OPTIMASI MODEL *EOQ MULTI ITEM* DENGAN VARIASI BIAYA PENYIMPANAN MENGGUNAKAN PENDEKATAN *GEOMETRIC PROGRAMMING*

SKRIPSI

Oleh:
DEWI SULISTIAWATI
0810943007-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2012

OPTIMASI MODEL *EOQ MULTI ITEM* DENGAN VARIASI BIAYA PENYIMPANAN MENGGUNAKAN PENDEKATAN *GEOMETRIC PROGRAMMING*

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh:
DEWI SULISTIAWATI
0810943007-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2012

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

OPTIMASI MODEL *EOQ MULTI ITEM* DENGAN VARIASI BIAYA PENYIMPANAN MENGGUNAKAN PENDEKATAN *GEOMETRIC PROGRAMMING*

Oleh:
DEWI SULISTIAWATI
0810943007-94

Setelah dipertahankan di depan majelis penguji
pada tanggal 08 Agustus 2012
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam Bidang Matematika

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dra. Endang Wahyu H., M.Si.	**Dr. Abdul Rouf A., M.Sc.**
NIP. 196611121991032001	**NIP. 196709071992031001**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc .
NIP. 196709071992031001

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	**: Dewi Sulistiawati**
NIM	**: 0810943007**
Jurusan	**: Matematika**
Penulis skripsi berjudul	**: Optimasi Model *EOQ Multi Item* dengan Variasi Biaya Penyimpanan Menggunakan Pendekatan *Geometric Programming***

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. **skripsi ini adalah benar-benar karya saya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub diisi dan tertulis di daftar pustaka skripsi ini.**
2. **apabila di kemudian hari ternyata skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 08 Agustus 2012
yang menyatakan,

(Dewi Sulistiawati)
NIM. 0810943007

OPTIMASI MODEL *EOQ MULTI ITEM* DENGAN VARIASI BIAYA PENYIMPANAN MENGGUNAKAN PENDEKATAN *GEOMETRIC PROGRAMMING*

ABSTRAK

Persediaan merupakan salah satu topik yang sering dibahas dalam masalah optimasi. Hal ini dikarenakan solusi optimal untuk kuantitas produksi pada persediaan menjadi faktor penentu total biaya persediaan. Total biaya persediaan ditentukan oleh biaya pembelian, biaya pesan, dan biaya penyimpanan.

Model *EOQ (Economic Order Quantity)* adalah model yang paling sering digunakan untuk masalah persediaan. Model *EOQ* digunakan untuk menentukan kuantitas produksi yang optimal sehingga meminimumkan total biaya persediaan. Pada skripsi ini digunakan model *EOQ multi item* dengan variasi biaya penyimpanan. Biaya penyimpanan yang dipakai adalah suatu fungsi kontinu menurun dari kuantitas produksi. Sehingga akan terbentuk fungsi tujuan nonlinier dengan kendala-kendala linier dan nonlinier.

Ada beberapa metode yang digunakan untuk menyelesaikan masalah yang fungsi tujuan atau kendalanya nonlinier, salah satunya adalah metode pendekatan *geometric programming*. *Geometric programming* adalah suatu metode yang diturunkan dari konsep *geometric – arithmetic mean inequality* dan digunakan pada masalah pengoptimalan. Dengan menggunakan konsep ini, fungsi tujuan dari model *EOQ* yang disebut sebagai fungsi primal, diselesaikan melalui pendekatan fungsi predualnya. Fungsi predual dibentuk dengan pemberian vektor bobot pemberat pada masing-masing komponen biaya dalam total biaya persediaan. Bobot pemberat optimal digunakan pada definisi *geometric programming* untuk menentukan kuantitas produksi optimal sebagai solusi analitis dari fungsi tujuan. Dari solusi analitis yang diperoleh, tujuan model *EOQ* untuk meminimumkan total biaya persediaan dapat dicapai.

Kata kunci : *Geometric programming* , *geometric – arithmetic mean inequality*, kuantitas produksi, variasi biaya penyimpanan.

OPTIMIZATION OF MULTI ITEMS EOQ MODEL WITH VARYING HOLDING COST USING GEOMETRIC PROGRAMMING APPROACH

ABSTRACT

Inventory is one of the frequently discussed topics in optimization problems. This is because the optimal solution for the production quantity of inventory became determinants factor of total inventory cost. Total cost of inventory is determined by purchasing cost, ordering cost, and holding costs.

Economic Order Quantity (EOQ) model is the most frequently model used to solve the inventory problems. EOQ model aims to determine the optimal production quantity that minimizes total inventory cost. In this paper used multi-item EOQ model with varying holding cost. Varying holding cost is a continuous decreasing function of the quantity production. So that will be formed nonlinear objective function with linear and nonlinear constraints.

There are some methods used to solve the optimization problem where the objective or constraint functions are nonlinear, one of them is geometric programming approach. Geometric programming is a method derived from the geometric arithmetic mean inequality concept and used in the optimization problem. Using this concept, objective function of EOQ model as primal function solved by predual function approach. Predual function is formed by giving weight vector to each component of the total inventory cost. The weight optimal used in definition of geometric programming to determine the optimal production quantity as the analytical solution of the objective function. Analytical solution has obtained, so EOQ model aim to determine the minimum total inventory cost can be achieved.

Key words: Geometric programming, geometric - arithmetic mean inequality, quantity production, varying holding cost.

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur kehadirat Allah SWT yang telah memberikan bimbingan dan petunjuk-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Optimasi Model *EOQ Multi Item* dengan Variasi Biaya Penyimpanan Menggunakan Pendekatan *Geometric Programming*.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan serta motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada:

1. Dra. Endang Wahyu H., M.Si. selaku pembimbing I dan Dr. Abdul Rouf A., M.Sc. selaku pembimbing II atas segala bimbingan, nasihat, motivasi serta kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini.
2. Prof. Dr. Agus Widodo, M.Kes. selaku dosen penguji atas segala saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
3. Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc. selaku Ketua Jurusan Matematika dan Dr. Sobri Abusini, MT. selaku Ketua Program Studi Matematika atas dorongan dan nasihat selama proses penyelesaian skripsi.
4. Seluruh dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
5. Mama, Bapak, adikku Dessy, adikku Denisa, mas Gunawan Wibisono, dan semua anggota keluarga besarku atas segala doa, kasih sayang, dukungan, dan nasihat yang telah diberikan.
6. Teman-teman Matematika 2008 dan sahabat-sahabatku, Tiwi, Risty, Rizka, Gek, mbak Suryani yang tercinta atas motivasi dan bantuan yang telah diberikan.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat banyak kekurangan. Untuk itu penulis sangat mengharapkan kritik dan saran melalui email dhedhew17@yahoo.com. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak.

Malang, 08 Agustus 2012

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

Halaman

DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

BAB I
PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Meningkatnya penggunaan model matematika dalam analisis dan optimasi sistim industri adalah salah satu perkembangan yang signifikan dari praktek rekayasa modern. Untuk menggambarkan sistim kehidupan yang nyata dibutuhkan model akurat yang biasanya terbukti terlalu kompleks untuk solusi dan algoritma yang tersedia. Terutama untuk masalah dengan kendala nonlinier atau fungsi tujuan dengan derajat lebih dari dua (Don T. Phillips, 1976).

Salah satu masalah yang menggunakan teknik pengoptimasian melalui model matematika adalah masalah persediaan. Dalam sistim manufaktur maupun non manufaktur, adanya persediaan merupakan faktor yang memicu peningkatan biaya. Meskipun demikian persediaan tetap diperlukan karena pada kondisi nyata, kebutuhan atau permintaan dari konsumen dapat bersifat tidak pasti. Menetapkan jumlah persediaan yang terlalu banyak akan berakibat peningkatan dalam biaya simpan. Tetapi apabila terlalu sedikit maka akan mengakibatkan hilangnya kesempatan perusahaan untuk mendapatkan keuntungan jika permintaan nyatanya lebih besar daripada permintaan yang diperkirakan (Nasution, 1997).

Untuk itu, pencarian solusi optimal pada masalah persediaan menjadi salah satu hal terpenting yang dapat menunjang kelancaran operasi bisnis suatu perusahaan. Namun terkadang pada kenyataannya, untuk mencapai solusi optimal dari masalah persediaan, harus dihadapkan pada beberapa kendala.

Model *EOQ (Economic Order Quantity)* adalah model yang sering digunakan pada masalah persediaan. Model *EOQ* digunakan untuk mencari kuantitas produksi optimal sehingga meminimumkan total biaya persediaan. Dalam skripsi ini akan digunakan model *EOQ* dengan variasi biaya penyimpanan yaitu dengan adanya *inventory carrying cost*, dimana biaya penyimpanan merupakan fungsi kontinu menurun dari kuantitas produksi. Sehingga semakin banyak barang yang disimpan, biaya penyimpanan akan semakin kecil. Untuk mendapatkan hasil yang optimal, kendala yang dihadapi pada model *EOQ* ini yaitu total pesanan dan total biaya penyimpanan, tidak boleh melebihi batas yang ditentukan. Untuk menyelesaikan model *EOQ* tersebut, digunakan sebuah pendekatan *geometric programming* yang diperkenalkan oleh Zener dan Duffin.

Geometric programming adalah salah satu metode untuk menyelesaikan masalah optimasi yang fungsi tujuan dan atau kendalanya nonlinier. Sehingga pada permasalahan *EOQ multi item* dengan variasi biaya penyimpanan dibawah kendala-kendala linier dan nonlinier dapat dicari solusi optimalnya menggunakan *geometric programming*.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang permasalahan, pokok permasalahan dalam penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana menentukan kuantitas produksi yang optimal untuk meminimumkan total biaya persediaan dengan mempertimbangkan variasi biaya penyimpanan menggunakan pendekatan *geometric programming*?
2. Bagaimana simulasi solusi dari model *EOQ multi item* dengan variasi biaya penyimpanan menggunakan pendekatan *geometric programming*?

1.3. Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah

1. menentukan kuantitas produksi yang optimal untuk meminimumkan total biaya persediaan dengan mempertimbangkan variasi biaya penyimpanan melalui pendekatan *geometric programming,*
2. mensimulasikan solusi dari model *EOQ multi item* dengan variasi biaya penyimpanan menggunakan pendekatan *geometric programming*.

1.4. Batasan Masalah

Berikut asumsi-asumsi dasar dalam skripsi ini adalah

1. tingkat permintaan seragam dari waktu ke waktu,
2. kekurangan persediaan tidak diperbolehkan,
3. tingkat produksi untuk setiap produk adalah terbatas dan konstan,
4. biaya penyimpanan untuk *item* ke-*r* adalah sebuah fungsi kontinu menurun dari kuantitas produksi (Q_r).

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Persediaan

2.1.1 Pengendalian Persediaan

Persediaan dapat diartikan sebagai penyimpanan barang-barang yang akan digunakan pada periode yang akan datang. Sementara itu, pengendalian persediaan adalah suatu usaha menentukan tingkat komposisi bahan yang optimal dalam menunjang kelancaran dan efektivitas kegiatan perusahaan (Ristono, 2009).

Pengendalian persediaan merupakan serangkaian kebijakan yang memonitor tingkat persediaan yang harus dijaga, kapan persediaan harus disediakan dan berapa besar pesanan yang harus dilakukan (Rangkuti, 2004).

2.1.2 Tujuan Persediaan

Tujuan pengendalian persediaan adalah

1. untuk dapat memenuhi kebutuhan atau permintaan konsumen dengan cepat,
2. untuk menjaga kelancaran proses produksi atau menjaga agar perusahaan tidak mengalami kekurangan persediaan yang mengakibatkan terhentinya proses produksi,
3. untuk mempertahankan dan meningkatkan penjualan serta laba perusahaan,
4. menjaga supaya pembelian secara kecil-kecilan dapat dihindari karena dapat mengakibatkan ongkos pesan menjadi lebih besar,
5. menjaga supaya tidak terjadi penyimpanan secara besar-besaran karena hal tersebut mengakibatkan biaya menjadi lebih besar (Ristono, 2009).

2.1.3 Komponen Biaya Persediaan

Biaya persediaan terbagi menjadi tiga macam, yaitu

1. biaya pembelian (*purchased cost*)
   biaya pembelian adalah harga per *unit* apabila *item* dibeli dari pihak luar, atau biaya produksi per *unit* apabila diproduksi dalam perusahaan

2. biaya pesan atau biaya persiapan (*ordering cost / set up cost*)
   ordering cost adalah biaya yang dikeluarkan sehubungan dengan pemesanan barang ke *supplier*. Biaya pemesanan adalah biaya yang berasal dari pembelian pesanan (*set up cost*) untuk suatu hasil produksi yang diproduksi di dalam perusahaan
3. biaya simpan (*carrying cost / holding cost / storage cost*)
   holding cost adalah biaya yang dikeluarkan atas investasi dalam persediaan dan pemeliharaan maupun investasi sarana fisik untuk menyimpan persediaan. Biaya simpan dapat pula diartikan sebagai semua biaya yang timbul akibat penyimpanan barang maupun bahan. Sementara itu, *storage cost* adalah biaya yang dikeluarkan sehubungan dengan penyimpanan barang di gudang (Ristono, 2009).

2.1.4 Persediaan Rata-rata

Persediaan rata-rata dihitung dengan menjumlahkan persedia-an awal dan persediaan akhir kemudian dibagi dua, yaitu

$$Q_i = \frac{Q_a + Q_t}{2}$$

di mana Q_i adalah persediaan rata-rata, Q_a adalah persediaan awal, dan Q_t adalah persediaan akhir. Jika persediaan diasumsikan habis di akhir periode maka persediaan rata-rata menjadi

$$Q_i = \frac{Q_a}{2}. \tag{2.1}$$

2.2 Pembelian

Pembelian adalah harga yang harus dibayar untuk setiap *unit* barang (Siswanto,1985). Terdapat dua macam kemungkinan untuk harga barang. Kemungkinan pertama adalah harga barang per *unit* yang tetap, dan yang kedua adalah harga barang per *unit* yang berubah, kemungkinan yang terakhir ini dijumpai apabila diberikan potongan harga tertentu untuk jumlah tertentu. Hubungan antara tingkat harga dengan jumlah barang yang dibeli adalah semakin besar jumlah barang yang dibeli maka tingkat harga per *unit* lebih rendah.

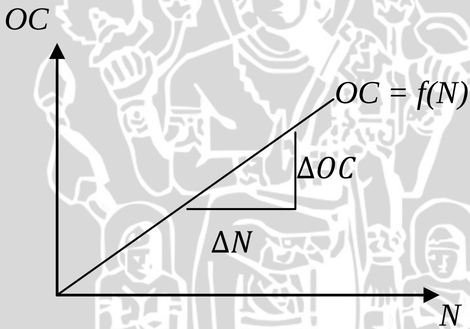
Adapun model dari biaya pembelian diberikan dalam persamaan berikut.

$$C = C_p \times D \tag{2.2}$$

di mana C adalah biaya pembelian, C_p adalah harga per *unit* barang, dan D adalah jumlah permintaan.

2.3 Pemesanan

Setiap kali suatu bahan dipesan, perusahaan menanggung biaya pesan (*order cost*). Total biaya pesan periode (tahunan) adalah jumlah pesanan yang dilakukan setiap periode dikalikan biaya yang harus dikeluarkan setiap kali pesan. Dalam kaitannya dengan frekuensi pemesanan, maka sifat total biaya pesan adalah linier. Gambar 2.1 berikut memperlihatkan kurva total biya pesan.



Gambar 2.1. Biaya Total Pemesanan

Seperti tampak pada Gambar 2.1, *OC* adalah total biaya pesan, maka *OC* = *f(N)* dan biaya setiap kali pesan $C_o = \Delta OC\ /\ \Delta N$, karena frekuensi pesanan sangat bergantung pada kebutuhan untuk periode yang akan datang yang dinyatakan dengan permintaan (*D*), dan banyaknya *unit* yang dipesan (*Q*) maka frekuensi pemesanannya adalah

$$N = \frac{D}{Q}$$

dan $\Delta OC \,/\, \Delta N$ merupakan biaya setiap kali pesan yang dinyatakan dengan notasi C_o, maka apabila dikaitkan dengan Q, total biaya pesan akan menjadi

$$OC = N \times C_o = \frac{D}{Q} \times C_o. \tag{2.3}$$

Secara matematis persamaan (2.3) merupakan fungsi nonlinier, yaitu bila nilai Q semakin kecil, maka biaya total pemesanan akan semakin besar, dan demikian pula sebaliknya, bila Q semakin besar maka biaya total pemesanan akan turun dengan persentase tertentu berdasarkan bertambahnya nilai Q.

2.4 Penyimpanan

Setiap barang yang dibeli atau diproduksi perusahaan akan disimpan dalam tempat penyimpanan atau gudang. Selama masa penyimpanan akan timbul biaya untuk mempertahankan persediaan dan biaya ini dinamakan biaya penyimpanan.

Misalkan D adalah tingkat permintaan barang, d adalah tingkat pertambahan persediaan, pertambahan persediaan terjadi selama t_p, dan banyaknya *unit* yang dipesan adalah Q, maka

$$Q_{max} = t_p(d - D)$$

selanjutnya, persediaan maksimum Q_{max} akan habis dipakai. Oleh karena itu, persediaan rata-rata adalah

$$\frac{Q_{max}}{2} = \frac{t_p(d - D)}{2}. \tag{2.4}$$

Untuk memenuhi persediaan sebesar Q diperlukan waktu selama t_p dengan tingkat pertambahan persediaan sebesar d. Oleh karena itu

$$Q = t_p . d \qquad \text{Atau} \qquad t_p = \frac{Q}{d} \tag{2.5}$$

jika (2.5) disubstitusikan ke persamaan (2.4) maka persediaan rata-rata (Q_r) akan menjadi

$$Q_r = \frac{\frac{Q}{d}(d-D)}{2} = \frac{Q(1-\frac{D}{d})}{2} = \frac{Q}{2}\left(1-\frac{D}{d}\right). \qquad (2.6)$$

Jika biaya simpan per *unit* per periode adalah *h* maka biaya simpan *(holding cost)* adalah

$$THC = \frac{Q}{2}h\left(1-\frac{D}{d}\right). \qquad (2.7)$$

2.5 Total Biaya Persediaan (*Total Inventory Cost*)

Total Inventory Cost atau total biaya persediaan merupakan jumlah dari biaya total pembelian/produksi (*purchased cost*), total biaya pesan (*ordering cost*), dan biaya total penyimpanan (*holding cost*)

$$TC = TPC + TOC + THC$$

di mana biaya total pembelian/produksi (*purchased cost*) merupakan perkalian antara harga barang (*C*) dengan jumlah permintaan barang (*D*)

$$TPC = C_p \times D. \qquad (2.8)$$

Biaya total pesan (*ordering cost*) merupakan perkalian antara biaya setiap kali pesan (C_o) dengan frekuensi pemesanan (*N*)

$$TOC = C_o \times N \qquad (2.9)$$

di mana frekuensi pemesanan (*N*) merupakan permintaan atau kebutuhan selama periode tertentu (*D*) dibagi banyaknya unit setiap kali pesan. Sesuai dengan persamaan (2.9),

$$N = \frac{D}{Q}$$

sehingga total biaya pesan menjadi

$$TOC = \frac{C_o D}{Q}. \tag{2.10}$$

Nilai (*Total Holding Cost)* adalah biaya simpan per *unit* per periode dikali dengan persediaan rata-rata

$$THC = h\frac{Q}{2}\left(1 - \frac{D}{d}\right) \tag{2.11}$$

dengan demikian biaya total persediaan adalah

$$\begin{aligned} TC &= TPC + TOC + THC \\ &= C_p D + \frac{C_o D}{Q} + h\frac{Q}{2}\left(1 - \frac{D}{d}\right). \end{aligned} \tag{2.12}$$

2.6 Model *EOQ* (*Economic Order Quantity*)

2.6.1 Model Matematika *EOQ* (*Economic Order Quantity*) *Single Item*

Model persediaan yang paling banyak digunakan adalah model *Economic Order Quantity (EOQ)* atau jumlah pemesanan yang ekonomis. Model ini membahas mengenai situasi dimana tingkat persediaan berkurang selama kurun waktu tertentu dan dalam waktu tertentu pula, tingkat persediaan akan berakhir dengan nol. Tujuan dari model *EOQ* ini adalah untuk meminimalkan biaya total persediaan dengan menentukan berapa jumlah barang yang harus dipesan dan kapan akan dilakukan pemesanan kembali.

Secara matematis, jumlah pemesanan yang optimal untuk model EOQ dapat ditentukan melalui dua macam cara, yaitu

1. menentukan titik minimum dari fungsi biaya total persediaan
2. menentukan titik potong antara fungsi biaya penyimpanan dengan fungsi biaya pemesanan total.

2.6.2 Model Matematika *EOQ (Economic Order Quantity) Multi Item*

Model *EOQ multi-item* merupakan model *EOQ* untuk pembelian bersama (*joint purchase*) beberapa jenis *item.* Model *EOQ multi-item* merupakan pengembangan lanjutan dari model *EOQ single-item*. Model matematis untuk *EOQ multi-item* adalah sebagai berikut

$$TC = TPC + TOC + THC$$

di mana *TPC (Total Purchased Cost)* biaya total pembelian/produksi (*purchased cost*) merupakan perkalian antara harga per *unit* untuk masing-masing *item* (C_{pr}) dengan jumlah permintaan masing-masing *item* (D_r). Sehingga persamaan (2.8) dapat ditulis sebagai

$$TPC = \sum_{r=1}^{n} C_{pr} D_r.$$

TOC (Total Ordering Cost) merupakan perkalian antara biaya setiap kali pesan (C_o) dengan frekuensi pemesanan (*N*). Pada kasus *multi item*, Maka frekuensi Pemesanan dihitung untuk setiap *item*, sehingga persamaan (2.10) dapat ditulis sebagai

$$TOC = \sum_{r=1}^{n} \frac{D_r}{Q_r} C_{or}.$$

Di lain pihak, *THC (total Holding Cost)* atau biaya penyimpanan pada kasus *multi-item*, harga barang dan jumlah barang untuk masing-masing *item* yang tidak sama, maka persamaan (2.11) dapat dinyatakan sebagai

$$THC = \sum_{r=1}^{n} h_r \frac{Q_r}{2}\left(1 - \frac{D_r}{d_r}\right)$$

sehingga diperoleh *TC (Total Inventory Cost) EOQ Multi Item* yakni

$$TC = \sum_{r=1}^{n} C_{pr} D_r + \sum_{r=1}^{n} \frac{D_r}{Q_r} C_{or} + \sum_{r=1}^{n} h_r \frac{Q_r}{2}\left(1 - \frac{D_r}{d_r}\right).$$

2.7 Program Dinamis

Dalam dunia usaha, para manajer sering berhadapan dengan pengambilan keputusan yang mencakup beberapa periode waktu. Program dinamis (*dynamic programming*) adalah suatu kumpulan teknik-teknik programasi matematis yang digunakan untuk pengambilan keputusan yang terdiri dari banyak tahap (*multistage*). Suatu masalah pengambilan keputusan yang *multistage* dipisah-pisakan menjadi suatu seri masalah atau submasalah yang berurutan dan saling berhubungan. Program dinamis dikembangkan pertama kali oleh Richard E. Bellman pada tahun 1957.

Program dinamis memberikan prosedur yang sistematis untuk penentuan kombinasi pengambilan keputusan yang memaksimumkan keseluruhan efektivitas (Subagyo, dkk, 1986).

2.7.1 Pendekatan Persamaan Rekursif

Teknik perhitungan program dinamis terutama didasarkan pada prinsip optimisasi rekursif (bersifat pengulangan) yang diketahui sebagai prinsip optimalisasi (*principle of optimality*). Prinsip ini mengandung arti bahwa bila dibuat keputusan *multistage* mulai dari tahap tertentu, kebijaksanaan optimal untuk tahap-tahap selanjutnya tergantung pada ketetapan tahap permulaan tanpa menghiraukan bagaimana diperoleh suatu ketetapan tertentu tersebut.

Masalah program dinamis dapat dinyatakan dalam bentuk umum

maksimum

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^{n} r_j\,(x_j)$$

dengan kendala

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

$x_j \geq 0 \; (j = 1, 2, \ldots, n)$

di mana

$f_n(x)$ = penghasilan total dari seluruh kegiatan (tahap)

x_j = kuantitas sumber daya yang dialokasikan ke kegiatan (tahap) ke *j*

$r_j(x_j)$= penghasilan (*reward*) dari kegiatan ke *j*

n = jumlah kegiatan (tahap-tahap) bebas (*independent*)

x = sumber daya total yang tersedia untuk *n* kegiatan.

Dalam masalah umum di atas, penghasilan (*return*) maksimum dari seluruh kegiatan ditentukan oleh sumber daya total *x* yang tersedia dan penghasilan dari kegiatan-kegiatan individual $r_j(x_j)$. Oleh sebab itu, penghasilan keseluruhan dari *n* kegiatan dapat dinyatakan oleh suatu urutan, fungsi-fungsi sebagai berikut.

$$f_n(x) = \text{maks}\, F\,(x_1,\, x_2, \ldots\ldots, x_{n-1}, x_n).$$

Sumber daya total yang tersedia *x* harus dialokasikan secara berurutan ke semua kegiatan-kegiatan pada tahap-tahap yang berbeda, untuk mencapai hasil yang maksimum. Bila dialokasikan sejumlah x_n dari sumber daya ke kegiatan dimana $0 \leq x_n \leq x$, akan didapatkan penghasilan $f_n(x_n)$ dari kegiatan tersebut. Masih dipunyai sejumlah (x - x_n) sumber daya yang tersedia untuk (n – 1) kegiatan. Bila penghasilan total dari (n – 1) kegiatan ditunjukkan oleh

$$f_{n-1}(x - x_n) = \sum_{j=1}^{n-1} r_j\left(x_j\right) \;\; , \;\; x_j \geq 0.$$

Penghasilan total dari n kegiatan dapat dinyatakan sebagai

$$f_n(x) = r_n(x_n) + f_{n-1}(x - x_n).$$

Kuantitas sumber daya optimal yang dialokasikan ke *n* kegiatan x_n menentukan nilai (x – x_n), dan sebaliknya akan menentukan nilai maksimum persamaan penghasilan total. Oleh sebab itu, masalah program dinamis dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi umum sebagai berikut.

$$f_n(x) = \text{maks}\,\{r_n(x_n) + f_{n-1}(x - x_n)\},\ \ n = 2, 3, ..$$

Persamaan ini disebut sebagai persamaan rekursif (recursive equation) (Subagyo, 1986).

2.7.2 Solusi Metode Kalkulus

Dalam menyelesaikan persamaan rekursif, tidak ada formulasi matematika tertentu untuk masalah program dinamis. Untuk itu, diilustrasikan metode penyelesaian masalah program dinamis dengan bantuan beberapa contoh masalah. Berikut salah satu contoh penyelesaian masalah program dinamis dengan pendekatan persamaan rekursif.

Membagi kuantitas *b* menjadi *n* bagian sehingga memaksimalkan produk mereka. Misalkan $f_n(b)$ menunjukkan nilai maksimum. Akan ditunjukkan bahwa

$$f_1(b) = b \text{ dan}$$

$$f_n(b) = \underset{0 \leq x \leq n}{\text{maks}}\ \{z\, f_{n-1}(b - z)\,\}$$

sehingga dapat ditentukan $f_n(b)$ dan divisi yang memaksimum-kannya. Model pemrograman matematikanya adalah memisalkan z_j adalah bagian ke j dari kuantitas b (j=1, 2, ..., n), permasalahannya menjadi

maksimum

$$f(\mathbf{y}) = y_1 . y_2 \cdots y_n \tag{2.13}$$

dengan kendala

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = b$$

$$y_j \geq 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Setiap *j* sesuai dengan bagian y_j, dapat dianggap sebagai sebuah tahap. Karena y_j diasumsikan bernilai nonnegatif dan memenuhi kendala di atas, alternatif pada setiap tahap tidak terbatas. Ini berarti bahwa y_j dapat dianggap kontinu. Misalkan x_j adalah keadaan sistem pada tahap *j*, maka jelas

x_1 = *b* untuk tahap 1

x_2 = *b* untuk tahap 1, dan 2

x_3 = *b* untuk tahap 1, 2, dan 3

⋮

x_n = *b* untuk tahap 1, 2, 3, ..., *n*.

Hal ini menunjukkan bahwa tahap x_j dari keadaan pada saat tahap *j* dapat didefinisikan sebagai bagian dari *b* yang dialokasikan ke bagian 1 sampai dengan *j*. Ini menunjukkan bahwa $0 \leq x_j \leq b$.

Persamaan rekursif dari permasalahan ini ditunjukkan oleh

$$f_1(x_1) = \underset{z_1 = x_1}{\text{maks}} \{z_1\}$$

$$f_j(x_j) = \underset{0 \leq z_j \leq x_j}{\text{maks}} \{z_j . f_{j-1}(x_j - z_j)\}$$

$$j = 1, 2, \ldots, n.$$

Untuk tahap 1, yaitu untuk $j = 1$,

$$f_1(x_1) = x_1$$

ini berarti bahwa $f_1(b) = b$ (kebenaran trivial).

Untuk tahap 2, yaitu untuk j = 1, 2

$$f_2(x_2) = \underset{0 \leq z_2 \leq x_2}{\text{maks}} \{z_2 . f_1(x_2 - z_2)\},$$

karena kuantitas *b* dibagi menjadi dua bagian, z_2 dan x_2-z_2. Seka-rang misalkan x_2 = *b* dan z_2 = *z* untuk masalah pada tahap 2, relasi rekurensi menjadi

$$f_2(x_2) = \underset{0 \leq z_2 \leq x_2}{\text{maks}} \{z_2 . f_1(x_2 - z_2)\},$$

$$f_2(b) = \text{maks } y_1 . y_2 = \text{maks. } \{z . f_1(b - z)\}$$

$$f_2(b) = \underset{0 \leq z \leq b}{\text{maks}} \{z . (b - z)\}, \text{dengan } f_1(b - z) = b - z.$$

Sama untuk masalah tahap 3, produk maksimum bersyarat dari *b* dibagi menjadi tiga bagian, diberikan pilihan awal *z*, yaitu

$$z . f_2(b - z).$$

Menggunakan prinsip optimalitas, diperoleh

$$f_3(b) = \max_{0 \le z \le b} y_1 \,.\, y_2 .\, y_3 = \text{ maks } \{z.\, f_2\,(b-z)\}\,.$$

Secara umum, untuk masalah tahap *n* persamaan rekursifnya adalah

$$f_n(b) = \max_{0 \le z \le b} y_1 \,.\, y_2 \,\cdots\, y_n = \text{ maks } \{z.\, f_{n-1}\,(b-z)\}\,.$$

Untuk menyelesaikan persamaan rekurensi tersebut, digunakan bantuan kalkulus diferensial.

Selanjutnya pada tahap 2, fungsi $z.(b-z)$ mencapai nilai maksimum untuk $z = b/2$ yang memenuhi batas $0 \le z \le b$. Sehingga

$$f_2(b\,) = \frac{b}{2} . \left(b - \frac{b}{2}\right) = \left(\frac{b}{2}\right)^2 .$$

Pada tahap 3 diperoleh sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f_3(b) &= \max_{0 \le z \le b} \left\{ z. \left(\frac{b-z}{2}\right)^2 \right\} \\ &= \frac{b}{3} . \frac{1}{4} \left(b - \frac{b}{3}\right)^2 = \left(\frac{b}{3}\right)^3 \end{aligned}$$

karena nilai maksimum $z.\left(\frac{b-z}{2}\right)^2$ dicapai untuk $z = \frac{b}{3}$, yang memenuhi batas $0 \le z \le b$. Hasil untuk tahap 1, 2, dan 3 tersebut menunjukkan bahwa secara umum, untuk masalah *n* tahap dapat diasumsikan

$$f_n(b) = \left(\frac{b}{n}\right)^n . \tag{2.14}$$

Hasil tersebut dapat dibuktikan dengan dengan induksi sebagai berikut

$$\begin{aligned} f_{n+1}(b) &= \max_{0 \le z \le b} \{z.\, f_n\,(b-z)\} \\ &= \max_{0 \le z \le b} \left\{ z. \left(\frac{b-z}{n}\right)^n \right\} \\ &= \left(\frac{b}{n+1}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

nilai maksimum $z.\left(\frac{b-z}{n}\right)^n$ dicapai untuk $z = \frac{b}{n+1}$, kebijakan optimal-nya adalah

$$\left(\frac{b}{n}, \frac{b}{n}, \dots, \frac{b}{n}\right)$$

dengan $f_n(b) = \left(\frac{b}{n}\right)^n$

(Swarup, Gupta, 1977).

2.8 *Geometric programming*

Geometric programming adalah sebuah teknik yang menarik untuk memecahkan kasus khusus dari masalah nonlinier. Teknik ini, dikembangkan oleh R. Duffin dan C. Zener pada tahun 1964, yang menemukan solusi dengan mempertimbangkan masalah dual yang terkait. Keuntungan dari teknik ini adalah lebih mudah bekerja dengan komputasi terhadap masalah dual tersebut (Taha, 1992).

2.8.1 *Geometric – Arithmetic Mean Inequality*

Untuk mendapatkan *Geometric – Arithmetic Mean Inequality*, dilakukan yakni mempertimbangkan masalah subdivisi optimal sebagai

maksimum

$$f(\mathbf{x}) = x_1 \,.\, x_2 \cdots x_n$$

dengan $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = C \quad (C > 0)$.
Dengan menggunakan metode persamaan rekursif pada (2.14), diperoleh

$$\text{maks } f(\mathbf{x}) = \left(\frac{C}{n}\right)^{\boldsymbol{n}}$$

maka

$$f(\mathbf{x}) \le \left(\frac{C}{n}\right)^{\boldsymbol{n}}$$

atau

$$\prod_{j=1}^{n} x_j \leq \left(\sum_{j=1}^{n} {x_j}/{n}\right)^{n}$$

ambil akar ke – *n* dari setiap sisi, ketaksetaraannya menjadi

$$\left(\prod_{j=1}^{n} x_j\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$$

ketaksetaraan menjadi persamaan tegas (*crisp*) ketika $x_j = \frac{c}{n}$. Ketaksetaraan ini dikenal sebagai ***Geometric-Arithmetic Mean Inequality*** dan menjadi dasar untuk perkembangan *geometric programming.*

Sebuah bentuk yang lebih umum dari ketaksetaraan ini dapat ditulis

$$\left(\prod_{j=1}^{N} (V_j)^{\alpha_j}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \leq \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{N} \alpha_j\ V_j \qquad (2.15)$$

di mana λ = $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j, V_j$ $(j = 1,2, \dots, N)$ N adalah bilangan bulat positif dan α_j $(j = 1,2, \dots, N)$ adalah bilangan rasional positif. Bilangan α_j disebut fungsi pemberat.

Sekarang diambil $\alpha_j = \lambda\zeta_{j,}$ ketaksetaraan menjadi

$$\prod_{j=1}^{N} (V_j)^{\zeta_j} \leq \sum_{j=1}^{N} \zeta_j\ V_j \qquad (2.16)$$

di mana $\sum_{j=1}^{N} \zeta_j$ = 1.
Bilangan ζ_j $(j = 1,2, \dots, N)$disebut fungsi pemberat normal.

Lebih lanjut, dengan menempatkan $V_j\zeta_j = u_j$, diperoleh

$$\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{u_j}{\zeta_j}\right)^{\zeta_j} \leq \sum_{j=1}^{N} u_j \tag{2.17}$$

di mana $\sum_{j=1}^{N} \zeta_j = 1$.
Pada berat non-normalisasi α_j, ketaksetaraan (2.15) dapat ditulis sebagai

$$\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{\lambda u_j}{\alpha_j}\right)^{\frac{\alpha_j}{\lambda}} \leq \sum_{j=1}^{N} u_j$$

atau

$$\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{u_j}{\alpha_j}\right)^{\alpha_j} (\lambda)^{\lambda} \leq \left(\sum_{j=1}^{N} u_j\right)^{\lambda} \tag{2.18}$$

di mana $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j = \lambda$.

Pertaksamaan (2.17) menjadi sebuah persamaan jika untuk semua u_j / ζ_j sama. Begitu juga dengan pertaksamaan (2.18) adalah sebuah persamaan jika u_j / α_j sama (Swarup, Gupta, 1977).

2.8.2 Masalah *Geometric programming* Tanpa Kendala

Geometric programming berkaitan dengan masalah di mana fungsi tujuan dengan tipe sebagai berikut.

Minimum

$$z = f(X) = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n \tag{2.19}$$

$$z = \sum_{j=1}^{n} u_j$$

pada umumnya, komponen u_j dinyatakan sebagai

$$u_j(\mathbf{x}) = c_j\, x_1^{a_{1j}}\, x_2^{a_{2j}} \ldots x_m^{a_{mj}} \tag{2.20}$$

$j = 1, 2, \cdots, n$

$$u_j(\mathbf{x}) = c_j \prod_{i=1}^{m} x_i^{a_{ij}}.$$

Fungsi tujuan dapat ditulis kembali

$$z = f(\boldsymbol{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j \prod_{i=1}^{m} x_i^{a_{ij}} \tag{2.21}$$

di mana $c_j > 0, x_i \ (i = 1, 2, \cdots, m) > 0$ dan

a_{ij} (i = 1, 2, ⋯, m ; j = 1, 2, ⋯, n) tandanya tidak terbatas.

Fungsi *f(**X**)* mengambil bentuk polinomial kecuali bahwa eksponen yang mungkin negatif. Untuk alasan ini, dan karena semua c_j > 0, Duffin dan Zener menyebut *f(**X**)* sebagai **posynomial.** Dengan mempertimbangkan minimasi dari fungsi *f(**X**)* yang didefinisikan oleh bentuk posynomial yang diberikan, permasalahan ini disebut sebagai fungsi **primal** (Taha, 1992).

Apabila menggunakan *Geometric-Arithmetic Mean Inequality* (2.17), fungsi tujuan yang didefinisikan persamaan (2.19), dapat ditulis

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n \geq \left(\frac{u_1}{\zeta_1}\right)^{\zeta_1} \left(\frac{u_2}{\zeta_2}\right)^{\zeta_2} \ldots \left(\frac{u_n}{\zeta_n}\right)^{\zeta_n} \tag{2.22}$$

di mana $u_j = u_j(\mathbf{x})$ untuk $j = 1,2, \ldots, n$ dan pemberat ζ_j

$(j = 1,2, \ldots, n)$ memenuhi relasi $\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n = 1$.

Sisi kiri ketaksetaraan (2.22) dikenal sebagai fungsi primal dan sisi kanannya disebut sebagai fungsi predual.

Pada metode klasik, kondisi optimal diperoleh dengan mengambil turunan parsial pertama

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_k}\right)^* = \frac{1}{x_k^*} \sum_{j=1}^{n} a_{jk} c_j \prod_{i=1}^{m} (x_i^*)^{a_{ij}}, \quad k = 1, 2, \ldots, N.$$

Misal z^* menjadi nilai minimum dari z. Ini berarti $z^* > 0$, karena z adalah *posynomial* dan setiap $x_k{}^* > 0$. Mendefinisikan

$$\zeta_j \equiv \frac{c_j \prod_{i=1}^{m} (x_i{}^*)^{a_{ij}}}{z^*}.$$

Jika $u_j = c_j \prod_{j=1}^{m} x_i{}^{a_{ij}}$, fungsi predual dapat ditulis sebagai

$$\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{u_j}{\zeta_j}\right)^{\zeta_j} = \prod_{j=1}^{n} \left[\frac{c_j \prod_{i=1}^{m} x_i{}^{a_{ij}}}{\zeta_j}\right]^{\zeta_j}$$

$$\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{c_j}{\zeta_j}\right)^{\zeta_j} \prod_{j=1}^{n} \left(\prod_{i=1}^{m} x_i{}^{a_{ij}}\right)^{\zeta_j}$$

$$\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{c_j}{\zeta_j}\right)^{\zeta_j} \left\{\left(\prod_{i=1}^{m} x_i{}^{a_{i1}\zeta_1}\right)\left(\prod_{i=1}^{m} x_i{}^{a_{i2}\zeta_2}\right) \dots \left(\prod_{i=1}^{m} x_i{}^{a_{in}\zeta_n}\right)\right\}$$

$$\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{c_j}{\zeta_j}\right)^{\zeta_j} \left\{\left(x_1{}^{\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\zeta_j}\right)\left(x_2{}^{\sum_{j=1}^{n} a_{2j}\zeta_j}\right) \dots \left(x_m{}^{\sum_{j=1}^{n} a_{mj}\zeta_j}\right)\right\}$$

$$\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{c_j}{\zeta_j}\right)^{\zeta_j} \prod_{i=1}^{m} x_i{}^{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\zeta_j} \tag{2.23}$$

apabila digunakan kondisi ortogonal $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\zeta_j = 0$, bersama dengan kondisi normal $\sum_{j=1}^{n} \zeta_j = 1$, persamaan (2.23) tereduksi menjadi

$$\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{u_j}{\zeta_j}\right)^{\zeta_j} = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{c_j}{\zeta_j}\right)^{\zeta_j}$$

sehingga ketaksetaraan (2.22) menjadi

$$u_1 + u_1 + \dots + u_n \geq \left(\frac{c_1}{\zeta_1}\right)^{\zeta_1} \left(\frac{c_2}{\zeta_2}\right)^{\zeta_2} \dots \left(\frac{c_n}{\zeta_n}\right)^{\zeta_n}$$

atau

$$f(\mathrm{x}) \geq \Phi(\zeta),$$

di mana ζ adalah vektor dengan komponen $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots, \zeta_n$. Sehingga diperoleh minimum *f*(x) = maksimum $\Phi(\zeta)$.

Pada cara ini, mengkonversi permasalahan minimasi *f*(x) ke permasalahan baru maksimasi $\Phi(\zeta)$. Permasalahan asli dari minimasi disebut sebagai primal dan masalah yang terkait dengan maksimasi adalah predual (Swarup, Gupta, 1977).

2.8.3 Masalah *Geometric programming* Dengan Kendala

Masalah *geometric programming* dengan kendala pada umumnya digambarkan sebagai
minimum

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_o} c_{oj} \prod_{i=1}^{m} x_i^{a_{oij}} \tag{2.24}$$

dengan kendala

$$g_k(\mathbf{x}) \equiv \sum_{j=1}^{n_k} c_{kj} \prod_{i=1}^{m} x_i^{a_{kij}} \{\leq, =, \geq\ 1\} \tag{2.25}$$

di mana $x_i\ (i = 1,2,\dots,m) > 0$, konstanta $c_{oj}\ (j = 1,2,\dots,n_o)$ dan $c_{kj}\ (k = 1,2,\dots,N\ ;\ j = 1,2,\dots,n_k)$ adalah bilangan positif, eksponen $a_{oij}\ (i = 1,2,\dots,m\ ;\ j = 1,2,\dots,n_o)$ dan $a_{kij}\ (k = 1,2,\dots,N\ ; i = 1,2,\dots,m;\ j = 1,2,\dots,n_k)$ adalah bilangan-bilangan riil.

N adalah total jumlah kendala, n_o adalah jumlah persamaan pada fungsi tujuan, n_k adalah jumlah persamaan pada kendala ke-*k*. Untuk solusi dari masalah minimasi kendala yang disebutkan di atas, kendalanya dapat ditulis lagi sebagai berikut.

$$f_k = \sigma_k[1 - g_k(\mathbf{x})] \geq 0, \quad k = 1,2,\dots,N \tag{2.26}$$

di mana σ_k disebut fungsi signum dan diperkenalkan untuk kendala ke-*k* jadi fungsi ini mengambil nilai +1 atau –1 bergantung pada $g_k(\mathbf{x})$ apakah ≤ 1 atau ≥ 1untuk masing – masing. Permasalahannya sekarang adalah meminimalkan fungsi tujuan (2.24) , dengan kendala (2.26). Masalah ini disebut masalah primal dan dapat diganti oleh masalah yang ekuivalen yang dikenal dengan masalah dual dengan kendala linier (Swarup, Gupta, 1977).

2.9 Uji Turunan ke Dua

Andaikan f' dan f'' ada pada setiap titik dalam selang terbuka (a, b) yang memuat c , dan andaikan $f'(c) = 0$

(i) Jika $f''(c) < 0$, maka $f(c)$ adalah nilai maksimum lokal f.

(ii) Jika $f''(c) > 0$, maka $f(c)$ adalah nilai minimum lokal f.

BAB III
HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Model EOQ *Multi Item* dengan Variasi Biaya Penyimpanan

Seperti dijelaskan pada bab sebelumnya bahwa total biaya persediaan adalah jumlahan dari biaya produksi, biaya pemesanan, dan biaya simpan. Model yang paling sering digunakan untuk masalah persediaan adalah model *EOQ (Eqonomic Order Quantity*) di mana model ini bertujuan untuk meminimumkan total biaya persediaan (*Inventory Total Cost*). Untuk model *EOQ multi item* dengan variasi biaya simpan, modelnya sedikit berbeda dengan model *EOQ* biasa. Pada model ini, biaya simpannya dipengaruhi oleh tingkat persediaan barang yang disimpan, berbeda dengan model *EOQ* biasa yang biaya simpannya bersifat konstan. Sedangkan biaya simpannya diasumsikan sebagai fungsi kontinu menurun dari kuantitas produksi. Sehingga apabila dimodelkan ke dalam bentuk matematis adalah sebagai berikut.

Fungsi tujuan :

minimum :

$$TC(Q_r) = \sum_{r=1}^{n} C_{pr}D_r + \frac{D_r}{Q_r}C_{or} + C_{hr}(Q_r)\frac{Q_r}{2}\left(1 - \frac{D_r}{d_r}\right) \tag{3.1}$$

dengan kendala:

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{D_r}{Q_r} \leq K_1$$

dan

$$\sum_{r=1}^{n} C_{hr}(Q_r)\frac{Q_r}{2}\left(1 - \frac{D_r}{d_r}\right) \leq K_2 \tag{3.2}$$

dengan asumsi

$$C_{hr}(Q_r) = \alpha + \beta {Q_r}^{-1}, \tag{3.3}$$

$r = 1, 2, 3, \dots, n$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ adalah konstanta riil

di mana

C_{pr} : biaya pembelian (produksi) untuk *item* ke – *r*
C_{or} : biaya pemesanan untuk *item* ke – *r*
D_r : tingkat permintaan untuk *item* ke - *r*
d_r : tingkat produksi untuk *item* ke - *r*
$C_{hr}(Q_r)$: variasi biaya simpan untuk *item* ke – *r* sebagai fungsi dari Q_r
K_1 : batas jumlah pesanan
K_2 : batas total biaya simpan
Q_r : kuantitas produksi untuk *item* ke - *r*
$TC(Q_r)$: total biaya persediaan sebagai fungsi dari Q_r
n : jumlah *item* yang ada dalam persediaan.

Diasumsikan bahwa biaya simpan adalah fungsi kontinu menurun dari kuantitas produksi, persamaan (3.3) disubstitusikan ke persamaan (3.1) dan persamaan (3.2) sehingga diperoleh

$$TC(Q_r) = \sum_{r=1}^{n} C_{pr}D_r + \frac{D_r}{Q_r}C_{or} + \left(\alpha + \beta Q_r^{\ -1}\right)\frac{Q_r}{2}\left(1 - \frac{D_r}{d_r}\right)$$

$$= \sum_{r=1}^{n} C_{pr}D_r + \frac{D_r}{Q_r}C_{or} + \frac{\alpha Q_r}{2}\left(1 - \frac{D_r}{d_r}\right)$$

$$+ \frac{\beta Q_r}{2\,Q_r}\left(1 - \frac{D_r}{d_r}\right)$$

$$= \sum_{r=1}^{n} C_{pr}D_r + \frac{D_r}{Q_r}C_{or} + \frac{\alpha Q_r}{2}\left(1 - \frac{D_r}{d_r}\right) + \frac{\beta}{2}\left(1 - \frac{D_r}{d_r}\right). \qquad (3.4)$$

Karena persamaan $\sum_{r=1}^{n} C_{pr}D_r + \frac{\boldsymbol{\beta}}{2}\left(1 - \frac{D_r}{d_r}\right)$ nilainya tidak bergatung pada Q_r, dan bernilai konstan, sehingga persamaan tersebut dapat diabaikan terlebih dahulu. Untuk menyelesaikan fungsi primal, persamaan (3.4) disederhanakan menjadi minimum:

$$TC(Q_r) = \sum_{r=1}^{n} \frac{D_r}{Q_r} C_{or} + \sum_{r=1}^{n} \frac{\alpha Q_r D'_r}{2}, \tag{3.5}$$

dengan $D'_r = \left(1 - \frac{D_r}{d_r}\right)$

dengan kendala

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{D_r}{K_1 Q_r} \leq 1 \tag{3.6}$$

dan

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha Q_r D'_r}{2K_2} \leq 1. \tag{3.7}$$

3.2 Penggunaan Pendekatan *Geometric Programming*

3.2.1 Membentuk Fungsi Predual

Penyelesaian masalah optimasi menggunakan pendekatan *Geometric Programming* dilakukan dengan membentuk fungsi predual berdasarkan fungsi primalnya. Untuk memperoleh solusi dari fungsi tujuan yang merupakan fungsi primal, dilakukan penyelesaian terhadap fungsi predual yang mengasilkan pendekatan solusi dari fungsi primalnya. Untuk itu, setelah memperoleh fungsi primal, selanjutya dibentuk fungsi predual dengan mengaplikasikan teknik *Geometric Programming* pada persamaan (3.5), (3.6) dan (3.7) sehingga fungsi predual dapat ditulis

$$G(W) = \prod_{r=1}^{n} \left(\frac{D_r C_{or}}{Q_r W_{1r}}\right)^{W_{1r}} \left(\frac{\alpha Q_r D'_r}{2W_{2r}}\right)^{W_{2r}} \left(\frac{D_r}{K_1 Q_r W_{3r}}\right)^{W_{3r}} \left(\frac{\alpha Q_r D'_r}{2K_2 W_{4r}}\right)^{W_{4r}}$$

$$G(W) = \prod_{r=1}^{n} \left(\frac{D_r C_{or}}{W_{1r}}\right)^{W_{1r}} \left(\frac{\alpha D'_r}{2W_{2r}}\right)^{W_{2r}} x$$

$$\left(\frac{D_r}{K_1 W_{3r}}\right)^{W_{3r}} \left(\frac{\alpha D'_r}{2K_2 W_{4r}}\right)^{W_{4r}} Q_r^{-W_{1r}+W_{2r}-W_{3r}+W_{4r}} \tag{3.8}$$

dengan vektor variabel dual $W = W_{jr}, 0 < W_{jr} < 1$, $j = 1, 2, 3, 4, r = 1, 2, \ldots, n$ dapat dipilih berdasarkan kondisi normal

$$W_{1r} + W_{2r} = 1\,. \tag{3.9}$$

Kemudian membentuk kondisi ortogonal agar eksponen dari Q_r bernilai nol, sehingga sisi kanan dari persamaan (3.8) bebas dari variabel keputusan (Q_r) sebagai berikut

$$-W_{1r} + W_{2r} - W_{3r} + W_{4r} = 0. \tag{3.10}$$

Persamaan (3.10) disebut sebagai kondisi ortogonal, di mana bersamaan dengan persamaan (3.9) merupakan dua persamaan linier dengan empat variabel yang mempunyai solusi tak berhingga atau banyak solusi.

3.2.2 Menentukan Solusi Optimal Dari Fungsi Pemberat

Vektor variabel pada fungsi predual merupakan fungsi pemberat untuk masing-masing persamaan. Sehingga untuk memperoleh solusi optimal dari persamaan (3.8) harus ditentukan nilai optimal masing-masing fungsi pemberat (${W_{jr}}^*, j = 1, 2, 3, 4\,; r = 1, 2, \ldots, n$).

Untuk mendapatkan ${W_{jr}}^*$, langkah pertama dengan meyelesaikan persamaan (3.9) dan persamaan (3.10) sebagai berikut

$$\begin{aligned}
W_{2r} &= 1 - W_{1r} \\
W_{2r} &= 1 - W_{2r} + W_{3r} - W_{4r} \\
2W_{2r} &= 1 + W_{3r} - W_{4r} \\
W_{2r} &= \frac{1}{2}(1 + W_{3r} - W_{4r})
\end{aligned} \tag{3.11}$$

karena

$$W_{1r} = W_{2r} - W_{3r} + W_{4r}$$

sehingga

$$W_{1r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}W_{3r} - \frac{1}{2}\,W_{4r} - W_{3r} +\, W_{4r}$$

$$W_{1r} \;\; = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}W_{3r} + \frac{1}{2}\,W_{4r}$$

$$W_{1r} \;\; = \frac{1}{2}(1 - W_{3r} +\, W_{4r}). \tag{3.12}$$

Kemudian persamaan (3.11) dan persamaan (3.12) disubstitusi ke persamaan (3.8) sebagai berikut

$$g(W_{3r}, W_{4r}) = \prod_{r=1}^{n}\left(\frac{D_r C_{or}}{\frac{1}{2}(1 - W_{3r} +\, W_{4r})}\right)^{\frac{1}{2}(1-W_{3r}+\,W_{4r})}$$

$$\times\left(\frac{\alpha D'_r}{2.\mathbf{\frac{1}{2}}(1 + W_{3r} -\, W_{4r})}\right)^{\frac{1}{2}(1+W_{3r}-\,W_{4r})}$$

$$\times\left(\frac{D_r}{K_1 W_{3r}}\right)^{W_{3r}} x\left(\frac{\alpha D'_r}{2K_2 W_{4r}}\right)^{W_{4r}}$$

$$g(W_{3r}, W_{4r}) = \prod_{r=1}^{n}\left(\frac{2D_r C_{or}}{(1 - W_{3r} +\, W_{4r})}\right)^{\frac{1}{2}(1-W_{3r}+\,W_{4r})}$$

$$\times\left(\frac{\alpha D'_r}{(1 + W_{3r} -\, W_{4r})}\right)^{\frac{1}{2}(1+W_{3r}-\,W_{4r})}$$

$$\times\left(\frac{D_r}{K_1 W_{3r}}\right)^{W_{3r}} x\left(\frac{\alpha D'_r}{2K_2 W_{4r}}\right)^{W_{4r}}. \tag{3.13}$$

Untuk menentukan W_{3r} dan W_{4r} yang memaksimumkan $g(W_{3r}, W_{4r})$, pertama diambil bentuk logaritma dari persamaan (3.13) sebagai berikut

$$\ln g(W_{3r}, W_{4r}) = \ln \prod_{r=1}^{n} \left(\frac{2D_r C_{or}}{(1 - W_{3r} + W_{4r})}\right)^{\frac{1}{2}(1-W_{3r}+W_{4r})}$$

$$\times \left(\frac{\alpha D'_r}{(1 + W_{3r} - W_{4r})}\right)^{\frac{1}{2}(1+W_{3r}-W_{4r})}$$

$$\times \left(\frac{D_r}{K_1 W_{3r}}\right)^{W_{3r}} \left(\frac{\alpha D'_r}{2K_2 W_{4r}}\right)^{W_{4r}}$$

$$= \frac{1}{2}(1 - W_{3r} + W_{4r}) \ln \left(\frac{2D_r C_{or}}{(1 - W_{3r} + W_{4r})}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}(1 + W_{3r} - W_{4r}) \ln \left(\frac{\alpha D'_r}{(1 + W_{3r} - W_{4r})}\right)$$

$$+ W_{3r} \ln \left(\frac{D_r}{K_1 W_{3r}}\right) + W_{4r} \ln \left(\frac{\alpha D'_r}{2K_2 W_{4r}}\right).$$

Selanjutnya diambil turunan parsial pertama masing-masing terhadap W_{3r} dan W_{4r} , dan disamadengankan nol . Turunan parsial pertama terhadap W_{3r} dapat dilihat pada Lampiran 1.

$$\frac{\partial \ln g(W_{3r}, W_{4r})}{\partial W_{3r}} = 0$$

sehingga diperoleh

$$\left(\frac{\alpha D'_r}{2D_r C_{or}}\right)\left(\frac{D_r}{K_1 e}\right)^2 \left(\frac{1 - W_{3r} + W_{4r}}{1 + W_{3r} - W_{4r}}\right)\frac{1}{W_{3r}{}^2} = 1. \qquad (3.14)$$

Turunan parsial pertama terhadap W_{4r} dapat dilihat pada Lampiran 2.

$$\frac{\partial \ln g(W_{3r}, W_{4r})}{\partial W_{4r}} = 0$$

sehingga diperoleh

$$\left(\frac{2D_rC_{or}}{\alpha D'_r}\right)\left(\frac{\alpha D'_r}{2K_2e}\right)^2\left(\frac{1+W_{3r}-W_{4r}}{1-W_{3r}+W_{4r}}\right)\frac{1}{W_{4r}{}^2}=1. \qquad (3.15)$$

Mengalikan persamaan (3.14) dan persamaan (3.15) diperoleh

$$\left(\frac{\alpha D'_r}{2D_rC_{or}}\right)\left(\frac{D_r}{K_1e}\right)^2\left(\frac{1-W_{3r}+W_{4r}}{1+W_{3r}-W_{4r}}\right)\frac{1}{W_{3r}{}^2}$$

$$\left(\frac{2D_rC_{or}}{\alpha D'_r}\right)\left(\frac{\alpha D'_r}{2K_2e}\right)^2\left(\frac{1+W_{3r}-W_{4r}}{1-W_{3r}+W_{4r}}\right)\frac{1}{W_{4r}{}^2}=1$$

$$\left(\frac{D_r}{K_1e}\right)^2\left(\frac{\alpha D'_r}{2K_2e}\right)^2\frac{1}{W_{3r}{}^2W_{4r}{}^2}=1$$

$$\left(\frac{D_r}{K_1e}\right)^2\left(\frac{\alpha D'_r}{2K_2e}\right)^2=W_{3r}{}^2W_{4r}{}^2$$

$$\frac{\alpha D'_rD_r}{2K_1K_2e^2}=W_{3r}W_{4r}$$

dengan mensubstitusi W_{4r} ke persamaan (3.14), yaitu

$$W_{4r}=\frac{\alpha D'_rD_r}{2K_1K_2e^2W_{3r}}$$

apabila dimisalkan

$$A=\left(\frac{\alpha D'_r}{2D_rC_{or}}\right)\left(\frac{D_r}{K_1e}\right)^2$$

maka

$$A\left(\frac{1-W_{3r}+W_{4r}}{1+W_{3r}-W_{4r}}\right)\frac{1}{W_{3r}{}^2}=1$$

$$A\left(\frac{1-W_{3r}+\frac{\alpha D'_r D_r}{2K_1K_2e^2W_{3r}}}{1+W_{3r}-\frac{\alpha D'_r D_r}{2K_1K_2e^2W_{3r}}}\right)\frac{1}{{W_{3r}}^2}=1$$

$$A\left(\frac{1-W_{3r}+\frac{\alpha D'_r D_r}{2K_1K_2e^2W_{3r}}}{1+W_{3r}-\frac{\alpha D'_r D_r}{2K_1K_2e^2W_{3r}}}\right)\frac{1}{{W_{3r}}^2}{W_{3r}}^3={W_{3r}}^3$$

$$A\left(\frac{1-W_{3r}+\frac{\alpha D'_r D_r}{2K_1K_2e^2W_{3r}}}{1+W_{3r}-\frac{\alpha D'_r D_r}{2K_1K_2e^2W_{3r}}}\right)W_{3r}={W_{3r}}^3$$

$$AW_{3r}-A{W_{3r}}^2+\frac{AW_{3r}\alpha D'_r D_r}{2K_1K_2e^2W_{3r}}={W_{3r}}^3+{W_{3r}}^4-\frac{{W_{3r}}^3\alpha D'_r D_r}{2K_1K_2e^2W_{3r}}$$

$${W_{3r}}^4+{W_{3r}}^3+A{W_{3r}}^2-\frac{{W_{3r}}^2\alpha D'_r D_r}{2K_1K_2e^2}-AW_{3r}-\frac{A\alpha D'_r D_r}{2K_1K_2e^2}=0$$

sehingga diperoleh

$$f(W_{3r})={W_{3r}}^4+{W_{3r}}^3-\left(\frac{\alpha D'_r D_r}{2K_1K_2e^2}-\left(\frac{\alpha D'_r}{2D_rC_{or}}\right)\left(\frac{D_r}{K_1e}\right)^2\right){W_{3r}}^2$$
$$-\left(\frac{\alpha D'_r}{2D_rC_{or}}\right)\left(\frac{D_r}{K_1e}\right)^2W_{3r}$$
$$-\left(\frac{\alpha D'_r}{2D_rC_{or}}\right)\left(\frac{D_r}{K_1e}\right)^2\frac{\alpha D'_r D_r}{2K_1K_2e^2}=0.$$

Demikian juga dengan mensubstitusi W_{3r} ke persamaan (3.15), yaitu

$$W_{3r}=\frac{\alpha D'_r D_r}{2K_1K_2e^2W_{4r}}$$

apabila dimisalkan

$$B = \left(\frac{2D_r C_{or}}{\alpha D'_r}\right)\left(\frac{\alpha D'_r}{2K_2 e}\right)^2$$

maka

$$B\left(\frac{1 + W_{3r} - W_{4r}}{1 - W_{3r} + W_{4r}}\right)\frac{1}{W_{4r}^{\ 2}} = 1$$

$$B\left(\frac{1 + \frac{\alpha D'_r D_r}{2K_1K_2e^2W_{4r}} - W_{4r}}{1 - \frac{\alpha D'_r D_r}{2K_1K_2e^2W_{4r}} + W_{4r}}\right)\frac{1}{W_{4r}^{\ 2}} = 1$$

$$B\left(\frac{1 + \frac{\alpha D'_r D_r}{2K_1K_2e^2W_{4r}} - W_{4r}}{1 - \frac{\alpha D'_r D_r}{2K_1K_2e^2W_{4r}} + W_{4r}}\right)\frac{1}{W_{4r}^{\ 2}} W_{4r}^{\ 3} = W_{4r}^{\ 3}$$

$$B\left(\frac{1 + \frac{\alpha D'_r D_r}{2K_1K_2e^2W_{4r}} - W_{4r}}{1 - \frac{\alpha D'_r D_r}{2K_1K_2e^2W_{4r}} + W_{4r}}\right)W_{4r} = W_{4r}^{\ 3}$$

$$BW_{4r} - BW_{4r}^{\ 2} + \frac{BW_{4r}\alpha D'_r D_r}{2K_1K_2e^2W_{4r}} = W_{4r}^{\ 3} + W_{4r}^{\ 4} - \frac{W_{4r}^{\ 3}\alpha D'_r D_r}{2K_1K_2e^2W_{4r}}$$

$$W_{4r}^{\ 4} + W_{4r}^{\ 3} + BW_{4r}^{\ 2} - \frac{W_{4r}^{\ 2}\alpha D'_r D_r}{2K_1K_2e^2} - BW_{4r} - \frac{B\alpha D'_r D_r}{2K_1K_2e^2} = 0$$

sehingga diperoleh

$$f(W_{4r}) = {W_{4r}}^4 + {W_{4r}}^3 — \left(\frac{2D_rC_{or}}{\alpha D'_r}\right)\left(\frac{\alpha D'_r}{2K_2e}\right)^2 + \frac{\alpha D'_rD_r}{2K_1K_2e^2}{W_{4r}}^2$$
$$-\left(\frac{2D_rC_{or}}{\alpha D'_r}\right)\left(\frac{\alpha D'_r}{2K_2e}\right)^2 W_{4r}$$
$$-\left(\frac{2D_rC_{or}}{\alpha D'_r}\right)\left(\frac{\alpha D'_r}{2K_2e}\right)^2 \frac{\alpha D'_rD_r}{2K_1K_2e^2} = 0.$$

Agar menjadi lebih sederhana, $f(W_{3r})$ dan $f(W_{4r})$ dapat ditulis dalam bentuk

$$f\left(W_{jr}\right) = {W_{jr}}^4 + {W_{jr}}^3 - \left(A_r - B_{jr}\right){W_{jr}}^2 - B_{jr}W_{jr} - A_rB_{jr} = 0\ , j = 3, 4 \tag{3.16}$$

di mana

$$A_r = \frac{\alpha D'_rD_r}{2K_1K_2e^2},$$

$$B_{3r} = \left(\frac{\alpha D'_r}{2D_rC_{or}}\right)\left(\frac{D_r}{K_1e}\right)^2,$$

$$B_{4r} = \left(\frac{2D_rC_{or}}{\alpha D'_r}\right)\left(\frac{\alpha D'_r}{2K_2e}\right)^2.$$

Untuk mendapatkan akar $f\left(W_{jr}\right)$, digunakan program *Maple*, dan yang pertama didapatkan adalah ${W_{jr}}^*, j = 3, 4$ dari persamaan (3.16) yang akan memaksimumkan $g(W_{3r}, W_{4r})$. Hal ini dapat ditunjukkan dengan uji turunan ke dua

$$\frac{\gamma^2 \ln g(W_{3r}, W_{4r})}{\gamma {W_{3r}}^2} < 0$$

$$\frac{\gamma^2 \ln g(W_{3r}, W_{4r})}{\gamma {W_{4r}}^2} < 0$$

$$\frac{\gamma^2 \ln g(W_{3r}, W_{4r})}{\gamma W_{3r} W_{4r}} > 0$$

$$\Delta = \left(\frac{\gamma^2 \ln g(W_{3r}, W_{4r})}{\gamma W_{3r} W_{4r}}\right)^2 - \left(\frac{\gamma^2 \ln g(W_{3r}, W_{4r})}{\gamma {W_{4r}}^2}\right)\left(\frac{\gamma^2 \ln g(W_{3r}, W_{4r})}{\gamma {W_{3r}}^2}\right) < 0.$$

Hasil uji turunan ke dua dapat dilihat pada Lampiran 3.

Dengan akar ${W_{3r}}^*$dan ${W_{4r}}^*$dihitung dari persamaan (3.16) yang telah dibuktikan memaksimumkan fungsi predual $g(W_{3r}, W_{4r})$. Sehingga solusi optimalnya adalah ${W_{jr}}^*, j = 1,2,3,4$ dimana ${W_{3r}}^*$dan ${W_{4r}}^*$ adalah solusi dari (3.16) dan ${W_{1r}}^*$dan ${W_{2r}}^*$ dihitung dengan mensubtitusikan nilai ${W_{3r}}^*$dan ${W_{4r}}^*$ pada persamaan(3.11) dan persamaan (3.12).

3.3 Menentukan Kuantitas Produksi Optimal

Tujuan dari model EOQ adalah untuk menentukan kuantitas produksi yang optimal agar total biaya persediaan minimum. Dalam pencarian solusi untuk kuantitas produksi optimal, telah digunakan pendekatan *geometric programming*. Setelah dilakukan beberapa langkah untuk menentukan solusi optimal ${W_{jr}}^*, j = 1,2,3,4$ yang merupakan fungsi pemberat pada fungsi predual, selanjutnya diaplikasikan definisi *Geometric Programming* untuk mendapatkan kuantitas produksi optimal ${Q_r}^*$ sebagai berikut.

$$\frac{D_r C_{or}}{{Q_r}^*} = {W_{1r}}^* \, g({W_{1r}}^*, {W_{2r}}^*) \text{ dan}$$

$$\frac{\alpha {D'}_r {Q_r}^*}{2} = {W_{2r}}^* \, g({W_{1r}}^*, {W_{2r}}^*)$$

maka

$$g({W_{1r}}^*, {W_{2r}}^*) = \frac{D_r C_{or}}{{Q_r}^* {W_{1r}}^*}$$

dan

$$g({W_{1r}}^*, {W_{2r}}^*) = \frac{\alpha D'_r {Q_r}^*}{2{W_{2r}}^*}$$

sehingga

$$\frac{D_r C_{or}}{{Q_r}^* {W_{1r}}^*} = \frac{\alpha D'_r {Q_r}^*}{2{W_{2r}}^*}$$

$$D_r C_{or} 2{W_{2r}}^* = \alpha D'_r {Q_r}^{*2} {W_{1r}}^*$$

$${Q_r}^{*2} = \frac{D_r C_{or} 2{W_{2r}}^*}{\alpha D'_r {W_{1r}}^*}$$

$${Q_r}^* = \sqrt{\frac{D_r C_{or} 2{W_{2r}}^*}{\alpha D'_r {W_{1r}}^*}}, \qquad (3.17)$$

$r = 1, 2, \dots, n.$

3.4 Menentukan Minimum *Total Cost*

Mensubstitusikan nilai ${Q_r}^*$ pada persamaan (3.4), diperoleh

$$TC(Q_r) = \sum_{r=1}^{n} C_{pr} D_r + \frac{D_r}{Q_r} C_{or} + \frac{\alpha Q_r}{2}\left(1 - \frac{D_r}{d_r}\right) + \frac{\beta}{2}\left(1 - \frac{D_r}{d_r}\right)$$

$$= \sum_{r=1}^{n} C_{pr} D_r + \frac{D_r C_{or}}{\sqrt{\frac{D_r C_{or} 2{W_{2r}}^*}{\alpha D'_r {W_{1r}}^*}}} + \frac{\alpha \sqrt{\frac{D_r C_{or} 2{W_{2r}}^*}{\alpha D'_r {W_{1r}}^*}} D'_r}{2} + \frac{\beta D'_r}{2}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} C_{pr} D_r + \frac{D_r C_{or} \sqrt{\alpha D'_r {W_{1r}}^*}}{\sqrt{D_r C_{or} 2{W_{2r}}^*}} + \frac{\alpha D'_r \sqrt{D_r C_{or} 2{W_{2r}}^*}}{2\sqrt{\alpha D'_r {W_{1r}}^*}} + \frac{\beta D'_r}{2}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} C_{pr}D_r + \frac{D_r C_{or}\sqrt{\alpha D'_r W_{1r}{}^*}2\sqrt{\alpha D'_r W_{1r}{}^*} + \alpha D'_r\sqrt{D_r C_{or} 2W_{2r}{}^*}\sqrt{D_r C_{or} 2W_{2r}{}^*}}{2\sqrt{D_r C_{or} 2W_{2r}{}^* \alpha D'_r W_{1r}{}^*}} + \frac{\beta D'_r}{2}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} C_{pr}D_r + \frac{2D_r C_{or}\alpha D'_r W_{1r}{}^* + \alpha D'_r 2D_r C_{or} W_{2r}{}^*}{2\sqrt{2\alpha D_r D'_r C_{or} W_{1r}{}^* W_{2r}{}^*}} + \frac{\beta D'_r}{2}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} C_{pr}D_r + \frac{\alpha D'_r D_r C_{or}(W_{1r}{}^* + W_{2r}{}^*)}{\sqrt{2\alpha D_r D'_r C_{or} W_{1r}{}^* W_{2r}{}^*}} + \frac{\beta D'_r}{2}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} C_{pr}D_r + \frac{(\alpha D'_r D_r C_{or})(W_{1r}{}^* + W_{2r}{}^*)}{\sqrt{\alpha D_r D'_r C_{or}}\sqrt{2W_{1r}{}^* W_{2r}{}^*}} + \frac{\beta D'_r}{2}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} C_{pr}D_r + \frac{(\alpha D'_r D_r C_{or})^1 1}{(\alpha D_r D'_r C_{or})^{\frac{1}{2}}\sqrt{2W_{1r}{}^* W_{2r}{}^*}} + \frac{\beta D'_r}{2}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} C_{pr}D_r + \frac{(\alpha D_r D'_r C_{or})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2W_{1r}{}^* W_{2r}{}^*}} + \frac{\beta D'_r}{2}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} C_{pr}D_r + \frac{\sqrt{\alpha D_r D'_r C_{or}}}{\sqrt{2W_{1r}{}^* W_{2r}{}^*}} + \frac{\beta D'_r}{2}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} C_{pr}D_r + \sqrt{\frac{\alpha D_r D'_r C_{or}}{2W_{1r}{}^* W_{2r}{}^*}} + \frac{\beta D'_r}{2}. \tag{3.18}$$

3.5 Simulasi Model *EOQ Multi Item* Dengan Variasi Biaya Penyimpanan Menggunakan *Geometric Programming*

Solusi untuk model *EOQ multi item* dengan variasi biaya penyimpanan didapatkan melalui pendekatan *Geometric Programming*. Solusi ini adalah angka pendekatan untuk kuantitas produksi optimal, minimal total biaya persediaan, dan biaya penyimpanan. Untuk mendapatkan gambaran mengenai solusi dari model *EOQ multi item* dengan variasi biaya penyimpanan menggunakan *geometric programming*, akan diilustrasikan secara numerik.

Sebuah perusahaan penyedia alat elektronik yaitu kipas angin, *rice cooker*, dan *radio tape* mempunyai data-data persediaan seperti pada Tabel 3.1

Tabel 3.1. Data Persediaan

r	jenis barang	tingkat permintaan (unit)	tingkat produksi (unit)	biaya pemesanan ($)	biaya pembelian ($)	α ($)
1	Kipas angin	100	300	200	10	1
2	Rice cooker	70	200	140	8	1
3	Radio tape	40	100	100	5	1

Dengan batas jumlah total pesanan (K_1) dan total biaya penyimpanan (K_2) masing-masing adalah 1200 unit dan \$ 1.000. Dari data tersebut, akan ditentukan kuantitas produksi optimal, biaya penyimpanan, dan minimal total biaya persediaan.

Ada 3 *item* yang harus ditentukan minimal total biaya persediaannya secara keseluruhan. Untuk itu, harus ditentukan terlebih dahulu kuantitas produksi optimal, biaya penyimpanan, dan minimal total biaya persediaan dari masing-masing *item*.

Untuk *item* 1 (kipas angin), dengan menerapkan teknik *geometric programming*, pertama yang harus ditentukan adalah bobot pemberat yaitu dengan menstubstitusikan parameter-parameter pada Tabel 3.1 ke persamaan (3.16) sebagai berikut.

$$f(W_{j1}) = {W_{j1}}^4 + {W_{j1}}^3 - (A_1 - B_{j1}){W_{j1}}^2 - B_{j1}W_{j1} - A_1B_{j1} = 0\,,$$

$j = 3, 4$

di mana

$$A_1 = \frac{1.\frac{2}{3}.100}{2.1200.1000.e^2},$$

$$B_{31} = \left(\frac{1.\frac{2}{3}}{2.100.200}\right)\left(\frac{100}{1200.e}\right)^2,$$

$$B_{41} = \left(\frac{2.100.200}{1.\frac{2}{3}}\right)\left(\frac{1.\frac{2}{3}}{2.1000.e}\right)^2.$$

Dengan menggunakan program *Maple*, didapatkan solusi untuk $f(W_{j1})\ j = 3, 4$ yaitu

$$W_{31}{}^* = 0{,}00013$$
$$W_{41}{}^* = 0{,}02918$$

Setelah diperoleh nilai $W_{31}{}^*$dan $W_{41}{}^*$, langkah ke dua adalah mensubstitusikan nilai $W_{31}{}^*$dan $W_{41}{}^*$ ke persamaan (3.11) dan persamaan (3.12) yaitu

$$W_{1r}{}^* = \frac{1}{2}(1 - W_{3r}{}^* + W_{4r}{}^*)$$

$$W_{11}{}^* = \frac{1}{2}(1 - W_{31}{}^* + W_{41}{}^*)$$

$$W_{11}{}^* = \frac{1}{2}(1 - 0{,}00013 + 0{,}02918)$$

$$W_{11}{}^* = \mathbf{0{,}514525}$$

$$W_{2r}{}^* = \frac{1}{2}(1 + W_{3r}{}^* - W_{4r}{}^*)$$

$$W_{21}{}^* = \frac{1}{2}(1 + W_{31}{}^* - W_{41}{}^*)$$

$$W_{21}{}^* = \frac{1}{2}(1 + 0{,}00013 - 0{,}02918)$$

$$W_{21}{}^* = \mathbf{0{,}485475.}$$

Langkah ke tiga yaitu mensubstitusikan nilai $W_{11}{}^*$ dan $W_{21}{}^*$ pada persamaaan (3.17) sehingga diperoleh kuantitas produksi optimal sebagai berikut.

$$Q_r^* = \sqrt{\frac{D_r C_{or} 2W_{2r}^*}{\alpha D'_r W_{1r}^*}}$$

$$Q_1^* = \sqrt{\frac{D_1 C_{o1} 2W_{21}^*}{\alpha D'_1 W_{11}^*}}$$

$$= \sqrt{\frac{100.200.2.0{,}485475}{1.\frac{2}{3}.0{,}514525}}$$

$$= 237{,}93303 \approx 238.$$

Jadi, kuantitas produksi optimal untuk kipas angin adalah 238 unit.

Langkah ke empat adalah untuk menentukan biaya penyimpanan, yaitu dengan mensubstitusikan nilai α, Q_1^*, dan β pada persamaan (3.3) sebagai berikut.

$$C_{hr}(Q_r) = \alpha + \beta Q_r^{-1}$$
$$C_{h1}(Q_1) = \alpha + \beta Q_1^{-1}$$

Hasil perhitungan biaya penyimpanan untuk setiap nilai β disajikan pada Tabel 3.2

Table 3.2. Biaya Penyimpanan Untuk *Item* ke-1

β	$C_{h1}(Q_1^*)$ ($)
0,1	1,00042
0,5	1,00210
1,0	1,00420
2,0	1,00840
12,0	1,05042
50,0	1,21008
100,0	1,42016
200,0	1,84033
300,0	2,26050

Langkah ke lima, yaitu langkah terakhir adalah menentukan total biaya persediaan minimum dengan mensubstitusikan parameter-parameter pada Tabel 3.1, ke persamaan (3.18) sebagai berikut.

$$TC(Q_r) = \sum_{r=1}^{n} C_{pr}D_r \; + \; \sqrt{\frac{\alpha D_r D'_r C_{or}}{2{W_{1r}}^{*}{W_{2r}}^{*}}} + \frac{\beta D'_r}{2}$$

$$TC(Q_1) = C_{p1}D_1 + \sqrt{\frac{\alpha D_1 D'_1 C_{o1}}{2{W_{11}}^{*}{W_{21}}^{*}}} + \frac{\beta D'_1}{2}.$$

Hasil perhitungan total biaya persediaan minimum untuk setiap nilai β disajikan pada Tabel 3.3

Tabel 3.3. Total Biaya Persediaan Minimum Untuk *Item* ke-1

β	Min *TC* (\$)
0,1	1.163,402
0,5	1.163,535
1,0	1.163,702
2,0	1.164,035
12,0	1.167,369
50,0	1.180,035
100,0	1.196,702
200,0	1.230,036
300,0	1.263,369

Dengan nilai β yang berbeda-beda, dipilih nilai total biaya persediaan (*TC*) yang paling minimum, yaitu \$ 1.163,402

Langkah yang sama dilakukan untuk *item* 2 (*rice cooker*), dengan menerapkan teknik *geometric programming*, pertama yang harus ditentukan adalah bobot pemberat yaitu dengan menstubstitusikan parameter-parameter pada Tabel 3.1 ke persamaan (3.16) sebagai berikut:

$$f(W_{jr}) = {W_{j2}}^{4} + {W_{j2}}^{3} - (A_2 - B_{j2}){W_{j2}}^{2} - B_{j2}W_{j2} - A_2B_{j2} = 0\,,$$
$$j = 3, 4$$

di mana

$$A_2 = \frac{1.0,65.70}{2.1200.1000.\,e^{2}},$$

$$B_{32} = \left(\frac{1.0,65}{2.70.140}\right)\left(\frac{70}{1200.e}\right)^2,$$

$$B_{42} = \left(\frac{2.70.140}{1.0,65}\right)\left(\frac{1.0,65}{2.1000.e}\right)^2.$$

Dengan menggunakan program *Maple*, didapatkan solusi untuk $f(W_{jr})\ j = 3,4$ yaitu

$$W_{32}{}^{*} = 0{,}00013$$
$$W_{42}{}^{*} = 0{,}02034$$

Setelah diperoleh nilai $W_{32}{}^{*}$dan $W_{42}{}^{*}$, langkah ke dua adalah mensubstitusikan nilai $W_{32}{}^{*}$dan $W_{42}{}^{*}$ ke persamaan (3.11) dan persamaan (3.12) yaitu:

$$W_{1r}{}^{*} = \frac{1}{2}(1 - W_{3r}{}^{*} + W_{4r}{}^{*})$$

$$W_{12}{}^{*} = \frac{1}{2}(1 - W_{32}{}^{*} + W_{42}{}^{*})$$

$$W_{12}{}^{*} = \frac{1}{2}(1 - 0{,}00013 + 0{,}02034)$$

$$W_{12}{}^{*} = \mathbf{0,510105}$$

$$W_{2r}{}^{*} = \frac{1}{2}(1 + W_{3r}{}^{*} - W_{4r}{}^{*})$$

$$W_{22}{}^{*} = \frac{1}{2}(1 + W_{32}{}^{*} - W_{42}{}^{*})$$

$$W_{22}{}^{*} = \frac{1}{2}(1 + 0{,}00013 - 0{,}02034)$$

$$W_{22}{}^{*} = \mathbf{0,489895.}$$

Langkah ketiga yaitu mensubstitusikan nilai $W_{12}{}^{*}$ dan $W_{22}{}^{*}$ pada persamaaan (3.17) sehingga diperoleh kuantitas produksi optimal sebagai berikut.

$$Q_r^* = \sqrt{\frac{D_r C_{or} 2W_{2r}^*}{\alpha D'_r W_{1r}^*}}$$

$$Q_2^* = \sqrt{\frac{D_2 C_{o2} 2W_{22}^*}{\alpha D'_2 W_{12}^*}}$$

$$= \sqrt{\frac{70.140.2.0{,}489895}{1.0{,}65.0{,}510105}}$$

$$= 170{,}1739465 \approx 170.$$

Jadi, kuantitas produksi optimal untuk *rice cooker* adalah 170 unit.

Langkah ke empat adalah untuk menentukan biaya penyimpanan, yaitu dengan mensubstitusikan nilai α, Q_2^*, dan β pada persamaan (3.3) sebagai berikut.

$$C_{hr}(Q_r) = \alpha + \beta Q_r^{-1}$$

$$C_{h2}(Q_2) = \alpha + \beta Q_2^{-1}$$

Hasil perhitungan biaya penyimpanan untuk setiap nilai β disajikan pada Tabel 3.4

Table 3.4. Total Biaya Penyimpanan Untuk *Item* ke-2

β	$C_{h2}(Q_2^*)$ ($)
0,1	1,00058
0,5	1,00294
1,0	1,00588
2,0	1,01176
12,0	1,07059
50,0	1,29412
100,0	1,58824
200,0	2,17647
300,0	2,76471

Langkah ke lima, yaitu langkah terakhir adalah menentukan total biaya persediaan minimum dengan mensubstitusikan parameter-parameter pada tabel 3.1, ke persamaan (3.18) sebagai berikut.

$$TC(Q_r) = \sum_{r=1}^{n} C_{pr} D_r + \sqrt{\frac{\alpha D_r D'_r C_{or}}{2 W_{1r}{}^{*} W_{2r}{}^{*}}} + \frac{\beta D'_r}{2}$$

$$TC(Q_2) = C_{p2} D_2 + \sqrt{\frac{\alpha D_2 D'_2 C_{o2}}{2 W_{12}{}^{*} W_{22}{}^{*}}} + \frac{\beta D'_2}{2}.$$

Hasil perhitungan total biaya persediaan minimum untuk setiap nilai β disajikan pada Tabel 3.5

Tabel 3.5. Total Biaya Persediaan Minimum Untuk *Item* ke-2

β	Min *TC* ($)
0,1	672,927
0,5	673,057
1,0	673,220
2,0	673,545
12,0	676,795
50,0	689,145
100,0	705,395
200,0	737,895
300,0	770,395

Dengan nilai β yang berbeda-beda, dipilih nilai total biaya persediaan (*TC*) yang paling minimum, yaitu $ 672,927

Langkah yang sama seperti *item* 2 dan 3 dilakukan untuk *item* 3 (*radio tape*). Menerapkan teknik *geometric programming*, pertama yang harus ditentukan adalah bobot pemberat yaitu dengan menstubstitusikan parameter-parameter pada Tabel 3.1 ke persamaan (3.16) sebagai berikut:

$$f(W_{j3}) = W_{j3}{}^{4} + W_{j3}{}^{3} - (A_3 - B_{j3}) W_{j3}{}^{2} - B_{j3} W_{j3} - A_3 B_{j3} = 0\,,$$

$$j = 3, 4$$

di mana

$$A_3 = \frac{1.0,6.40}{2.1200.1000.\,e^{2}},$$

$$B_{33} = \left(\frac{1.0,6}{2.40.100}\right)\left(\frac{40}{1200.e}\right)^2,$$

$$B_{43} = \left(\frac{2.40.100}{1.0,6}\right)\left(\frac{1.0,6}{2.1000.e}\right)^2.$$

Dengan menggunakan program *Maple*, didapatkan solusi untuk $f(W_{jr})$ $j = 3,4$ yaitu

$$W_{33}{}^* = 0{,}00011$$
$$W_{43}{}^* = 0{,}01258$$

Setelah diperoleh nilai $W_{33}{}^*$dan $W_{43}{}^*$, langkah ke dua adalah mensubstitusikan nilai $W_{33}{}^*$dan $W_{43}{}^*$ ke persamaan (3.11) dan persamaan (3.12) yaitu

$$W_{1r}{}^* = \frac{1}{2}(1 - W_{3r}{}^* + W_{4r}{}^*)$$

$$W_{13}{}^* = \frac{1}{2}(1 - W_{33}{}^* + W_{43}{}^*)$$

$$W_{13}{}^* = \frac{1}{2}(1 - 0{,}00011 + 0{,}01258)$$

$$W_{12}{}^* = \mathbf{0,506235}$$

$$W_{2r}{}^* = \frac{1}{2}(1 + W_{3r}{}^* - W_{4r}{}^*)$$

$$W_{23}{}^* = \frac{1}{2}(1 + W_{33}{}^* - W_{43}{}^*)$$

$$W_{23}{}^* = \frac{1}{2}(1 + 0{,}00011 - 0{,}01258)$$

$$W_{23}{}^* = \mathbf{0,493765.}$$

Langkah ke tiga yaitu mensubstitusikan nilai ${W_{13}}^*$ dan ${W_{23}}^*$ pada persamaaan (3.17) sehingga diperoleh kuantitas produksi optimal sebagai berikut.

$$Q_r{}^* = \sqrt{\frac{D_r C_{or} 2{W_{2r}}^*}{\alpha D'_r {W_{1r}}^*}}$$

$$Q_3{}^* = \sqrt{\frac{D_3 C_{o3} 2{W_{23}}^*}{\alpha D'_3 {W_{13}}^*}}$$

$$Q_3{}^* = \sqrt{\frac{40.100.2.0{,}493765}{1.0{,}6.0{,}506235}}$$

$$Q_3{}^* = 114{,}0390092 \approx 114.$$

Jadi, kuantitas produksi optimal untuk *radio tape* adalah 114 unit.

Langkah ke empat adalah untuk menentukan biaya penyimpanan, yaitu dengan mensubstitusikan nilai α, $Q_3{}^*$, dan β pada persamaan (3.3) sebagai berikut.

$$C_{hr}(Q_r) = \alpha + \beta {Q_r}^{-1}$$

$$C_{h3}(Q_3) = \alpha + \beta {Q_3}^{-1}$$

Hasil perhitungan biaya penyimpanan untuk setiap nilai β disajikan pada Tabel 3.6

Tabel 3.6. Biaya Penyimpanan Untuk *Item* ke-3

β	$C_{h3}({Q_3}^*)$ ($)
0,1	1,00088
0,5	1,00438
1,0	1,00877
2,0	1,01754
12,0	1,10526
50,0	1,43860
100,0	1,87719
200,0	2,75438
300,0	3,63158

Langkah ke lima, yaitu langkah terakhir adalah menentukan total biaya persediaan minimum dengan mensubstitusikan parameter-parameter pada Tabel 3.1, ke persamaan (3.18) sebagai berikut.

$$TC(Q_r) = \sum_{r=1}^{n} C_{pr}D_r + \sqrt{\frac{\alpha D_r D'_r C_{or}}{2W_{1r}{}^{*}W_{2r}{}^{*}}} + \frac{\beta D'_r}{2}$$

$$TC(Q_3) = C_{p3}D_3 + \sqrt{\frac{\alpha D_3 D'_3 C_{o3}}{2W_{13}{}^{*}W_{23}{}^{*}}} + \frac{\beta D'_3}{2}.$$

Hasil perhitungan total biaya persediaan minimum untuk setiap nilai β disajikan pada Tabel 3.7

Tabel 3.7. Total BiayaPersediaan Minimum Untuk *Item* ke-3

β	Min *TC* ($)
0,1	269,318
0,5	269,437
1,0	269,587
2,0	269,887
12,0	272,887
50,0	284,287
100,0	299,287
200,0	329,287
300,0	359,287

Dengan nilai β yang berbeda-beda, dipilih nilai total biaya persediaan (*TC*) yang paling minimum, yaitu $ 269,318

Setelah dilakukan perhitungan kuantitas produksi optimal, biaya penyimpanan, dan total biaya persediaan minimum, didapatkan nilai-nilai yang berbeda untuk setiap β. Untuk membandingkan hasilnya, disajikan pada Tabel 3.8

Tabel 3.8. Kuantitas Produksi Optimal, Biaya Penyimpanan, dan Total Biaya Persediaan Minimum *Item* 1, 2, 3 Untuk Setiap Nilai β

β	${Q_1}^*$ (unit)	${Q_2}^*$ (unit)	${Q_3}^*$ (unit)	$C_{h1}({Q_1}^*)$ ($)	$C_{h2}({Q_2}^*)$ ($)	$C_{h3}({Q_3}^*)$ ($)	Min *TC* ($)
0,1	238	170	114	1,00042	1,00058	1,00088	2.105,65
0,5	238	170	114	1,00210	1,00294	1,00438	2.106,03
1,0	238	170	114	1,00420	1,00588	1,00877	2.106,51
2,0	238	170	114	1,00840	1,01176	1,01754	2.107,47
12,0	238	170	114	1,05042	1,07059	1,10526	2.117,05
50,0	238	170	114	1,21008	1,29412	1,43860	2.153,47
100,0	238	170	114	1,42016	1,58824	1,87719	2.201,38
200,0	238	170	114	1,84033	2,17647	2,75438	2.297,22
300,0	238	170	114	2,26050	2,76471	3,63158	2.393,05

Dari tabel 3.8 dapat dilihat bahwa kuantitas produksi yang optimal untuk *item* ke-1 yaitu kipas angin adalah 238 unit dengan biaya penyimpanan paling minimum $ 1,00042 , untuk *item* ke-2 yaitu *rice cooker* adalah 170 unit dengan biaya penyimpanan sebesar $ 1,00058, dan *item* ke-3 yaitu *radio tape* adalah 114 unit dengan biaya penyimpanan sebesar $ 1,00088. Sehingga menghasilkan total biaya persediaan sebesar $ 2.105,65 untuk β yaitu 0,1.

Untuk menganalisa keakuratan solusi analitik yang diperoleh, digunakan program Delphi yang disajikan pada Lampiran 5 dan Lampiran 6. Dengan inputan dari tabel 3.1, pada program Delphi dihasilkan nilai ${W_{11}}^*$ adalah 0,514525 dan ${W_{21}}^*$ adalah 0,485475, nilai ${W_{12}}^*$adalah 0,510105 dan ${W_{22}}^*$adalah 0,489895, nilai ${W_{13}}^*$ adalah 0,506235 dan ${W_{23}}^*$ adalah 0,493765. Nilai-nilai yang didapat dari program sama dengan perhitungan manual. Sedangkan kuantitas produksi optimal untuk kipas angin (*item* 1) adalah 238 unit, *rice cooker* (*item* 2) 170 unit, dan *radio tape* (*item* 3) 114 unit. Nilai-nilai ini sama dengan nilai yang diperoleh dari perhitungan manual.

BAB IV
KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Model *EOQ multi item* dengan variasi biaya penyimpanan diformulasikan untuk masalah persediaan dengan biaya penyimpanan yang bersifat nonlinier terhadap kuantitas produksi. Untuk menyelesaikan model tersebut, pada skripsi ini digunakan pendekatan *geometric programming* sehingga dapat disimpulkan sebagai berikut.

1. Kuantitas produksi optimal untuk item ke-**r** dapat diperoleh menggunakan rumus:

$$Q_r{}^* = \sqrt{\frac{D_r C_{or} 2W_{2r}{}^*}{\alpha D'_r W_{1r}{}^*}}, \quad r = 1, 2, \dots, n.$$

2. Total biaya persediaan dapat diperoleh menggunakan rumus:

$$TC = \sum_{r=1}^{n} C_{pr} D_r + \sqrt{\frac{\alpha D_r D'_r C_{or}}{2W_{1r}{}^* W_{2r}{}^*}} + \frac{\beta D'_r}{2}.$$

3. Dari ilustrasi numerik, dapat dinalisis bahwa semakin besar nilai β, maka semakin besar pula biaya penyimpanan dan total biaya persediaannya, sehingga harus dipilih untuk β yang paling kecil untuk memperoleh solusi optimal.

4.2 Saran

Untuk menyelesaikan permasalahan model *EOQ multi item* dengan variasai biaya penyimpanan, disarankan untuk menggunakan metode penyelesaian fungsi nonlinier yang lain, seperti *quadratic programming*, *separable programming*, atau metode lainnya agar dapat dilihat perbandingan solusinya terhadap pendekatan *geometric programming*.

DAFTAR PUSTAKA

Kotb, K.A.M., Fergany, Hala. A. 2011. *Multi-Item EOQ Model with Varying Holding Cost: A Geometric Programming Approach.* International Mathematical Forum. Saudi Arabia

Kotb, K.A.M., Fergany, Hala. A. 2011. *Multi-Item EOQ Model with Both Demand-Dependent Unit Cost and Varying Leading Time via Geometric Programming Approach*. International Mathematical Forum. Saudi Arabia

Philips, Don .T, A. Ravindran, James Solberg. 1976. *Operation Research Principles and Practice*. John Willey and Sons. Kanada

Rangkuti, F. 2004. *Manajemen Persediaan (Aplikasi di Bidang Bisnis)*. Jakarta

Ristono, Agus. 2009. *Manajemen Persediaan*. Yogyakarta

Siswanto. 2008. *Operation Research*. Erlangga. Yogyakarta

Subagyo, Pangestu, Marwan Asri, Hani Handoko. 1985. *Dasar-Dasar Operations Research*. BPFE. Yogyakarta

Swarup, Kanti, P.K. Gupta, Man Mohan. 1977. *Operations Research*.. Sultan Chand and Sons. New Delhi

Taha, Hamdy. A. 1992. *Operations Research An Introduction Fifth Edition*. Macmillan Publishing Company. New York

Lampiran 1. Turunan parsial pertama ln $g(W_{3r}, W_{4r})$ terhadap W_{3r}

$$\frac{\partial \ln g(W_{3r}, W_{4r})}{\partial W_{3r}} = 0$$

$$-\frac{1}{2}[\ln 2D_r C_{or} - \ln(1 - W_{3r} + W_{4r})]$$

$$+\frac{1 - W_{3r} + W_{4r}}{2} \cdot \frac{1}{1 - W_{3r} + W_{4r}}$$

$$+\frac{1}{2}[\ln \alpha D'_r - \ln(1 + W_{3r} - W_{4r})]$$

$$+\frac{1 + W_{3r} - W_{4r}}{2} \cdot \frac{-1}{1 + W_{3r} - W_{4r}}$$

$$+ 1[\ln D_r - \ln(K_1 W_{3r})] + W_{3r} \cdot \frac{-K_1}{K_1 W_{3r}} + 0 = 0$$

$$\frac{1}{2}\ln \alpha D'_r + \ln D_r - \frac{1}{2}\ln 2D_r C_{or} + \frac{1}{2}\ln(1 - W_{3r} + W_{4r})$$

$$-\frac{1}{2}\ln(1 + W_{3r} - W_{4r}) - \ln(K_1 W_{3r}) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$- 1 = 0$$

$$\ln(\alpha D'_r)^{\frac{1}{2}} + \ln D_r - \ln(2D_r C_{or})^{\frac{1}{2}} + \ln(1 - W_{3r} + W_{4r})^{\frac{1}{2}}$$

$$- \ln(1 + W_{3r} - W_{4r})^{\frac{1}{2}} - \ln(K_1 W_{3r}) = 1$$

$$\ln\left[\frac{(\alpha D'_r)^{\frac{1}{2}} D_r (1 - W_{3r} + W_{4r})^{\frac{1}{2}}}{(2D_r C_{or})^{\frac{1}{2}}(1 + W_{3r} - W_{4r})^{\frac{1}{2}}(K_1 W_{3r})}\right] = 1$$

$$e^{\ln\left[\frac{(\alpha D'_r)^{\frac{1}{2}} D_r (1 - W_{3r} + W_{4r})^{\frac{1}{2}}}{(2D_r C_{or})^{\frac{1}{2}}(1 + W_{3r} - W_{4r})^{\frac{1}{2}}(K_1 W_{3r})}\right]} = e^1$$

$$\left[\frac{(\alpha D'_r)^{\frac{1}{2}} D_r (1 - W_{3r} + W_{4r})^{\frac{1}{2}}}{(2D_r C_{or})^{\frac{1}{2}}(1 + W_{3r} - W_{4r})^{\frac{1}{2}}(K_1 W_{3r})}\right] = e$$

$$\left[\frac{(\alpha D'_r)^{\frac{1}{2}} D_r (1 - W_{3r} + W_{4r})^{\frac{1}{2}}}{(2D_r C_{or})^{\frac{1}{2}} (1 + W_{3r} - W_{4r})^{\frac{1}{2}} (K_1 W_{3r})}\right]^2 = e^2$$

$$\frac{\alpha D'_r {D_r}^2 (1 - W_{3r} + W_{4r})}{2D_r C_{or} (1 + W_{3r} - W_{4r}) {K_1}^2 {W_{3r}}^2} = e^2$$

$$\frac{\alpha D'_r {D_r}^2 (1 - W_{3r} + W_{4r})}{2D_r C_{or} e^2 {K_1}^2 {W_{3r}}^2 (1 + W_{3r} - W_{4r})} = 1$$

$$\left(\frac{\alpha D'_r}{2D_r C_{or}}\right) \left(\frac{D_r}{K_1 e}\right)^2 \left(\frac{1 - W_{3r} + W_{4r}}{1 + W_{3r} - W_{4r}}\right) \frac{1}{{W_{3r}}^2} = 1$$

Lampiran 2. Turunan parsial pertama ln $g(W_{3r}, W_{4r})$ terhadap W_{4r}

$$\frac{\partial \ln g(W_{3r}, W_{4r})}{\partial W_{4r}} = 0$$

$$\frac{1}{2}[\ln 2D_r C_{or} - \ln(1 - W_{3r} + W_{4r})] + \frac{1 - W_{3r} + W_{4r}}{2} \cdot \frac{-1}{1 - W_{3r} + W_{4r}} - \frac{1}{2}[\ln \alpha D'_r - \ln(1 + W_{3r} - W_{4r})] + \frac{1 + W_{3r} - W_{4r}}{2} \cdot \frac{1}{1 + W_{3r} - W_{4r}} + 0 + 1[\ln D_r - \ln(2K_1 W_{3r})] + W_{4r} \cdot \frac{-2K_2}{2K_2 W_{4r}} = 0$$

$$\frac{1}{2}\ln 2D_r C_{or} + \ln \alpha D'_r - \frac{1}{2}\ln \alpha D'_r + \frac{1}{2}\ln(1 + W_{3r} - W_{4r}) - \frac{1}{2}\ln(1 - W_{3r} + W_{4r}) - \ln 2(K_2 W_{4r}) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$$

$$\ln(2D_r C_{or})^{\frac{1}{2}} + \ln \alpha D'_r - \ln(\alpha D'_r)^{\frac{1}{2}} + \ln(1 + W_{3r} - W_{4r})^{\frac{1}{2}} - \ln(1 - W_{3r} + W_{4r})^{\frac{1}{2}} - \ln 2(K_2 W_{4r}) = 1$$

$$\ln\left[\frac{(2D_r C_{or})^{\frac{1}{2}} \alpha D'_r (1 + W_{3r} - W_{4r})^{\frac{1}{2}}}{(\alpha D'_r)^{\frac{1}{2}} (1 - W_{3r} + W_{4r})^{\frac{1}{2}} 2(K_2 W_{4r})}\right] = 1$$

$$e^{\ln\left[\frac{(2D_r C_{or})^{\frac{1}{2}} \alpha D'_r (1 + W_{3r} - W_{4r})^{\frac{1}{2}}}{(\alpha D'_r)^{\frac{1}{2}} (1 - W_{3r} + W_{4r})^{\frac{1}{2}} 2(K_2 W_{4r})}\right]} = e^1$$

$$\left[\frac{(2D_rC_{or})^{\frac{1}{2}}\alpha D'_r(1+W_{3r}-W_{4r})^{\frac{1}{2}}}{(\alpha D'_r)^{\frac{1}{2}}(1-W_{3r}+W_{4r})^{\frac{1}{2}}2(K_2W_{4r})}\right]=e$$

$$\left[\frac{(2D_rC_{or})^{\frac{1}{2}}\alpha D'_r(1+W_{3r}-W_{4r})^{\frac{1}{2}}}{(\alpha D'_r)^{\frac{1}{2}}(1-W_{3r}+W_{4r})^{\frac{1}{2}}2(K_2W_{4r})}\right]^2=e^2$$

$$\frac{2D_rC_{or}\alpha^2{D'_r}^2(1+W_{3r}-W_{4r})}{\alpha D'_r(1-W_{3r}+W_{4r})4(K_2W_{4r})^2}=e^2$$

$$\frac{2D_rC_{or}\alpha^2{D'_r}^2(1+W_{3r}-W_{4r})}{\alpha D'_re^2(1-W_{3r}+W_{4r})4(K_2W_{4r})^2}=1$$

$$\left(\frac{2D_rC_{or}}{\alpha D'_r}\right)\left(\frac{\alpha D'_r}{2K_2e}\right)^2\left(\frac{1+W_{3r}-W_{4r}}{1-W_{3r}+W_{4r}}\right)\frac{1}{{W_{4r}}^2}=1$$

Lampiran 3. Hasil Uji Turunan ke dua

$$\frac{\partial \ln g(W_{3r}, W_{4r})}{\partial W_{3r}} = 0$$

diperoleh

$$\left(\frac{\alpha D'_r}{2D_r C_{or}}\right)\left(\frac{D_r}{K_1 e}\right)^2 \left(\frac{1 - W_{3r} + W_{4r}}{1 + W_{3r} - W_{4r}}\right)\frac{1}{{W_{3r}}^2} = 1$$

$$\left(\frac{\alpha D'_r}{2D_r C_{or}}\right)\left(\frac{D_r}{K_1 e}\right)^2 \left(\frac{1 - W_{3r} + W_{4r}}{(1 + W_{3r} - W_{4r}){W_{3r}}^2}\right) - 1 = 0$$

apabila dimisalkan

$U = 1 - W_{3r} + W_{4r},$

$C = \dfrac{\partial U}{\partial W_{3r}} = -1$

$\dfrac{\partial U}{\partial W_{4r},} = 1$

dan

$V = (1 + W_{3r} - W_{4r}){W_{3r}}^2,$

$D = \dfrac{\partial V}{\partial W_{3r}} = (2W_{3r}(1 + W_{3r} - W_{4r}) + {W_{3r}}^2),$

$E = \dfrac{\partial V}{\partial W_{4r}} = {W_{3r}}^2$

$V^2 = {W_{3r}}^4 (1 + W_{3r} - W_{4r})^2$

maka

$$\frac{\partial^2 \ln g(W_{3r}, W_{4r})}{\partial {W_{3r}}^2}\frac{U}{V} = \frac{U'V - UV'}{V^2} = \frac{CV - UD}{V^2}$$

$\Leftrightarrow \quad 1 + W_{3r} - W_{4r} > 0$ karena $1 + W_{3r} > W_{4r}$

$\Leftrightarrow \quad 1 - W_{3r} + W_{4r} > 0$ karena $1 + W_{4r} > W_{3r}$

sehingga

$$\frac{\partial^2 \ln g(W_{3r}, W_{4r})}{\partial {W_{3r}}^2} < 0.$$

$$\frac{\partial^2 \ln g(W_{3r}, W_{4r})}{\partial W_{3r} W_{4r}} = \frac{U}{V} = \frac{U'V - UV'}{V^2} = \frac{1V - UE}{V^2}$$

sehingga

$$\frac{\partial^2 \ln g(W_{3r}, W_{4r})}{\partial W_{3r} W_{4r}} > 0.$$

$$\frac{\partial \ln g(W_{3r}, W_{4r})}{\partial W_{4r}} = 0$$

diperoleh

$$\left(\frac{2D_r C_{or}}{\alpha D'_r}\right)\left(\frac{\alpha D'_r}{2K_2 e}\right)^2 \left(\frac{1 + W_{3r} - W_{4r}}{1 - W_{3r} + W_{4r}}\right)\frac{1}{{W_{4r}}^2} = 1$$

$$\left(\frac{2D_r C_{or}}{\alpha D'_r}\right)\left(\frac{\alpha D'_r}{2K_2 e}\right)^2 \left(\frac{1 + W_{3r} - W_{4r}}{1 - W_{3r} + W_{4r}}\right)\frac{1}{{W_{4r}}^2} - 1 = 0$$

apabila dimisalkan

$U = 1 + W_{3r} - W_{4r},$

$$F = \frac{\partial U}{\partial W_{4r}} = -1$$

dan

$V = (1 - W_{3r} + W_{4r}){W_{4r}}^2,$

$$G = \frac{\partial V}{\partial W_{4r}} = (2W_{4r}(1 - W_{3r} + W_{4r}) + {W_{4r}}^2)$$

$V^2 = {W_{4r}}^4(1 - W_{3r} + W_{4r})^2$

maka

$$\frac{\partial^2 \ln g(W_{3r}, W_{4r})}{\partial {W_{4r}}^2} = \frac{U}{V} = \frac{U'V - UV'}{V^2} = \frac{-1V - UG}{V^2}$$

$\Leftrightarrow \quad 1 + W_{3r} - W_{4r} > 0$ karena $1 + W_{3r} > W_{4r}$

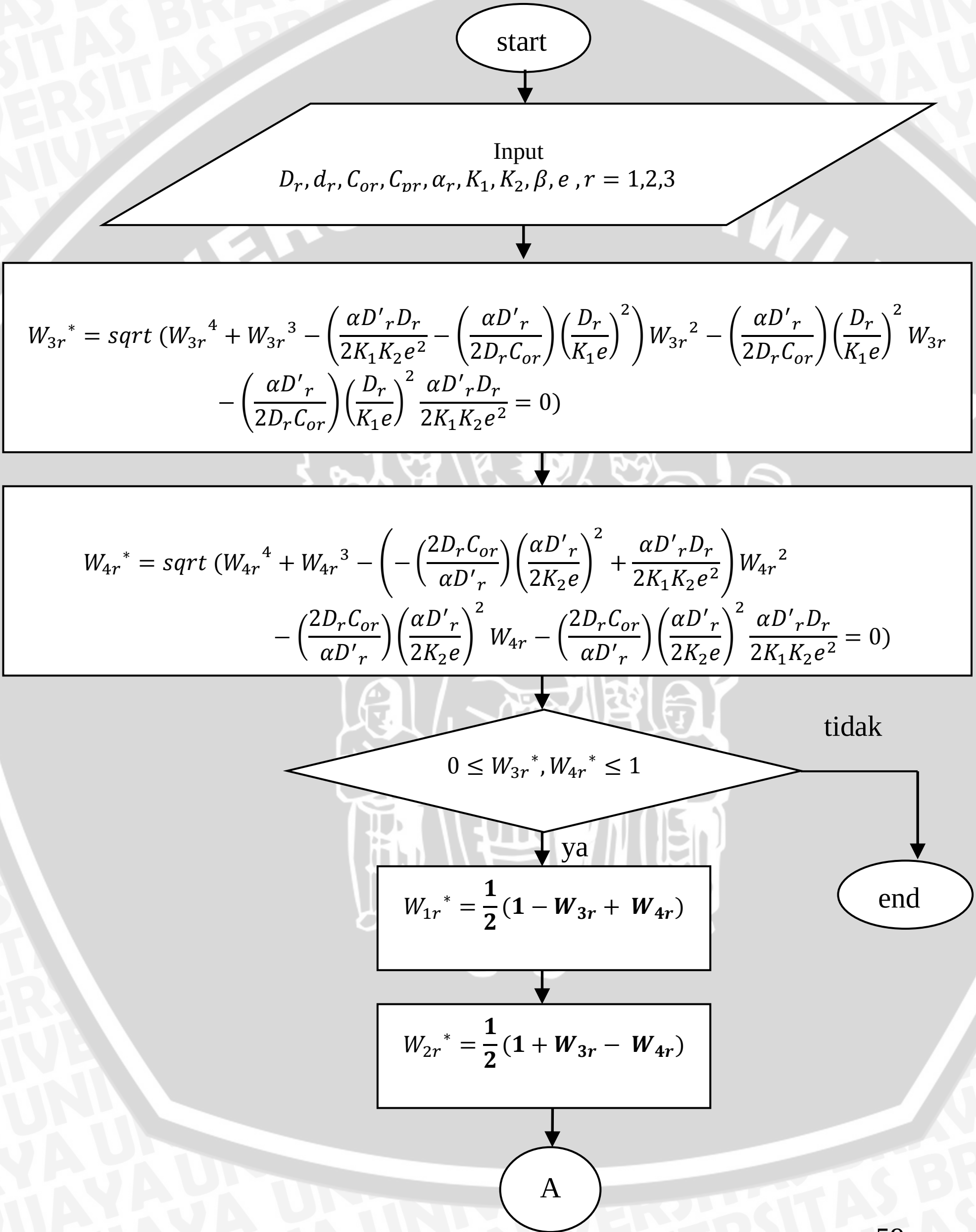
$\Leftrightarrow \quad 1 - W_{3r} + W_{4r} > 0$ karena $1 + W_{4r} > W_{3r}$

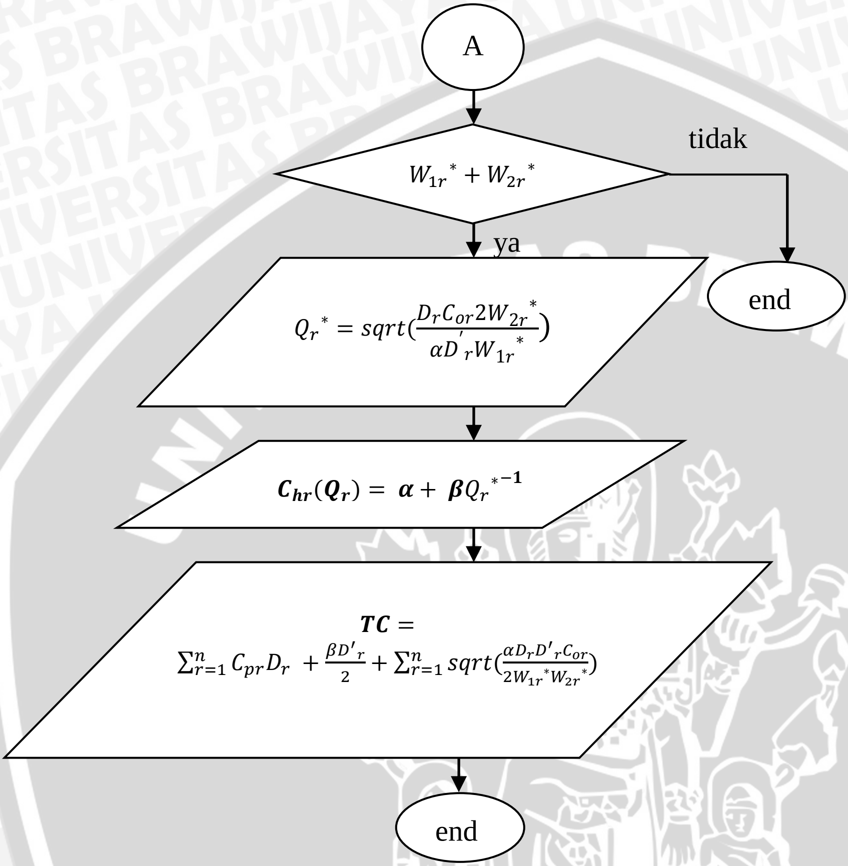
sehingga

$$\frac{\partial^2 \ln g(W_{3r}, W_{4r})}{\partial {W_{4r}}^2} < 0.$$

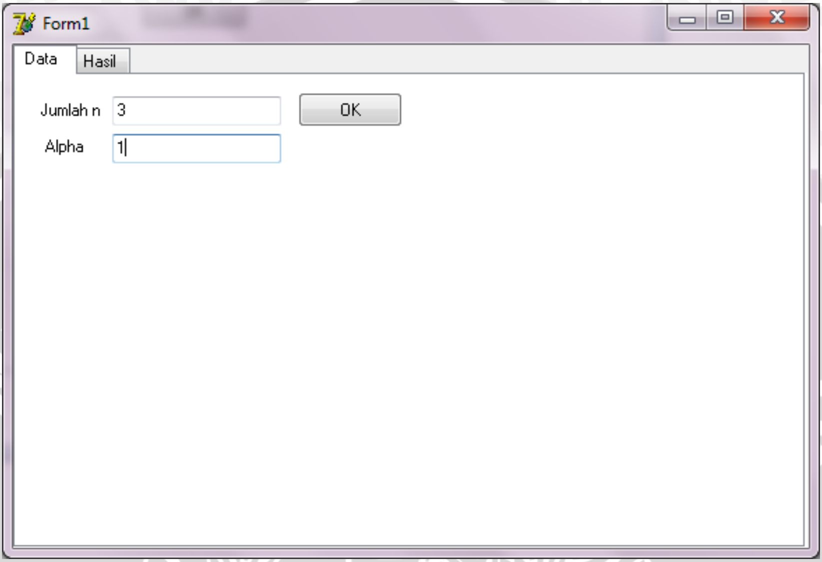
Lampiran 4. *Flowchart* Pengolahan Data

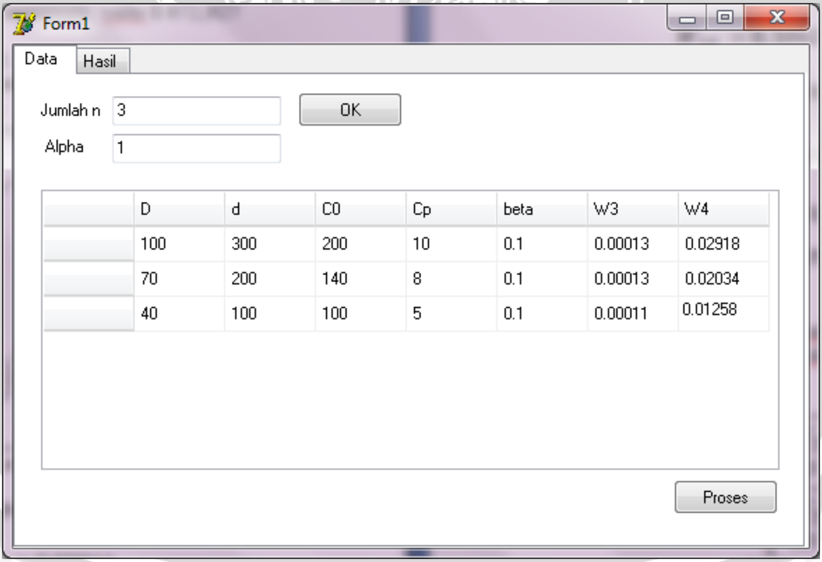
Pengolahan data diuraikan dengan *flowchart* berikut ini:

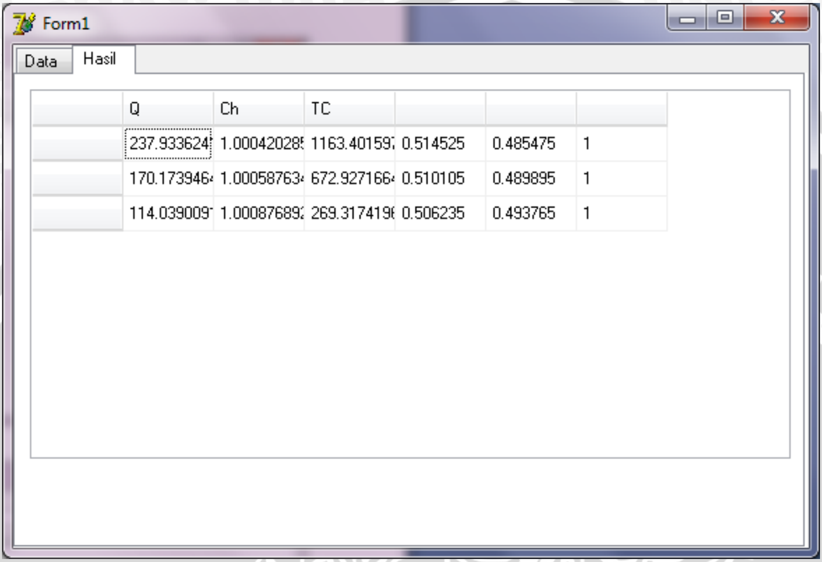



A
$W_{1r}^* + W_{2r}^*$
tidak
ya
end
$Q_r^* = sqrt(\frac{D_r C_{or} 2W_{2r}^*}{\alpha D'_r W_{1r}^*})$
$\boldsymbol{C_{hr}(Q_r) = \alpha + \beta} Q_r^{*\boldsymbol{-1}}$
$\boldsymbol{TC} =$
$\sum_{r=1}^{n} C_{pr} D_r + \frac{\beta D'_r}{2} + \sum_{r=1}^{n} sqrt(\frac{\alpha D_r D'_r C_{or}}{2W_{1r}^* W_{2r}^*})$
end

Lampiran 5. *Design Interface Model EOQ Multi Item* Dengan Variasi Biaya Penyimpanan






Form1
Data
Hasil
Q
Ch
TC
237.933624 1.00042028 1163.40159 0.514525 0.485475 1
170.173946 1.00058763 672.927166 0.510105 0.489895 1
114.039009 1.00087689 269.317419 0.506235 0.493765 1

Lampiran 6. *Listing* Program *Model EOQ Multi Item* Dengan Variasi Biaya Penyimpanan Menggunakan Pendekatan *Geometric Programming*

Listing Program

```
unit Unit1;

interface

uses
  Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics,
Controls, Forms,
  Dialogs, Grids, StdCtrls, ComCtrls,  Math;

type
  TForm1 = class(TForm)
    PageControl1: TPageControl;
    TabSheet1: TTabSheet;
    TabSheet2: TTabSheet;
    Label1: TLabel;
    Edit1: TEdit;
    Button1: TButton;
    StringGrid1: TStringGrid;
    StringGrid2: TStringGrid;
    Edit2: TEdit;
    Label2: TLabel;
    Button2: TButton;
    procedure Button1Click(Sender: TObject);
    procedure FormCreate(Sender: TObject);
    procedure Button2Click(Sender: TObject);
  private
    { Private declarations }
  public
    { Public declarations }
  end;

var
  Form1: TForm1;
  n:integer;
```

```
D,dk,DAk,beta,C0,Cp,W1,W2,W3,W4,sum1,sum2,Ch,Q,TC,p
ow,cek : array [0..100] of double;
  alpha:real;

implementation

{$R *.dfm}

procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
begin
  n:=StrToInt(Edit1.Text);
  StringGrid1.RowCount:=n+1;
  StringGrid2.RowCount:=n+1;
  StringGrid1.Visible:=true;
  Button2.Visible:=true;
end;

procedure TForm1.FormCreate(Sender: TObject);
begin
  StringGrid1.Cells[1,0]:='D';
  StringGrid1.Cells[2,0]:='d';
  StringGrid1.Cells[3,0]:='C0';
  StringGrid1.Cells[4,0]:='Cp';
  StringGrid1.Cells[5,0]:='beta';
  StringGrid1.Cells[6,0]:='W3';
  StringGrid1.Cells[7,0]:='W4';
  StringGrid2.Cells[1,0]:='Q';
  StringGrid2.Cells[2,0]:='Ch';
  StringGrid2.Cells[3,0]:='TC';
  PageControl1.ActivePage:=TabSheet1;
end;

procedure TForm1.Button2Click(Sender: TObject);
var
  r : integer;
begin
  alpha:=StrToFloat(Edit2.Text);
  for r:=1 to  n do
```

```
  begin
    D[r]:=StrToFloat(StringGrid1.Cells[1,r]);
    dk[r]:=StrToFloat(StringGrid1.Cells[2,r]);
    C0[r]:=StrToFloat(StringGrid1.Cells[3,r]);
    Cp[r]:=StrToFloat(StringGrid1.Cells[4,r]);
    beta[r]:=StrToFloat(StringGrid1.Cells[5,r]);
    W3[r]:=StrToFloat(StringGrid1.Cells[6,r]);
    W4[r]:=StrToFloat(StringGrid1.Cells[7,r]);
    if ((0<W3[r]) and (W3[r]<1)) and (0<W4[r]) and (W4[r]<1)
then
      begin
        W1[r]:=0.5*(1-W3[r]+W4[r]);
        W2[r]:=0.5*(1+W3[r]-W4[r]);
      end;
    if ((W1[r]+W2[r]) = 1)then
      begin
        DAk[r]:= 1-(D[r]/dk[r]);

Q[r]:=sqrt((2*D[r]*C0[r]*W2[r])/(alpha*DAk[r]*W1[r]));
        Ch[r]:= alpha+(beta[r]/Q[r]);
        sum1[r]:=sum1[r]+(Cp[r]*D[r]);

sum2[r]:=sum2[r]+sqrt((alpha*D[r]*DAk[r]*C0[r])/(2*W1[r]*
W2[r]));
        cek[r]:=(beta[r]*DAk[r])/2;
        TC[r]:=sum1[r]+cek[r]+sum2[r];
      end;
    StringGrid2.Cells[1,r]:=FloatToStr(Q[r]);
    StringGrid2.Cells[2,r]:=FloatToStr(Ch[r]);
    StringGrid2.Cells[3,r]:=FloatToStr(TC[r]);
    StringGrid2.Cells[4,r]:=FloatToStr(W1[r]);
    StringGrid2.Cells[5,r]:=FloatToStr(W2[r]);
    StringGrid2.Cells[6,r]:=FloatToStr(W1[r]+W2[r]);

  end;
end;

end.
```