

**EVALUASI METODE EULER  
DALAM MENYELESAIKAN MODEL EPIDEMIK SIR**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**TONI**  
**0710943033-94**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
MALANG  
2012**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



**EVALUASI METODE EULER  
DALAM MENYELESAIKAN MODEL EPIDEMIK SIR**

**SKRIPSI**

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh:

**TONI**

**0710943033-94**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
MALANG  
2012**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



**LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI**

**EVALUASI METODE EULER  
DALAM MENYELESAIKAN MODEL EPIDEMIK SIR**

Oleh:  
**TONI**  
**0710943033-94**

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji  
pada tanggal 10 Agustus 2012  
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

**DOSEN PEMBIMBING I**

**DOSEN PEMBIMBING II**

**Dr. Agus Suryanto, M.Sc.**  
**NIP. 196908071994121001**

**Drs. M. Muslikh, M.Si.**  
**NIP. 195910311989121001**

**MENGETAHUI**  
**KETUA JURUSAN MATEMATIKA**  
**FAKULTAS MIPA UNIVERSITAS BRAWIJAYA**

**Dr. Abdul Rouf A., M.Sc.**  
**NIP. 196709071992031001**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

**Nama** : TONI  
**NIM** : 0710943033  
**Jurusan** : MATEMATIKA  
**Judul Skripsi** : EVALUASI METODE EULER DALAM  
MENYELESAIKAN MODEL EPIDEMIK  
SIR

Dengan ini menyatakan bahwa:

1. isi Skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Skripsi ini,
2. apabila di kemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala risiko yang akan saya terima.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 10 Agustus 2012

Yang menyatakan,

(TONI)

NIM. 0710943033

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



# EVALUASI METODE EULER DALAM MENYELESAIKAN MODEL EPIDEMIK SIR

## ABSTRAK

Model epidemik SIR adalah suatu model epidemik dengan penyebaran infeksi penyakit, individu pada populasi dikelompokkan menjadi *susceptible* ( $S$ ), *infective* ( $I$ ), dan *recovered* ( $R$ ). Model SIR merupakan salah satu persamaan diferensial tak-linier yang pada umumnya solusi analitiknya sulit diperoleh, sehingga solusinya perlu ditentukan secara numerik. Pada skripsi ini dibahas model SIR diskrit yang diperoleh dengan menerapkan metode Euler. Berdasarkan analisis yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa persamaan beda tidak konsisten secara dinamik dengan persamaan diferensialnya, karena masih bergantung pada nilai ukuran langkah komputasi

**Kata kunci :** model SIR, metode Euler, ukuran langkah komputasi, konsistensi secara dinamik

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



# EVALUATION METHOD OF EULER IN RESOLVING MODEL SIR EPIDEMIC

## ABSTRACT

SIR epidemic model describes the spread of infectious disease epidemic, in which individuals in the population are grouped into susceptible ( $S$ ), infective ( $I$ ), and recovered ( $R$ ). SIR model is a system of non-linear differential equations where its general solution is difficult to be determined, so the solution is often obtained numerically. This final project discusses about a discrete SIR models obtained by applying the Euler method. Based on the analysis, it can be concluded that the difference equation is dynamically inconsistent with the differential equation, because it still depends on the value of step size computation.

**Keywords :** SIR models, Euler method, step size computation, dynamically consistent

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## KATA PENGANTAR

Segala puji, syukur, hormat dan kemuliaan kepada Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul “**EVALUASI METODE EULER DALAM MENYELESAIKAN MODEL EPIDEMIK SIR**”. Skripsi ini merupakan sebagian persyaratan kelulusan dalam memperoleh gelar kesarjanaan di Fakultas MIPA Jurusan Matematika Universitas Brawijaya.

Pada penyelesaian skripsi ini penulis banyak mendapat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak, karena itu pada kesempatan kali ini penulis ingin mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

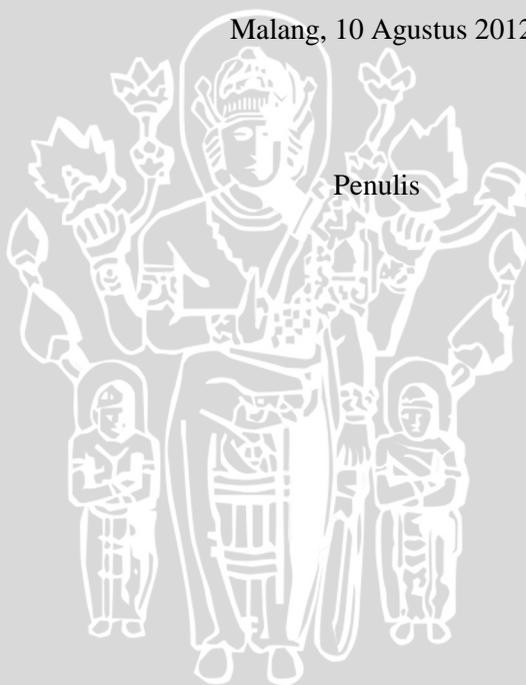
1. Dr. Agus Suryanto, M.Sc, selaku pembimbing I atas segala bimbingan, nasihat, motivasi serta kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini.
2. Drs. M. Muslikh, MSi, selaku pembimbing II atas segala bimbingan, nasihat, motivasi serta kesabaran yang telah diberikan selama penulis menempuh kuliah dan dalam penulisan skripsi ini.
3. Dr. Wuryansari Muharini K., M.Si, selaku dosen penguji yang telah banyak memberi nasehat, masukan, saran dan kritik untuk perbaikan Skripsi ini.
4. Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc, selaku Ketua Jurusan Matematika
5. Seluruh bapak/ibu dosen Matematika yang telah memberikan bekal dan ilmu pengetahuan serta staf TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
6. Ibu, bapak, dan adik tercinta dan Tineng Setiawati tersayang yang senantiasa tanpa henti memberikan semangat dan dorongan serta doa sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
7. Keluarga besar Matematika 2007, khususnya HMKB (Yogi, Bayu, Andri, Gindra, Anggun, Taman, Lutfi, Satria dll) dan

semua pihak yang telah membantu proses penulisan skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu. Terimakasih.

Semoga Allah SWT memberikan anugerah dan karunia-Nya kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini. Penulis menyadari bahwa dalam skripsi ini masih banyak kekurangan, untuk itu penulis sangat mengharapkan kritik dan saran melalui email penulis inott@yahoo.com.

Akhirnya semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca, khususnya mahasiswa Matematika Universitas Brawijaya.

Malang, 10 Agustus 2012

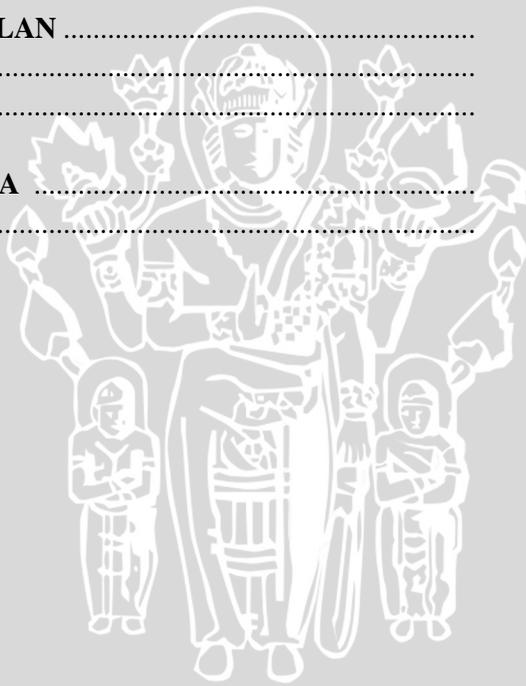


Penulis

## DAFTAR ISI

	Halaman
<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	i
<b>LEMBAR PENGESAHAN</b> .....	iii
<b>LEMBAR PERNYATAAN</b> .....	v
<b>ABSTRAK</b> .....	vii
<b>ABSTRACT</b> .....	ix
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	xi
<b>DAFTAR ISI</b> .....	xiii
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xv
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xvii
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	xix
<b>BAB I PENDAHULUAN</b> .....	1
1.1. Latar Belakang .....	1
1.2. Rumusan Masalah .....	2
1.3. Batasan Masalah .....	2
1.4. Tujuan .....	2
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA</b> .....	3
2.1. Sistem Otonomus .....	3
2.2. Kestabilan Titik Kesetimbangan .....	3
2.3. Sistem Otonomus Linier.....	4
2.4. Sistem Otonomus Tak-Linier.....	6
2.5. Model SIR .....	9
2.6. Sistem Dinamik Diskrit .....	11
2.7. Sistem Dinamik Diskrit Tak-Linier.....	12
2.8. Pendekatan Turunan Pertama.....	13
2.9. Metode Euler.....	14
2.10. Solusi Sistem Persamaan Beda Orde Satu.....	15

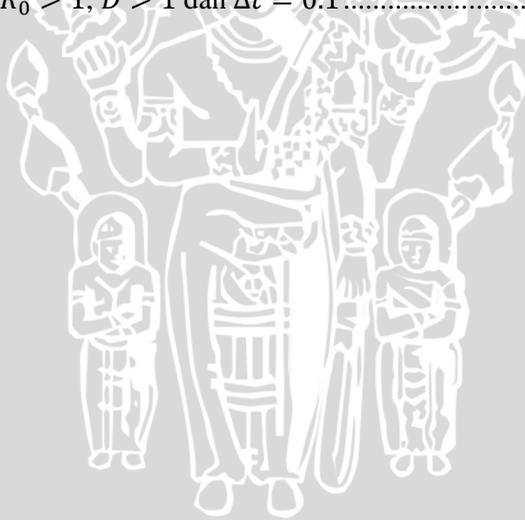
<b>BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN</b> .....	17
3.1. Diskritisasi Model SIR .....	17
3.2. Titik Keseimbangan SIR Diskrit .....	17
3.3. Kestabilan Titik Keseimbangan .....	18
3.4. Simulasi Numerik .....	28
3.4.1. Titik Keseimbangan Bebas Penyakit .....	28
3.4.2. Titik Keseimbangan Epidemik dengan kondisi $D < 0$ .....	30
3.4.3. Titik Keseimbangan Epidemik dengan kondisi $D > 0$ .....	31
<b>BAB IV KESIMPULAN</b> .....	35
4.1 Kesimpulan .....	35
4.2 Saran .....	35
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	37
<b>LAMPIRAN</b> .....	39



## DAFTAR GAMBAR

Halaman

<b>Gambar 3.1</b>	Potret fase titik kesetimbangan bebas penyakit untuk $R_0 < 1$ dan $\Delta t = 0.02$ .....	29
<b>Gambar 3.2</b>	Potret fase titik kesetimbangan bebas penyakit untuk $R_0 < 1$ dan $\Delta t = 0.2$ .....	29
<b>Gambar 3.3</b>	Potret fase titik kesetimbangan epidemik untuk $R_0 > 1, D < 1$ dan $\Delta t = 0.02$ .....	30
<b>Gambar 3.4</b>	Potret fase titik kesetimbangan epidemik untuk $R_0 > 1, D < 1$ dan $\Delta t = 0.3$ .....	31
<b>Gambar 3.5</b>	Potret fase titik kesetimbangan epidemik untuk $R_0 > 1, D > 1$ dan $\Delta t = 0.033$ .....	32
<b>Gambar 3.6</b>	Potret fase titik kesetimbangan epidemik untuk $R_0 > 1, D > 1$ dan $\Delta t = 0.1$ .....	33



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



**DAFTAR TABEL**

Halaman

**Tabel 1.** Jenis-jenis kestabilan berdasarkan nilai eigen ..... 9

**UNIVERSITAS BRAWIJAYA**



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

<b>Lampiran 1.</b> Listing program menggunakan matlab untuk mencari solusi numerik Model SIR .....	39
----------------------------------------------------------------------------------------------------	----

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Perkembangan ilmu pengetahuan di bidang matematika mempunyai peran besar dalam usaha untuk menggambarkan dan menganalisis fenomena penyebaran infeksi penyakit. Model SIR (*Susceptible, Infective, Recovered*) dapat digunakan untuk mempelajari fenomena penyebaran penyakit. Model SIR pertama kali diperkenalkan oleh Kermack dan McKendrick pada tahun 1929. Model ini hanya dapat digunakan untuk mempelajari fenomena penyebaran penyakit infeksi yang terjadi pada waktu singkat. Istilah epidemik diartikan sebagai terjadinya peningkatan jumlah individu yang terinfeksi.

Pada umumnya model epidemik berupa sistem persamaan differensial biasa non-linier. Salah satu tugas penting adalah bagaimana mendapatkan penyelesaian model. Kondisi yang ideal adalah penyelesaian analitik dapat ditentukan (McKens, 1994 dan 2000). Tetapi penyelesaian analitik sistem persamaan nonlinier umumnya sulit diperoleh. Oleh karena itu, metode pendekatan numerik diperlukan untuk mendapatkan penyelesaian yang akurat. Metode numerik akan mentransformasikan sistem persamaan diferensial menjadi sistem persamaan beda. Tentu saja sistem persamaan beda tersebut diharapkan konsisten secara dinamik dengan sistem persamaan differensialnya, yaitu kedua sistem tersebut mempunyai sifat dinamik yang sama. Pada skripsi ini, metode Euler akan diaplikasikan pada model epidemik SIR.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang permasalahan di atas, pokok permasalahan dalam penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana hasil diskritisasi sistem persamaan diferensial SIR dengan menggunakan metode Euler?
2. Bagaimana konsistensi dinamik antara sistem persamaan SIR diskrit yang didapatkan dengan sistem kontinu SIR?
3. Bagaimana simulasi numerik persamaan SIR diskrit?

## 1.3 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah:

1. Melakukan diskritisasi sistem persamaan diferensial SIR dengan menggunakan metode Euler.
2. Menganalisis konsistensi dinamik antara sistem persamaan SIR diskrit yang didapatkan dengan sistem kontinu SIR.
3. Melakukan simulasi numerik persamaan SIR diskrit.

## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA

#### 2.1 Sistem Otonomus

##### Definisi 2.1

Sistem persamaan diferensial orde satu yang berbentuk

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n); \quad i=1, \dots, n$$

dengan  $f_i$  adalah fungsi bernilai real yang tidak bergantung secara eksplisit terhadap  $t$  disebut sistem otonomus.

(Birkhoff dan Rota, 1989)

##### Definisi 2.2

Misal diberikan suatu sistem otonomus

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Titik  $(x^*, y^*)$  yang memenuhi  $f(x^*, y^*) = 0$  dan  $g(x^*, y^*) = 0$  disebut *titik kesetimbangan* sistem (2.1). Titik kesetimbangan  $(x^*, y^*)$  merupakan solusi sistem (2.1) yang bernilai konstan sebab

$$\frac{dx}{dt} = 0 \text{ dan } \frac{dy}{dt} = 0. \quad (\text{Edwards dan Penney, 2001})$$

#### 2.2 Kestabilan Titik Kesetimbangan

##### Definisi 2.3

Titik kesetimbangan  $(x^*, y^*)$  disebut:

- (1) Stabil jika  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  sedemikian sehingga jika  $\|(x(0), y(0)) - (x^*, y^*)\| < \delta$  maka  $\|(x(t), y(t)) - (x^*, y^*)\| < \varepsilon$ , untuk  $t > 0$ .

- (2) Tak-stabil apabila titik tersebut tidak stabil atau tidak memenuhi kriteria (1).
- (3) Stabil asimtotik jika titik tersebut stabil dan  $\exists \delta_0, 0 < \delta_0 < \delta$ , sedemikian sehingga sebuah solusi  $x = x(t)$  dan  $y = y(t)$  yang memenuhi  $\|(x(t), y(t)) - (x^*, y^*)\| < \delta_0$  akan bersifat  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (x^*, y^*)$ . (Robinson, 2004)

### 2.3 Sistem Otonomus Linier

#### Teorema 2.1

Diketahui sistem otonomus linier dua dimensi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy, \end{aligned} \quad (2.2)$$

Dari sistem (2.2) diperoleh matriks koefisien  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ .

Dimisalkan  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  adalah nilai eigen matriks  $A$  dan  $\det(A) = ad - bc \neq 0$ . Titik kritis (0,0) adalah:

1. stabil asimtotik jika  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  bernilai negatif atau bagian real dari  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  juga bernilai negatif,
2. stabil (tetapi bukan stabil asimtotik) jika bagian real  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  adalah nol atau  $\lambda_1 = i\beta$  dan  $\lambda_2 = -i\beta$ ,
3. tidak stabil jika  $\lambda_1$  atau  $\lambda_2$  atau keduanya bernilai positif, atau bagian real dari  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  bernilai positif.

(Edwards dan Penney, 2001)

#### Bukti:

Sistem (2.2) dapat ditulis dalam bentuk

$$\vec{x}' = A\vec{x}. \quad (2.3)$$

Diasumsikan matriks  $A$  mempunyai nilai eigen  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$ , solusi

umum persamaan (2.3) adalah

$$\vec{x} = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t},$$

di mana  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  menyatakan nilai eigen,  $v_1$  dan  $v_2$  masing-masing menyatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen,  $c_1$  dan  $c_2$  adalah sebarang konstanta. Oleh karena itu, dari solusi umum tersebut diperoleh:

1. Jika  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  bernilai negatif, maka  $\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x} = 0$ . Dengan kata lain,

semakin besar nilai  $t$ , solusi akan menuju ke titik kritis  $(0,0)$ . Menurut kriteria kestabilan, titik kritis  $(0,0)$  bersifat stabil asimtotik. Jika  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  dan  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ , dengan  $\alpha < 0$ , maka solusi dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} \vec{x} &= c_1 \vec{v}_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + c_2 \vec{v}_2 e^{(\alpha-i\beta)t} \\ &= c_1 \vec{v}_1 e^{\alpha t} (\cos\beta t + i \sin\beta t) + c_2 \vec{v}_2 e^{\alpha t} (\cos\beta t - i \sin\beta t). \end{aligned}$$

Karena terdapat suku  $e^{\alpha t}$  dengan  $\alpha < 0$ , maka semakin besar nilai  $t$ , solusi akan berosilasi menuju ke titik kritis  $(0,0)$ .

2. Jika  $\lambda_1 = i\beta$  dan  $\lambda_2 = -i\beta$ , maka solusi dapat ditulis menjadi

$$\vec{x} = c_1 \vec{v}_1 (\cos\beta t + i \sin\beta t) + c_2 \vec{v}_2 (\cos\beta t - i \sin\beta t).$$

Karena  $\cos\beta t$  dan  $\sin\beta t$  merupakan fungsi periodik, maka solusi akan terus berosilasi disekitar titik kritis, sehingga menurut kriteria kestabilan, titik kritis  $(0,0)$  bersifat stabil atau sering disebut stabil pusat.

3. Jika  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  bernilai positif, maka  $\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x} = \infty$ . Dengan kata lain,

semakin besar nilai  $t$ , solusi akan menjauhi titik kritis  $(0,0)$ . Menurut kriteria kestabilan, titik kritis  $(0,0)$  bersifat tidak stabil. Jika  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  dan  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ , dengan  $\alpha > 0$ , maka semakin besar nilai  $t$ , solusi akan berosilasi menjauhi titik kritis  $(0,0)$ .

Untuk mencari nilai eigen dari matriks  $A$  digunakan persamaan

$$\begin{aligned} A\vec{v} &= \vec{v}\lambda \\ (A - I\lambda)\vec{v} &= 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Persamaan (2.4) akan mempunyai solusi tak-trivial jika dan hanya jika  $|A - I\lambda| = 0$  dengan  $\lambda$  menyatakan nilai eigen dari matriks  $A$ , sehingga diperoleh

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

atau

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0 \quad (2.5)$$

Solusi persamaan (2.5) adalah

$$\lambda_1 = \frac{\text{trace}(A) + \sqrt{(\text{trace}(A))^2 - 4 \det(A)}}{2} \quad (2.6)$$

dan

$$\lambda_2 = \frac{\text{trace}(A) - \sqrt{(\text{trace}(A))^2 - 4 \det(A)}}{2} \quad (2.7)$$

di mana  $\text{trace}(A) = a + d$  dan  $\det(A) = ad - bc$  dengan  $\det(A) \neq 0$ .

Dari persamaan (2.6) dan (2.7) kemungkinan nilai  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  dapat dibagi menjadi beberapa kriteria yang bergantung pada nilai  $\text{trace}(A)$  dan  $\det(A)$ , yaitu:

1. jika  $\text{trace}(A) < 0$ ,  $\det(A) > 0$ ,  $(\text{trace}(A))^2 - 4\det(A) \geq 0$  maka  $\lambda_1 < 0$  dan  $\lambda_2 < 0$ ,
2. jika  $\text{trace}(A) < 0$ ,  $\det(A) > 0$ ,  $(\text{trace}(A))^2 - 4\det(A) < 0$  maka  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  dan  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ , dengan  $\alpha < 0$ ,
3. jika  $\text{trace}(A) < 0$  dan  $\det(A) < 0$ , maka  $\lambda_1 > 0$  dan  $\lambda_2 < 0$ ,
4. jika  $\text{trace}(A) > 0$ ,  $\det(A) > 0$ ,  $((\text{trace}(A))^2 - 4\det(A) \geq 0$ , maka  $\lambda_1 > 0$  dan  $\lambda_2 > 0$ ,
5. jika  $\text{trace}(A) > 0$ ,  $\det(A) > 0$ ,  $(\text{trace}(A))^2 - 4\det(A) < 0$ , maka  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  dan  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$  dengan  $\alpha > 0$ ,
6. jika  $\text{trace}(A) > 0$ ,  $\det(A) < 0$ , maka  $\lambda_1 > 0$ ,
7. jika  $\text{trace}(A) = 0$ ,  $\det(A) > 0$ , maka  $\lambda_1 = i\beta$  dan  $\lambda_2 = -i\beta$ .
8. jika  $\text{trace}(A) = 0$ ,  $\det(A) < 0$ , maka  $\lambda_1 > 0$  dan  $\lambda_2 < 0$ .

Berdasarkan Teorema 2.1 dan kriteria-kriteria tersebut dapat disimpulkan bahwa titik kritis (0,0) akan bersifat stabil asimtotik jika dan hanya jika  $\text{trace}(A) < 0$  dan  $\det(A) > 0$ , dan bersifat stabil pusat jika  $\text{trace}(A) = 0$  dan  $\det(A) > 0$ .

## 2.4 Sistem Otonomus Tak-Linier

Perhatikan sistem otonomus tak-linier berikut :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y).\end{aligned}\tag{2.8}$$

Diasumsikan  $f$  dan  $g$  mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik  $(x^*, y^*)$ . Deret Taylor fungsi  $f$  dan  $g$  di sekitar  $(x^*, y^*)$  adalah

$$\begin{aligned}f(x, y) &= f(x^*, y^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y}(y - y^*) \\ &\quad + \eta_1(x, y), \\ g(x, y) &= g(x^*, y^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y}(y - y^*) \\ &\quad + \eta_2(x, y),\end{aligned}\tag{2.9}$$

dimana  $\eta_1(x, y)$  dan  $\eta_2(x, y)$  adalah suku sisa. Dari persamaan diatas dan mengingat bahwa  $\frac{dx}{dt} = \frac{d(x - x^*)}{dt}$  serta

$\frac{dy}{dt} = \frac{d(y - y^*)}{dt}$ , persamaan (2.9) dapat ditulis dalam bentuk matriks, yaitu:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(x, y) \\ \eta_2(x, y) \end{bmatrix}.\tag{2.10}$$

Matriks

$$DJ(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} \end{bmatrix}\tag{2.11}$$

disebut matriks Jacobi atau *partial derivative matrix* (*derivative matrix*).

Jika dimisalkan  $u=x-x^*$ ,  $v=y-y^*$ , sehingga  $\vec{w}=(u,v)$  dan menurut Definisi 2.3 bahwa  $f(x^*,y^*)=g(x^*,y^*)=0$ , maka persamaan (2.10) dapat ditulis menjadi

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*,y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*,y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x^*,y^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*,y^*)}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix},$$

atau

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = DF\vec{w} + \vec{\eta}.$$

Jika  $(x,y) \rightarrow (x^*,y^*)$  maka  $(u,v)$  bernilai kecil, maka  $\|\vec{\eta}\| \leq \|\vec{w}\|$ . Dengan demikian  $\vec{\eta}$  dapat diabaikan dan sistem tak-linier (2.8) dapat dihampiri oleh sistem linier:

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = DF\vec{w}, \tag{2.12}$$

Untuk  $x=x^*$  dan  $y=y^*$  diperoleh  $(x^*,y^*)=(0,0)$ , sehingga sistem linier (2.12) mempunyai titik kesetimbangan  $(x^*,y^*)=(0,0)$

dan  $DF(x^*,y^*)$  identik dengan  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  pada persamaan (2.2).

(Boyce dan DiPrima, 2005)

### **Teorema 2.2**

Titik kesetimbangan sistem otonomus tak-linier (2.8) adalah

1. Stabil asimtotik jika titik kesetimbangan sistem yang dilinierkan adalah stabil asimtotik,
  2. Tak stabil jika titik kesetimbangan sistem yang dilinierkan adalah tak stabil.
- (Robinson, 2004)

Jenis-jenis kestabilan pada suatu sistem tak-linier, disajikan pada Tabel 1 berikut:

**Tabel 1.** Jenis-jenis kestabilan berdasarkan nilai eigen

	Nilai Eigen	Kestabilan	Jenis
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$	$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	Tidak stabil	Simpul
	$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	Stabil asimtotik	Simpul
	$\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 < 0$	Tidak stabil	Pelana
$\lambda_{1,2} = p \pm iq \in \mathbb{C}$	$p > 0$	Tidak stabil	Spiral
	$p < 0$	Stabil	Spiral
	$p = 0$	Tidak dapat ditentukan	-

(Boyce dan DiPrima, 2005).

## 2.5 Model SIR

Model epidemik SIR adalah suatu model epidemik, yang mana individu pada populasi dikelompokkan menjadi *susceptible* ( $S$ ), *infective* ( $I$ ), dan *recovered* ( $R$ ). Secara umum sistem persamaan diferensial model epidemik SIR adalah

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \delta - \beta SI - \mu S, \\
 \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \mu I - \alpha I, \\
 \frac{dR}{dt} &= \alpha I - \mu R.
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

Di mana  $\delta$  dan  $\mu$  menunjukkan jumlah kelahiran dan kematian, serta  $\beta$  dan  $\alpha$  menunjukkan laju individu yang terinfeksi dan sembuh tidak pernah bernilai negatif dan bersifat konstan. Individu *infective* juga mempunyai peluang untuk sembuh dan memiliki kekebalan yang permanen mengakibatkan jumlah individu *recovered* bertambah sebanyak berkurangnya individu *infective* yang telah sembuh. Pada

sistem (2.13) variabel  $R$  tidak muncul pada persamaan pertama dan kedua. Hal ini menunjukkan bahwa jumlah individu pada kelompok  $R$  tidak mempengaruhi laju perubahan jumlah individu pada kelompok  $S$  maupun  $I$ . Dengan demikian, berdasarkan kondisi tersebut, sistem (2.13) dapat diperhatikan sebagai sistem

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \delta - \beta SI - \mu S, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \mu I - \alpha I. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Dengan menggunakan Definisi 2.2, diperoleh dua titik kesetimbangan untuk persamaan (2.14) di atas, yaitu:

$$E_0 = \left( \frac{\delta}{\mu}, 0 \right) \text{ dan } E_1 = \left( \frac{\mu + \alpha}{\beta}, \frac{\delta}{\mu + \alpha} - \frac{\mu}{\beta} \right).$$

Persamaan (2.14) merupakan suatu sistem persamaan diferensial tak-linier. Kestabilan secara lokal titik kesetimbangan diperoleh dengan melakukan linierisasi sistem di sekitar titik kesetimbangannya. Berdasarkan Teorema 2.1, titik kesetimbangan stabil asimtotik lokal jika  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  bernilai negatif, akibatnya berlaku syarat perlu dan cukup.

Titik kesetimbangan  $E_0$  stabil asimtotik lokal, jika

$$R_0 = \frac{\beta \delta}{\mu(\mu + \alpha)} < 1.$$

Sedangkan titik kesetimbangan  $E_1$  stabil asimtotik lokal, jika

$$R_0 = \frac{\beta \delta}{\mu(\mu + \alpha)} > 1.$$

## 2.6 Sistem Dinamik Diskrit

Persamaan beda biasanya menggambarkan tentang fenomena tertentu yang berkaitan dengan waktu yang berjalan. Sebagai contoh, jika populasi tertentu berkembang secara diskrit, maka jumlah populasi ke- $(n+1)$  adalah fungsi dari populasi ke- $(n)$ . Jika terdapat interaksi antara dua spesies,  $x_{n+1}$  dan  $y_{n+1}$ . Maka jumlah populasi keduanya pada waktu ke- $(n+1)$  dapat ditulis dalam bentuk sistem persamaan beda sebagai berikut

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n)\end{aligned}\tag{2.15}$$

(Elaydi, 2005).

#### Definisi 2.4

Titik  $(x^*, y^*)$  disebut titik kesetimbangan persamaan (2.15) jika  $f(x^*, y^*) = x^*$  dan  $g(x^*, y^*) = y^*$ .

Titik  $(x^*, y^*)$  adalah solusi konstan dari sistem (2.15), karena jika  $(x_{(0)}, y_{(0)}) = (x^*, y^*)$  adalah titik awal, maka

$$\begin{aligned}x_{(1)} &= f(x^*, y^*) = x^* \\ y_{(1)} &= g(x^*, y^*) = y^*, \\ x_{(2)} &= f(x_{(1)}, y_{(1)}) = f(x^*, y^*) = x^* \\ y_{(2)} &= g(x_{(1)}, y_{(1)}) = g(x^*, y^*) = y^*, \\ &\vdots\end{aligned}$$

Hal lain yang perlu dipelajari dalam sistem dinamik adalah perilaku solusi di sekitar titik kesetimbangan atau kestabilan titik kesetimbangan. (Elaydi, 2005)

#### 2.7 Sistem Dinamik Diskrit Tak-Linier

Perhatikan sistem dinamik diskrit tak-linier sebagai berikut:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n).\end{aligned}\tag{2.16}$$

Diasumsikan  $f$  dan  $g$  mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik  $(x^*, y^*)$ . Deret Taylor fungsi  $f$  dan  $g$  di sekitar  $(x^*, y^*)$  adalah

$$f(x_n, y_n) = f(x^*, y^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x_n} (x_n - x^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y_n} (y_n - y^*) + \eta_1(x_n, y_n) \quad (2.17)$$

$$g(x_n, y_n) = g(x^*, y^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x_n} (x_n - x^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y_n} (y_n - y^*) + \eta_2(x_n, y_n), \quad (2.18)$$

dimana  $\eta_1(x_n, y_n)$  dan  $\eta_2(x_n, y_n)$  adalah suku sisa. Untuk hampiran orde satu di atas, suku sisa tersebut memenuhi

$$\lim_{(x_n, y_n) \rightarrow (x^*, y^*)} \frac{\eta_1(x_n, y_n)}{\|\bar{w}_n\|} = 0 \quad \text{dan} \quad \lim_{(x_n, y_n) \rightarrow (x^*, y^*)} \frac{\eta_2(x_n, y_n)}{\|\bar{w}_n\|} = 0 \quad \text{dengan}$$

$\bar{w}_n = (x_n - x^*, y_n - y^*)$ . Dari Definisi 2.4, titik kesetimbangan sistem dinamik diskrit diperoleh jika

$$f(x^*, y^*) = x^* \quad (2.19)$$

$$g(x^*, y^*) = y^*,$$

Dengan substitusi persamaan (2.19) ke persamaan (2.17) dan persamaan (2.18), persamaan-persamaan tersebut menjadi

$$x_{n+1} = x^* + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x_n} (x_n - x^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y_n} (y_n - y^*) + \eta_1(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y^* + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x_n} (x_n - x^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y_n} (y_n - y^*) + \eta_2(x_n, y_n).$$

Atau dapat ditulis sebagai

$$x_{n+1} - x^* = \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x_n} (x_n - x^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y_n} (y_n - y^*) \quad (2.20)$$

$$y_{n+1} - y^* = \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x_n} (x_n - x^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y_n} (y_n - y^*) \quad (2.21)$$

Jika dimisalkan

$$u_n = x_n - x^* \\ v_n = y_n - y^*$$

maka persamaan (2.20) dan (2.21) menjadi

$$u_{n+1} = \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x_n} u_n + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y_n} v_n \\ v_{n+1} = \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x_n} u_n + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y_n} v_n$$

Dengan demikian linierisasi dari persamaan (2.16) adalah sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x_n} & \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y_n} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x_n} & \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

(Elaydi, 2005)

## 2.8 Pendekatan Turunan Pertama

Banyak metode untuk mendapatkan skema numerik dari persamaan diferensial. Bentuk yang umum digunakan adalah menggunakan Deret Taylor

Diberikan fungsi  $x(t)$  yang kontinu dan dapat diturunkan pada selang  $[a, b]$ . Dengan menggunakan ekspansi Deret Taylor untuk fungsi  $x$  di titik  $t + h$  didapat

$$x(t+h) = x(t) + x'(t)h + \frac{x''(t)h^2}{2!} + \dots \quad (2.23)$$

dimanaa  $h \in \mathfrak{R}$ .

Dari persamaan (2.23) diperoleh

$$x'(t) = \frac{x(t+h) - x(t)}{h} + O(h). \quad (2.24)$$

Persamaan (2.24) biasa disebut beda maju turunan pertama, di mana  $O(h)$  adalah orde kesalahan. Jika  $O(h)$  sangat kecil, maka  $O(h)$  dapat diabaikan, sehingga diperoleh

$$x'(t) = \frac{x(t+h) - x(t)}{h}. \quad (2.25)$$

Persamaan (2.25) disebut juga Metode Euler untuk turunan pertama. (Elaydi, 2005)

## 2.9 Metode Euler

Salah satu metode yang sering digunakan untuk melakukan simulasi dari persamaan differensial adalah Metode Euler. Misal diberikan persamaan differensial sebagai berikut

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \leq t \leq b,$$

dengan menggunakan persamaan (2.25) untuk turunan  $x$  terhadap  $t$ , maka diperoleh

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = f(x(t))$$

atau

$$x(t+h) = x(t) + hf(x(t)). \quad (2.26)$$

Jika  $t = t_0 + nh$ , maka persamaan (2.26) menjadi

$$x(t_0 + (n+1)h) = x(t_0 + nh) + hf(x(t_0 + nh)) \quad (2.27)$$

dan untuk  $x(t_0 + nh) = x(n)$ , persamaan (2.27) menjadi

$$x(n+1) = x(n) + hf(x(n)).$$

(Elaydi, 2005)

## 2.10 Solusi Sistem Persamaan Beda Orde Satu

Bentuk umum sistem persamaan beda orde satu dengan  $n$  variabel bebas adalah sebagai berikut

$$x_1(n+1) = a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + \dots + a_{1k}x_k(n)$$

$$x_2(n+1) = a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) + \dots + a_{2k}x_k(n)$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$x_k(n+1) = a_{k1}x_1(n) + a_{k2}x_2(n) + \dots + a_{kk}x_k(n)$$

atau dapat ditulis dalam bentuk

$$\vec{x}(n+1) = A\vec{x}(n), \quad (2.26)$$

di mana  $A=(a)_{ij}$  adalah matriks  $k \times k$  bernilai real. Misal diberikan nilai awal  $x(0)$ , maka dari persamaan (2.26) didapat

$$x(1) = Ax(0)$$

$$x(2) = Ax(1) = A(Ax(0)) = A^2x(0)$$

$$x(3) = Ax(2) = A(A^2x(0)) = A^3x(0)$$

$$\vdots$$

$$x(n) = Ax(n-1) = A(A^{n-1}x(0)) = A^n x(0),$$

sehingga solusi umum untuk persamaan (2.26) adalah

$$x(n) = A^n x(0).$$

Jika matriks  $A$  dapat didiagonalkan maka solusi umum dari persamaan (2.26) juga dapat diberikan oleh

$$x(n) = c_1 \lambda_1^n v_1 + c_2 \lambda_2^n v_2 + \dots + c_k \lambda_k^n v_k,$$

di mana  $v_i$  adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen  $\lambda_i$  dan  $c_i$  adalah sebarang konstanta. (Elaydi, 2005)

### **Teorema 2.3**

Misalkan  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, k$  adalah akar-akar persamaan karakteristik untuk persamaan (2.26), maka semua solusi persamaan (2.26) konvergen menuju 0 (stabil asimtotik) jika dan hanya jika maksimum  $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_k|\} < 1$ . (Elaydi, 2005)

### Lemma 2.4

Persamaan kuadrat  $\lambda^2 + A\lambda + B = 0$  memiliki dua akar yang memenuhi  $|\lambda_{1,2}| < 1$  jika dan hanya jika memenuhi ketiga kondisi berikut:

- i.  $1 + A + B > 0$ ,
- ii.  $1 - B > 0$ ,
- iii.  $1 - A + B > 0$ .

(Elaydi, 2005)



## BAB III

### HASIL DAN PEMBAHASAN

#### 3.1 Diskritisasi Model SIR

Secara umum relatif sulit mencari solusi eksak dengan cara mengintegrasikan sistem persamaan diferensial SIR (2.14), sehingga perlu dilakukan pendekatan secara numerik. Salah satu pendekatan dilakukan dengan metode Euler.

Dengan menggunakan metode Euler sebagaimana disebutkan pada Bab II, diperoleh diskritisasi sistem persamaan (2.14) sebagai berikut

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \Delta t \delta - \Delta t \beta S_n I_n - \Delta t \mu S_n + S_n = f(S_n, I_n) \\ I_{n+1} &= \Delta t \beta S_n I_n - \Delta t \mu I_n - \Delta t \alpha I_n + I_n = g(S_n, I_n) \end{aligned} \quad n \in \mathbb{Z}^+. \quad (3.1)$$

#### 3.2 Titik Keseimbangan SIR Diskrit

Pada subbab ini ditunjukkan bahwa titik keseimbangan SIR model diskrit (3.1) sama dengan model SIR kontinu (2.14).

Berdasarkan Definisi 2.4, titik keseimbangan sistem persamaan (3.1) diperoleh jika  $S^* = f(S^*, I^*)$  dan  $I^* = g(S^*, I^*)$ , yaitu

$$S^* = \Delta t \delta - \Delta t \beta S^* I^* - \Delta t \mu S^* + S^* \quad (3.2)$$

$$I^* = \Delta t \beta S^* I^* - \Delta t \mu I^* - \Delta t \alpha I^* + I^*. \quad (3.3)$$

Dari persamaan (3.2) diperoleh

$$\Delta t (\delta - \beta S^* I^* - \mu S^*) = 0$$

atau

$$S^* = \frac{\delta}{\beta I^* + \mu}. \quad (3.4)$$

Dari persamaan (3.3) diperoleh

$$\Delta t I^* = 0 \quad \text{atau} \quad (\beta S^* - \mu - \alpha) = 0,$$

sehingga

$$I^* = 0 \quad (3.5)$$

Atau

$$S^* = \frac{\mu + \alpha}{\beta}. \quad (3.6)$$

Jika disubstitusikan persamaan (3.5) ke persamaan (3.4), diperoleh

$$S^* = \frac{\delta}{\mu}.$$

Secara sama, disubstitusikan persamaan (3.6) ke persamaan (3.4),

Diperoleh

$$I^* = \frac{\delta}{\mu + \alpha} - \frac{\mu}{\beta}.$$

Sehingga diperoleh dua titik kesetimbangan dari sistem persamaan (3.1), yaitu  $E_0 = \left(\frac{\delta}{\mu}, 0\right)$  dan  $E_1 = \left(\frac{\mu + \alpha}{\beta}, \frac{\delta}{\mu + \alpha} - \frac{\mu}{\beta}\right)$ , jika  $\frac{\delta}{\mu + \alpha} > \frac{\mu}{\beta}$ . Dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan SIR model diskrit (3.1) konsisten dengan model SIR kontinu (2.14).

### 3.3 Kestabilan Titik Kesetimbangan

Kestabilan titik-titik kesetimbangan sistem persamaan SIR diskrit dianalisis secara lokal yaitu dengan linierisasi. Berdasarkan persamaan (2.22), linierisasi dari masing-masing persamaan SIR diskrit di sekitar titik kesetimbangan positif  $(S^*, I^*)$  memenuhi persamaan berikut:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{\partial f}{\partial S_n}(S^*, I^*)S_n + \frac{\partial f}{\partial I_n}(S^*, I^*)I_n, \\ I_{n+1} &= \frac{\partial g}{\partial S_n}(S^*, I^*)S_n + \frac{\partial g}{\partial I_n}(S^*, I^*)I_n, \end{aligned} \quad (3.7)$$

di mana

$$f(S_n, I_n) = \Delta t \delta - \Delta t \beta S_n I_n - \Delta t \mu S_n + S_n$$

dan

$$g(S_n, I_n) = \Delta t \beta S_n I_n - \Delta t \mu I_n - \Delta t \alpha I_n + I_n.$$

Dengan menurunkan  $f(S_n, I_n)$  terhadap  $S_n$  dan  $I_n$  di sekitar titik kesetimbangan  $(S^*, I^*)$  masing-masing diperoleh

$$\frac{\partial f(S^*, I^*)}{\partial S_n} = -\Delta t \beta I^* - \Delta t \mu + 1 \quad \text{Dan} \quad \frac{\partial f(S^*, I^*)}{\partial I_n} = -\Delta t \beta S^*. \quad (3.8)$$

Secara sama, turunan  $g(S_n, I_n)$  terhadap  $S_n$  dan  $I_n$  masing-masing diperoleh

$$\frac{\partial g(S^*, I^*)}{\partial S_n} = \Delta t \beta I^* \quad \text{dan} \quad \frac{\partial g(S^*, I^*)}{\partial I_n} = \Delta t (\beta S^* - \mu - \alpha) + 1. \quad (3.9)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (3.8) dan (3.9) ke persamaan (3.7) persamaan tersebut menjadi

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= (-\Delta t \beta I^* - \Delta t \mu + 1) S_n + (-\Delta t \beta S^*) I_n \\ I_{n+1} &= (\Delta t \beta I^*) S_n + (\Delta t (\beta S^* - \mu - \alpha) + 1) I_n. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Berikut akan dibahas syarat kestabilan lokal dari masing-masing titik kesetimbangan sistem persamaan SIR diskrit:

(1) *Titik Kesetimbangan  $E_0$*

Dengan substitusi titik kesetimbangan  $E_0$  ke sistem persamaan (3.10) didapatkan

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= (-\Delta t \mu + 1) S_n + \left(-\Delta t \frac{\beta \delta}{\mu}\right) I_n \\ I_{n+1} &= \left(\Delta t \left(\frac{\beta \delta}{\mu} - \mu - \alpha\right) + 1\right) I_n. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Sistem persamaan (3.11) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} S_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Delta t \mu + 1 & -\Delta t \frac{\beta \delta}{\mu} \\ 0 & \Delta t \left(\frac{\beta \delta}{\mu} - \mu - \alpha\right) + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_n \\ I_n \end{bmatrix}.$$

Persamaan karakteristik matriks Jacobi

$$J(S_n, I_n) = \begin{bmatrix} -\Delta t \mu + 1 & -\Delta t \frac{\beta \delta}{\mu} \\ 0 & \Delta t \left(\frac{\beta \delta}{\mu} - \mu - \alpha\right) + 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

adalah

$$P(\lambda) = [-\Delta t\mu + 1 - \lambda] \left[ \Delta t \left( \frac{\beta\delta}{\mu} - \mu - \alpha \right) + 1 - \lambda \right] = 0.$$

Persamaan (3.12) mempunyai akar-akar karakteristik sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -\Delta t\mu + 1 \text{ dan } \lambda_2 = \Delta t \left( \frac{\beta\delta}{\mu} - \mu - \alpha \right) + 1.$$

Nilai  $|\lambda_1| < 1$  diperoleh jika

$$\Delta t < \frac{2}{\mu}. \quad (3.13)$$

Secara sama  $|\lambda_2| < 1$  dapat dipenuhi jika

$$\Delta t < \frac{2}{\mu + \alpha - \frac{\beta\delta}{\mu}}. \quad (3.14)$$

Berdasarkan pertidaksamaan (3.13) dan (3.14) diperoleh kesimpulan bahwa titik kesetimbangan  $E_0$  stabil jika

$$\Delta t < \min \left( \frac{2}{\mu}, \frac{2}{\mu + \alpha - \frac{\beta\delta}{\mu}} \right).$$

Karena langkah integrasi  $\Delta t$  harus bernilai positif, diperoleh

$$\frac{2}{\mu + \alpha - \frac{\beta\delta}{\mu}} > 0$$

atau

$$\mu + \alpha - \frac{\beta\delta}{\mu} > 0.$$

Kondisi tersebut ekuivalen dengan kondisi

$$R_0 = \frac{\beta\delta}{\mu(\mu + \alpha)} < 1.$$

Disimpulkan bahwa titik kesetimbangan  $E_0 = \left( \frac{\delta}{\mu}, 0 \right)$  pada sistem persamaan SIR diskrit stabil asimtotik. Kestabilan titik kesetimbangan  $E_0$  konsisten secara dinamik bila

$$R_0 < 1 \quad \text{dan} \quad \Delta t < \min\left(\frac{2}{\mu}, \frac{2}{\mu + \alpha - \frac{\beta\delta}{\mu}}\right)$$

(2) Titik Kesetimbangan  $E_1$

Dengan substitusi titik kesetimbangan  $E_1$  ke sistem persamaan (3.10) didapatkan

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \left(1 - \Delta t \frac{\beta\delta}{\mu + \alpha}\right) S_n - \Delta t(\mu + \alpha) I_n \\ I_{n+1} &= \Delta t \left(\frac{\beta\delta}{\mu + \alpha} - \mu\right) S_n + I_n. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Sistem persamaan (3.15) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} S_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \Delta t \frac{\beta\delta}{(\mu + \alpha)} & -\Delta t(\mu + \alpha) \\ \Delta t \left(\frac{\beta\delta}{(\mu + \alpha)} - \mu\right) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_n \\ I_n \end{bmatrix}.$$

Persamaan karakteristik matriks Jacobi

$$J(S_n, I_n) = \begin{bmatrix} 1 - \Delta t \frac{\beta\delta}{(\mu + \alpha)} & -\Delta t(\mu + \alpha) \\ \Delta t \left(\frac{\beta\delta}{(\mu + \alpha)} - \mu\right) & 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

adalah

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \left[1 - \Delta t \frac{\beta\delta}{(\mu + \alpha)} - \lambda\right] [1 - \lambda] \\ &\quad + [\Delta t(\mu + \alpha)] \left[\Delta t \left(\frac{\beta\delta}{(\mu + \alpha)} - \mu\right)\right] = 0 \end{aligned}$$

atau

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \left( 2 - \Delta t \frac{\beta\delta}{(\mu + \alpha)} \right) \lambda + \Delta t^2 (\beta\delta - \mu(\mu + \alpha)) - \Delta t \frac{\beta\delta}{(\mu + \alpha)} + 1 = 0. \quad (3.17)$$

Persamaan (3.17) dapat juga ditulis sebagai berikut

$$P(\lambda) = \lambda^2 + A\lambda + B = 0, \quad (3.18)$$

dimana

$$A = \left( \frac{\beta\delta}{\mu + \alpha} \right) \Delta t - 2$$

dan

$$B = (\beta\delta - \mu(\mu + \alpha))\Delta t^2 - \left( \frac{\beta\delta}{\mu + \alpha} \right) \Delta t + 1.$$

Dalam Lemma 2.4 dijelaskan bahwa, akar dari persamaan kuadrat (3.18) akan memenuhi  $|\lambda_{1,2}| < 1$  jika dan hanya jika memenuhi ketiga kondisi berikut:

- i.  $1 + A + B > 0$ ,
- ii.  $1 - B > 0$ ,
- iii.  $1 - A + B > 0$ .

### Kondisi i

Akan ditunjukkan bahwa  $1 + A + B > 0$ .

$$1 + A + B > 0,$$

$$\Leftrightarrow 0 < 1 + A + B,$$

$$\Leftrightarrow 0 < 1 + \left( \frac{\beta\delta}{\mu + \alpha} \right) \Delta t - 2 + (\beta\delta - \mu(\mu + \alpha))\Delta t^2$$

$$- \left( \frac{\beta\delta}{\mu + \alpha} \right) \Delta t + 1,$$

$$\Leftrightarrow 0 < (\beta\delta - \mu(\mu + \alpha))\Delta t^2.$$

Karena  $\Delta t > 0$ , diperoleh

$$\beta\delta - \mu(\mu + \alpha) > 0$$

atau

$$R_0 = \frac{\beta\delta}{\mu(\mu + \alpha)} > 1.$$

### Kondisi ii

Akan ditunjukkan bahwa  $1 - B > 0$ .

$$1 - B > 0,$$

$$\Leftrightarrow 0 < 1 - B,$$

$$\Leftrightarrow 0 < 1 - B,$$

$$\Leftrightarrow 0 < 1 - \left( (\beta\delta - \mu(\mu + \alpha))\Delta t^2 - \left( \frac{\beta\delta}{\mu + \alpha} \right) \Delta t + 1 \right),$$

$$\Leftrightarrow 0 < \left( \frac{\beta\delta}{\mu + \alpha} \right) \Delta t - (\beta\delta - \mu(\mu + \alpha))\Delta t^2,$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{\beta\delta}{\mu + \alpha} \right) \Delta t > (\beta\delta - \mu(\mu + \alpha))\Delta t^2,$$

diperoleh

$$\Delta t < \frac{\beta\delta}{(\mu + \alpha)(\beta\delta - \mu(\mu + \alpha))}.$$

Karena  $\Delta t > 0$  dan

$$\frac{\beta\delta}{(\mu + \alpha)} > 0,$$

berlaku

$$\beta\delta - \mu(\mu + \alpha) > 0$$

atau

$$R_0 = \frac{\beta\delta}{\mu(\mu + \alpha)} > 1.$$

### Kondisi iii

Akan ditunjukkan bahwa  $1 - A + B > 0$ ,

$$1 - A + B > 0,$$

$$\Leftrightarrow 0 < 1 - A + B,$$

$$\Leftrightarrow 0 < 1 - \left( \left( \frac{\beta\delta}{\mu + \alpha} \right) \Delta t - 2 \right) + (\beta\delta - \mu(\mu + \alpha))\Delta t^2 - \left( \frac{\beta\delta}{\mu + \alpha} \right) \Delta t + 1,$$

$$\Leftrightarrow 0 < (\beta\delta - \mu(\mu + \alpha))\Delta t^2 - 2 \frac{\beta\delta}{\mu + \alpha} \Delta t + 4. \quad (3.19)$$

Perhatikan fungsi kuadrat,

$$P(\Delta t) = (\beta\delta - \mu(\mu + \alpha))\Delta t^2 - 2 \frac{\beta\delta}{\mu + \alpha} \Delta t + 4.$$

Fungsi  $P(\Delta t)$  memotong sumbu  $\Delta t$  pada

$$\Delta t_{1,2} = \frac{2 \frac{\beta\delta}{\mu + \alpha} \pm \sqrt{D}}{2(\beta\delta - \mu(\mu + \alpha))}, \quad (3.20)$$

dimana

$$D = \left( 2 \frac{\beta\delta}{\mu + \alpha} \right)^2 - 16(\beta\delta - \mu(\mu + \alpha)).$$

Berikut dijelaskan tiga kemungkinan nilai  $D$ .

1. Jika  $D < 0$ , maka akar (3.20) merupakan bilangan imajiner sehingga fungsi  $P(\Delta t) > 0$ . Hal ini berarti pertidaksamaan (3.19) akan terpenuhi untuk semua  $\Delta t > 0$ . Kondisi ini berlaku jika  $D < 0$ , yaitu

$$\begin{aligned}
& 4\left(\frac{\beta\delta}{\mu+\alpha}\right)^2 - 16(\beta\delta - \mu(\mu+\alpha)) < 0, \\
& \Leftrightarrow \left(\frac{\beta\delta}{\mu+\alpha}\right)^2 < 4(\beta\delta - \mu(\mu+\alpha)), \\
& \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\beta\delta}{\mu+\alpha}\right)^2 < \beta\delta - \mu(\mu+\alpha), \\
& \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\beta\delta}{\mu+\alpha}\right)^2 + \mu(\mu+\alpha) < \beta\delta, \\
& \Leftrightarrow \frac{\beta\delta}{4(\mu+\alpha)^2} + \frac{\mu(\mu+\alpha)}{\beta\delta} < 1, \\
& \Leftrightarrow \left(\frac{\mu}{4(\mu+\alpha)}\right)\left(\frac{\beta\delta}{\mu(\mu+\alpha)}\right) + \frac{\mu(\mu+\alpha)}{\beta\delta} < 1, \\
& \Leftrightarrow \frac{\mu R_0}{4(\mu+\alpha)} + \frac{1}{R_0} < 1, \\
& \Leftrightarrow \frac{\mu R_0^2}{4(\mu+\alpha)} + 1 < R_0, \\
& \Leftrightarrow \frac{\mu R_0^2}{4(\mu+\alpha)} < R_0 - 1, \\
& \Leftrightarrow \frac{\mu R_0^2}{4(\mu+\alpha)} < R_0 - 1 < R_0, \\
& \Leftrightarrow \frac{\mu R_0}{4(\mu+\alpha)} < 1. \tag{3.21}
\end{aligned}$$

Jika pertidaksamaan (3.21) berlaku, maka kondisi iii) terpenuhi.

2. Jika  $D = 0$ , maka fungsi  $P(\Delta t)$  bernilai nol pada  $\Delta t = \Delta t_{1,2} = \Delta t_0$ , dengan

$$\Delta t_0 = \frac{\beta\delta}{(\mu + \alpha)(\beta\delta - \mu(\mu + \alpha))}.$$

Hal ini berarti pertidaksamaan (3.19) akan terpenuhi untuk  $\Delta t \neq \Delta t_0$ .  $D = 0$  jika

$$\begin{aligned} 4\left(\frac{\beta\delta}{\mu + \alpha}\right)^2 - 16(\beta\delta - \mu(\mu + \alpha)) &= 0, \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\beta\delta}{\mu + \alpha}\right)^2 &= 4(\beta\delta - \mu(\mu + \alpha)), \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\beta\delta}{\mu + \alpha}\right)^2 &= \beta\delta - \mu(\mu + \alpha), \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\beta\delta}{\mu + \alpha}\right)^2 + \mu(\mu + \alpha) &= \beta\delta, \\ \Leftrightarrow \frac{\beta\delta}{4(\mu + \alpha)^2} + \frac{\mu(\mu + \alpha)}{\beta\delta} &= 1, \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\mu}{4(\mu + \alpha)}\right)\left(\frac{\beta\delta}{\mu(\mu + \alpha)}\right) + \frac{\mu(\mu + \alpha)}{\beta\delta} &= 1, \\ \Leftrightarrow \frac{\mu R_0}{4(\mu + \alpha)} + \frac{1}{R_0} &= 1. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Jika persamaan (3.22) berlaku maka kondisi iii) berlaku untuk semua  $\Delta t$  kecuali  $\Delta t \neq \Delta t_0$ .

3. Jika  $D > 0$ , maka fungsi  $P(\Delta t)$  memotong sumbu  $\Delta t$  pada  $\Delta t_1$  dan  $\Delta t_2$ . Hal ini berarti pertidaksamaan (3.19) akan terpenuhi jika

$$0 < \Delta t < \Delta t_1 \text{ atau } \Delta t > \Delta t_2,$$

dimana

$$\Delta t_1 = \frac{2\frac{\beta\delta}{\mu + \alpha} - \sqrt{D}}{2(\beta\delta - \mu(\mu + \alpha))} > 0, \Delta t_2 = \frac{2\frac{\beta\delta}{\mu + \alpha} + \sqrt{D}}{2(\beta\delta - \mu(\mu + \alpha))} > 0.$$

Kondisi ini berlaku jika  $D > 0$ , yaitu

$$\begin{aligned}
 & 4\left(\frac{\beta\delta}{\mu+\alpha}\right)^2 - 16(\beta\delta - \mu(\mu+\alpha)) > 0, \\
 \Leftrightarrow & \left(\frac{\beta\delta}{\mu+\alpha}\right)^2 > 4(\beta\delta - \mu(\mu+\alpha)), \\
 \Leftrightarrow & \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\beta\delta}{\mu+\alpha}\right)^2 > \beta\delta - \mu(\mu+\alpha), \\
 \Leftrightarrow & \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\beta\delta}{\mu+\alpha}\right)^2 + \mu(\mu+\alpha) > \beta\delta, \\
 \Leftrightarrow & \frac{\beta\delta}{4(\mu+\alpha)^2} + \frac{\mu(\mu+\alpha)}{\beta\delta} > 1, \\
 \Leftrightarrow & \left(\frac{\mu}{4(\mu+\alpha)}\right)\left(\frac{\beta\delta}{\mu(\mu+\alpha)}\right) + \frac{\mu(\mu+\alpha)}{\beta\delta} > 1, \\
 \Leftrightarrow & \frac{\mu R_0}{4(\mu+\alpha)} + \frac{1}{R_0} > 1. \tag{3.23}
 \end{aligned}$$

Jika persamaan (3.23) berlaku maka kondisi iii) berlaku untuk  $0 < \Delta t < \Delta t_1$  atau  $\Delta t > \Delta t_2$ .

Dari analisis kestabilan titik kesetimbangan  $E_1$  diperoleh tiga kondisi sebagai berikut :

- i)  $1 + A + B > 0$  terpenuhi,
- ii)  $1 - B > 0$  terpenuhi dengan syarat  $\Delta t < \frac{\beta\delta}{(\mu+\alpha)(\beta\delta - \mu(\mu+\alpha))}$ .
- iii)  $1 - A + B > 0$  terpenuhi dengan tiga kemungkinan, yaitu
  - 1)  $\Delta t > 0$  dan  $\frac{\mu R_0}{4(\mu+\alpha)} < 1$ .
  - 2)  $\Delta t \neq \Delta t_0$  dan  $\frac{\mu R_0}{4(\mu+\alpha)} + \frac{1}{R_0} = 1$
  - 3)  $0 < \Delta t < \Delta t_1$  atau  $\Delta t > \Delta t_2$  dan  $\frac{\mu R_0}{4(\mu+\alpha)} + \frac{1}{R_0} > 1$

Karena ketiga kondisi diatas terpenuhi maka menurut Lemma 2.4, akar-akar karakteristik  $|\lambda_{1,2}| < 1$ . Menurut Teorema 2.3. titik kesetimbangan  $E_1 = \left(\frac{\mu+\alpha}{\beta}, \frac{\delta}{\mu+\alpha} - \frac{\mu}{\beta}\right)$  stabil asimtotik.

Kestabilan  $E_1$  konsisten secara dinamik jika dipenuhi  $R_0 > 1$  dan salah satu kemungkinan sebagai berikut:

1.  $\frac{\mu R_0}{4(\mu+\alpha)} < 1$  dan  $\Delta t < \frac{\beta\delta}{(\mu+\alpha)(\beta\delta - \mu(\mu+\alpha))}$ ,
2.  $\frac{\mu R_0}{4(\mu+\alpha)} + \frac{1}{R_0} > 1$  dan  $\Delta t < \min\left(\Delta t_1, \frac{\beta\delta}{(\mu+\alpha)(\beta\delta - \mu(\mu+\alpha))}\right)$ .

### 3.4 Simulasi Numerik

Pada sub bab ini, untuk mendukung hasil analisis pada sub bab sebelumnya, disimulasikan solusi dari persamaan SIR diskrit. Untuk mensimulasikan hasil analisis model, digunakan metode Euler pada *software* MATLAB R2008A. *Source code* dari program dapat dilihat pada Lampiran 1.

#### 3.4.1 Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Pada simulasi ini digunakan nilai  $\alpha = 10$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $\delta = 1.5$ ,  $\mu = 1.6$ , dan  $n = 50$ . Nilai parameter tersebut memenuhi syarat kestabilan dari  $E_0 = \left(\frac{\delta}{\mu}, 0\right)$ , yaitu  $R_0 = 0.0081 < 1$ . Berdasarkan pembahasan sebelumnya, titik kesetimbangan bebas penyakit

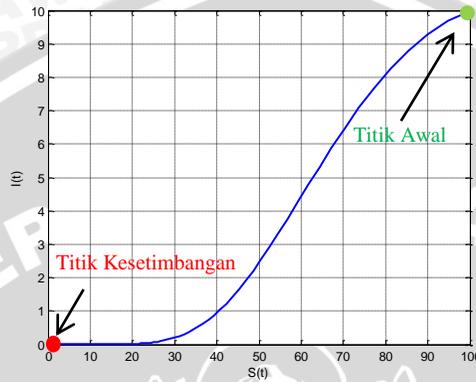
$E_0 \left(\frac{\delta}{\mu}, 0\right)$  stabil asimtotik ketika  $R_0 < 1$  dan  $\Delta t < \min\left(\frac{2}{\mu}, \frac{2}{\mu+\alpha - \frac{\beta\delta}{\mu}}\right)$ .

Nilai  $\Delta t$  yang harus diambil agar  $E_0$  stabil adalah

$$\Delta t < \min\left(\frac{2}{\mu}, \frac{2}{\mu+\alpha - \frac{\beta\delta}{\mu}}\right) = \min(1.25, 0.17) = 0.17.$$

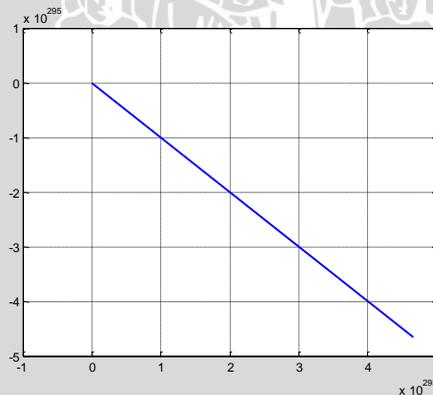
Pada Gambar 3.1 diperlihatkan potret fase dengan  $\Delta t = 0.02$  dan nilai awal  $(S_0, I_0) = (100, 10)$ , dapat dilihat bahwa solusinya konvergen menuju ke titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0(0.94; 0)$ . Hasil simulasi numerik yang ditunjukkan mendukung

hasil analisis bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit stabil untuk  $R_0 < 1$  dan  $\Delta t < 0.17$ .



**Gambar 3.1** Potret fase titik kesetimbangan bebas penyakit untuk  $R_0 < 1$  dan  $\Delta t = 0.02$ .

Pada Gambar 3.2 diperlihatkan potret fase dengan  $\Delta t = 0.2$  dan nilai awal yang sama. Dapat dilihat bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit tidak stabil karena solusi tidak konvergen menuju titik tersebut. Hasil simulasi numerik yang ditunjukkan mendukung hasil analisis bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit tidak stabil untuk  $\Delta t > 0.17$ .



**Gambar 3.2** Potret fase titik kesetimbangan bebas penyakit untuk  $R_0 < 1$  dan  $\Delta t = 0.2$ .

### 3.4.2 Titik Kesetimbangan Epidemik dengan Kondisi $D < 0$

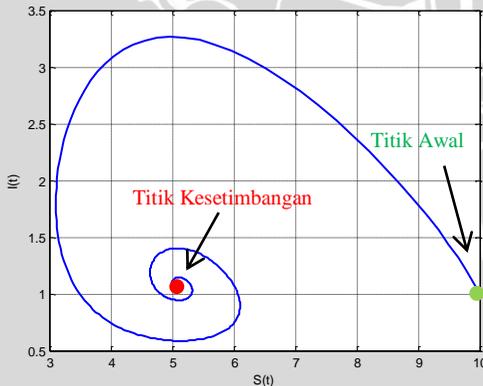
Digunakan nilai  $\alpha = 5$ ,  $\beta = 1$ ,  $\delta = 6$ ,  $\mu = 0.1$ , dan  $n = 100$ . Nilai parameter tersebut memenuhi syarat kestabilan  $R_0 = 11.76 > 1$ , serta nilai  $S_1 = 5.1$  dan  $I_1 = 1.08$ . Berdasarkan pembahasan sebelumnya, ketika  $R_0 > 1$  dan  $\Delta t < \frac{\beta\delta}{(\mu+\alpha)(\beta\delta-\mu(\mu+\alpha))}$  mengakibatkan titik kesetimbangan epidemik  $E_1 = \left(\frac{\mu+\alpha}{\beta}, \frac{\delta}{\mu+\alpha} - \frac{\mu}{\beta}\right)$  stabil asimtotik. Sehingga dicari nilai  $D$  sebagai berikut

$$D = 4 \left(\frac{\beta\delta}{\mu+\alpha}\right)^2 - 16(\beta\delta - \mu(\mu + \alpha)) = -82.3037 < 0.$$

Diperoleh  $D < 0$  dan nilai  $\Delta t$  yang harus diambil agar  $E_1$  stabil adalah

$$\Delta t < \frac{\beta\delta}{(\mu + \alpha)(\beta\delta - \mu(\mu + \alpha))} = 0.2143.$$

Potret fase pada Gambar 3.3 dengan  $\Delta t = 0.02$  dan nilai awal  $(S_0, I_0) = (10, 1)$ , menunjukkan bahwa titik kesetimbangan epidemik bersifat stabil asimtotik. Hasil simulasi numerik mendukung hasil analisis bahwa titik kesetimbangan epidemik stabil asimtotik untuk  $R_0 > 1$  dan  $\Delta t < 0.2143$ .



**Gambar 3.3** Potret fase titik kesetimbangan epidemik untuk  $R_0 > 1$ ,  $D < 1$  dan  $\Delta t = 0.02$

Dengan nilai parameter dan nilai awal yang sama dengan nilai parameter pada simulasi sebelumnya. Berdasarkan Gambar 3.4 diperlihatkan nilai  $\Delta t = 0.3$ , titik kesetimbangan epidemik tidak stabil karena solusi tidak konvergen menuju titik kesetimbangan epidemik  $E_1 = (5.1, 1.08)$ . Hasil simulasi numerik mendukung hasil analisis bahwa titik kesetimbangan epidemik tidak stabil untuk  $\Delta t > 0.2143$ .



**Gambar 3.4** Potret fase titik kesetimbangan epidemik untuk  $R_0 > 1$ ,  $D < 1$  dan  $\Delta t = 0.3$

### 3.4.3 Titik Kesetimbangan Epidemik dengan Kondisi $D > 0$

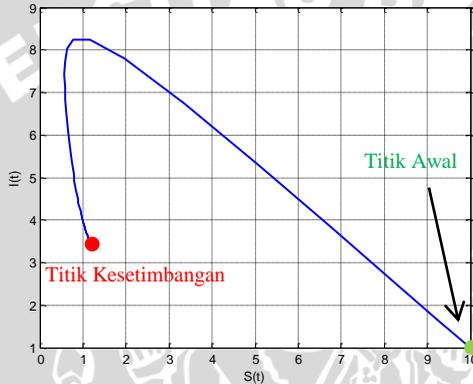
Digunakan nilai  $\alpha = 6.5$ ,  $\beta = 10$ ,  $\delta = 46.5$ ,  $\mu = 5$ , untuk  $n = 100$  dengan parameter tersebut diperoleh nilai  $R_0 = 11.76 > 1$  dan  $E_1 = (1.15 ; 3.53)$ . Berdasarkan pembahasan sebelumnya, ketika  $R_0 > 1$  dan  $\Delta t < \min\left(\Delta t_1, \frac{\beta\delta}{(\mu+\alpha)(\beta\delta-\mu(\mu+\alpha))}\right)$ , titik kesetimbangan epidemik  $E_1$  stabil asimtotik. Sehingga dicari nilai  $D$  sebagai berikut

$$D = 4\left(\frac{\beta\delta}{\mu+\alpha}\right)^2 - 16(\beta\delta - \mu(\mu + \alpha)) = 0.5198 > 0.$$

Diperoleh  $D > 0$  dan nilai  $\Delta t$  yang harus diambil agar  $E_1$  stabil adalah

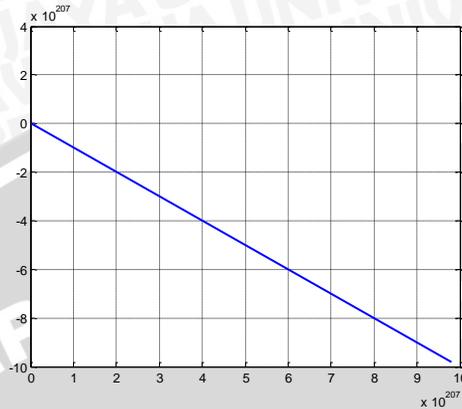
$$\Delta t < \min\left(\Delta t_1, \frac{\beta\delta}{(\mu+\alpha)(\beta\delta-\mu(\mu+\alpha))}\right) = \min(0.0984; 0.0993) = 0.0984$$

Berdasarkan Gambar 3.5 untuk  $\Delta t = 0.033$ , solusi dari sistem dengan nilai awal  $(S_0, I_0) = (10, 1)$  konvergen menuju ke titik kesetimbangan epidemik  $E_1(1.15 ; 3.53)$  dan stabil asimtotik. Hasil simulasi numerik yang ditunjukkan mendukung hasil analisis bahwa titik kesetimbangan epidemik stabil untuk  $R_0 > 1$  dan  $\Delta t < 0.0984$ .



**Gambar 3.5** Potret fase titik kesetimbangan epidemik untuk  $R_0 > 1$ ,  $D > 1$  dan  $\Delta t = 0.033$

Dari Gambar 3.6 dapat dilihat bahwa untuk  $\Delta t$  yang cukup besar, yaitu  $\Delta t = 0.3$  dan nilai parameter yang sama, bahwa titik kesetimbangan epidemik tidak stabil karena solusi tidak konvergen menuju titik epidemik  $E_1(1.15 ; 3.53)$ . Hasil simulasi numerik yang ditunjukkan mendukung hasil analisis bahwa titik kesetimbangan epidemik tidak stabil untuk  $\Delta t > 0.0984$ .



**Gambar 3.6** Potret fase titik kesetimbangan epidemik untuk  $R_0 > 1$ ,  $D > 1$  dan  $\Delta t = 0.1$

Berdasarkan simulasi sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa dari Gambar 3.1, Gambar 3.3 dan Gambar 3.5, dapat dilihat bahwa titik kesetimbangan stabil dan semua solusi bernilai positif untuk  $\Delta t$  yang cukup kecil. Sedangkan, dari Gambar 3.2, Gambar 3.4, dan Gambar 3.6, dapat dilihat bahwa titik kesetimbangan tidak stabil dan semua solusi bernilai negatif untuk  $\Delta t$  yang cukup besar.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## BAB IV KESIMPULAN

### 4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan pada bab sebelumnya dapat disimpulkan bahwa:

1. Diskritisasi persamaan (2.14) menggunakan metode Euler memberikan hasil sebagai berikut.

$$\begin{aligned}S_{n+1} &= \Delta t \delta - \Delta t \beta S_n I_n - \Delta t \mu S_n + S_n \\I_{n+1} &= \Delta t \beta S_n I_n - \Delta t \mu I_n - \Delta t \alpha I_n + I_n\end{aligned}$$

2. Persamaan SIR diskrit mempunyai dua titik kesetimbangan yang konsisten dengan titik kesetimbangan persamaan diferensial SIR. Kestabilan titik-titik kesetimbangan tak-trivial dari persamaan SIR diskrit tidak konsisten dengan persamaan diferensial SIR, karena masih bergantung pada nilai ukuran langkah komputasi.

### 4.2 Saran

Pada skripsi ini evaluasi metode Euler hanya diselidiki konsisten titik kesetimbangan dan kestabilan titik kesetimbangan pada SIR model diskrit. Untuk penelitian berikutnya disarankan menyelidiki kepositifan solusi yang diperoleh dari diskritisasi Euler.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## DAFTAR PUSTAKA

- Birkhoff, G dan G.C. Rota. 1989. *Ordinary differential equation*. Canada: John Willey & Sons Inc.
- Boyce, W.E. dan R.C. DiPrima. 2005. *Elementary differential equations and boundary value problems*. Eight edition, John Willey & Sons, Inc. United State of America.
- Edwards, C.H. dan D.E. Penney. 2001, *Differential equation and linear algebra*. Prentice Hall Inc. New Jersey.
- Elaydi, S. 2005. *An introduction to difference equations*. Third edition, Springer. New York.
- Mickens, R.E. 2000. *Applications of nonstandard methods for initial value problems*, World Scientific. Singapore.
- Robinson, R.C. 2004. *An introduction to dynamical systems continuous and discrete*. Prentice Hall Education. USA.



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## LAMPIRAN

**Lampiran 1.** Listing program menggunakan matlab untuk mencari solusi numerik Model SIR.

```
clc;
clear all;
dt=0.1;
t=0:dt:1000;
n=length(t)-1;
miu=0.016;
delta=0.015;
alpha=0.1;
beta=0.001;
a1=beta*delta
a2=miu*(miu+alpha)
r0=a1/a2
st=delta/miu
% st2=(miu+alpha)/beta
% it2=(delta/(miu+alpha))-miu/beta
S(1)=100;
I(1)=10;
% S1(1)=40;
% I1(1)=7;
% S2(1)=90;
% I2(1)=3;
for i=1:n
    S(i+1)=dt*delta-dt*beta*S(i)*I(i)-
dt*miu*S(i)+S(i);
    I(i+1)=dt*beta*S(i)*I(i)-dt*miu*I(i)-
dt*alpha*I(i)+I(i);
    % S1(i+1)=dt*delta-dt*beta*S1(i)*I1(i)-
dt*miu*S1(i)+S1(i);
    % I1(i+1)=dt*beta*S1(i)*I1(i)-dt*miu*I1(i)-
dt*alpha*I1(i)+I1(i);
    % S2(i+1)=dt*delta-dt*beta*S2(i)*I2(i)-
dt*miu*S2(i)+S2(i);
    % I2(i+1)=dt*beta*S2(i)*I2(i)-dt*miu*I2(i)-
dt*alpha*I2(i)+I2(i);
end;
```

```
% S(i)
% I(i)
figure(1);
plot(t,S,'b',t,I,'r','LineWidth',2);
xlabel('waktu/iterasi');
ylabel('nilai S(t)/I(t)');
legend('S(t)','I(t)');
grid on;
figure(2);
plot(S,I,'b','LineWidth',2);
xlabel('S(t)');
ylabel('I(t)');
grid on;
```

