HOMOMORFISMA SEMIMODUL

SKRIPSI

oleh :
INUL AYYAMIL IZZAH
0810940044-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2012

HOMOMORFISMA SEMIMODUL

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
dalam bidang matematika

oleh :
INUL AYYAMIL IZZAH
0810940044-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2012

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

HOMOMORFISMA SEMIMODUL

oleh :

INUL AYYAMIL IZZAH
0810940044-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji pada tanggal 9 Februari 2012 dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Pembimbing I	Pembimbing II
Dr. Abdul Rouf A., M.Sc. **NIP.196709071992031001**	**Drs. Bambang Sugandi, M.Si.** **NIP. 195905151992031002**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Abdul Rouf A., M.Sc.
NIP.196709071992031001

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	**: Inul Ayyamil Izzah**
NIM	**: 0810940044**
Jurusan	**: Matematika**
Penulis Skripsi berjudul	**: Homomorfisma Semimodul**

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. **isi skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam skripsi ini,**
2. **apabila di kemudian hari ternyata skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang,
yang menyatakan,

Inul Ayyamil Izzah
NIM. 0810940044

HOMOMORFISMA SEMIMODUL

Abstrak

Semimodul adalah suatu struktur yang dibangun dari monoid komutatif dan semiring dengan pergandaan skalar. Jika monoid komutatif dan semiring merupakan struktur aljabar yang memiliki homomorfisma, maka pada semimodul juga terdapat homomorfisma. Homomorfisma pada semimodul berbeda dari homomorfisma pada monoid komutatif dan semiring. Oleh karena itu pada skripsi ini dibahas homomorfisma semimodul serta sifat-sifatnya. Sifat pada homomorfisma modul belum tentu berlaku pada semimodul sebab semimodul lebih luas daripada modul. Sifat yang hampir sama dengan homomorfisma pada modul adalah bahwa suatu monoid komutatif merupakan semimodul atas semiring jika terdapat homomorfisma dengan syarat tertentu. Selain itu, dapat diperlihatkan bahwa homomorfisma dua semimodul bebas dengan semimodul bebas isomorfik.

Kata kunci: semimodul, semimodul bebas, homomorfisma semimodul.

SEMIMODULE HOMOMORPHISM

Abstract

Semimodule is a structure constructed from a commutative monoid and semiring with scalar multiplication which satisfied some axioms. Since there are homomorphisms between commutative monoids as well as between semirings, there is also a homomorphism on semimodule. Homomorphism on semimodul is different from homomorphism on commutative monoid or on semiring. Therefore, this minithesis discusses homomorphism on semimodules and its properties. Properties on module homomorphism are not necessarily satisfied on semimodule homomorphism because semimodule is wider then module. Properties similiar to the module homomorphism is that a commutative monoid is a semimodule over semiring if there is homomorphism with certain condition. Moreover, it can be shown that homomorphism of free semimodule with free semimodule is isomorphic.

Keyword: Semimodule, free semimodule, semimodule homomorphism.

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan bimbingan dan petunjuk-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul *Homomorfisma Semimodul* dengan baik dan lancar. Shalawat serta salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW sebagai suri tauladan bagi penulis.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan serta motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada

1. Dr. Abdul Rouf A., M.Sc. selaku pembimbing I dan Ketua Jurusan Matematika serta Drs. Bambang Sugandi, M.Si. selaku pembimbing II atas segala bimbingan, motivasi, saran, waktu, serta kesabaran yang telah diberikan selama pembimbingan skripsi ini dan selalu mendorong penulis untuk menyelesaikan skripsi ini,
2. Drs. M. Muslikh M.Si. selaku dosen pembimbing akademik dan dosen penguji, Dr. Wuryansari M.K., M.Si. serta Dra. Ari Andari M.Si. selaku dosen penguji atas segala saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini,
3. Dr. Sobri Abusini selaku Ketua Program Studi Matematika dan seluruh dosen program studi Matematika yang telah memberikan bekal dan ilmu pengetahuan serta staf administrasi Jurusan Matematika atas segala bantuannya,
4. Ayah serta ibunda tercinta, saudara-saudaraku tercinta, mas Jaja, mas Rozi, Fifi dan Mbak Dia serta semua anggota keluarga besarku atas segala yang telah diberikan berupa dukungan yang tak pernah habis,
5. Mbah, Ineh,dan Mofida atas motivasi, waktu dan pinjaman laptop selama penulisan skripsi ini, serta teman-teman D’Math Bee’08 atas bantuan yang telah diberikan dan kebersamaannya selama ini,
6. Kakak tingkat program studi Matematika 2007 dan keluarga besar Lingkar Studi Matematika (LSM) atas segala motivasi selama penulis menempuh kuliah,
7. Keluarga besar Kertopamuji 54A dan Kertosentono 135, terutama teman seperjuangan saya Nurma dan Maryam,
8. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Allah SWT memberikan anugerah dan barokah-Nya kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini. Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat banyak kekurangan. Untuk itu penulis sangat mengharapkan kritik dan saran melalui email penulis imoetiiez@rocketmail.com. Akhir kata, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak.

Malang, 03 Desember 2012

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

HALAMAN JUDUL i
HALAMAN PENGESAHAN iii
HALAMAN PERNYATAAN v
ABSTRAK vii
ABSTRACT ix
KATA PENGANTAR xi
DAFTAR ISI xiii
BAB I PENDAHULUAN
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 2
1.3 Tujuan 2

BAB II TINJAUAN PUSTAKA
2.1 Relasi, Pemetaan, dan Operasi Biner 3
2.2 Semigrup, Subsemigrup, dan Grup Komutatif 7
2.3 Semiring dan Ring 11
2.4 Modul 16
2.5 Modul Faktor, Homomorfisma Modul, dan Modul Bebas 20

BAB III PEMBAHASAN
3.1 Semimodul dan Subsemimodul 27
3.2 Pembangun Subsemimodul, Semimodul Siklik, Semimodul Bebas 31
3.3 Homomorfisma Semimodul 33

BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN
4.1 Kesimpulan 43
4.2 Saran 43
DAFTAR PUSTAKA **45**

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Struktur aljabar adalah suatu himpunan tak kosong dengan satu atau lebih operasi biner dan memenuhi beberapa aksioma. Pembeda antara struktur aljabar yang satu dengan yang lain adalah banyaknya operasi dan banyaknya aksioma.

Grup adalah salah satu contoh struktur aljabar dengan satu operasi biner dan memenuhi beberapa aksioma. Semigrup juga merupakan struktur ajabar dengan satu operasi biner. Pembeda antara grup dan semigrup adalah banyaknya aksioma yang dipenuhi. Aksioma pada grup lebih banyak daripada semigrup, sehingga setiap grup merupakan semigrup.

Contoh struktur aljabar dengan dua operasi biner dan memenuhi beberapa aksioma adalah ring dan semiring. Perbedaan antara keduanya juga terletak pada banyaknya aksioma. Semiring lebih luas dari pada ring karena aksioma yang dipenuhi lebih sedikit, sehingga setiap ring juga merupakan semiring.

Selama ini telah dikenal suatu struktur aljabar yang disebut ruang vektor. Modul merupakan perumuman dari ruang vektor. Pada modul, syarat skalar diperumum menjadi elemen pada suatu ring. Dengan demikian ruang vektor merupakan suatu kasus khusus dari modul dan karena sifat modul yang lebih luas dari ruang vektor maka ada berbagai sifat-sifat *trivial* pada ruang vektor menjadi *non-trivial* pada modul.

Jika pada grup tedapat semigrup dan pada ring juga terdapat semiring, maka pada modul juga terdapat kasus yang lebih luas yang merupakan keterkaitan antara semigrup dan semiring, yang dinamakan dengan semimodul.

Homomorfisma adalah pemetaan yang memiliki sifat tertentu. Konsep homomorfisma dijumpai pada grup dan ring. Ring dan grup adalah struktur aljabar yang mendasari modul, sehingga pada modul juga terdapat homomorfisma. Jika pada modul berlaku homomorfisma, maka pada semimodul juga akan berlaku. Oleh karena itu, pada skripsi ini dibahas definisi serta sifat-sifat pada semimodul dan homomorfisma semimodul.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, permasalahan yang dibahas dalam skripsi ini adalah bagaimana definisi, contoh, serta sifat-sifat homomorfisma semimodul?

1.3 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah membahas definisi dan contoh semimodul, serta Teorema yang terdapat pada homomorfisma semimodul.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Semimodul merupakan perluasan dari modul. Sebelum mendefinisikan semimodul dan membahas sifat homomorfisma semimodul, akan dibahas definisi serta sifat-sifat pada homomorfisma modul yang telah dikenal. Beberapa definisi dan teorema yang berkaitan dengan modul dibahas berikut ini.

2.1 Relasi, Pemetaan, dan Operasi Biner

Relasi dan pemetaan mendasari homomorfisma. Sedangkan operasi biner berkitan dengan struktur aljabar. Oleh karena itu, berikut ini akan dibahas terlebih dahulu tentang relasi, pemetaan, dan operasi biner.

Definisi 2.1.1 (Hasil Kali Cartesius)

Misalkan A dan B adalah himpunan tidak kosong. Himpunan semua pasangan terurut (x, y),

$$A \times B = \{(x, y)|x \in A, y \in B\}$$

disebut hasil kali Cartesius (Cartesian product)

(Bhattacharya, 1994).

Definisi 2.1.2 (Relasi)

Misalkan A dan B himpunan. Suatu himpunan bagian R dari $A \times B$ disebut relasi dari A ke B. Jika $(x, y) \in R$, maka x disebut berelasi R ke y, ditulis xRy (Bhattacharya, 1994).

Berikut ini adalah contoh hasil kali Cartesius dan relasi.

Contoh 2.1.3

Misalkan $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{6,7\}$

a) $A \times B = \{(1,6), (1,7), (2,6), (2,7), (3,6), (3,7)\}$,
b) $B \times A = \{(6,1), (6,2), (6,3), (7,1), (7,2), (7,3)\}$.

Salah satu contoh relasi dari A ke B dan B ke A (dinotasikan R) adalah

a) $R = \{(1,6), (2,6), (1,7), (2,7)\}$,
b) $R = \{(6,1), (6,3), (7,1), (7,3)\}$.

Contoh 2.1.4

Misalkan $A = B = \{1,2,3,4,5\}$. Didefinisikan R relasi "kurang dari" pada A: aRb jika dan hanya jika $a < b$. Maka
$R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)\}$.

Definisi 2.1.5 (Relasi Ekuivalensi)

Misalkan R adalah relasi pada himpunan X. R dikatakan:

a) refleksif jika xRx, untuk setiap $x \in X$,
b) simetri jika $xRy \to yRx$, untuk setiap $x, y \in X$,
c) transitif jika xRy dan $yRz \to xRz$, untuk setiap $x, y, z \in X$.

Jika R refleksif, simetri, dan transitif, maka R disebut relasi ekuivalensi pada X (Bhattacharya, 1994).

Berikut ini adalah contoh relasi ekuivalensi.

Contoh 2.1.6

Relasi kongruensi "≡" modulo n pada $\mathbb{Z}$ yang didefinisikan sebagai $x \equiv y$ jika dan hanya jika n membagi $x - y$, untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$, merupakan relasi ekuivalensi.

Bukti:

Untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}$, akan dipenuhi kondisi di bawah ini.

i. n membagi $x - x = 0$, oleh karena itu $x \equiv x \ (mod\ n)$.
ii. jika $x \equiv y \ (mod\ n)$, maka n membagi $x - y$ atau $x - y = nk$, untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$. Hal ini berakibat $y - x = n(-k)$ dengan $-k \in \mathbb{Z}$. Jadi $y \equiv x \ (mod\ n)$.
iii. jika $x \equiv y \ (mod\ n)$ dan $y \equiv z \ (mod\ n)$, maka n membagi $x - y$ dan $y - z$, atau $x - y = nk_1, y - z = nk_2$. Hal ini berakibat $x - z = n(k_1 + k_2)$, dengan $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Jadi $x \equiv z \ (mod\ n)$.

Terbukti bahwa kongruensi modulo n adalah relasi ekuivalensi pada $\mathbb{Z}$.

Definisi 2.1.7 (Kelas Ekuivalensi)

Misalkan E adalah relasi ekuivalensi pada himpunan X dan $a \in X$. Himpunan semua elemen X yang berelasi E ke a dikatakan kelas ekuivalensi dari a pada E dan dinotasikan dengan $E(a)$:

$$E(a) = \{x \in X | xEa\}.$$

Himpunan semua kelas ekuivalensi E pada X disebut *quotient set* dari X oleh E dan dinotasikan X/E, dinyatakan dengan:

$$X/E = \{E(a) | a \in X\}$$

(Bhattacharya, 1994).

Untuk memperjelas konsep kelas ekuivalensi, di bawah ini diberikan contoh.

Contoh 2.1.8

$X = \mathbb{Z}$ dan n adalah bilangan bulat positif. Pada Contoh 2.1.6 telah diperlihatkan bahwa relasi kongruensi "≡" merupakan relasi ekuivalensi pada $\mathbb{Z}$. Himpunan kelas ekuivalensi $\mathbb{Z}/\equiv$, dinotasikan $\mathbb{Z}_n$ adalah himpunan $(\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{(n-1)})$, dengan

$\bar{0} = \{\dots, -2n, -n, 0, n, 2n, \dots\}$

$\bar{1} = \{\dots, -2n+1, -n+1, 1, n+1, 2n+1, \dots\}$

.

.

.

$\overline{n-1} = \{\dots, -n-1, -1, n-1, 2n-1, 3n-1 \dots\}$.

Definisi 2.1.9 (Pemetaan)

Misalkan A dan B adalah himpunan tidak kosong. Pemetaan f dari A ke B adalah himpunan bagian dari $A \times B$, yang memenuhi untuk setiap $x \in A$ terdapat tepat satu $y \in B$ sedemikian sehingga pasangan $(a, b) \in f$. Pemetaan f dinotasikan dengan

$$f: x \in A \mapsto f(x) = y \in B$$

(Herstein, 1975).

Definisi 2.1.10

Suatu pemetaan f dari A ke B disebut:

1. injektif (1-1) jika untuk setiap $x_1 \neq x_2 \in A$ maka $f(x_1) \neq f(x_2)$,
2. surjektif (onto) jika untuk setiap elemen y di B, terdapat elemen x di A sedemikian sehingga $f(x) = y$,
3. bijektif jika f injektif dan surjektif

(Herstein, 1975).

Contoh 2.1.11

Misalkan $A = B = \mathbb{R}$. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai $f(x) = \ln x$, untuk setiap $x \in \mathbb{R}$.. Maka untuk sebarang $x \in \mathbb{R}$, pemetaan f injektif. Sebab

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ \Leftrightarrow \ln x_1 &= \ln x_2 \\ \Leftrightarrow e^{\ln x_1} &= e^{\ln x_2} \\ \Leftrightarrow x_1 &= x_2. \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa f injektif.

Definisi 2.1.12 (Operasi Biner)

Misalkan S adalah himpunan tak kosong. Operasi biner $*$ pada himpunan S adalah pemetaan $S \times S$ ke S, dinotasikan dengan:

$$*: S \times S \to S.$$

Operasi biner pada S memasangkan setiap pasangan terurut $(a, b) \in S \times S$ dengan tepat satu elemen $c \in S$, yaitu

$$(a, b) \mapsto c = a * b.$$

Dengan kata lain, operasi biner $*$ bersifat tertutup pada S (Bhattacharya, 1994).

Contoh operasi biner adalah sebagai berikut.

Contoh 2.1.13

(i). Operasi penjumlahan $(+)$ dan pergandaan $(.)$ pada himpunan $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ merupakan operasi biner.

(ii). Operasi $*$ pada $S = \mathbb{Z}_n$ yang didefinisikan

$$\begin{aligned} *: \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n &\to \mathbb{Z}_n \\ (\bar{x}, \bar{y}) &\longmapsto \bar{x} * \bar{y} = \overline{x\#y} \end{aligned}$$

untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_n$, merupakan operasi biner. Dalam hal ini, operasi # dapat berupa pergandaan atau penjumlahan bilangan bulat, yaitu:

$$\overline{x\#y} = \overline{x \cdot y} = \{z \in \mathbb{Z} | z = (xy) mod\, n\}$$

atau

$$\overline{x\#y} = \overline{x + y} = \{z \in \mathbb{Z} | z = (x + y) mod\, n\}.$$

(iii). Jika semesta S adalah himpunan semua matriks operasi $(+)$ bukan merupakan operasi biner pada himpunan matriks karena $A + B$ tidak terdefinisi jika matriks A mempunyai jumlah baris atau kolom yang berbeda dari B.

2.2 Semigrup, Subsemigrup dan Grup Komutatif

Setelah mengetahui definisi operasi biner, selanjutnya dibahas mengenai semigrup, subsemigrup, dan grup komutatif yang merupakan struktur aljabar dengan satu operasi biner.

Definisi 2.2.1 (Semigrup)

Misalkan M adalah himpunan tak kosong yang di dalamnya didefinisikan operasi biner $*$. $(M,*)$ disebut semigrup jika memenuhi

i. $(M,*)$ tertutup, yaitu $a * b \in M$, untuk setiap $a, b \in M$,
ii. $(M,*)$ bersifat assosiatif, yaitu $(a * b) * c = a * (b * c)$, untuk setiap $a, b, c \in M$ (Kandasamy, 2002).

Definisi 2.2.2 (Semigrup Komutatif)

Semigrup $(M,*)$ disebut semigrup komutatif jika untuk setiap $a, b \in M$ berlaku $a * b = b * a$ (Kandasamy, 2002).

Di bawah ini adalah contoh semigrup yang sekaligus merupakan semigrup komutatif.

Contoh 2.2.3

$(\mathbb{Z}_5,\cdot)$ adalah semigrup komutatif.

Bukti:

Misalkan $S = \mathbb{Z}_5$. Operasi $*$ didefinisikan sebagai operasi pergandaan $(\cdot)$. Berdasarkan Contoh 2.1.6 dapat didefinisikan sebagai $\bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{x \cdot y}$, untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_5$. Karena operasi pergandaan merupakan operasi biner, pasti $(\mathbb{Z}_5,\cdot)$ bersifat tertutup.

Diambil sebarang $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_5$, pasti berlaku

(i). sifat assosiatif, yaitu

$$\begin{aligned}(\bar{x} \cdot \bar{y}) \cdot \bar{z} &= \overline{x \cdot y} \cdot \bar{z} \\ &= \overline{x \cdot y \cdot z} \\ &= \overline{x \cdot (y \cdot z)} \\ &= \bar{x} \cdot \overline{y \cdot z} \\ &= \bar{x} \cdot (\bar{y} \cdot \bar{z}),\end{aligned}$$

(ii). komutatif, yaitu

$$\begin{aligned}\bar{x} \cdot \bar{y} &= \overline{x \cdot y} \\ &= \overline{y \cdot x} = \bar{y} \cdot \bar{x}.\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $(\mathbb{Z}_5,\cdot)$ adalah semigrup komutatif.

Definisi 2.2.4 (Monoid)

Semigrup $(M,*)$ disebut semigrup dengan elemen identitas atau monoid jika terdapat elemen $e \in M$ sedemikian sehingga $e * a = a * e = a$, untuk setiap $a \in M$, dan e disebut sebagai elemen identitas (Kandasamy, 2002).

Di bawah ini diberikan contoh monoid.

Contoh 2.2.5

$(\mathbb{Z}_5,\cdot)$ juga merupakan monoid, sebab terdapat $\bar{e} = \bar{1} \in \mathbb{Z}_5$ sedemikian sehingga untuk setiap $\bar{x} \in \mathbb{Z}_5$ berlaku $\bar{1} \cdot \bar{x} = \overline{1 \cdot x} = \bar{x}$.

Definisi 2.2.6 (Subsemigrup)

Misalkan $(M,*)$ suatu semigrup dan H subset dari M. H disebut subsemigrup dari M jika dan hanya jika $(H,*)$ suatu semigrup terhadap operasi yang sama dengan M (Kandasamy, 2002).

Di bawah ini adalah contoh subsemigrup yang sesuai dengan Definisi 2.2.6.

Contoh 2.2.7

$(\{\bar{0},\bar{1}\},\cdot)$ adalah subsemigrup dari $(\mathbb{Z}_5,\cdot)$. Pada $\mathbb{Z}_5$ setiap elemen yang digandakan dengan $\bar{0}$ hasilnya adalah $\bar{0}$, sehingga pada $(\{\bar{0},\bar{1}\},\cdot)$ berlaku sifat tertutup karena $\bar{0} \in \{\bar{0},\bar{1}\}$. Dan $\bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}$, $\bar{1}$ juga merupakan anggota dari $\{\bar{0},\bar{1}\}$. Karena $\{\bar{0},\bar{1}\} \in \mathbb{Z}_5$, pasti pada $\{\bar{0},\bar{1}\}$ juga berlaku sifat assosiatif. Jadi, terbukti bahwa $(\{\bar{0},\bar{1}\},\cdot)$ adalah subsemigrup dari $(\mathbb{Z}_5,\cdot)$.

Definisi 2.2.8 (Grup dan Grup Komutatif)

Misalkan M adalah himpunan tak kosong yang di dalamnya didefinisikan operasi biner $*$. Kondisi-kondisi berikut dapat dipenuhi oleh $(M,*)$:

i. $(M,*)$ tertutup, yaitu $a * b \in M$
ii. $(M,*)$ berlaku sifat assosiatif, yaitu:
$(a * b) * c = a * (b * c)$, untuk setiap $a, b, c \in M$
iii. $(M,*)$ mempunyai elemen identitas sehingga berlaku:

terdapat $e \in M$, untuk setiap $a \in M$ sedemikian sehingga $e * a = a * e = a$

iv. Setiap elemen dari M mempunyai invers, yaitu
untuk setiap $a \in M$, terdapat $a^{-1} \in M$, sedemikian sehingga $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$

v. $(M,*)$ berlaku hukum komutatif, yaitu
untuk semua $a, b \in G$, berlaku $a * b = b * a$

Jika memenuhi (i) sampai (iv), maka $(M,*)$ disebut grup.
Jika memenuhi (i) sampai (v) maka $(M,*)$ disebut grup komutatif atau grup Abel.

(Spindler,K., 1994).

Untuk memperjelas Definisi 2.2.8, di bawah ini adalah contoh dari grup komutatif.

Contoh 2.2.9

$(\mathbb{Z}_5,\cdot)$ bukan merupakan grup sebab $\bar{0}$ tidak mempunyai invers. Tetapi $(\mathbb{Z}_5,+)$ merupakan suatu grup komutatif.

Bukti:

Pembuktiannya hampir sama dengan pembuktian pada Contoh 2.3.3 tetapi operasi $*$ didefinisikan sebagai operasi perjumlahan $(+)$ sehinnga $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$, untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_5$. Karena operasi penjumlahan juga merupakan operasi biner, pasti pada $(\mathbb{Z}_5,+)$ berlaku sifat tertutup.

Diambil sebarang $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_5$, pasti berlaku

(i). sifat assosiatif, yaitu

$$
\begin{aligned}
(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} &= \overline{x + y} + \bar{z} \\
&= \overline{x + y + z} \\
&= \overline{x + (y + z)} \\
&= \bar{x} + \overline{y + z} \\
&= \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}),
\end{aligned}
$$

(ii). komutatif, yaitu

$$
\begin{aligned}
\bar{x} + \bar{y} &= \overline{x + y} \\
&= \overline{y + x} = \bar{y} + \bar{x}
\end{aligned}
$$

(iii). terdapat elemen identitas, $\bar{e} = \bar{0} \in \mathbb{Z}_5$ sedemikian sehingga untuk setiap $\bar{x} \in \mathbb{Z}_5$ berlaku $\bar{0} + \bar{x} = \overline{0 + x} = \bar{x}$,

(iv). setiap elemen mempunyai invers,

$$
\begin{aligned}
& \bar{x} + \bar{x}^{-1} = \bar{0} \\
\Leftrightarrow \quad & \bar{x}^{-1} = \bar{0} + (-\bar{x}) \\
\Leftrightarrow \quad & \bar{x}^{-1} = -\bar{x} \in \mathbb{Z}_5.
\end{aligned}
$$

Jadi, terbukti bahwa $(\mathbb{Z}_5, +)$ adalah semigrup komutatif.

Definisi 2.2.10 (Subgrup)

Sebuah himpunan bagian tak kosong H dari grup G dikatakan subgrup atas G jika terhadap operasi biner yang sama H adalah grup (Heirstein, 1964).

Definisi 2.2.11 (Subgrup Normal)

Sebuah subgrup N atas G dikatakan subgrup normal jika setiap $g \in G$ dan $n \in N$ berlaku $gng^{-1} \in N$ (Heirstein, 1964).

Contoh 2.2.12

$A = (\bar{0}, +)$ adalah subgrup normal dari $(\mathbb{Z}_5, +)$.

Bukti:

Jelas bahwa A merupakan subgrup dari $(\mathbb{Z}_5, +)$. Diambil sebarang $x \in \mathbb{Z}_5$, berlaku $x + \bar{0} + x^{-1} = x + x^{-1} = \bar{0} \in A$. Jadi, A adalah subgrup normal dari $(\mathbb{Z}_5, +)$.

Definisi 2.2.13 (Homomorfisma Grup)

Misalkan $(G,*)$ dan $(G', \#)$ adalah grup. Pemetaan $\phi: G \to G'$ disebut homomorfisma jika untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $\phi(a * b=\phi a\#\phi(b)$ (Heirstein, 1964).

Contoh homomorfisma grup adalah sebagai berikut.

Contoh 2.2.14

Diketahui $\mathbb{Z}$ merupakan grup terhadap penjumlahan. Pemetaan $\phi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $\phi(a) = -a$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ merupakan homomorfisma grup.

Bukti:

Diambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$
\begin{aligned}
\phi(a+b) &= -(a+b) \\
&= -a - b \\
&= \phi(a) + \phi(b)
\end{aligned}
$$

Terbukti bahwa ϕ adalah homomorfisma grup.

2.3 Semiring dan Ring

Semiring dan ring adalah struktur aljabar dengan dua operasi biner. Pembeda antara semiring dan ring adalah banyaknya aksioma yang dipenuhi. Berikut ini adalah definisi serta contoh dari ring dan semiring.

Definisi 2.3.1 (Semiring)

Misalkan S adalah himpunan tak kosong yang di dalamnya didefinisikan dua operasi biner, yaitu penjumlahan dan pergandaan. S disebut semiring jika memenuhi:

i. $(S,+)$ adalah monoid komutatif
ii. $(S,\cdot)$ adalah monoid
iii. Berlaku hukum distributif kiri dan distributif kanan, yaitu untuk setiap $a,b,c \in S$ berlaku $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$ dan $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$
iv. $0\cdot a = 0 = a\cdot 0$, untuk setiap $a \in S$

(Nola, A.D., 2011).

Definisi semiring pada skripsi ini berbeda dengan definisi semiring pada umumnya. Tetapi definisi dari semimodul mengacu pada definisi 2.3.1. Setelah memahami Definisi 2.3.1, dapat dibuat contoh semiring sebagai berikut.

Contoh 2.3.2 Semiring

Himpunan $S = (\mathbb{Z}^+ \cup 0, +,\cdot)$ merupakan suatu semiring.

Bukti:

Diambil sebarang $a,b,c \in S$, pasti berlaku

i. $a+b \in S$,
ii. $(a+b)+c = a+(b+c)$,
iii. terdapat elemen identitas yaitu 0,
iv. $a+b = b+a$.

Terbukti $\mathbb{Z}^+ \cup 0$ terhadap penjumlahan adalah monoid komutatif.

i. $a.b \in S$,
ii. $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$,
iii. terdapat elemen identitas, yaitu 1.

Terbukti $\mathbb{Z}^+ \cup 0$ terhadap pergandaan adalah monoid.
$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$ dan $a\cdot(b+c) = a\cdot c + b\cdot c$, sehingga pada S berlaku hukum distributif kiri dan kanan. Serta untuk setiap elemen pada S jika dikalikan dengan 0 pasti menghasilkan 0, sehingga memenuhi Definisi 2.3.1 (iv).

Jadi, terbukti bahwa $\mathbb{Z}^+ \cup 0$ adalah semiring.

Definisi 2.3.3 (Semiring Komutatif)

Sebuah semiring S dikatakan komutatif jika pada pergandaan berlaku hukum komutatif yaitu untuk semua $a, b \in S$, berlaku $a \cdot b = b \cdot a$ (Nola, A., 2011).

Definisi 2.3.4 (Homomorfisma Semiring)

Misalkan $(R, +, \cdot)$ dan $(S, \boxplus, \boxdot)$ adalah semiring. Homomorfisma semiring adalah suatu pemetaan $\varphi: R \to S$ yang memenuhi:

(i) $\varphi(a+b) = \varphi(a) \boxplus \varphi(b)$, untuk setiap $a, b \in R$,

(ii) $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \boxdot \varphi(b)$, untuk setiap $a, b \in R$

(Dummit dan Foote, 2002).

Untuk lebih memahami definisi homomorfisma semiring, berikut ini adalah contohnya.

Contoh 2.3.5

Pada Contoh 2.3.2 telah terbukti bahwa, $(\mathbb{Z}^+ \cup 0, +, \cdot)$ adalah semiring. Bilangan rasional $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ juga merupakan semiring. Pemetaan f yang didefinisikan sebagai

$$f: \mathbb{Z}^+ \cup 0 \to \mathbb{Q}$$
$$x \longmapsto \frac{x}{1}$$

f adalah homomorfisma semiring.

Bukti:

(i) $f(x+y) = \frac{x}{1} + \frac{y}{1} = \frac{x+y}{1} = f(x) + f(y)$

(ii) $f(x.y) = \frac{x}{1} \cdot \frac{y}{1} = \frac{xy}{1} = f(x) \cdot f(y)$

Terbukti f adalah homomorfisma semiring.

Definisi 2.3.6 (Ring)

Misalkan R himpunan tak kosong dengan dua operasi biner (penjumlahan dan pergandaan), dinotasikan dengan $(R, +, .)$, R disebut ring jika memenuhi:

i. $(R, +)$ adalah grup komutatif,
ii. $(R, \cdot)$ adalah semigrup,
iii. Memenuhi hukum distributif (kiri dan kanan).
$a(b+c) = ab + ac$, untuk setiap $a, b, c \in R$ (distributif kiri),
$(a+b)c = ac + bc$, untuk setiap $a, b, c \in R$ (distributif kanan).

(Bhattacharya,1994)

Di bawah ini adalah contoh ring menurut Definisi 2.3.6.

Contoh 2.3.7

Misal $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ adalah himpunan semua bilangan berbentuk $a + b\sqrt{2}$ dengan $a, b \in \mathbb{Z}$, maka $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \cdot)$ adalah ring.

Bukti:

Ambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Misalkan $x = a + b\sqrt{2}$, $y = c + d\sqrt{2}$, $z = e + f\sqrt{2}$

1) Akan dibuktikan $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +)$ merupakan grup komutatif.
   i. Berlaku sifat tertutup,
$$x + y = a + b\sqrt{2} + c + d\sqrt{2} = (a+c) + (b+d)\sqrt{2} \in \mathbb{Z}$$
   ii. Hukum assosiatif
$$\begin{aligned}(x+y)+z &= \left(a + b\sqrt{2} + c + d\sqrt{2}\right) + e + f\sqrt{2} \\ &= (a+c) + (b+d)\sqrt{2} + e + f\sqrt{2} \\ &= (a+c+e) + (b+d+f)\sqrt{2} \\ x+(y+z) &= a + b\sqrt{2} + \left(c + d\sqrt{2} + e + f\sqrt{2}\right) \\ &= a + b\sqrt{2} + (c+e) + (d+f)\sqrt{2} \\ &= (a+c+e) + (b+d+f)\sqrt{2}\end{aligned}$$
$(x+y)+z = x+(y+z)$.
Jadi berlaku hukum assosiatif.
   iii. Elemen identitas
Misalkan $e = 0 + 0\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

$$x + e = a + b\sqrt{2} + 0 + 0\sqrt{2} = a + b\sqrt{2}$$
$$e + x = 0 + 0\sqrt{2} + a + b\sqrt{2} = a + b\sqrt{2}$$

Jadi terdapat elemen identitas $e = 0 + 0\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ sedemikian sehingga $xe = ex = x$, untuk setiap $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

iv. Invers setiap elemen

Misalkan $x^{-1} = -a + (-b)\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

$x + x^{-1} = a + b\sqrt{2} + (-a) + (-b)\sqrt{2} = 0 + 0\sqrt{2}$

$x^{-1} + x = (-a) + (-b)\sqrt{2} + a + b\sqrt{2} = 0 + 0\sqrt{2}$

Jadi, untuk setiap $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ terdapat $x^{-1} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ sedemikian sehingga $x + x^{-1} = x^{-1} + x = e$.

v. Hukum komutatif

$$\begin{aligned} x + y &= a + b\sqrt{2} + c + d\sqrt{2} \\ &= c + d\sqrt{2} + a + b\sqrt{2} \\ &= y + x \end{aligned}$$

Jadi, berlaku hukum komutatif.

Terbukti bahwa $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +)$ grup Komutatif.

2) Akan dibuktikan $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], \cdot)$ merupakan semigrup.

i. Berlaku sifat tertutup,

$$\begin{aligned} xy &= \left(a + b\sqrt{2}\right)\left(c + d\sqrt{2}\right) \\ &= ac + ad\sqrt{2} + bc\sqrt{2} + bd\sqrt{2}\sqrt{2} \\ &= (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} \end{aligned}$$
$$xy \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$$

ii. Akan dibuktikan berlaku hukum assosiatif

$$\begin{aligned} (xy)z &= \left(\left(a + b\sqrt{2}\right)\left(c + d\sqrt{2}\right)\right)(e + f\sqrt{2}) \\ &= \left((ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}\right)(e + f\sqrt{2}) \\ &= ace + 2bde + ade\sqrt{2} + bce\sqrt{2} + acf\sqrt{2} + \\ &\quad 2bdf\sqrt{2} + adf\sqrt{2}\sqrt{2} + bcf\sqrt{2}\sqrt{2} \\ &= (ace + 2bde + 2adf + 2bcf) + (ade + \\ &\quad bce + acf + 2bdf)\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(yz) &= \left(a + b\sqrt{2}\right)\left(\left(c + d\sqrt{2}\right)(e + f\sqrt{2})\right) \\ &= \left(a + b\sqrt{2}\right)\left((ce + 2df) + (cf + de)\sqrt{2}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= ace + 2adf + acf\sqrt{2} + ade\sqrt{2} + \\
&\quad bce\sqrt{2} + 2bdf\sqrt{2} + bcf\sqrt{2}\sqrt{2} + \\
&\quad bde\sqrt{2}\sqrt{2} \\
&= (ace + 2adf + 2bcf + 2bde) + (acf + \\
&\quad ade + bce + 2bdf)\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Jadi, berlaku hukum assosiatif.

Terbukti bahwa $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}],\cdot)$ adalah semigrup.

3) Akan dibuktikan hukum distributif,

$$
\begin{aligned}
x(y+z) &= (a+b\sqrt{2})\left((c+d\sqrt{2})+(e+f\sqrt{2})\right) \\
&= (a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})+(a+b\sqrt{2})(e+f\sqrt{2}) \\
x(y+z) &= xy+xz \\
(x+y)z &= \left((a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})\right)(e+f\sqrt{2}) \\
&= (a+b\sqrt{2})(e+f\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})(e+f\sqrt{2}) \\
&= xz+yz \\
x(y+z) &= (x+y)z
\end{aligned}
$$

Berlaku hukum distributif. Jadi $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}],+,\cdot)$ adalah ring.

Definisi 2.3.8 (Epimorfisma, Monomorfisma, Isomorfisma, Endomorfisma, Automorfisma)

1. Homomorfisma $\varphi: R \to S$ yang surjektif disebut epimorfisma.
2. Homomorfisma $\varphi: R \to S$ yang injektif disebut monomorfisma.
3. Homomorfisma $\varphi: R \to S$ yang yang bijektif disebut isomorfisma.
4. Homomorfisma $\varphi: R \to R$ disebut endomorfisma.
5. Isomorfisma $\varphi: R \to R$ disebut automorfisma.

(Hartley dan Hawkes, 1994)

Untuk memperjelas pemahaman Definisi 2.3.8, diberikan contoh berikut.

Contoh 2.3.9

Misal $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, .)$ adalah ring. Didefinisikan $\theta: \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ dengan $\theta(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$, akan dibuktikan θ adalah automorfisma.

Bukti:

Diambil sebarang $(a + b\sqrt{2}), (c + d\sqrt{2}) \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

$$\begin{aligned}
\theta\left((a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2})\right) &= \theta\left((a + c) + (b + d)\sqrt{2}\right) \\
&= (a + c) - (b + d)\sqrt{2} \\
&= (a - b\sqrt{2}) + (c - d\sqrt{2}) \\
&= \theta(a + b\sqrt{2}) + \theta(c + d\sqrt{2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta\left((a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2})\right) &= \theta\left((ac + 2bd) + (bc + ad)\sqrt{2}\right) \\
&= (ac + 2bd) - (bc + ad)\sqrt{2} \\
&= (a - b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2}) \\
&= \theta(a + b\sqrt{2})\theta(c + d\sqrt{2})
\end{aligned}$$

Jadi θ adalah homomorfisma.

Misal $\theta(a + b\sqrt{2}) = \theta(c + d\sqrt{2})$, maka $a - b\sqrt{2} = c - d\sqrt{2}$, jadi $a = c, b = d$, sehingga θ injektif.

Jelas bahwa θ surjektif, karena untuk setiap $a - b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ akan terdapat $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ dimana $\theta(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$.

Karena θ homomorfisma yang bijektif dan merupakan pemetaan dari ring $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ke dirinya sendiri, maka θ disebut automorfisma.

2.4 Modul

Apabila selama ini dikenalkan suatu konsep aljabar mengenai ruang vektor, maka modul merupakan perumuman dari ruang vektor. Pada modul, syarat skalar diperumum menjadi elemen pada suatu ring dan bukan field, dimana definisi field sama dengan definisi ring hanya pada pergandaan, pada field tanpa elemen nol adalah grup. Dengan demikian ruang vektor merupakan suatu kasus khusus dari modul.

Definisi 2.4.1 (Modul Kiri)

Suatu modul kiri M atas ring dengan elemen identitas R adalah suatu grup komutatif M yang di dalamnya didefinisikan suatu pemetaan:

$$\phi: R \times M \longrightarrow M$$
$$(r, m) \mapsto \phi(r, m) = rm$$

yang memenuhi:

(i) $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$
(ii) $(r_1 + r_2)m = r_1 m + r_2 m$
(iii) $(r_1 r_2)m = r_1(r_2 m)$
(iv) $1m = m$

Untuk setiap $r, r_1, r_2 \in R$ dan $m, m_1, m_2 \in M$ (Hartley dan Hawkes, 1994).

Akibat Definisi 2.4.1, untuk setiap $r \in R$ dan $m \in M$ berlaku:

i. $0_R \cdot m = 0_M$,
ii. $r \cdot 0_M = 0_M$,
iii. $(-r)m = -(rm) = r(-m)$.

Definisi 2.4.2 (Modul Kanan)

Suatu modul kanan M atas ring dengan elemen identitas R adalah suatu grup komutatif M yang di dalamnya didefinisikan suatu pemetaan:

$$\phi: M \times R \longrightarrow M$$
$$(m, r) \mapsto \phi(m, r) = mr$$

yang memenuhi:

(i) $(m_1 + m_2)r = m_1 r + m_2 r$
(ii) $m(r_1 + r_2) = mr_1 + mr_2$
(iii) $m(r_1 r_2) = (mr_1)r_2$
(iv) $m1 = m$

untuk setiap $r, r_1, r_2 \in R$ dan $m, m_1, m_2 \in M$ (Hartley dan Hawkes, 1994).

Definisi 2.4.2 juga mengakibatkan:

i. $m \cdot 0_R = 0_M$,
ii. $0_M \cdot r = 0_M$,
iii. $(-m) \cdot r = -(rm) = m(-r)$.

Akan tetapi tidak menutup kemungkinan bahwa operasi pergandaan skalar dapat berlaku dari kiri dan sekaligus dari kanan. Sifat modul dengan operasi pergandaan tersebut dapat dinyatakan sebagai definisi.

Definisi 2.4.3 (Bimodul)

Diberikan grup komutatif $(M,+)$ dan ring dengan elemen identitas $(R,+,.)$. Jika M modul kiri sekaligus modul kanan atas R maka M disebut bimodul (Wijna, 2009).

Berikut ini adalah contoh bimodul.

Contoh 2.4.4

Setiap ring dengan elemen identitas R adalah bimodul atas dirinya sendiri dengan pergandaan skalar:

$$\varphi: R \times R \to R$$
$$(a, m) \mapsto a \cdot m,$$

untuk setiap $m \in R, a \in R$.

Bukti:

Diambil sebarang $m, n \in R$ dan $a, b \in R$

i. $(a \cdot b) \cdot m = a \cdot (b \cdot m)$ sebab pada ring berlaku hukum assosiatif pergandaan.
ii. $a \cdot (m + n) = (a \cdot m) + (a \cdot n)$ sebab pada ring berlaku hukum distributif kanan.
iii. $(a + b) \cdot m = (a \cdot m) + (b \cdot m)$ sebab pada ring berlaku hukum distributif kiri.
iv. $0 \cdot m = 0 = a \cdot 0$
v. $1 \cdot x = x$

Terbukti bahwa R adalah R-modul kiri.

i. $m \cdot (a \cdot b) = (m \cdot a) \cdot b$ sebab pada ring berlaku hukum assosiatif pergandaan.
ii. $(m + n) \cdot a = (m \cdot a) + (n \cdot a)$ sebab pada ring berlaku hukum distributif kiri.
iii. $m \cdot (a + b) = (m \cdot a) + (m \cdot b)$ sebab pada ring berlaku hukum distributif kanan.
iv. $m \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$
v. $x \cdot 1 = x$

Terbukti bahwa R adalah R-modul kanan.

Jadi, telah terbukti bahwa ring dengan elemen satuan R adalah modul atas dirinya sendiri.

Contoh 2.4.5

Setiap grup komutatif M adalah suatu $\mathbb{Z}$-modul kiri dengan pergandaan skalar:

$$\pi: \mathbb{Z} \times M \to M$$
$$(z, m) \mapsto zm = \underbrace{m + m + \cdots + m}_{z \text{ suku}}$$

Bukti:

Diambil sebarang $m_1, m_2 \in M$ dan $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$,

i. $(z_1 \cdot z_2) \cdot m = z_1 \cdot (z_2 \cdot m)$

ii. $z(m_1 + m_2) = (m_1 + m_2) + (m_1 + m_2) + \cdots + (m_1 + m_2)$
$$= \underbrace{m_1 + m_1 + \cdots + m_1}_{z \text{ suku}} + \underbrace{m_2 + m_2 + \cdots + m_2}_{z \text{ suku}}$$
$$= zm_1 + zm_2$$

iii. $(z_1 + z_2) \cdot m = m \cdot z_1 + m \cdot z_2$

iv. $0 \cdot m = 0$

v. $1 \cdot m = m$

Jadi, terbukti bahwa M adalah $\mathbb{Z}$-modul kiri.

Dengan cara yang sama, dapat dibuktikan juga M adalah $\mathbb{Z}$-modul kanan, sehingga M adalah $\mathbb{Z}$-bimodul.

Definisi 2.4.6 (Submodul)

Diketahui M merupakan R-modul. R ring dengan elemen satuan, dan $N \subseteq M$, maka N disebut submodul dari M jika dan hanya jika memenuhi aksioma berikut:

1. N merupakan subgrup komutatif dari M,
2. operasi pergandaan skalar yang berlaku pada M juga berlaku pada N (Wijna, 2009).

Untuk mempermudah pemahaman mengenai submodul, diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 2.4.7

1. $\mathbb{Z}$ modul atas dirinya sendiri, himpunan $3\mathbb{Z} = \{\dots, -3,0,3, \dots\}$ merupakan submodul dari $\mathbb{Z}$.
2. $\mathbb{Q}$ adalah $\mathbb{R}-$modul, himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ merupakan submodul dari $\mathbb{R}$.

2.5 Modul Faktor, Homomorfisma Modul, dan Modul Bebas

Misalkan M adalah R-modul. Karena M grup komutatif, maka sebarang subgrup dari M juga merupakan grup komutatif. Misalkan N adalah sebarang subgrup dari M. Karena N subgrup komutatif, maka N merupakan subgrup normal terhadap M, yaitu $a + N = N + a$ untuk setiap $a \in M$. $M/N = \{a + N | a \in M\}$ merupakan grup terhadap operasi biner $(a + N) + (b + N) = (a + b) + N$. Karena M grup komutatif, maka:

$$\begin{aligned}(a + N) + (b + N) &= (a + b) + N \\ &= (b + a) + N \\ &= (b + N) + (a + N).\end{aligned}$$

Jadi, M/N merupakan grup komutatif terhadap operasi penjumlahan koset.

Teorema 2.5.1

Diketahui M adalah R-modul, N sebarang submodul dari M, dan R ring dengan elemen satuan, maka M/N yang merupakan R-modul terhadap operasi pergandaan koset $r(a + N) = (ra) + N$ untuk setiap $r \in R$ dan $a + N \in M/N$. Selanjutnya M/N disebut modul faktor.

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa operasi pergandaan koset merupakan operasi biner. Pertama, ditunjukkan bahwa operasi terdefinisi dengan baik. Diambil sebarang $a + N, b + N \in M/N$ dengan $a + N = b + N$. Menggunakan sifat kesamaan dua koset diperoleh $a - b \in N$. Karena N submodul, maka untuk sebarang $r \in R$ berlaku, $r(a - b) = ra - rb$. Dengan kata lain $(ra) + N = (rb) + N$, sesuai dengan operasi pergandaan koset $r(a + N) = r(b + N)$. Terbukti operasi terdefinisi dengan baik. Kedua, operasi tertutup karena $ra \in M$ untuk sebarang $r \in R$ dan

$a \in M$. Dengan demikian berlaku $r(a+N) = (ra) + N \in M/N$. Jadi, operasi pergandaan koset merupakan operasi biner.

Diberikan sebarang $a+N, b+N \in M/N$ dan $r, r_1, r_2 \in R$. Akan ditunjukkan bahwa operasi pergandaan koset memenuhi aksioma pergandaan skalar:

1. $$\begin{aligned} r\big((a+N)+(b+N)\big) &= r((a+b)+N) \\ &= \big(r(a+b)\big)+N \\ &= (ra+rb)+N \\ &= (ra+N)+(rb+N) \\ &= r(a+N)+r(b+N) \end{aligned}$$
2. $$\begin{aligned} (r_1+r_2)(a+N) &= \big((r_1+r_2)a\big)+N \\ &= (r_1a+r_2a)+N \\ &= (r_1a+N)+(r_2a+N) \\ &= r_1(a+N)+r_2(a+N) \end{aligned}$$
3. $$\begin{aligned} (r_1r_2)(a+N) &= \big((r_1r_2)a\big)+N \\ &= \big(r_1(r_2a)\big)+N \\ &= r_1(r_2a+N) \\ &= r_1(r_2(a+N)) \end{aligned}$$
4. $$\begin{aligned} 1_R(a+N) &= (1_Ra)+N \\ &= a+N \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa M/N merupakan modul atas R. □

Berikut ini adalah contoh dari modul faktor.

Contoh 2.5.2

Pada $\mathbb{Z}$ adalah modul terhadap dirinya sendiri dan dapat dipilih submodul $6\mathbb{Z}$ dan dibentuk grup komutatif, yaitu $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_6$ yang anggotanya $\{0+6\mathbb{Z}, 1+6\mathbb{Z}, 2+6\mathbb{Z}, 3+6\mathbb{Z}, 4+6\mathbb{Z}, 5+6\mathbb{Z}\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Himpunan $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ merupakan modul atas $\mathbb{Z}$ dengan operasi pergandaan skalar $r(a+6\mathbb{Z}) = (ra)+6\mathbb{Z}$ untuk setiap $r \in \mathbb{Z}$ dan $a+6\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Definisi 2.5.3 (Homomorfisma Modul)

Diketahui M dan M' adalah R-modul. Pemetaan $\pi: M \to M'$ disebut homomorfisma modul jika dan hanya jika memenuhi:

i. $\pi(m_1+m_2) = \pi(m_1)+\pi(m_2)$, untuk setiap $m_1, m_2 \in M$,
ii. $\pi(rm) = r\pi(m)$, untuk setiap $m \in M$ dan $r \in R$ (Wijna, 2009).

Untuk memperjelas tentang definisi homomorfisma modul, diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 2.5.4

Diketahui $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Z}[x]$ yaitu himpunan polinom yang konstantanya berupa anggota $\mathbb{Z}$ keduanya merupakan $\mathbb{Z}$-modul. Pemetaan $\pi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[x]$ dengan definisi $\pi(a) = ax^3$ merupakan homomorfisma modul.

Bukti:

i. $\pi(a+b) = (a+b)x^3 = ax^3 + bx^3 = \pi(a) + \pi(b)$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$,

ii. $\pi(ra) = (ra)x^3 = r(ax^3) = r\pi(a)$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ dan $r \in \mathbb{Z}$.

Terbukti bahwa π adalah homomorfisma modul

Definisi 2.5.5 (Kernel dan Image Homomorfisma)

Diketahui M dan M' adalah R-modul dan $\pi: M \to M'$ merupakan homomorfisama modul, maka

1. kernel $\pi = \{m \in M | \pi(m) = 0_{M'}\}$,
2. image $\pi = \{\pi(m) \in M' | m \in M\}$ (Wijna, 2009).

Contoh dari kernel dan image, adalah sebagai berikut.

Contoh 2.5.6

Pada contoh 2.5.4 diketahui $\ker(\pi) = \{0\}$ dan $image(\pi) = \{ax^3 | a \in \mathbb{Z}\}$

Teorema 2.5.7

Misalkan M dan N adalah R-modul, dan K adalah submodul dari dari M. Misalkan juga $\nu: M \to M/K$ adalah homomorfisma modul, dan $\phi: M \to N$ adalah homomorfisma dengan $\ker(\phi) = K$. Maka terdapat homomorfisma tunggal $\psi: M/K \to N$ sehingga diagram

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\nu"'] & & N \\ & M/K \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

commutes.

Bukti:

Jika diagram di atas *commute*, maka untuk sebarang elemen $K + x \in M/K$, haruslah

$$\psi(K + x) = \psi\nu(x) = \phi(x) \qquad (*).$$

Oleh karena itu, harus didefinisikan $\psi(K + x)$ menjadi $\phi(x)$. Definisi tersebut hanya berlaku pada koset $K + x$ tidak pada representatif x. Jika $K + x = K + x'$, maka $x - x' \in K$. Dari asumsi bahwa $x - x' \in \ker\phi$, sehingga $\phi(x - x') = 0$. Oleh karena itu, diperoleh $\phi(x) = \phi(x')$, dan persamaan $(*)$ terdefinisi untuk suatu pemetaan $\psi: M/K \to N$. Jika $K + y$ adalah elemen lain dari M/K maka:

$$\begin{aligned} \psi\big((K + x) + (K + y)\big) &= \psi(K + (x + y)) \\ &= \phi(x + y) \\ &= \phi(x) + \phi(y) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \psi(r(K + x)) &= \psi(K + rx) \\ &= \phi(rx) \\ &= r\phi(x) \end{aligned}$$

untuk setiap $r \in R$.

Terbukti bahwa ψ adalah homomorfisma. Oleh karena itu, dari persamaan $(*)$ maka $\psi(K + x) = 0 \Leftrightarrow \phi(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \ker\phi$ sehingga $\ker\psi = \ker\phi/K$. $\square$

Teorema 2.5.8

Jika M dan N adalah R-modul dan $\phi: M \to N$ adalah homomorfisma R-modul, maka $M/\ker\phi \cong im\phi$.

Bukti:

Dari teorema 2.5.7 mengakibatkan $K = \ker\phi$ sehingga pemetaan $\mu: M/\ker\phi \to N$ adalah homomorfisma sedemikian sehingga diagram

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\nu"'] & & N \\ & M/\ker\phi \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

commute, dengan $\ker\mu = \ker\phi\,/\ker\phi$. Karena $\phi = \mu\nu$ maka μ adalah pemetaan yang injektif sehingga $im\,\mu = im\,\phi$. Diambil sebarang $y \in im\,\phi$, maka $y = \phi(x)$, untuk suatu $x \in M$. Dengan demikian dapat dipilih $z = x + K \in M/\ker\phi$ sehingga $\mu(z) = y$. Jadi μ adalah pemetaan yang surjektif. Oleh karena itu, μ adalah isomorfisma $M/\ker\phi$ ke $im\phi$. $\square$

Apabila diketahui X merupakan suatu himpunan bagian dari M yang merupakan R-modul, maka dapat dibentuk suatu submodul dari M yang dibangun oleh X yang didefinisikan di bawah ini.

Definisi 2.5.9 (Submodul yang dibangun oleh *X*)
Jika X adalah himpunan bagian dari M yang merupakan R-modul, maka submodul yang dibangun oleh X adalah submodul terkecil dari M yang memuat X (Hartley dan Hawkes, 1970).

Berikut ini adalah contoh dari submodul yang dibangun oleh X.

Contoh 2.5.10
Pada $\mathbb{Z}$ yang merupakan modul atas dirinya sendiri, dipilih himpunan $X = 2 \subset \mathbb{Z}$. Karena submodul pada $\mathbb{Z}$ berbentuk $n\mathbb{Z}$ maka submodul-submodul dari $\mathbb{Z}$ yang memuat X adalah $2\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Z}$ sendiri. Sehingga submodul yang dibangun oleh X adalah $2\mathbb{Z}$, sebab $2\mathbb{Z}$ adalah submodul terkecil dari $\mathbb{Z}$.

Definisi 2.5.11 (Modul Siklik)
Misalkan M adalah R-modul. Jika terdapat $a \in M$ sehingga a membangun M maka modul M disebut modul siklik (Wijna, 2009).

Sebagai contoh dari modul siklik adalah $\mathbb{Z}$ yang merupakan $\mathbb{Z}$ −modul sebab $\langle 1 \rangle = \mathbb{Z}$.

Tidak setiap modul memiliki himpunan pembangun. Jika suatu modul memiliki himpunan pembangun, maka terdapat sifat pada himpunan pembangun tertentu yang disebut dengan basis. Berikut akan diberikan pengertian mengenai basis dan modul bebas.

Definisi 2.5.12 (Bebas Linier)
Diketahui M adalah R-modul dan $X \subseteq M$. Himpunan X dikatakan bebas linier jika dan hanya jika untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $r_i \in R$ dan

$x_i \in X$ dengan $1 \leq i \leq n$, jika $r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_ix_i = 0_M$ berakibat $r_1 = \cdots = r_i = 0_R$ (Wijna,2009).

Definisi 2.5.13 (Basis)

Diketahui M adalah R-modul dan $X \subseteq M$. Himpunan X dikatakan basis untuk M jika dan hanya jika memenuhi syarat berikut:

(i) M dibangun oleh X atau $M = \langle X \rangle$,

(ii) X bebas linier (Wijna, 2009).

Definisi 2.5.14 (Modul Bebas)

Diketahui M adalah R-modul, jika terdapat $X \subseteq M$ dengan X merupakan basis untuk M, maka M disebut modul bebas (Wijna, 2009).

Definisi 2.5.12 sampai dengan Definisi 2.5.14 berlaku untuk X yang terbatas. Berikut ini adalah contoh dari modul siklik dan modul bebas.

Contoh 2.5.15

$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ adalah modul atas dirinya sendiri merupakan modul siklik karena $\langle 1 + 8\mathbb{Z} \rangle = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ dan dengan demikian $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ merupakan modul bebas. Namun $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ yang merupakan $\mathbb{Z}$-modul bukan modul bebas, karena untuk sebarang $X \subseteq \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ selalu dapat dipilih $r = 8 \in \mathbb{Z}$ sehingga $\sum_{x \in X} rx = 0 + 8\mathbb{Z}$. Jadi, setiap himpunan bagian pada $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ selain $\{0\}$ tidak bebas linier dan dengan demikian $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ merupakan $\mathbb{Z}$-modul tidak memiliki basis.

BAB III
HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Semimodul dan Subsemimodul

Pada pendahuluan telah dijelaskan bahwa terdapat kasus yang lebih luas dari modul, yaitu semimodul. Berikut ini adalah definisi semimodul dan subsemimodul.

Definisi 3.1.1 (Semimodul Kiri)

Misalkan S adalah semiring, dan himpunan tak kosong M terhadap penjumlahan adalah monoid komutatif. M dikatakan S-semimodul kiri jika didefinisikan pergandaan scalar

$$\gamma : (a, x) \in S \times M \mapsto a \cdot x \in M$$

yang memenuhi kondisi

(k1) $(a \cdot b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$
(k2) $a \cdot (x + y) = (a \cdot x) + (a \cdot y)$
(k3) $(a + b) \cdot x = (a \cdot x) + (b \cdot x)$
(k4) $0_S \cdot x = 0 = a \cdot 0_M$
(k5) $1_S \cdot x = x$

untuk setiap $a, b \in S$ dan untuk setiap $x, y \in M$.

Definisi 3.1.2 (Semimodul Kanan)

Misalkan S adalah semiring, dan himpunan tak kosong M terhadap penjumlahan adalah monoid komutatif. M dikatakan S-semimodul kanan jika didefinisikan pergandaan skalar, yaitu:

$$\gamma : (x, a) \in M \times S \mapsto x \cdot a \in M$$

yang memenuhi kondisi

(p1) $x \cdot (a \cdot b) = (x \cdot a) \cdot b$
(p2) $(x + y) \cdot a = (x \cdot a) + (y \cdot a)$
(p3) $x \cdot (a + b) = (x \cdot a) + (x \cdot b)$
(p4) $0_M \cdot a = 0 = x \cdot 0_S$
(p5) $x \cdot 1_S = x$

untuk setiap $a, b \in S$ dan untuk setiap $x, y \in M$.

Dari definisi di atas, maka setiap semimodul belum tentu modul tetapi setiap modul pasti semimodul. Hal ini disebabkan, pada modul, M adalah grup komutatif dan R adalah ring. Monoid komutatif belum tentu grup komutatif begitu juga semiring belum tentu ring. Jadi, Semimodul lebih luas dari modul.

Jika pada modul operasi pergandaan skalar dapat berlaku dari kiri dan dari kanan, maka pada semimodul juga berlaku hal yang sama. Sifat semimodul yang demikian dapat dinyatakan sebagai definisi.

Definisi 3.1.3 (Bisemimodul)

Diberikan monoid komutatif $(M, +)$ dan semiring $(S, +, \cdot)$. Jika M semimodul kiri sekaligus semimodul kanan atas S maka M disebut bisemimodul.

Berikut ini adalah contoh dari semimodul kiri dan semimodul kanan dan jika memenuhi keduanya disebut bimodul.

Contoh 3.1.4

Setiap monoid komutatif M adalah suatu $\mathbb{Z}$-semimodul.

Bukti:

- Didefinisikan $\pi: \mathbb{Z} \times M \to M$

$$(z, m) \longmapsto z \cdot m = \underbrace{m + m + \cdots + m}_{z \text{ suku}}$$

i. $(z_1 \cdot z_2) \cdot m = z_1 \cdot (z_2 \cdot m)$

ii. $$z(m_1 + m_2) = (m_1 + m_2) + (m_1 + m_2) + \cdots + (m_1 + m_2)$$
$$= \underbrace{m_1 + m_1 + \cdots + m_1}_{z \text{ suku}} + \underbrace{m_2 + m_2 + \cdots + m_2}_{z \text{ suku}}$$
$$= zm_1 + zm_2$$

iii. $(z_1 + z_2) \cdot m = m \cdot z_1 + m \cdot z_2$

iv. $0 \cdot m = 0$

v. $1 \cdot m = m$

untuk setiap $m, m_1, m_2 \in$ dan $z, z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$

- Didefinisikan $\pi: M \times \mathbb{Z} \to M$

$$(m, z) \longmapsto m \cdot z = \underbrace{m + m + \cdots + m}_{z \text{ suku}}$$

i. $m \cdot (z_1 \cdot z_2) = (m \cdot z_1) \cdot z_2$

ii. $(m_1 + m_2)z = (m_1 + m_2) + (m_1 + m_2) + \cdots + (m_1 + m_2)$

$$= \underbrace{m_1 + m_1 + \cdots + m_1}_{z \text{ suku}} + \underbrace{m_2 + m_2 + \cdots + m_2}_{z \text{ suku}}$$

$$= z \cdot m_1 + z \cdot m_2$$

iii. $m \cdot (z_1 + z_2) = m \cdot z_1 + m \cdot z_2$

iv. $0 \cdot m = 0$

v. $1 \cdot m = m$

untuk setiap $m, m_1, m_2 \in$ dan $z, z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$

Terbukti bahwa M adalah $\mathbb{Z}$-semimodul kiri dan sekaligus $\mathbb{Z}$-semimodul kanan. Jadi, M juga merupakan bisemimodul. Tetapi setiap monoid komutatif M bukan suatu $\mathbb{Z}$-modul sebab setiap elemen pada M tidak memiliki invers.

Contoh 3.1.5

Setiap semiring S adalah bisemimodul atas dirinya sendiri.

Bukti:

S adalah semiring. Didefinisikan pergandaan skalar

$$\varphi: S \times S \to S$$
$$(a, m) \longmapsto a \cdot m, \text{ untuk setiap } m \in S, a \in S.$$

Diambil sebarang $m, n \in S$ dan $a, b \in S$.

i. $(a \cdot b) \cdot m = a \cdot (b \cdot m)$ sebab pada semiring berlaku hukum assosiatif pergandaan.

ii. $a \cdot (m + n) = (a \cdot m) + (a \cdot n)$ sebab pada semiring berlaku hukum distributif kanan.

iii. $(a + b) \cdot m = (a \cdot m) + (b \cdot m)$ sebab pada semiring berlaku hukum distributif kiri.

iv. $0 \cdot m = 0 = a \cdot 0$

v. $1 \cdot x = x$

Terbukti bahwa R adalah R-semimodul kiri.

i. $m \cdot (a \cdot b) = (m \cdot a) \cdot b$ sebab pada semiring berlaku hukum assosiatif pergandaan.

ii. $(m + n) \cdot a = (m \cdot a) + (n \cdot a)$ sebab pada semiring berlaku hukum distributif kiri.

iii. $m \cdot (a + b) = (m \cdot a) + (m \cdot b)$ sebab pada semiring berlaku hukum distributif kanan.

iv. $m \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$

v. $x \cdot 1 = x$

Terbukti bahwa R adalah R-semimodul kanan.

Jadi, telah terbukti bahwa ring R adalah R-bisemimodul terhadap dirinya sendiri.

Contoh 3.1.4 dan 3.1.5 hampir sama dengan contoh pada modul. Perbedaannya adalah luasan daerahnya. Tetapi setiap semiring S bukan modul atas dirinya sendiri sebab pada operasi penjumlahan, S tidak memiliki invers dan pada modul S harus berupa grup. Begitu juga dengan monoid komutatif bukan merupakan modul $\mathbb{Z}$.

Contoh 3.1.6

$\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ adalah semimodul kiri atas semiring $\mathbb{Z}$ dengan pergandaan skalar yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\varphi: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$$
$$(a, m) \mapsto a \cdot m,$$

untuk setiap $m \in \mathbb{Z},\ a \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$. Tetapi bukan modul kiri atas ring $\mathbb{Z}$.

Bukti:

Pembuktian $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ adalah semimodul kiri atas semiring $\mathbb{Z}$ analog dengan pembuktian Contoh 3.1.5.

$\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ adalah monoid komutatif dan pada $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ setiap elemennya tidak memiliki invers, sehingga $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ bukan merupakan grup komutatif. Syarat dari modul adalah M harus grup komutatif. Sehingga $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ bukan merupakan modul atas ring $\mathbb{Z}$.

Untuk selanjutnya, pembahasan mengenai semimodul pada tulisan ini mengacu pada semimodul kiri yang selanjutnya hanya disebut sebagai semimodul dan dengan penalaran serupa pembahasan dapat diterapkan pada semimodul kanan. Di bawah ini, akan diperkenalkan suatu struktur dari semimodul yang disebut subsemimodul.

Definisi 3.1.7 (Subsemimodul)

Diketahui M adalah S-semimodul dan $N \subseteq M$. N dikatakan S-subsemimodul jika dan hanya jika:

(i) N merupakan submonoid komutatif dari M,

(ii) Operasi pergandaan skalar yang berlaku pada M juga berlaku pada N.

Contoh subsemimodul adalah sebagai berikut.

Contoh 3.1.8

Pada contoh 3.1.6 dijelaskan bahwa $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ adalah semimodul atas semiring $\mathbb{Z}$. $3\mathbb{Z}^+ \cup \{0\} = \{0,3,6,\dots\}$ adalah subsemimodul dari $\mathbb{Z}^+$.

Bukti:

Didefinisikan pergandaan skalar:

$$\varphi: \mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \to 3\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$$
$$(a, m) \longmapsto a \cdot m,$$

untuk setiap $m \in \mathbb{Z}, a \in 3\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$.

Diambil sebarang $m, n \in \mathbb{Z}$ dan $a, b \in 3\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$.

i. $(a \cdot b) \cdot m = a \cdot (b \cdot m)$ sebab berlaku hukum assosiatif pergandaan.
ii. $a \cdot (m + n) = (a \cdot m) + (a \cdot n)$ sebab berlaku hukum distributif kanan.
iii. $(a + b) \cdot m = (a \cdot m) + (b \cdot m)$ sebab berlaku hukum distributif kiri.
iv. $0 \cdot m = 0 = a \cdot 0$
v. $1 \cdot x = x$

Terbukti bahwa $3\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ adalah $\mathbb{Z}$ −semimodul.

$3\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ submonoid komutatif dari $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$. Jadi, terbukti bahwa $3\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ subsemimodul dari $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$.

Dari contoh 3.1.8 dapat disimpulkan bahwa subsemimodul dari $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ berupa $n\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$.

3.2 Pembangun Subsemimodul, Semimodul Siklik, Semimodul Bebas

Definisi pembangun subsemimodul, kombinasi linear, dan semimodul siklik pada semimodul hampir sama dengan definisi pada modul. Untuk lebih jelasnya, diuraikan di bawah ini.

Definisi 3.2.1 (Pembangun Subsemimodul)

Misalkan X adalah himpunan bagian dari M yang merupakan S-semimodul, dapat dibentuk subsemimodul dari M yang dibangun X. Subsemimodul tersebut adalah subsemimodul terkecil dari M yang memuat X.

Sebaliknya, diberikan sebuah subsemimodul N dari M, dapat dikatakan sebuah himpunan bagian X atas M adalah sistem pembangun N atau X membangun N jika $N = \langle X \rangle$.

Untuk memperjelas definisi pembangun subsemimodul, diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 3.2.2

Pada contoh sebelumnya telah diketahui bahwa $\mathbb{Z}^+$ merupakan semimodul terhadap dirinya sendiri. Misalkan dipilih himpunan $X = \{3,6,9\} \subset \mathbb{Z}^+$. Telah diketahui pula bahwa subsemimodul pada $\mathbb{Z}^+$ berbentuk $n\mathbb{Z}^+$. Maka subsemimodul dari $\mathbb{Z}^+$ yang memuat X adalah $3\mathbb{Z}^+$ dan $\mathbb{Z}^+$ itu sendiri. Dengan demikian subsemimodul yang dibangun oleh X adalah $3\mathbb{Z}^+ \cap \mathbb{Z}^+ = 3\mathbb{Z}^+$.

Definisi 3.2.3 (Semimodul Siklik)

M yang merupakan S-semimodul dikatakan siklik jika dibangun oleh elemen tunggal $v \in M$, dan dinotasikan $S \cdot v$.

Definisi 3.2.4 (Kombinasi Linier)

Diberikan semiring S, M adalah S-semimodul, dan anggota berhingga $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ eleman dari M, kombinasi linier dari anggota $\{x_i\}$ adalah jumlah setiap $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i$ dengan $a_i \in S$, untuk setiap $i = 1 \ldots n$.

Definisi 3.2.5 (Bebas Linear)

Diketahui M adalah S-semimodul, dan $X \subseteq M$. Himpunan X dikatakan bebas linear jika dan hanya jika untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, untuk setiap $r_i \in S$ dan untuk setiap $x_i \in X$ dengan $1 \leq i \leq n$, jika $r_1x_1 + \cdots + r_nx_n = 0_M$ berakibat $r_1 = \cdots = r_n = 0_S$.

Definisi 3.2.5 berlaku untuk X yang terbatas.

Definisi 3.2.6 (Basis)

Diketahui M adalah S-semimodul, dan $X \subseteq M$. Himpunan X dikatakan basis untuk M jika dan hanya jika memenuhi:

i. $M = \langle X \rangle$,

ii. X bebas linear.

Definisi 3.2.7 (Semimodul Bebas)

Diketahui M adalah S-semimodul,. Jika terdapat $X \subseteq M$ dengan X merupakan basis untuk M, maka M disebut semimodul bebas.

Di bawah ini adalah contoh dari semimodul siklik yang sekaligus merupakan semimodul bebas.

Contoh 3.2.8

Pada Contoh 3.1.6 terbukti bahwa $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ adalah semimodul atas $\mathbb{Z}$**.** $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ juga merupakan semimodul siklik sebab, $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ dapat dibangun oleh elemen tunggal yaitu $1 \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$.

$\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ juga merupakan semimodul bebas, sebab $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\} = \langle 1 \rangle$, $1 \subseteq \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$. Dan jelas bahwa $\{1\}$ bebas linier.

3.3 Homomorfisma Semimodul

Definisi homomorfisma modul telah diuraikan pada tinjauan pustaka. Pada bagian ini dibahas definisi serta teorema yang berlaku pada homomorfisma semimodul.

Definisi 3.3.1 (Homomorfisma Semimodul)

Misalkan S adalah semiring dan M, N adalah S-semimodul kiri. Sebuah pemetaan $f: M \to N$ adalah homomorfisma S-semimodul jika $f(x + y) = f(x) + f(y)$ untuk setiap $x, y \in M$ dan berlaku juga $f(a \cdot x) = a \cdot f(x)$, untuk setiap $a \in S$ dan $x \in M$.

Berikut ini contoh untuk homomorfisma semimodul.

Contoh 3.3.2

Diketahui $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ dan $\mathbb{Z}$ merupakan $\mathbb{Z}$-semimodul. Pemetaan:

$$\varphi: \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{Z}$$
$$x \mapsto -x$$

adalah homomorfisma semimodul.

Bukti:

Diambil sebarang $x, y \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ dan $r \in \mathbb{Z}$.

(i). $\varphi(x+y) = -(x+y) = -x + (-y) = \varphi(x) + \varphi(y)$,

(ii). $\varphi(rx) = -(rx) = r(-x) = r\varphi(x)$.

Jadi, terbukti bahwa φ adalah homomorfisma semimodul.

Dari definisi homomorfisma semimodul di atas, dapat disimpulkan bahwa definisi homomorfisma pada semimodul sama dengan definisi homomorfisma pada modul. Untuk sebuah homomorfisma S-semimodul, dapat didefinisikan kernel dan image. Definisi tersebut sama dengan definisi kernel dan image pada modul.

Berdasarkan homomorfisma S-semimodul $f: M \to N$ dapat didefinisikan juga isomorfisma, monomorfisma, endomorfisma dan automorfisma yang definisinya sama dengan definisi pada bab sebelumnya.

Untuk membedakan homomorfisma dengan endomorfisma semimodul, diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 3.3.3

$\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ adalah $\mathbb{Z}$ $-$semimodul. Pemetaan

$$\gamma: \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$$

yang didefinisikan sebagai $\gamma(x) = ax$ merupakan endomorfisma.

Bukti:

Diambil sebarang $x, y \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, dan $r \in \mathbb{Z}$,

(i). $\gamma(x+y) = a(x+y) = ax + ay = \gamma(x) + \gamma(y)$,

(ii). $\gamma(rx) = a(rx) = r(ax) = r\gamma(x)$.

Terbukti bahwa γ merupakan homomorfisma semimodul. Dan karena pemetaan γ dari $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ ke dirinya sendiri, maka γ merupakan endomorfisma semimodul.

Pada modul terdapat sifat homomorfisma, yaitu Teorema 2.5.7 dan Teorema 2.5.8. teorema tersebut belum tentu berlaku pada semimodul. Hal ini dikarenakan pembuktian pada Teorema 2.5.7 menggunakan invers dari x' (invers elemen dari grup komutatif), sedangkan pada semimodul tidak harus terdapat invers sehingga pembuktian tidak dapat dijalankan. Sifat yang dimiliki oleh homomorfisma semimodul sebagai berikut.

Proposisi 3.3.4

Misalkan M adalah monoid komutatif dan S adalah semiring. M dapat dikatakan S-semimodul jika dan hanya jika terdapat homomorfisma semiring dari S ke $End_M(M)$ yaitu endomorfisma monoid dari M.

Bukti:

(⇒)

Diketahui M adalah S-semimodul kiri. Akan dibuktikan terdapat homomorfisma semiring dari S ke $End_M(M)$.

Misalkan $h_a: x \in M \to a \cdot x \in M$. Karena M adalah S −semimodul kiri, maka untuk setiap $a \in R$ dan $x, y \in M$ berlaku:

i. $a \cdot (x + y) = (a \cdot x) + (a \cdot y)$
ii. $1 \cdot x = x$.

Sehingga h_a adalah homomorfisma monoid. Oleh sebab itu, diperoleh pemetaan:

$$\xi: a \in S \longmapsto h_a \in End_M(M) \tag{3.1}$$

Menggunakan Definisi 3.1.1 (k4) dan (k5) maka:

i. $\xi(0_S) = 0$
ii. $\xi(1) =$identitas.

Dengan (k2), secara langsung ξ dapat memenuhi $(a + b) \cdot x = (a \cdot x) + (b \cdot x)$. Terakhir, dengan sifat (k1) pada definisi 3.1.1, maka

$$\begin{aligned} h_{ab}(x) &= (a \cdot b) \cdot x \\ &= a \cdot (b \cdot x) \\ &= h_a\big(h_b(x)\big) \\ &= (h_a \circ h_b)(x), \end{aligned}$$

untuk setiap $a, b \in S$ dan $x \in M$.

Terbukti bahwa ξ adalah homomorfisma semiring dari S ke $(End_M(M), +, \circ, 0, id_M)$.

(⇐)

Untuk bukti kebalikannya, tentu benar secara umum, jika $h: S \to T$ adalah homomorfisma semiring dan M adalah T −semimodul, maka h menginduksi struktur semimodul pada M yang didefinisikan oleh:

$$a \cdot_h x = h(a) \cdot x, \text{ untuk setiap } a \in S, x \in M.$$

Hal ini sesuai dengan $T = End_M(M)$.

Jadi, jika terdapat homomorfisma semiring S ke $End_M(M)$ maka M adalah S-semimodul.

Terbukti bahwa M adalah S-semimodul jika dan hanya jika terdapat homomorfisma semiring S ke $End_M(M)$. ∎

Jika dilihat dari strukturnya, maka Proposisi di atas hampir sama dengan Teorema 2.5.7 dan Teorema 2.5.8. Proposisi di atas juga dapat berlaku pada homomorfisma modul dengan pembuktian yang sama dengan pembuktian di atas karena setiap modul pasti semimodul.

Contoh 3.3.5

Misalkan $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ adalah monoid komutatif terhadap penjumlahan dan semiring terhadap penjumlahan dan pergandaan. $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ adalah $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$-semimodul jika dan hanya jika terdapat homomorfisma semiring $\mathbb{Z}^+$ ke endomorfisma monoid $End_{\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}}(\mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$.

Bukti:

($\Rightarrow$)

Akan dibuktikan terdapat homomorfisma semiring $\mathbb{Z}^+$ ke endomorfisma monoid $End_{\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}}(\mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$. Pertama dibuktikan terdapat endomorfisma monoid $End_{\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}}(\mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$, yaitu:

$$\mu: x \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \mapsto 2x \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}.$$

Akan dibuktikan μ merupakan endomorfisma monoid. Diambil sebarang $x, y \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$.

$$\begin{aligned} \mu(x+y) &= 2(x+y) \\ &= 2x + 2y \\ &= \mu(x) + \mu(y). \end{aligned}$$

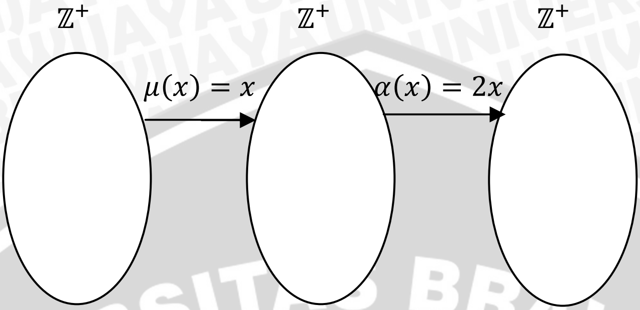
Terbukti bahwa μ adalah endomorfisma monoid.

Terakhir, akan dibuktikan terdapat semiring dari $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ ke $End_{\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}}(\mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$.

Didefinisikan pemetaan

$$\alpha: x \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \mapsto x \in End_{\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}}(\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}).$$

Jika digambarkan pada diagram, sebagai berikut:



Akan dibuktikan α adalah homomorfisma semiring. Diambil sebarang $x, y \in \mathbb{Z}^+$,

(i) $\alpha(x + y) = x + y = \alpha(x) + \alpha(y)$,

(ii) $\alpha(x \cdot y) = x \cdot y = \alpha(x) \cdot \alpha(y)$.

Terbukti bahwa α adalah homomorfisma semiring.

Jadi, jika $\mathbb{Z}^+$ adalah $\mathbb{Z}^+$-semimodul, maka terdapat homomorfisma semiring $\mathbb{Z}^+$ ke endomorfisma monoid $End_{\mathbb{Z}^+}(\mathbb{Z}^+)$.

$(\Leftarrow)$

Akan dibuktikan bahwa $\mathbb{Z}^+$ adalah $\mathbb{Z}^+$-semimodul dengan pergandaan skalar

$$\varphi: \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$$
$$(a, m) \longmapsto a \cdot m, \text{ untuk setiap } m \in \mathbb{Z}^+, a \in \mathbb{Z}^+$$

Pembuktian sejalan dengan bukti pada contoh 3.1.5.

Jadi, terbukti bahwa jika terdapat homomorfisma semiring $\mathbb{Z}^+$ ke endomorfisma monoid $End_{\mathbb{Z}^+}(\mathbb{Z}^+)$ maka $\mathbb{Z}^+$ adalah $\mathbb{Z}^+$-semimodul.

Akibat 3.3.6

Misalkan S adalah semiring dan jika $S^+ = (S, +, 0_S)$ adalah monoid komutatif terhadap penjumlahan, maka S dapat dipetakan pada semiring $End_{S^+}(S^+)$.

Bukti:

S^+ adalah monoid komutatif dan S adalah semiring, maka berdasarkan definisi semimodul, dapat dibentuk S^+ merupakan semimodul atas S. Dan berdasarkan Proposisi 3.3.4 dapat dibentuk pemetaan semiring seperti pada (3.1). Terbukti bahwa S dapat dipetakan pada semiring $End_{S^+}(S^+)$. $\square$

Sebelum menuju teorema selanjutnya, diberikan contoh di bawah ini yang berkaitan dengan sifat-sifat selanjutnya pada homomorfisma semimodul.

Contoh 3.3.7

Misalkan S adalah semiring dan X adalah himpunan tak kosong. Koleksi fungsi dari X ke S yang dinotasikan S^X adalah S-semimodul dengan pergandaan skalar yang didefinisikan:

$$\gamma: (a, f) \in S \times S^X \mapsto a \cdot f \in S^X$$

dan

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, untuk setiap $x \in X$ dan $f, g \in S^X$.

Bukti:

Pertama akan dibuktikan $(S^X, +, 0)$ adalah monoid komutatif.

(i). Diambil $f, g \in S^X$ berlaku:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \in S^X$$

Sehingga S^X bersifat tertutup.

(ii). Diambil $f, g, h \in S^X$, berlaku:

$$\begin{aligned}\big((f+g)(x)\big) + h(x) &= \big(f(x) + g(x)\big) + h(x)\\ &= f(x) + (g(x) + h(x))\\ &= f(x) + ((g+h)(x))\end{aligned}$$

Terbukti S^X bersifat assosiatif.

(iii). Terdapat $0 \in S^X$ sedemikian sehingga

$$f(x) + 0 = (f+0)(x) = f(x)$$

(iv). Berlaku sifat komutatif

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$$

Dari (i) sampai (iv) terbukti bahwa S^X adalah monoid komutatif.
Selanjutnya, dibuktikan bahwa S^X adalah S-semimodul. Diambil sebarang $a, b \in S$ dan $f(x), g(x) \in S^X$

a. $(a \cdot b) \cdot f(x) = a \cdot (b \cdot f(x))$
b. $a \cdot \big((f+g)(x)\big) = a \cdot (f(x) + g(x)) = a \cdot f(x) + a \cdot g(x)$
c. $(a+b) \cdot f(x) = a \cdot f(x) + b \cdot f(x)$
d. $0 \cdot f(x) = 0$
e. $1 \cdot f(x) = f(x)$

Dari a sampai e terbukti bahwa S^X adalah S-semimodul.

Jadi, S^X adalah S-semimodul.

Untuk memperjelas Contoh 3.3.7, diberikan contoh secara khusus sebagai berikut.

Contoh 3.3.8

$X = \{1\}$ dan semiring $S = \mathbb{Z}_3$. S^X adalah S-semimodul.

Bukti:

Fungsi dari X ke S yang mungkin adalah $b(x) = \bar{0}$, $c(x) = \bar{1}$, dan $d(x) = \bar{2}$, sehingga $S^X = \{b(x), c(x), d(x)\}$. Akan dibuktikan bahwa S^X adalah monoid komutatif.

Tabel 3.1 Penjumlahan fungsi S^X

$+$	$b(x)$	$c(x)$	$d(x)$
$b(x)$	$b(x)$	$c(x)$	$d(x)$
$c(x)$	$c(x)$	$d(x)$	$b(x)$
$d(x)$	$d(x)$	$b(x)$	$c(x)$

Dari Tabel 3.1, terbukti bahwa S^X adalah monoid komutatif sebab berlaku sifat tertutup, asosiatif, dan mempunyai elemen netral yaitu $b(x) = \bar{0} \in S^X$. Dengan pergandaan skalar

$$\gamma: (a, f) \in S \times S^X \mapsto a \cdot f \in S^X$$

pasti terbukti bahwa S^X adalah S-semimodul.

Definisi 3.3.9 (Support)

Misalkan S adalah semiring dan X adalah sebuah himpunan, support dari pemetaan $f: X \longrightarrow S$ adalah himpunan

$$supp\ f = \{x \in X | f(x) \neq 0_S\}.$$

Berikut ini adalah contoh dari *support*.

Contoh 3.3.10

$\mathbb{Z}$ adalah semiring. $X = \mathbb{Z}$. Pada pemetaan $f: a \in \mathbb{Z} \longmapsto 2a \in X$, $supp\ f = \mathbb{Z} - \{0\}$.

Proposisi 3.3.11

Untuk sebarang himpunan X, $S^{(X)}$ adalah S-semimodul bebas. $S^{(X)}$ didefinisikan fungsi dari X ke S dengan *finite support* yang dilengkapi penjumlahan *pointwise* dan pergandaan skalar, dengan pemetaan $\mathcal{X}: x \in X \to \mathcal{X}_x \in S^{(X)}$, dimana $\mathcal{X}_x$ terdefinisi untuk setiap $x \in X$, oleh:

$$\mathcal{X}_x(y) = \begin{cases} 0, & \text{jika } y \neq x \\ 1, & \text{jika } y = x \end{cases} \tag{3.2}$$

Bukti:

Misalkan $\langle M, +, 0_M \rangle$ adalah sebarang S-semimodul dan $f: X \to M$ adalah pemetaan sebarang. Akan dibuktikan bahwa terdapat morfisma S −semimodul tunggal $h_f: S^{(X)} \to M$ sedemikian sehingga $h_f \circ \mathcal{X} = f$.

Untuk sebarang $\alpha \in S^{(X)}$, misalkan $A = supp\,\alpha$, dimisalkan juga $\alpha = \sum_{x \in A} \alpha(x) \cdot \mathcal{X}_x$. Kemudian dimisalkan himpunan:

$$h_f: \alpha \in S^{(X)} \to \textstyle\sum_{x \in A} \alpha(x) \cdot f(x) \in M \tag{3.3}$$

Untuk tetapan sebarang $\bar{x} \in X, (h \circ \mathcal{X})(\bar{x}) = h_f(\mathcal{X}\bar{x}) = 1 \cdot f(\bar{x}) = f(\bar{x})$, oleh sebab itu $h_f \circ \mathcal{X} = f$.

Dengan mengambil sebarang $\alpha, \beta \in S^{(X)}$ dan $r \in S$, dan dimasukkan pada pemetaan (3.3) pasti berlaku aksioma homomorfisma semimodul, yaitu

i. $$\begin{aligned} h_f(\alpha + \beta) &= ((\alpha + \beta)(x)) \cdot f(x) \\ &= \big(\alpha(x) \cdot f(x)\big) + (\alpha(x) \cdot f(x)) \\ &= h_f(\alpha) + h_f(\beta) \end{aligned}$$

ii. $$\begin{aligned} h_f(r \cdot \alpha) &= (r \cdot \alpha)(x) \cdot f(x) \\ &= r \cdot \alpha(x) \cdot f(x) \\ &= r \cdot h_f(\alpha). \end{aligned}$$

Jadi, jelas bahwa h_f adalah homomorfisma semimodul. Selain itu, jika $h: S^{(X)} \to M$ adalah homomorfisma S −semimodul sedemikian sehingga $h \circ \mathcal{X} = f$, untuk sebarang $\alpha \in S^{(X)}$ terdapat

$$\begin{aligned} h(\alpha) &= h\left(\sum_{x \in A} \alpha(x) \cdot \mathcal{X}_x\right) \\ &= \sum_{x \in A} \alpha(x) \cdot \mathcal{X}_x \\ &= \sum_{x \in A} \alpha(x) \cdot f(x) \\ &= h_f(\alpha) \end{aligned}$$

Oleh karena itu h adalah unik (tunggal). ∎

Jelas, setiap S-semimodul adalah *image* homomorfisma satu sama lain. Tentu, jika M adalah S-semimodul, dapat dibentuk $S^{(M)}$ yang merupakan S −semimodul bebas dan homomorfisma S-semimodul $h_{id_M}: S^M \to M$ yang didefinisikan oleh (3.3) dengan mengganti f menjadi id_M. Oleh karena itu, dapat disimpulkan h_{id_M} surjektif. Selain itu, dengan Proposisi 3.3.11, $h_{id_M} \circ \mathcal{X} = id_M$.

Contoh untuk Proposisi 3.3.11 sama dengan contoh 3.3.8, sebab setiap X yang terbatas pasti memiliki *finite support* sehingga S^X dapat ditulis $S^{(X)}$. Dari contoh tersebut, terbukti bahwa S^X adalah S-semimodul dan S^X dapat dibangun oleh $c(x) = \overline{1} \subseteq S^X$. $c(x)$ juga bebas linier, sehingga terbukti bahwa $S^{(X)}$ adalah semimodul bebas.

Homomorfisma adalah pemetaan yang memenuhi aksioma. Pada pemetaan terdapat operasi yang mengoperasikan dua fungsi atau lebih. Jika dua monoid adalah semimodul atas semiring yang sama, maka juga terdapat suatu operasi yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.3.12 (Operasi pada $\boldsymbol{hom_S(M,N)}$)

Diberikan M dan N adalah S-semimodul, pada $hom_S(M,N)$ terdapat operasi dan konstanta sebagai berikut:

i. untuk setiap $f, g \in hom_S(M,N)$, homomorfisma $f+g$ didefinisikan oleh $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, untuk setiap $x \in M$;
ii. $f(x) = 0$ adalah elemen konstan homomorfisma.

Dan jika S komutatif, untuk setiap $a \in S$ dan $f \in hom_S(M,N)$, $a \cdot f$ adalah pemetaan yang didefinisikan oleh:

$$\begin{aligned}(a \cdot f)(x) &= a \cdot f(x)\\ &= f(a \cdot x),\end{aligned}$$

untuk setiap $a \in M$.

Jelas $(hom_S(M,N), +, 0)$ adalah monoid komutatif dan jika S adalah semiring komutatif, maka $(hom_S(M,N), +, 0)$ adalah S-semimodul dengan pergandaan skalar $(\cdot)$. Jika $M = N$, adalah semimodul maka $hom_S(M,M)$ adalah endomorfisma dan dinotasikan $End_S(M)$.

Sebelum melangkah ke teorema selanjutnya, akan didefinisikan beberapa notasi. Diberikan sebuah semiring S dan dua himpunan tak kosong X, Y. Misalkan $S^{X\times(Y)}$ adalah monoid komutatif dari fungsi $X \times Y$ ke S yang dilengkapi dengan *pointwise sum* dengan *finite support* pada variabel kedua, dinotasikan:

$$S^{X\times(Y)} \coloneqq \{k \in S^{X\times Y} | untuk\ setiap\ x \in X, \quad k(x,\_) \in S^{(Y)}\}$$

Dari contoh 3.3.7 dan Proposisi 3.3.11 dapat disimpulkan bahwa $S^{X\times(Y)}$ merupakan S −bisemimodul.

Teorema 3.3.13

Misalkan S adalah semiring dan $S^{(X)}, S^{(Y)}$ adalah S-semimodul bebas. Misalkan juga dua monoid komutatif $hom_S(S^{(X)}, S^{(Y)})$ dan $S^{X\times(Y)}$ adalah isomorfik. Jika S komutatif maka $hom_S(S^{(X)}, S^{(Y)})$ dan $S^{X\times(Y)}$ adalah homomorfisma semimodul yang bijektif.

Bukti:

Untuk sebarang $k \in S^{X\times(Y)}$, misalkan $h_k: S^{(X)} \to S^{(Y)}$ adalah pemetaan yang didefinisikan oleh $f \mapsto \sum_{x\in X} f(x)k(x,\_)$. Karena f mempunyai *finite support*, maka dapat dibuktikan bahwa h_k adalah homomorfisma semimodul. Pembuktian ini sejalan dengan pembuktian pemetaan (3.3) pada bukti Teorema 3.3.11.

Sebaliknya, misalkan untuk setiap $f \in S^{(X)}, f = \sum_{x\in X} f(x)Xx$, dengan pemetaan $\mathcal{X}_x$ yang didefinisikan (3.2). Maka untuk setiap $h \in hom_S(S^{(X)}, S^{(Y)})$,

$$h(f) = h(\textstyle\sum_{x\in X} f(x)Xx) = \sum_{x\in X} f(x)h(\mathcal{X}x).$$

Misalkan $h \in hom_S(S^{(X)}, S^{(Y)})$ dan didefinisikan suatu pemataan $k_h: (x,y) \in X \times Y \longmapsto h(\mathcal{X}x)(y) \in S$. Dapat disimpulkan bahwa k_h mempunyai *finite support* pada variabel kedua yaitu $k \in S^{X\times(Y)}$ dan $h = h_{k_h}$.

Jadi, misalkan $\eta: k \in S^{X\times(Y)} \longmapsto h_k \in hom_S(S^{(X)}, S^{(Y)})$, akan dibuktikan η adalah bijektif. Faktanya bahwa η adalah surjektif yang telah dibuktikan sebelumnya. Jika $k \neq l \in S^{X\times(Y)}$, terdapat pasangan $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ sedemikian sehingga $k(\bar{x}, \bar{y}) \neq l(\bar{x}, \bar{y})$, dan diketahui $h_k(\mathcal{X}x)(\bar{y})$ sedemikian sehingga η injektif. Karena surjektif dan injektif maka η bijektif, sehingga $hom_S(S^{(X)}, S^{(Y)})$ dan $S^{X\times(Y)}$ isomorfik.

Faktanya bahwa η adalah homomorfisma monoid dan jika S komutatif , maka η juga homomorfisma semimodul. ∎

BAB IV
KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab III dapat disimpulkan bahwa definisi-definisi yang berkaitan dengan semimodul sama seperti definisi yang ada pada modul yang membedakan hanyalah daerah cakupannya. Sifat-sifat yang berlaku pada homomorfisma modul belum tentu berlaku pada homomorfisma semimodul. Hal ini dikarenakan semimodul lebih luas dari modul.

Suatu monoid komutatif merupakan suatu semimodul atas semiring S jika dan hanya jika terdapat homomorfisma dari semiring S ke endomorfisma monoid. Sifat ini juga dapat berlaku untuk grup komutatif yang merupakan modul atas ring R.

Sifat lain yang terdapat pada homomorfisma semimodul adalah misalkan S adalah semiring, dan dua himpunan fungsi dari himpunan sebarang yang berbeda ke semiring dengan *finite support* adalah S-semimodul bebas. Homomorfisma dari kedua semimodul bebas tersebut isomorfik dengan $S^{X\times(Y)}$ yaitu fungsi dari $X \times Y$ ke semiring S yang merupakan S-bisemimodul jika S komutatif.

4.2 Saran

Untuk pengembangan selanjutnya, pembahasan dapat diperluas menjadi *MV-semimodules*, *Strong MV-Semimodules* dan *Projective Semimodul*.

DAFTAR PUSTAKA

Al-Thani, H.M. 2011. *Projective Semimodules*. Department of Mathematics and Physics, Faculty of Art and Sciences, University of Qatar. Qatar.

Bhattacharya, P.B. dkk. 1994. *Basic Abstract Algebra*. Cambridge University Press. New York.

Hartley, B. dan T.O. Hawkes. 1970. *Rings Modules and Linear Algebra*. Antony Rowe Ltd. Chippenham.

Herstein, I.N. 1975. *Topics in Algebra*. John Wiley and Sons. New York.

Golan J. S. 1999. *Semirings and Their Applications*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht.

Kandasamy. 2002. *Smarandache Semiring, Semifield, and Semivector Spaces*. American Research Press. United States of America.

Nola, A.D., Russo, C. 2011. *Semiring and Semimodule Issues in MV-algebras*. Dipartimento di Matematika Universita di Salerno. Italy.

Raoul, J., SOW, Djiby. 2010. *On Generators and Projective Semimodules*. International Journal of Algebra. Vol 4, no. 24,, Hlm. 1153-1167.

Spindler, K. 1994 *Abstract Algebra with Applications Volume 1*. Marcel Dekker Inc. New York.

Wijna, M.W. 2009. *Pengantar Teori Modul*. Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta.