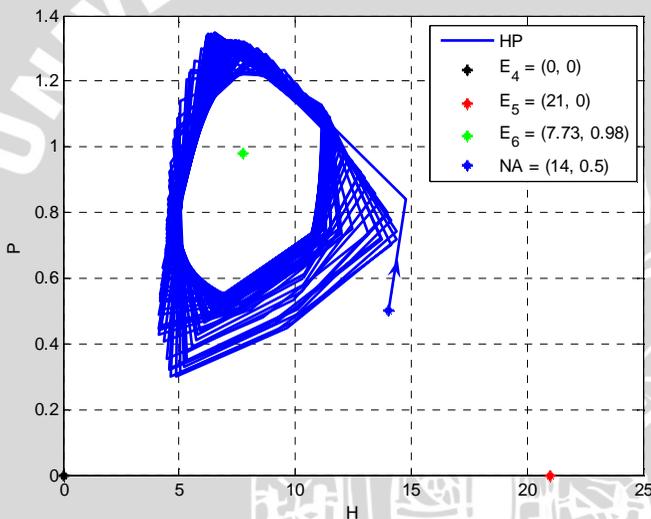
Kasus 3. Pada kasus 3 digunakan nilai parameter yang sama dengan nilai parameter pada kasus 1, yaitu $h = 1$, $r_1 = 0.8$, $r_2 = 0.5$, $a_1 = 0.3$, $a_2 = 0.3$, $b_1 = 0.1$, $m = 0.6$, dan $u = 1$. Berdasarkan hasil analisis yang telah diperoleh, titik kesetimbangan $E_6 = (H^*, P^*)$ bersifat stabil asimtotik jika $\alpha_2(1 - r_2h) + \frac{a_1 h^2 r_2^2 (1-m)^2 H^*}{a_2} < 1$, $\alpha_2 < 1$, dan $r_2 h < 1$, dengan $\alpha_2 = 1 + h \left(\frac{2r_1 H^* - 3b_1 (H^*)^2}{u + H^*} - \frac{r_1 (H^*)^2 + b_1 (H^*)^3}{(u + H^*)^2} - a_1 (1 - m) P^* \right)$. Dari hasil perhitungan dengan nilai parameter pada kasus 3 diperoleh $\alpha_2 = 0.74 < 1$, $r_2 h = 0.5 < 1$, dan $\alpha_2(1 - r_2h) + \frac{a_1 h^2 r_2^2 (1-m)^2 H^*}{a_2} = 0.53 < 1$. Jelas bahwa syarat kestabilan untuk titik kesetimbangan $E_6 = (H^*, P^*)$ terpenuhi. Simulasi pada kasus 3 ditunjukkan pada Gambar 3.3 berikut.



Gambar 3.3 Potret fase model dengan efek *Allee* untuk kasus 3

Dari Gambar 3.3 terlihat bahwa dengan beberapa nilai awal, yaitu (3, 2), (6, 0.5), dan (4, 4), titik kesetimbangan $E_4 = (0, 0)$ dan $E_5 = (8, 0)$ bersifat tak stabil, sedangkan titik kesetimbangan $E_6 = (4, 2.67)$ bersifat stabil asimtotik. Hal ini berarti kedua populasi *prey* dan *predator* akan stabil pada nilai (4, 2.67). Dengan kata lain, kedua populasi *prey* dan *predator* dapat hidup berdampingan dalam batasan nilai tertentu.

Kasus 4. Pada kasus ini parameter yang digunakan yaitu $h = 1$, $r_1 = 2.1$, $r_2 = 0.95$, $a_1 = 3$, $a_2 = 3$, $b_1 = 0.1$, $m = 0.6$, dan $u = 1$. Berdasarkan hasil analisis yang telah diperoleh, titik kesetimbangan $E_6 = (H^*, P^*)$ bersifat tak stabil jika dan hanya jika memenuhi $\alpha_2 < 1$, $r_2 h < 1$, dan $\alpha_2(1 - r_2 h) + \frac{a_1 h^2 r_2^2 (1-m)^2 H^*}{a_2} > 1$. Berdasarkan hasil perhitungan diperoleh $\alpha_2 = 0.45 < 1$, $r_2 h = 0.95 < 1$, dan $\alpha_2(1 - r_2 h) + \frac{a_1 h^2 r_2^2 (1-m)^2 H^*}{a_2} = 1.14 > 1$, sehingga nilai parameter pada kasus 4 menyebabkan titik kesetimbangan $E_6 = (H^*, P^*)$ bersifat tak stabil yang ditunjukkan pada Gambar 3.4.

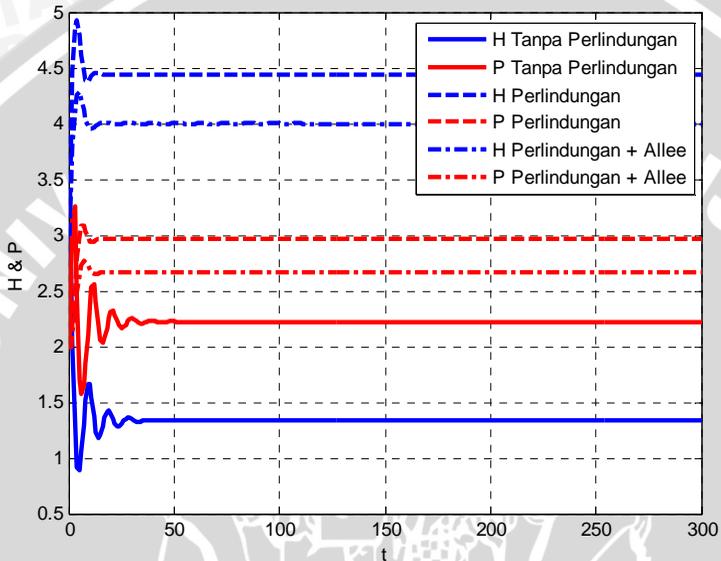


Gambar 3.4 Potret fase model dengan efek *Allee* untuk kasus 4

Pada Gambar 3.4 terlihat bahwa dengan nilai awal (14,0.5), solusi tidak konvergen ke titik kesetimbangan $E_4 = (0,0)$, $E_5 = (21,0)$, dan $E_6 = (7.73,0.98)$. Hal ini berarti bahwa E_4, E_5 , dan E_6 bersifat tak stabil. Solusi pada kasus ini berupa solusi periodik yang menunjukkan adanya bifurkasi Neimark-Sacker.

3.7.3 Perbandingan hasil simulasi model tanpa efek *Allee* dan model dengan efek *Allee*

Perbandingan hasil simulasi model tanpa efek *Allee* dan model dengan efek *Allee* dapat dilihat pada Gambar 3.5 berikut.



Gambar 3.5 Perbandingan model tanpa efek *Allee* dan dengan efek *Allee*

Gambar 3.5 menunjukkan grafik solusi H dan P terhadap t untuk tiga kasus yang berbeda, yaitu tanpa perlindungan dan tanpa efek *Allee* pada *prey* (garis lurus), dengan perlindungan dan tanpa efek *Allee* pada *prey* (garis putus-putus), dengan perlindungan dan efek *Allee* pada *prey* (garis titik). Dari Gambar 3.5 terlihat bahwa dengan nilai awal yang sama, yaitu $(3, 2)$, jumlah populasi *prey* dengan efek perlindungan lebih banyak daripada jumlah populasi *prey* tanpa efek perlindungan. Dengan kata lain, efek perlindungan *prey* menghambat *predator* untuk memangsa *prey*, sehingga populasi *prey* meningkat. Di sisi lain, jumlah populasi *prey* tanpa efek *Allee* lebih banyak dari pada jumlah populasi *prey* dengan efek *Allee*. Hal ini berarti efek *Allee* menghambat laju pertumbuhan *prey*, sehingga jumlah populasi *prey* menurun. Sementara itu, *predator* akan tumbuh menuju *carrying capacity* yang sebanding dengan *prey*.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan tujuan penulisan dan hasil pembahasan pada skripsi ini, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

1. Diskretisasi model *predator-prey* dengan perlindungan *prey* tanpa dan dengan efek *Allee* menggunakan Metode Euler Maju menghasilkan sistem dinamik diskret nonlinear.
2. Pada masing-masing model diperoleh tiga titik kesetimbangan, yakni titik kesetimbangan trivial, titik kesetimbangan batas, dan titik kesetimbangan interior.
3. Titik kesetimbangan trivial tidak dapat ditentukan jenis kestabilannya. Titik kesetimbangan batas mempunyai dua kemungkinan jenis kestabilan, yaitu tak stabil pelana atau tak stabil. Titik kesetimbangan interior mempunyai tiga kemungkinan jenis kestabilan dengan syarat tertentu, yaitu stabil asimtotik, tak stabil pelana, atau tak stabil. Titik kesetimbangan interior merupakan titik kesetimbangan *non-hyperbolic* dengan syarat tertentu.
4. Simulasi numerik untuk model *predator-prey* diskret dengan perlindungan *prey* tanpa dan dengan efek *Allee* sesuai dengan hasil analisis yang telah diperoleh. Nilai parameter ditentukan sesuai kondisi yang diperlukan.

4.2 Saran

Pada pengkajian selanjutnya diharapkan membahas kestabilan untuk titik kesetimbangan *non-hyperbolic* sehingga jenis kestabilan dan syarat kestabilan dari titik kesetimbangan tersebut dapat diperoleh. Selain itu, hasil simulasi untuk kasus 2 dan kasus 4 menunjukkan adanya bifurkasi Neimark-Sacker, sehingga disarankan untuk melakukan analisis lebih lanjut terhadap eksistensi bifurkasi tersebut.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR PUSTAKA

- Arrowsmith, D. K. dan C. M. Place. 1992. *Dynamical Systems, Differential Equation, Maps and Chaotic Behaviour*. Chapman & Hall. London.
- Boyce, W. E. dan R. C. DiPrima. 2005. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Eight Edition. John Wiley & Sons, Inc. USA.
- Courchamp, F., T. Clutton, dan B. Grenfell. 1999. Inverse Density Dependence and Allee Effect. *Trends Ecol.* Vol. 14, Hal. 405–410.
- Elaydi, S. 2005. *An Introduction to Difference Equations*. Third Edition. Springer. New York.
- Isniana, A. P. 2012. *Efek Allee pada Model Predator-Prey Diskret*. Skripsi FMIPA UB.
- Molles, M. C. 2002. *Ecology Concept and Applications*. Second Edition. Mc Graw Hill. Mexico City.
- Pal, A. K. dan G. P. Samanta. 2010. Stability Analysis of an Eco-Epidemiological Model Incorporating a Prey Refuge. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, Vol. 15, No. 4, Hal. 473–491.
- Sakinah, R. A. 2011. *Analisis Global Model Predator-Prey dengan Perlindungan Prey*. Skripsi FMIPA UB.
- Widayani, H. 2012. *Analisis Dinamik Model Predator-Prey dengan Perlindungan terhadap Prey Terinfeksi*. Skripsi FMIPA UB.
- Zhuang, K. dan Z. Wen. 2011. Dynamical Behaviors in a Discrete Predator–Prey Model with a Prey Refuge. *International Journal of Computational and Mathematical Sciences*, Vol. 5, No. 4, Hal. 195-197.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LAMPIRAN

Lampiran 1. Perhitungan Matriks J_3

Matriks Jacobi dari $E_3 = (H^*, P^*)$ adalah

$$\begin{aligned} J(E_3) &= J(H^*, P^*) \\ &= \begin{bmatrix} 1 - hb_1H^* & -a_1h(1-m)H^* \\ \frac{r_2^2h(1-m)}{a_2} & 1 - hr_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} v_{11} &= 1 + h(r_1 - 2b_1H^* - a_1(1-m)P^*) \\ &= 1 + h \left(r_1 - \frac{2b_1r_1a_2}{a_1r_2(1-m)^2 + a_2b_1} - \frac{a_1(1-m)^2r_1r_2}{a_1r_2(1-m)^2 + a_2b_1} \right) \\ &= a_1r_2(1-m)^2 + a_2b_1 + hr_1(a_1r_2(1-m)^2 + a_2b_1) \\ &\quad - 2b_1r_1a_2h - a_1(1-m)^2r_1r_2h \\ &= a_1r_2(1-m)^2 + a_2b_1 - hb_1r_1a_2 \\ &= 1 - \frac{hb_1r_1a_2}{a_1r_2(1-m)^2 + a_2b_1} \\ &= 1 - hb_1H^*, \\ v_{12} &= h(-a_1H^*(1-m)) \\ &= -a_1h(1-m)H^*, \\ v_{21} &= h \left(\frac{a_2(P^*)^2}{(1-m)(H^*)^2} \right) \\ &= h \left(\frac{a_2r_1^2r_2^2(1-m)^2}{(1-m)r_1^2a_2^2} \right) \\ &= \frac{r_2^2h(1-m)}{a_2}, \\ v_{22} &= 1 + h \left(r_2 - \frac{2a_2P^*}{(1-m)H^*} \right) \\ &= 1 + hr_2 - \frac{2ha_2r_1r_2(1-m)}{a_2r_1(1-m)} \\ &= 1 + hr_2 - hr_2 \\ &= 1 - r_2h. \end{aligned}$$

Lampiran 2. Perhitungan Syarat Kestabilan E_3 (Sink)

E_3 stabil asimtotik (sink) jika dan hanya jika kondisi berikut terpenuhi

- (i.1) $f(1) > 0$,
- (i.2) $f(-1) > 0$,
- (i.3) $q < 1$,

untuk $f(1) > 0$ diperoleh

$$1 - p + q > 0$$

$$1 - (2 - h(r_2 + b_1H^*)) + (1 - hb_1H^*)(1 - hr_2) + \frac{a_1h^2r_2^2(1 - m)^2H^*}{a_2} > 0$$

$$1 - 2 + hr_2 + hb_1H^* + 1 - hb_1H^* - hr_2 + h^2r_2b_1H^* + \frac{a_1h^2r_2^2(1 - m)^2H^*}{a_2} > 0$$

$$h^2r_2b_1H^* + \frac{a_1h^2r_2^2(1 - m)^2H^*}{a_2} > 0$$

$$a_2r_2b_1h^2H^* + a_1h^2r_2^2(1 - m)^2H^* > 0,$$

untuk $f(-1) > 0$ diperoleh

$$1 + p + q > 0$$

$$1 + 2 - h(r_2 + b_1H^*) + (1 - hb_1H^*)(1 - hr_2) + \frac{a_1h^2r_2^2(1 - m)^2H^*}{a_2} > 0$$

$$3 - (hr_2 + hb_1H^*) + (1 - hb_1H^* - hr_2 + h^2r_2b_1H^*) + \frac{a_1h^2r_2^2(1 - m)^2H^*}{a_2} > 0$$

$$a_2(3 - hr_2 - hb_1H^* + 1 - hb_1H^* - hr_2 + h^2r_2b_1H^*) + a_1h^2r_2^2(1 - m)^2H^* > 0$$

$$a_2(-2hr_2 - 2hb_1H^* + h^2r_2b_1H^* + 4) + a_1h^2r_2^2(1 - m)^2H^* > 0$$

$$a_1h^2r_2^2(1 - m)^2H^* > a_2(2hr_2 + 2hb_1H^* - h^2r_2b_1H^* - 4)$$

$$a_1 > \frac{a_2}{h^2r_2^2(1 - m)^2H^*} (2r_2h + 2b_1hH^* - r_2b_1h^2H^* - 4),$$

untuk $q < 1$ diperoleh

$$(1 - hb_1H^*)(1 - hr_2) + \frac{a_1h^2r_2^2(1 - m)^2H^*}{a_2} < 1$$

$$1 - hb_1H^* - hr_2 + h^2r_2b_1H^* + \frac{a_1h^2r_2^2(1 - m)^2H^*}{a_2} < 1$$

$$-hb_1H^* - hr_2 + h^2r_2b_1H^* + \frac{a_1h^2r_2^2(1 - m)^2H^*}{a_2} < 0$$

$$a_2(-hb_1H^* - hr_2 + h^2r_2b_1H^*) + a_1h^2r_2^2(1 - m)^2H^* < 0$$

$$a_1h^2r_2^2(1 - m)^2H^* < a_2(hb_1H^* + hr_2 - h^2r_2b_1H^*)$$

$$a_1 < \frac{a_2}{h^2r_2^2(1 - m)^2H^*} (r_2h + b_1hH^* - r_2b_1h^2H^*).$$



Lampiran 3. Perhitungan Syarat Kestabilan E_3 (Saddle)

E_3 saddle jika dan hanya jika kondisi berikut terpenuhi

- (ii.1) $f(1) > 0$,
- (ii.2) $f(-1) > 0$,

untuk $f(1) > 0$ diperoleh

$$1 - p + q > 0$$

$$1 - (2 - h(r_2 + b_1H^*)) + (1 - hb_1H^*)(1 - hr_2) + \frac{a_1h^2r_2^2(1-m)^2H^*}{a_2} > 0$$

$$1 - 2 + hr_2 + hb_1H^* + 1 - hb_1H^* - hr_2 + h^2r_2b_1H^* + \frac{a_1h^2r_2^2(1-m)^2H^*}{a_2} > 0$$

$$h^2r_2b_1H^* + \frac{a_1h^2r_2^2(1-m)^2H^*}{a_2} > 0$$

$$a_2r_2b_1h^2H^* + a_1h^2r_2^2(1-m)^2H^* > 0,$$

untuk $f(-1) > 0$ diperoleh

$$1 + p + q < 0$$

$$1 + 2 - h(r_2 + b_1H^*) + (1 - hb_1H^*)(1 - hr_2) + \frac{a_1h^2r_2^2(1-m)^2H^*}{a_2} < 0$$

$$3 - (hr_2 + hb_1H^*) + (1 - hb_1H^* - hr_2 + h^2r_2b_1H^*) + \frac{a_1h^2r_2^2(1-m)^2H^*}{a_2} < 0$$

$$a_2(3 - hr_2 - hb_1H^* + 1 - hb_1H^* - hr_2 + h^2r_2b_1H^*) + a_1h^2r_2^2(1-m)^2H^* < 0$$

$$a_2(-2hr_2 - 2hb_1H^* + h^2r_2b_1H^* + 4) + a_1h^2r_2^2(1-m)^2H^* < 0$$

$$a_1h^2r_2^2(1-m)^2H^* < a_2(2hr_2 + 2hb_1H^* - h^2r_2b_1H^* - 4)$$

$$a_1 < \frac{a_2}{h^2r_2^2(1-m)^2H^*} (2r_2h + 2b_1hH^* - r_2b_1h^2H^* - 4).$$

Lampiran 4. Perhitungan Syarat Kestabilan E_3 (Source)

E_3 tak stabil (source) jika dan hanya jika kondisi berikut terpenuhi

- (iii.1) $f(1) > 0$,
- (iii.2) $f(-1) > 0$,
- (iii.3) $q > 1$,

untuk $f(1) > 0$ diperoleh

$$\begin{aligned}
 &1 - p + q > 0 \\
 &1 - (2 - h(r_2 + b_1H^*)) + (1 - hb_1H^*)(1 - hr_2) \\
 &\quad + \frac{a_1h^2r_2^2(1 - m)^2H^*}{a_2} > 0 \\
 &1 - 2 + hr_2 + hb_1H^* + 1 - hb_1H^* - hr_2 + h^2r_2b_1H^* \\
 &\quad + \frac{a_1h^2r_2^2(1 - m)^2H^*}{a_2} > 0 \\
 &h^2r_2b_1H^* + \frac{a_1h^2r_2^2(1 - m)^2H^*}{a_2} > 0 \\
 &a_2r_2b_1h^2H^* + a_1h^2r_2^2(1 - m)^2H^* > 0,
 \end{aligned}$$

untuk $f(-1) > 0$ diperoleh

$$\begin{aligned}
 &1 + p + q > 0 \\
 &1 + 2 - h(r_2 + b_1H^*) + (1 - hb_1H^*)(1 - hr_2) \\
 &\quad + \frac{a_1h^2r_2^2(1 - m)^2H^*}{a_2} > 0 \\
 &3 - (hr_2 + hb_1H^*) + (1 - hb_1H^* - hr_2 + h^2r_2b_1H^*) \\
 &\quad + \frac{a_1h^2r_2^2(1 - m)^2H^*}{a_2} > 0 \\
 &a_2(3 - hr_2 - hb_1H^* + 1 - hb_1H^* - hr_2 + h^2r_2b_1H^*) \\
 &\quad + a_1h^2r_2^2(1 - m)^2H^* > 0 \\
 &a_2(-2hr_2 - 2hb_1H^* + h^2r_2b_1H^* + 4) + a_1h^2r_2^2(1 - m)^2H^* > 0 \\
 &a_1h^2r_2^2(1 - m)^2H^* > a_2(2hr_2 + 2hb_1H^* - h^2r_2b_1H^* - 4) \\
 &a_1 > \frac{a_2}{h^2r_2^2(1 - m)^2H^*} (2r_2h + 2b_1hH^* - r_2b_1h^2H^* - 4),
 \end{aligned}$$

untuk $q > 1$ diperoleh

$$(1 - hb_1H^*)(1 - hr_2) + \frac{a_1h^2r_2^2(1 - m)^2H^*}{a_2} > 1$$

$$1 - hb_1H^* - hr_2 + h^2r_2b_1H^* + \frac{a_1h^2r_2^2(1 - m)^2H^*}{a_2} > 1$$

$$-hb_1H^* - hr_2 + h^2r_2b_1H^* + \frac{a_1h^2r_2^2(1 - m)^2H^*}{a_2} > 0$$

$$a_2(-hb_1H^* - hr_2 + h^2r_2b_1H^*) + a_1h^2r_2^2(1 - m)^2H^* > 0$$

$$a_1h^2r_2^2(1 - m)^2H^* > a_2(hb_1H^* + hr_2 - h^2r_2b_1H^*)$$

$$a_1 > \frac{a_2}{h^2r_2^2(1 - m)^2H^*} (r_2h + b_1hH^* - r_2b_1h^2H^*)$$



Lampiran 5. Perhitungan Syarat Kestabilan E_3 (*Non-Hyperbolic*)

E_3 adalah titik kesetimbangan *non-hyperbolic* jika dan hanya jika kondisi berikut terpenuhi

$$(iv.1) \quad f(1) > 0,$$

$$(iv.2) \quad p^2 - 4q < 0,$$

$$(iv.3) \quad q = 1,$$

untuk $f(1) > 0$ diperoleh

$$1 - p + q > 0$$

$$1 - (2 - h(r_2 + b_1H^*)) + (1 - hb_1H^*)(1 - hr_2)$$

$$+ \frac{a_1 h^2 r_2^2 (1 - m)^2 H^*}{a_2} > 0$$

$$1 - 2 + hr_2 + hb_1H^* + 1 - hb_1H^* - hr_2 + h^2 r_2 b_1 H^*$$

$$+ \frac{a_1 h^2 r_2^2 (1 - m)^2 H^*}{a_2} > 0$$

$$h^2 r_2 b_1 H^* + \frac{a_1 h^2 r_2^2 (1 - m)^2 H^*}{a_2} > 0$$

$$a_2 r_2 b_1 h^2 H^* + a_1 h^2 r_2^2 (1 - m)^2 H^* > 0,$$

untuk $p^2 - 4q < 0$ diperoleh

$$(2 - hr_2 - hb_1H^*)^2 - 4q < 0$$

$$4 - 4hr_2 - 4hb_1H^* + 2h^2 r_2 b_1 H^* + h^2 r_2^2 + h^2 b_1^2 (H^*)^2$$

$$- 4(1 - hb_1H^*)(1 - hr_2) + \frac{a_1 h^2 r_2^2 (1 - m)^2 H^*}{a_2}$$

$$< 0$$

$$4 - 4hr_2 - 4hb_1H^* + 2h^2 r_2 b_1 H^* + h^2 r_2^2 + h^2 b_1^2 (H^*)^2$$

$$- 4(1 - hb_1H^* - hr_2 + h^2 r_2 b_1 H^*)$$

$$+ \frac{a_1 h^2 r_2^2 (1 - m)^2 H^*}{a_2} < 0$$

$$h^2 r_2^2 - 2h^2 r_2 b_1 H^* + h^2 b_1^2 (H^*)^2 + \frac{a_1 h^2 r_2^2 (1 - m)^2 H^*}{a_2} < 0$$

$$a_2 (h^2 r_2^2 - 2h^2 r_2 b_1 H^* + h^2 b_1^2 (H^*)^2) + a_1 h^2 r_2^2 (1 - m)^2 H^* < 0$$

$$a_1 h^2 r_2^2 (1 - m)^2 H^* < a_2 (-h^2 r_2^2 + 2h^2 r_2 b_1 H^* - h^2 b_1^2 (H^*)^2)$$

$$a_1 < \frac{a_2}{h^2 r_2^2 (1-m)^2 H^*} (-h^2 r_2^2 + 2h^2 r_2 b_1 H^* - h^2 b_1^2 (H^*)^2),$$

untuk $q = 1$ diperoleh

$$(1 - hb_1 H^*)(1 - hr_2) + \frac{a_1 h^2 r_2^2 (1-m)^2 H^*}{a_2} = 1$$

$$1 - hb_1 H^* - hr_2 + h^2 r_2 b_1 H^* + \frac{a_1 h^2 r_2^2 (1-m)^2 H^*}{a_2} = 1$$

$$-hb_1 H^* - hr_2 + h^2 r_2 b_1 H^* + \frac{a_1 h^2 r_2^2 (1-m)^2 H^*}{a_2} = 0$$

$$a_2(-hb_1 H^* - hr_2 + h^2 r_2 b_1 H^*) + a_1 h^2 r_2^2 (1-m)^2 H^* = 0$$

$$a_1 h^2 r_2^2 (1-m)^2 H^* = a_2(hb_1 H^* + hr_2 - h^2 r_2 b_1 H^*)$$

$$a_1 = \frac{a_2}{h^2 r_2^2 (1-m)^2 H^*} (r_2 h + b_1 h H^* - r_2 b_1 h^2 H^*).$$



Lampiran 6. Perhitungan Nilai $E_6 = (H^*, P^*)$

Perhitungan H^* dan P^* diperoleh dari persamaan

$$(r_1 - b_1 H^*) \frac{H^*}{u + H^*} - a_1(1 - m)P^* = 0, \quad (1.1)$$

$$r_2 - a_2 \frac{P^*}{(1 - m)H^*} = 0. \quad (1.2)$$

Untuk mencari nilai dari H^* , ditinjau persamaan (1.2), sehingga diperoleh

$$P^* = \frac{r_2(1 - m)H^*}{a_2}. \quad (1.3)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (1.3) ke persamaan (1.1) didapatkan

$$(r_1 - b_1 H^*) \frac{H^*}{u + H^*} - a_1(1 - m)P^* = 0$$

$$(r_1 - b_1 H^*) \frac{H^*}{u + H^*} - a_1(1 - m) \frac{r_2(1 - m)H^*}{a_2} = 0$$

$$(r_1 - b_1 H^*) \frac{H^*}{u + H^*} - \frac{a_1 r_2 H^* (1 - m)^2}{a_2} = 0$$

$$(r_1 - b_1 H^*) H^* a_2 - a_1 r_2 H^* (1 - m)^2 (u + H^*) = 0$$

$$a_2 r_1 H^* - a_2 b_1 (H^*)^2 - a_1 r_2 u H^* (1 - 2m + m^2)$$

$$- a_1 r_2 (H^*)^2 (1 - 2m + m^2) = 0$$

$$a_2 r_1 H^* - a_2 b_1 (H^*)^2 - a_1 r_2 u H^* + 2m a_1 r_2 u H^* - a_1 r_2 u H^* m^2$$

$$- a_1 r_2 (H^*)^2 + 2m a_1 r_2 (H^*)^2 - m^2 a_1 r_2 (H^*)^2 = 0$$

$$H^* (a_2 r_1 - a_1 r_2 u + 2m a_1 r_2 u - a_1 r_2 u m^2 + H^* (-a_2 b_1 - a_1 r_2$$

$$+ 2m a_1 r_2 - m^2 a_1 r_2)) = 0$$

$$a_2 r_1 - a_1 r_2 u + 2m a_1 r_2 u - a_1 r_2 u m^2$$

$$= H^* (a_2 b_1 + a_1 r_2 - 2m a_1 r_2 + m^2 a_1 r_2)$$

$$H^* = \frac{a_2 r_1 - a_1 r_2 u + 2a_1 m r_2 u - a_1 m^2 r_2 u}{a_2 b_1 + a_1 r_2 - 2a_1 m r_2 + a_1 m^2 r_2}$$

$$\text{sehingga diperoleh}$$

$$H^* = \frac{a_2 r_1 - a_1 r_2 u (1 - m)^2}{a_2 b_1 + a_1 r_2 (1 - m)^2}. \quad (1.4)$$

Untuk mencari nilai dari P^* , ditinjau persamaan (1.2), sehingga diperoleh

$$H^* = \frac{a_2 P^*}{(1-m)r_2}. \quad (1.5)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (1.5) ke persamaan (1.1) didapatkan

$$\begin{aligned} & (r_1 - b_1 H^*) \frac{H^*}{u + H^*} - a_1 (1-m) P^* = 0 \\ & \left(r_1 - \frac{a_2 b_1 P^*}{(1-m)r_2} \right) \left(\frac{a_2 P^*}{(1-m)r_2} \times \frac{(1-m)r_2}{u(1-m)r_2 + a_2 P^*} \right) - a_1 (1-m) P^* = 0 \\ & \left(r_1 - \frac{a_2 b_1 P^*}{(1-m)r_2} \right) \left(\frac{a_2 P^*}{u(1-m)r_2 + a_2 P^*} \right) - a_1 (1-m) P^* = 0 \\ & \left(\frac{r_1 r_2 (1-m) - a_2 b_1 P^*}{(1-m)r_2} \right) \left(\frac{a_2 P^*}{u(1-m)r_2 + a_2 P^*} \right) - a_1 (1-m) P^* = 0 \\ & \frac{a_2 P^* r_1 r_2 (1-m) - a_2^2 b_1 (P^*)^2}{ur_2^2 (1-m)^2 + (1-m)r_2 a_2 P^*} - a_1 (1-m) P^* = 0 \\ & a_2 P^* r_1 r_2 (1-m) - a_2^2 b_1 (P^*)^2 - a_1 (1-m)^3 P^* ur_2^2 \\ & \quad - a_1 (1-m)^2 (P^*)^2 r_2 a_2 = 0 \\ & a_2 P^* r_1 r_2 - a_2 m P^* r_1 r_2 - a_2^2 b_1 (P^*)^2 - a_1 P^* ur_2^2 (1-3m \\ & \quad + 3m^2 - m^3) - a_1 (P^*)^2 r_2 a_2 (1-2m + m^2) = 0 \\ & a_2 P^* r_1 r_2 - a_2 m P^* r_1 r_2 - a_2^2 b_1 (P^*)^2 - a_1 ur_2^2 P^* + 3ma_1 ur_2^2 P^* \\ & \quad - 3m^2 a_1 ur_2^2 P^* + m^3 a_1 ur_2^2 P^* - a_1 a_2 r_2 (P^*)^2 \\ & \quad + 2ma_1 a_2 r_2 (P^*)^2 - m^2 a_1 a_2 r_2 (P^*)^2 = 0 \\ & P^* (a_2 r_1 r_2 - a_2 m r_1 r_2 - a_1 ur_2^2 + 3ma_1 ur_2^2 - 3m^2 a_1 ur_2^2 \\ & \quad + m^3 a_1 ur_2^2 + P^* (-a_2^2 b_1 - a_1 a_2 r_2 + 2ma_1 a_2 r_2 \\ & \quad - m^2 a_1 a_2 r_2)) = 0 \\ & a_2 r_1 r_2 - a_2 m r_1 r_2 - a_1 ur_2^2 + 3ma_1 ur_2^2 - 3m^2 a_1 ur_2^2 + m^3 a_1 ur_2^2 \\ & \quad = P^* (a_2^2 b_1 + a_1 a_2 r_2 - 2ma_1 a_2 r_2 + m^2 a_1 a_2 r_2) \\ & P^* = \frac{a_2 r_1 r_2 - a_2 m r_1 r_2 - a_1 ur_2^2 + 3ma_1 ur_2^2 - 3m^2 a_1 ur_2^2 + m^3 a_1 ur_2^2}{a_2^2 b_1 + a_1 a_2 r_2 - 2ma_1 a_2 r_2 + m^2 a_1 a_2 r_2} \\ & = \frac{a_2 r_1 r_2 - a_2 m r_1 r_2 - a_1 ur_2^2 + (2+1)ma_1 ur_2^2 - (2+1)m^2 a_1 ur_2^2 + m^3 a_1 ur_2^2}{a_2^2 b_1 + a_1 a_2 r_2 - 2ma_1 a_2 r_2 + m^2 a_1 a_2 r_2} \\ & = \frac{r_2 (a_2 r_1 - a_2 m r_1 - a_1 ur_2 + (2+1)ma_1 ur_2 - (2+1)m^2 a_1 ur_2 + m^3 a_1 ur_2)}{a_2 (a_2 b_1 + a_1 r_2 - 2ma_1 r_2 + m^2 a_1 r_2)} \\ & = \frac{(a_2 r_1 - a_1 ur_2 + 2ma_1 ur_2 - m^2 a_1 ur_2)(1-m)r_2}{a_2 (a_2 b_1 + a_1 r_2 - 2ma_1 r_2 + m^2 a_1 r_2)} \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$P^* = \frac{r_2(1-m)H^*}{a_2}. \quad (1.6)$$

Persamaan (1.4) dan (1.6) merupakan titik kesetimbangan $E_6(H^*, P^*)$.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



Lampiran 7. Perhitungan Matriks J_6

Matriks Jacobi dari $E_6 = (H^*, P^*)$ adalah

$$\begin{aligned} J(E_6) &= J(H^*, P^*) \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_2 & -a_1 h(1-m)H^* \\ \frac{r_2^2 h(1-m)}{a_2} & 1 - hr_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} w_{11} &= \alpha_2 \\ &= 1 + h \left(\frac{2r_1 H^* - 3b_1 (H^*)^2}{u + H^*} - \frac{r_1 (H^*)^2 + b_1 (H^*)^3}{(u + H^*)^2} - a_1 (1-m)P^* \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{12} &= h(-a_1 H^* (1-m)) \\ &= -a_1 h(1-m)H^*, \end{aligned}$$

$$w_{21} = h \left(\frac{a_2 (P^*)^2}{(1-m)(H^*)^2} \right)$$

$$= h \left(\frac{a_2 r_1^2 r_2^2 (1-m)^2}{(1-m)r_1^2 a_2^2} \right)$$

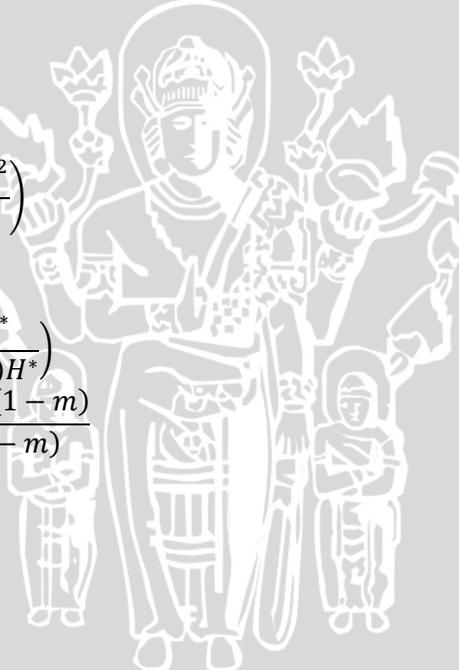
$$= \frac{r_2^2 h(1-m)}{a_2},$$

$$w_{22} = 1 + h \left(r_2 - \frac{2a_2 P^*}{(1-m)H^*} \right)$$

$$= 1 + hr_2 - \frac{2ha_2 r_1 r_2 (1-m)}{a_2 r_1 (1-m)}$$

$$= 1 + hr_2 - hr_2$$

$$= 1 - r_2 h.$$



Lampiran 8. Program Model tanpa dan dengan Efek Allee

```
clear all;
dt=1;
t=0:dt:300;
n=length(t);
r1=2.1;
r2=0.95;
a1=3;
a2=3;
b1=0.1;
m=0.6;
u=1; % untuk model tanpa efek Allee (u=0)
H(1)=14;
P(1)=0.5;
H5=r1/b1;
H6=(a2*r1-a1*r2*u+2*a1*m*r2*u-
a1*m^2*r2*u)/(a2*b1+a1*r2-2*a1*m*r2+a1*m^2*r2);
P6=(r2*(1-m)*H6)/a2;

for i=1:n-1
    H(i+1)=H(i)+H(i)*dt*((r1-
b1*H(i))*H(i)/(u+H(i))-a1*(1-m)*P(i));
    P(i+1)=P(i)+P(i)*dt*(r2-a2*P(i)/((1-m)*H(i)));
end;

figure(1);
plot(t,H,'-r',t,P,'-g','linewidth',2);
xlabel('t');
ylabel('H & P');
legend('H','P');
grid;
figure(2);
plot(H,P,'b',0,0,'k',H5,0,'r',H6,P6,'g',H(1),P(1),
'b*', 'linewidth',2);
xlabel('H');
ylabel('P');
legend('HP','E_4 = (0, 0)', 'E_5 = (21, 0)', 'E_6 =
(7.73, 0.98)', 'NA = (14, 0.5)');
grid on;
```

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

