EFEK ALLEE PADA MODEL PREDATOR PREY DISKRIT

SKRIPSI

S BRAWARA WALL

oleh

ARISTIYAH PRAMUDITA ISNIANA 0810940027-94



PROGRAM STUDI MATEMATIKA JURUSAN MATEMATIKA FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM UNIVERSITAS BRAWIJAYA MALANG 2012

EFEK ALLEE PADA MODEL PREDATOR PREY DISKRIT

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh
ARISTIYAH PRAMUDITA ISNIANA
0810940027-94



PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2012



LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

EFEK ALLEE PADA MODEL PREDATOR PREY DISKRIT

oleh ARISTIYAH PRAMUDITA ISNIANA 0810940027-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji pada tanggal 6 Agustus 2012 dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Dosen Pembimbing I

Dosen Pembimbing II

<u>Dr. Agus Suryanto., M.Sc.</u> NIP. 196908071994121001 <u>Drs. M. Muslikh, M.Si.</u> NIP. 195910311989121001

Mengetahui, Ketua Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

> Dr. Abdul Rouf A., M.Sc. NIP. 196709071992031001

ERSITAS BRAWIUM iv

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

: Aristiyah Pramudita Isniana Nama

NIM : 0810940027 Jurusan : Matematika

Penulis skripsi berjudul : Efek Allee Pada Model Predator Prev

Diskrit

dengan ini menyatakan bahwa

1. skripsi ini adalah benar-benar karya sava sendiri dan bukan hasil plagiat dari karya orang lain. Karya-karya yang tercantum dalam Daftar Pustaka skripsi ini semata-mata digunakan sebagai acuan/referensi,

2. apabila di kemudian hari diketahui bahwa isi skripsi saya merupakan hasil plagiat, maka sava bersedia menanggung akibat hukum dari keadaan tersebut.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 6 Agustus 2012 vang menyatakan,

> (Aristivah P I) NIM. 0810940027

ERSITAS BRAWNURLA vi

EFEK ALLEE PADA MODEL PREDATOR PREY DISKRIT

ABSTRAK

BRAM

Pada skripsi ini dibahas kestabilan model predator prey diskrit dengan dan tanpa efek Allee. Kedua model dianalisis sehingga diperoleh kondisi kestabilan lokal dari titik kesetimbangan model. Masing-masing model mempunyai tiga titik kesetimbangan yaitu E_1 dan E_2 yang bersifat tidak stabil dan E_3 yang bersifat stabil dengan syarat kondisi tertentu. Analisis kestabilan diilustrasikan dengan melakukan simulasi numerik untuk menguji hasil analisis yang telah diperoleh pada model dengan dan tanpa efek Allee. Untuk beberapa nilai parameter yang diperlukan mengubah kondisi kestabilan, dari tidak stabil menjadi stabil di bawah pengaruh efek Allee pada populasi prey.

Kata kunci: analisis kestabilan, efek Allee, model predator prey

ERSITAS BRAWING viii

ALLEE EFFECT IN A DISCRETE PREDATOR-PREY MODEL

ABSTRACT B

In this paper, we study the stability of a discrete predator-prey model with and without Allee effect. Both models are analyzed to obtain the local stability conditions of their equilibrium points. Each model has three equilibrium points, namely E_1 and E_2 which are unstable and E_3 is conditionally stable. The stability of Allee effect will also be illustrated by numerical simulations to test the analytical results. For some fixed parameter values satisfying the necessary conditions, we show that the corresponding equilibrium point moves from instability to stability under the Allee effect on prey population.

Keywords: stability analysis, Allee effect, predator prey model



KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan ridho-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul *Efek Allee Pada Model Predator Prey*. Skripsi ini disusun sebagai syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan serta motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada

- 1. Dr. Agus Suryanto, M.Sc. selaku pembimbing I dan Drs. M. Muslikh, M.Si. selaku pembimbing II atas segala bimbingan, motivasi, saran, dan kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini,
- 2. Drs. Marsudi, M.S. selaku dosen penguji atas segala saran yang diberikan untuk perbaikan dalam penulisan skripsi ini,
- 3. Dr. Abdul Rouf A., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika dan Dr. Sobri Abusini, M.T. selaku Ketua Program Studi Matematika,
- 4. seluruh dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
- 5. mama, papa, adik dan semua anggota keluarga besarku atas segala doa dan motivasi yang diberikan selama ini.
- 6. farda, kiki, joy, dewi, tiwi, gandes, mbak sur, muhid dan temanteman Math A '08 atas semua doa, motivasi dan bantuannya.
- 7. semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini terdapat banyak kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran melalui email <u>risty rist@yahoo.com</u>. Semoga skripsi ini bermanfaat bagi semua pihak.

Malang, 24 Juli 2012

Penulis

ERSITAS BRAWIUM xii

DAFTAR ISI

Н	alaman
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	iii
LEMBAR PERNYATAAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
ABSTRACTKATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR LAMPIRAN.	xvii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan	2
BAB II TINJAUAN PUSTAKA.	3
2.1 Sistem Dinamik	3
2.2 Sistem Otonomus	3
2.3 Sistem Dinamik Diskrit	4
2.3.1 Sistem Dinamik Diskrit Tak-Linear	4
2.3.2 Perilaku Pendekatan Solusi Persamaan Beda	6
2.4 Metode Beda Hingga Standar	7
2.4 Metode Beda Hingga Standar2.5 Model Predator Prey2.6 Fungsi Respon	10
2.6 Fungsi Respon	10
2.7 Model Logistik	11
2.8 EIEK Allee	13
BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN	15
3.1 Diskritisasi Model	15
3.1.1 Model predator prey tanpa efek Allee	15
3.1.2 Model predator prey dengan efek Allee	16
3.2 Titik Kesetimbangan	17
3.2.1 Model predator prey tanpa efek Allee	17
3.2.2 Model predator prey dengan efek Allee	18

3.3 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan	19
3.3.1 Model predator prey tanpa efek Allee	19
3.3.2 Model predator prey dengan efek Allee	24
3.4 Simulasi Numerik	29
3.4.1 Model predator prey tanpa efek Allee	29
3.4.2 Model predator prey dengan efek Allee	31
3.5 Interpretasi Hasil	34
BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN	37
DAFTAR PUSTAKA	39
LAMPIRAN	41

DAFTAR GAMBAR

	Ha	laman
Gambar 3.1	Potret fase model (3.3) untuk $r = 1.4$	30
Gambar 3.2	Potret fase model (3.3) untuk $r = 2.2 \dots$. 31
Gambar 3.3	Potret fase model (3.5) untuk $r = 1.4$. 32
Gambar 3.4	Potret fase model (3.5) untuk $r = 2.2 \dots$. 33
Gambar 3.5	Potret fase model (3.5) untuk $r = 2.66$. 34



ERSITAS BRAWIUPLE xvi

DAFTAR LAMPIRAN

	Ha	laman
Lampiran 1	Penyederhanaan matriks $J(N_u^*, P_u^*)$	41
Lampiran 2	Perhitungan pertidaksamaan (3.12)	45
	Program model predator prey tanpa efek Allee	
	Program model predator prey dengan efek Allee	
		49

ERSITAS BRAWIUM xviii

ERSITAS BRAWIUPLE xix

ERSITAS BRAWIUPLE XX

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Model dinamika populasi merupakan model matematika yang menggambarkan peristiwa perubahan terjadi pada suatu populasi seperti pertumbuhan. Salah satu contoh dari model ini adalah model pertumbuhan logistik yaitu model pertumbuhan yang memperhitungkan faktor logistik berupa ketersediaan makanan dan ruang hidup. Pada dasarnya, pertumbuhan suatu makhluk hidup merupakan proses yang berlangsung secara diskrit, yakni pengukurannya dilakukan setiap selang waktu tertentu seperti tiap satu minggu, satu bulan, atau satu tahun.

Suatu pertumbuhan populasi juga dipengaruhi oleh sistem dinamik. Salah satu model yang merupakan sistem dinamik adalah model interaksi populasi yakni interaksi antara dua spesies atau lebih, interaksi ini dapat berbentuk predasi, contohnya pada model predator prey. Model tersebut telah menjadi minat besar karena mempunyai peran penting pada dinamika populasi. Berbagai teori dan eksperimen telah dilakukan untuk menyelidiki kestabilan model predator prey, tetapi tidak banyak yang mempelajari tentang analisis kestabilan model predator prey mengalami efek Allee.

Efek Allee merupakan suatu fenomena dalam Biologi, hubungan positif antara kepadatan populasi dan laju pertumbuhan. Efek ini mengurangi laju pertumbuhan populasi ketika kepadatan populasi rendah sehingga individu-individu sukar untuk berinteraksi. Penyebab utamanya adalah kesulitan dalam menemukan pasangan antar individu dari suatu spesies dengan kepadatan populasi rendah. Efek Allee dapat berkurang apabila diperoleh populasi yang lebih besar (Celik, 2009).

Efek Allee pada dinamika populasi dipelajari dalam model kontinu dan diskrit, namun pengamatan tentang dinamika populasi lebih tepat menggunakan model diskrit. Model diskrit dapat memberikan model komputasi yang lebih efisien untuk simulasi numerik. Efek Allee sangat berpengaruh pada dinamika populasi, oleh karena itu pada skripsi ini dibahas analisis kestabilan model

predator prey diskrit dengan dan tanpa efek Allee yang hanya terjadi pada populasi prey.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, pokok permasalahan dalam skripsi ini adalah

- 1. bagaimana bentuk diskritisasi model predator prey dengan dan tanpa efek Allee menggunakan metode beda hingga standar,
- 2. bagaimana analisis kestabilan titik kesetimbangan model dengan dan tanpa efek Allee,
- 3. bagaimana simulasi numerik model dengan dan tanpa efek Alle.

1.3 Tujuan

Tujuan yang ingin dicapai dalam skripsi ini adalah

- 1. membentuk diskritisasi model predator prey dengan dan tanpa efek Allee menggunakan metode beda hingga standar,
- 2. menganalisis kestabilan titik kesetimbangan model dengan dan tanpa efek Allee,
- 3. mensimulasikan model dengan dan tanpa efek Allee secara numerik.



BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Sistem Dinamik

Sistem dinamik merupakan suatu keadaan yang dipengaruhi oleh waktu (t). Dalam penerapannya, terdapat dua jenis sistem dinamik, yaitu sistem dinamik diskrit ($t \in \mathbb{Z}$ atau \mathbb{N}) dan sistem dinamik kontinu ($t \in \mathbb{R}$). Bentuk sistem dinamik diskrit dinyatakan sebagai persamaan beda, yaitu

$$x_{t+1} = f(x_t), t \in \mathbb{Z}$$
 atau N.

Apabila t kontinu, bentuk sistem dinamiknya dinyatakan sebagai sistem persamaan diferensial, yaitu

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

(Arrowsmith dan Place, 1990).

geometri, sistem dinamik kontinu menggambarkan pergerakan titik-titik di bidang fase sepanjang kurva penyelesaian sistem persamaan diferensialnya (Perko, 1996).

2.2 Sistem Otonomus

Suatu sistem persamaan diferensial yang tidak bergantung secara eksplisit terhadap variabel bebas t, yaitu

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y),$$

dengan f dan g merupakan fungsi bernilai riil disebut sistem otonomus (Cronin, 1994).

2.3 Sistem Dinamik Diskrit

Fenomena-fenomena yang berkaitan dengan waktu yang berjalan secara diskrit digambarkan dengan persamaan beda. Sebagai contoh, jika populasi tertentu berkembang secara diskrit, maka jumlah populasi ke-(n+1) merupakan fungsi dari populasi ke-n. Jika terdapat interaksi antara dua spesies, maka populasi keduanya pada waktu ke-(n+1) dapat ditulis dalam bentuk sistem persamaan beda sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= f(x_n, y_n) \\
y_{n+1} &= g(x_n, y_n),
\end{aligned} (2.1)$$

di mana f dan g disebut fungsi pembangkit sistem. Jika f dan g bergantung pada parameter a, maka fungsi pembangkitnya dinyatakan sebagai f(a, x, y) dan g(a, x, y) (Elaydi, 2005).

2.3.1 Sistem Dinamik Diskrit Tak-Linear

Titik (x^*, y^*) disebut titik kesetimbangan persamaan (2.1) jika $f(x^*, y^*) = x^*$ dan $g(x^*, y^*) = x^*$, di mana f dan g adalah fungsi pembangkit sistem.

Jika f dan g pada persamaan (2.1) memuat perkalian antara variabel tak bebas, maka sistem (2.1) disebut sistem dinamik diskrit tak linear. Misalkan titik (x^*, y^*) adalah titik kesetimbangan sistem tak linear, untuk mengetahui jenis kestabilan titik kesetimbangan tersebut dapat dilakukan dengan menganalisis sistem hasil linearisasi. Proses linearisasi sistem tak linear dilakukan dengan melakukan ekspansi Taylor terhadap masing-masing fungsi f dan g yaitu

$$f(x_n, y_n) = f(x^*, y^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x_n} (x_n - x^*)$$

$$+ \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y_n} (y_n - y^*) + \eta_1(x_n, y_n)$$

$$g(x_n, y_n) = g(x^*, y^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x_n} (x_n - x^*)$$

$$+ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y_n} (y_n - y^*) + \eta_2(x_n, y_n)$$

di mana $\eta_1(x_n, y_n)$ dan $\eta_2(x_n, y_n)$ adalah suku sisa, yang memenuhi

$$\eta_1(x_n, y_n)/[(x_n - x^*)^2 + (y_n - y^*)^2]^{1/2} \to 0$$
 dan

 $\eta_2(x_n,y_n)/[(x_n-x^*)^2+(y_n-y^*)^2]^{1/2}\to 0$ untuk $(x_n,y_n)\to (x^*,y^*)$. Oleh karena itu, $\eta_1(x_n,y_n)$ dan $\eta_2(x_n,y_n)$ dapat diabaikan, karena (x^*,y^*) adalah titik kesetimbangan, maka sistem (2.1) dapat didekati dengan

$$x_{n+1} = x^* + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x_n} (x_n - x^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y_n} (y_n - y^*)$$

$$y_{n+1} = y^* + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x_n} (x_n - x^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y_n} (y_n - y^*)$$

atau

$$x_{n+1} - x^* = \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x_n} (x_n - x^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y_n} (y_n - y^*)$$

$$y_{n+1} - y^* = \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x_n} (x_n - x^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y_n} (y_n - y^*)$$
(2.2)

dengan memisalkan $u_n = x_n - x^*$ dan $v_n = y_n - y^*$, maka sistem (2.2) menjadi

$$u_{n+1} = \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x_n} u_n + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y_n} v_n$$
$$v_{n+1} = \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x_n} u_n + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y_n} v_n$$

atau dalam bentuk matriks

$$\overrightarrow{w}_{n+1} = J(x^*, y^*) \overrightarrow{w}_n$$
,
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} \end{bmatrix}$$

dengan $\vec{w}_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}$ dan $J(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x_n} & \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y_n} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x_n} & \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y_n} \end{bmatrix}$ disebut

matriks Jacobi

(Elaydi, 2005).

2.3.2 Perilaku Pendekatan Solusi Persamaan Beda

Perhatikan persamaan beda orde k

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \dots + p_k y(n) = 0,$$
 (2.3)

dengan persamaan karakteristik yang berbentuk

$$\lambda^{n+k} + p_1 \lambda^{n+k-1} + \dots + p_k \lambda^n = 0.$$

Jika λ_i , i = 1, 2, ..., k adalah akar-akar persamaan karakteristik untuk persamaan beda (2.3), maka berlaku definisi berikut.

Definisi 2.1

Semua solusi persamaan (2.3) konvergen menuju 0 (stabil asimtotik) jika dan hanya jika

maks
$$\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, ..., |\lambda_k|\} < 1$$

(Elaydi, 2005).

Teorema 2.2

Persamaan kuadrat $f(\lambda) = \lambda^2 - p_1 \lambda + p_2 = 0$ memiliki dua akar yang memenuhi $|\lambda_i| < 1$, i=1,2 jika dan hanya jika kondisi berikut dipenuhi

$$1.f(1) = 1 - p_1 + p_2 > 0$$

$$2.f(-1) = 1 + p_1 + p_2 > 0$$

$$3.f(0) = p_2 < 1.$$

Sebagai contoh dimisalkan matriks Jacobi suatu sistem yang dilinierkan adalah

$$J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

maka nilai eigen matriks Jacobi J adalah akar-akar persamaan karakteristik

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$

atau

$$\lambda^2 - p_1 \lambda + p_2 = 0,$$

dengan p_1 = trace J dan p_2 = det J, maka menurut Definisi 2.1 dan Teorema 2.2 titik tetap sistem (2.3) stabil asimtotik jika dan hanya jika

$$1 - p_1 + p_2 > 0, 1 + p_1 + p_2 > 0$$
, dan $1 - p_2 > 0$ (Elaydi, 2005).

2.4 Metode Beda Hingga Standar

Persamaan diferensial dapat didekati dengan metode beda hingga, yaitu dilakukan pendekatan turunan pertama dengan beda maju, beda pusat, atau beda mundur. Pendekatan turunan ke dua dapat menggunakan beda pusat. Metode beda hingga standar yang sering digunakan untuk pendekatan turunan pertama adalah Metode Euler.

Perhatikan ekspansi deret Taylor x(t) pada titik t_n berikut di mana h > 0

$$x(t_n + h) = x(t_n) + h \frac{dx}{dt} \Big|_{t_n} + \frac{h^2 d^2 x}{2! dt^2} \Big|_{t_n} + \frac{h^3 d^3 x}{3! dt^3} \Big|_{t_n} + \cdots$$
 (2.4)

$$x(t_n - h) = x(t_n) - h \frac{dx}{dt} \Big|_{\epsilon t_n} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2x}{dt^2} \Big|_{t_n} - \frac{h^3}{3!} \frac{d^3x}{dt^3} \Big|_{t_n} + \dots$$
 (2.5)

Berdasarkan persamaan (2.4) diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}\Big|_{t_n} &= \frac{x(t_n + h) - x(t_n)}{h} - \frac{h}{2!} \frac{d^2x}{dt^2}\Big|_{t_n} - \frac{h^2}{3!} \frac{d^3x}{dt^3}\Big|_{t_n} + \cdots \\ \frac{dx}{dt}\Big|_{t_n} &= \frac{x(t_n + h) - x(t_n)}{h} + O(h), \end{aligned}$$

di mana

$$O(h) = \frac{h^2}{2!} \frac{d^2 x}{dt^2} \bigg|_{t_n} + \frac{h^3}{3!} \frac{d^3 x}{dt^3} \bigg|_{t_n} + \cdots$$

O(h) merupakan suku sisa sehingga dapat diabaikan. Oleh karena itu, pendekatan turunan pertama dengan beda maju fungsi x adalah

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_n} \approx \frac{x(t_n + h) - x(t_n)}{h}.$$

Jika dituliskan $x_n = x(t_n)$ dan $x_{n+1} = x(t_n + h)$, maka aproksimasi orde pertama dengan beda maju dapat dinyatakan sebagai

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_n} \approx \frac{x_{n+1} - x_n}{h}.$$

Berdasarkan persamaan (2.5) diperoleh

$$\frac{dx}{dt}\Big|_{t_n} = \frac{x(t_n) - x(t_n - h)}{h} + \frac{h}{2!} \frac{d^2x}{dt^2}\Big|_{t_n} - \frac{h^2}{3!} \frac{d^3x}{dt^3}\Big|_{t_n} + \cdots
\frac{dx}{dt}\Big|_{t_n} = \frac{x(t_n) - x(t_n - h)}{h} + O(h).$$

Oleh karena itu, pendekatan turunan pertama dengan beda mundur fungsi x adalah

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_n} \approx \frac{x(t_n) - x(t_n - h)}{h}.$$

Jika dituliskan $x_n = x(t_n)$ dan $x_{n-1} = x(t_n - h)$, maka aproksimasi orde pertama dengan beda mundur dapat dinyatakan sebagai

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_n} \approx \frac{x_n - x_{n-1}}{h}.$$

Beda pusat didekati dengan operasi pengurangan persamaan (2.4) dengan persamaan (2.5) diperoleh

$$x(t_n + h) - x(t_n - h) = 2h \frac{dx}{dt}\Big|_{t_n} + 2\frac{h^3}{3!} \frac{d^3x}{dt^3}\Big|_{t_n} + \cdots,$$

sehingga

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_n} = \frac{x(t_n + h) - x(t_n - h)}{2h} - \frac{h^2}{3!} \frac{d^3x}{dt^3} \right|_{t_n} + \cdots$$

$$= \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2h} + O(h^2).$$

Jika dituliskan $x_{n-1} = x(t_n - h)$ dan $x_{n+1} = x(t_n + h)$, maka aproksimasi orde pertama dengan beda pusat dapat dinyatakan sebagai

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_n} \approx \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2h}$$

(Banagaaya, 2008).

Metode Euler maju adalah salah satu skema diskrit paling sederhana yang menggunakan pendekatan beda maju. Pada metode ini turunan pertama dx/dt digantikan oleh $[x(t_n + h) - x(t_n)]/h$ di mana h adalah ukuran langkah (Erjaee dkk, 2001).

Pada sistem persamaan diferensial

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

ruas kiri digantikan oleh pendekatan dengan beda maju, yaitu

$$\frac{x(t_n+h)-x(t_n)}{h} = f(x(t_n),y(t_n))$$

$$\frac{y(t_n+h)-y(t_n)}{h} = g(x(t_n),y(t_n)).$$

Sehingga diskritisasi dengan metode Euler dapat dituliskan dalam bentuk sederhana yaitu

$$x(t_n + h) = x(t_n) + hf(x(t_n), y(t_n))$$

$$y(t_n + h) = y(t_n) + hg(x(t_n), y(t_n))$$

atau

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n, y_n) = f(x_n, y_n, h)$$

 $y_{n+1} = y_n + hg(x_n, y_n) = g(x_n, y_n, h).$

2.5 Model Predator-Prey

Model predator prey pertama kali diperkenalkan oleh Lotka Volterra pada tahun 1928 dan dikenal sebagai model Lotka-Volterra. Diberikan model sebagai berikut.

$$\frac{dN}{dt} = N(a - bP)$$

$$\frac{dP}{dt} = P(cN - d),$$
adalah konstanta positif. $N(t)$ dan $P(t)$ berturut-

dengan a, b, c,dan d adalah konstanta positif. N(t)dan P(t) berturutturut menyatakan jumlah populasi prey dan predator. Suku aN menyatakan pertumbuhan populasi prey tanpa adanya predator. Suku -bNP dan cNP menyatakan interaksi spesies, di mana populasi prey berkurang sedangkan predator diuntungkan dengan kondisi ini. Suku -dP menyatakan punahnya predator karena tidak adanya prey (Perko,1996).

2.6 Fungsi Respon

Menurut Skalski dan Gilliam (2001), pemahaman hubungan antara predator dan prey merupakan dasar utama dalam mempelajari ilmu ekologi. Salah satu komponen penting dalam hubungan tersebut adalah laju predator memangsa prey. Laju memangsa per kapita predator terhadap prey atau sering disebut fungsi respon, memberikan dasar teori predator-prey.

Seiring dengan pengembangan penelitian terhadap model predator-prey, diperoleh bentuk umum

$$\frac{dx}{dt} = p(x) - aq(x, y)y$$

$$\frac{dy}{dt} = q(x, y)y - \mu y,$$
(2.7)

di mana q(x,y) menyatakan fungsi respon dan parameter a menyatakan efisiensi pemangsaan. Fungsi respon menjelaskan perpindahan energi yang terjadi pada tingkat pemangsa. Beberapa tipe dan bentuk fungsi respon yang telah dikembangkan terangkum dalam Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Tipe dan bentuk fungsi respon

Tipe	Bentuk Fungsi Respon $q(x,y)$
Holling tipe I	cx
Holling tipe II	$\frac{cx}{r+ex}$
Holling tipe III	$\frac{cx^2}{r + ex^2}$
Beddington-DeAngelis	$\frac{cx}{r + ex + y}$
Ratio-Dependent	$\frac{cx}{ex+y}$
Nicholson-Bailey	axe ^{-by}

2.7 Model Logistik

Salah satu model pertumbuhan populasi adalah model pertumbuhan logistik (*logistic growth models*). Pertumbuhan populasi yang berlangsung pada lingkungan yang tak terbatas dan tidak terdapat musuh alami dapat dimodelkan sebagai pertumbuhan populasi eksponensial

$$\frac{dN}{dt} = aN. (2.8)$$

Laju pertumbuhan populasi $\frac{dN}{dt}$, berbanding lurus dengan jumlah populasi N yang mempunyai rasio laju pertumbuhan a. Pada model (2.8), a konstan dan N variabel, ketika N bertambah dengan laju eksponensial, jumlah populasi pada waktu ke-t dapat dihitung dengan

$$N(t) = N_0 e^{at}$$

yang merupakan solusi persamaan (2.8) di mana N_0 adalah jumlah populasi awal. Jumlah populasi bertambah secara terus-menerus seiring dengan bertambahnya waktu (t). Hal tersebut tidak realistis, karena dalam keadaan sebenarnya, populasi dibatasi oleh sumber makanan dan ruang, akibatnya diperoleh model baru dimana model tersebut selain dikendalikan oleh faktor kelahiran dan kematian alami, juga dikendalikan oleh faktor-faktor lain yang terjadi ketika kepadatan populasi tinggi.

Pertumbuhan populasi dipengaruhi oleh kondisi lingkungan, kelahiran, kematian, perburuan, dan persaingan. Pada awal periode, sumber makanan berlimpah dan populasi kecil, akibatnya populasi makmur dan bertambah secara eksponensial. Selanjutnya, ketika jumlah populasi meningkat dan hampir mencapai kapasitas maksimum habitat (*K*), pertumbuhan populasi semakin lambat. Hal ini terjadi karena adanya faktor-faktor penghambat yang terkait dengan kepadatan. Sebagai contoh, rasio sumber makanan lebih kecil daripada rasio jumlah populasi merupakan salah satu penghambat pertumbuhan populasi, dimana semakin besar rasio jumlah populasi, maka hambatannya juga besar. Apabila pertumbuhan populasi telah mencapai kapasitas maksimum habitat, pertumbuhan populasi berhenti. Pada kondisi ini, terjadi kestabilan populasi. Berdasarkan uraian tersebut, pertumbuhan populasi dapat dimodelkan sebagai

$$\frac{\hat{d}N}{dt} = aN\left(\frac{k-\hat{N}}{k}\right), 0 \le \hat{N} \le k, a > 0$$
$$= aN - \frac{a}{k}N^2.$$

Jika masing-masing ruas dikalikan $\frac{1}{k}$, maka diperoleh persamaan

$$\frac{d\left(\frac{N}{k}\right)}{dt} = a\frac{N}{k} - a\frac{N}{k}\frac{N}{k}, 0 \le \frac{N}{k} \le \frac{k}{k}.$$

Dimisalkan
$$y = \frac{N}{k}$$
, sehingga terbentuk persamaan baru, yakni
$$\frac{dy}{dt} = ay(1-y), 0 \le y \le 1.$$
 (2.9)

Persamaan (2.9) disebut persamaan logistik kontinu.

2.8 Efek Allee

Efek Alle merupakan fenomena ekologi yang memiliki daya tarik cukup menarik dari ahli ekologi, berbagai mekanisme yang berkaitan dengan efek Allee telah dibahas secara keseluruhan. Pencetus dari fenomena tersebut adalah Clyde Warder Allee (1885-1955), zoologist Universitas Chicago dan ekologi hewan, khususnya pada kelompok perilaku hewan. Allee, seorang pengamat perilaku hewan, melihat bahwa kerjasama antar individu memiliki efek positif pada kelangsungan hidup. Penggambaran interaksi yang positif antara individu-individu di ukuran populasi rendah atau kepadatan dikenal dengan efek Allee dan interaksi ini penting untuk suatu kelangsungan hidup dan reproduksi suatu individu (Stephens et al,1999).

Sebuah hubungan positif antara kebugaran dan ukuran populasi dapat disebabkan oleh berbagai mekanisme yang mempengaruhi reproduksi dan kelangsungan hidup. Contohnya, keterbatasan pasangan dapat mengakibatkan kekacauan pada spesies yang bereproduksi secara seksual, karena reproduksi seksual membutuhkan kontak antara gamet jantan dan betina. Spesies yang paling mungkin terkena efek Allee adalah mereka yang pada awalnya memiliki populasi yang besar tetapi mengalami penurunan dalam waktu singkat, seperti karena fragmentasi habitat atau peristiwa bencana alam. Populasi tersebut akan lebih mungkin mengalami mekanisme yang mengurangi kebugaran di kepadatan rendah.

Efek Allee merupakan penurunan laju pertumbuhan penduduk di kepadatan rendah dapat dihasilkan oleh beberapa mekanisme, termasuk kesulitan dalam menemukan pasangan di kepadatan rendah. Contohnya seperti pada populasi alamiah dari kupu-kupu yang terancam punah, yaitu fritillary Glanville (Melitaea cinxia). Selain itu, penyebab lain terjadinya efek Allee adalah perkawinan sedarah (inbreeding) dan hilangnya heterozigositas (LOH) dalam sel, yakni hilangnya fungsi normal dari satu alel dari gen di mana alel lainnya sudah tidak aktif sehingga menyebabkan penurunan kebugaran, marsh yang terjadi pada gentian Gentiana pneumonanthe.



BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas analisis kestabilan model predator prey diskrit dengan dan tanpa efek Allee. Pembahasan pada skripsi ini adalah penentuan titik kesetimbangan dan penentuan jenis kestabilan titik kesetimbangan. Pada langkah terakhir dilakukan simulasi numerik model dengan dan tanpa efek Allee untuk mengilustrasikan hasil analisis yang telah diperoleh.

3.1 Diskritisasi Model

3.1.1 Model Predator Prey tanpa efek Allee

Model predator prey tanpa adanya efek Allee adalah

$$\frac{dN}{dt} = rN(1 - N) - aNP$$

$$\frac{dP}{dt} = aP(N - P),$$
(3.1)

di mana r dan a adalah konstanta positif. Kepadatan populasi prey dinyatakan dengan N dan kepadatan populasi predator P. Untuk tingkat pertumbuhan populasi prey tanpa adanya predator dinyatakan dengan rN(1-N) dan aNP merupakan interaksi antara predator dan prey sedangkan aP^2 menyatakan punahnya predator karena tidak adanya prey dan persaingan antar predator.

Model kontinu (3.1) didiskritisasi menggunakan metode Euler dan dihampiri dengan beda maju, yaitu

$$\frac{N(t+h)-N(t)}{h} = rN(t)(1-N(t)) - aN(t)P(t)$$

$$\frac{P(t+h)-P(t)}{h} = aP(t)(N(t)-P(t)),$$
(3.2)

dengan mengganti $N(t) = N_{j,} N(t+h) = N_{j+1}, P(t) = P_j$ dan $(t+h) = P_{j+1}$, bentuk eksplisit persamaan (3.2) adalah

$$N_{j+1} = N_j + h[rN_j(1 - N_j) - aN_jP_j]$$

$$P_{j+1} = P_j + h[aP_j(N_j - P_j)].$$

Jika dimisalkan h = 1 maka diperoleh model predator prey diskrit tanpa efek Allee sebagai berikut.

$$N_{j+1} = N_j + rN_j(1 - N_j) - aN_jP_j = f(N_j, P_j)$$

$$P_{j+1} = P_j + aP_j(N_j - P_j) = g(N_j, P_j).$$
(3.3)

3.1.2 Model Predator Prey dengan efek Allee

Model predator prey dengan adanya efek Allee yang berbentuk

$$\frac{dN}{dt} = rN(1-N)\frac{N}{u+N} - aNP$$

$$\frac{dP}{dt} = aP(N-P),$$
(3.4)

di mana N/(u+N) adalah fungsi Allee yang merupakan fungsi Holling tipe II dan u konstanta Allee dengan asumsi $0 < u < \frac{r}{a}$. Diskritisasi sistem (3.4) dengan menggunakan metode Euler, diperoleh sebagai berikut.

$$\frac{N(t+h)-N(t)}{h} = rN(t)\left(1-N(t)\right)\frac{N(t)}{u+N(t)} - aN(t)P(t)$$

$$\frac{P(t+h)-P(t)}{h} = aP(t)(N(t)-P(t)),$$

dengan mensubstitusikan $N(t) = N_{j}$, $N(t+h) = N_{j+1}$, $P(t) = P_{j}$ dan $P(t+h) = P_{j+1}$, sehingga dapat ditulis dalam bentuk

$$N_{j+1} = N_j + h \left[r N_j (1 - N_j) \frac{N_j}{u + N_j} - a N_j P_j \right]$$

$$P_{j+1} = P_j + h \left[a P_j (N_j - P_j) \right].$$

Dengan memisalkan h = 1, diperoleh sistem (3.5) sebagai berikut.

$$N_{j+1} = N_j + rN_j (1 - N_j) \frac{N_j}{u + N_j} - aN_j P_j = f(N_j, P_j)$$

$$P_{j+1} = P_j + aP_j (N_j - P_j) = g(N_j, P_j).$$
(3.5)

3.2 Titik Kesetimbangan

3.2.1 Model Predator Prey Diskrit tanpa efek Allee

Titik kesetimbangan sistem (3.3) diperoleh jika $f(N^*, P^*) = N^*$ dan $g(N^*, P^*) = P^*$, atau dapat ditulis dalam bentuk

$$N^* = N^* + rN^*(1 - N^*) - aN^*P^*$$

$$\Leftrightarrow rN^*(1 - N^*) - aN^*P^* = 0$$
(3.6)

dan

$$P^* = P^* + aP^*(N^* - P^*) \Leftrightarrow aP^*(N^* - P^*) = 0.$$

Dari persamaan (3.6) mempunyai solusi $P^* = 0$ atau $N^* = P^*$ sehingga terdapat 2 kasus, yakni

i. $P^* = 0$, disubstitusikan pada persamaan (3.6) maka diperoleh

$$N^*(r(1 - N^*)) = 0$$

$$N^* = 0 \lor N^* = 1$$

ii. $N^* = P^*$, disubstitusikan pada persamaan (3.6) sehingga diperoleh solusi

$$P^*(r(1-P^*) - aP^*) = 0$$

$$P^* = 0 \quad \forall P^* = \frac{r}{r+a}$$
si kaampat solusi taraahut

maka dari kombinasi keempat solusi tersebut, diperoleh titik-titik kesetimbangan yaitu $E_1 = (0,0), E_2 = (1,0), \text{ dan } E_3 = (N_0^*, P_0^*)$ di mana $N_0^* = P_0^* = \frac{r}{r+a}$.

3.2.2 Model Predator Prey Diskrit dengan Efek Allee

Titik kesetimbangan sistem (3.5) diperoleh dengan cara menyelesaikan persamaan berikut.

$$N^* = N^* + rN^*(1 - N^*) \frac{N^*}{u + N^*} - aN^*P^*$$

$$\Leftrightarrow rN^*(1 - N^*) \frac{N^*}{u + N^*} - aN^*P^* = 0$$
(3.7)

dan

$$P^* = P^* + aP^*(N^* - P^*) \Leftrightarrow aP^*(N^* - P^*) = 0.$$

Dari persamaan (3.7) menghasilkan $P^* = 0$ atau $N^* = P^*$, maka terdapat 2 kasus, yaitu

i. $P^* = 0$, disubstitusikan pada persamaan (3.7) diperoleh

$$N^* \left(r(1 - N^*) \frac{N^*}{u + N^*} \right) = 0$$
$$N^* = 0 \lor N^* = 1$$

ii. $N^* = P^*$, jika disubstitusikan pada persamaan (3.7) maka

$$P^* \left(r(1 - P^*) \frac{P^*}{u + P^*} - aP^* \right) = 0$$

$$P^* = 0 \lor r(1 - P^*) \frac{P^*}{u + P^*} - aP^* = 0$$

$$\frac{r(1 - P^*)P^* - aP^*(u + P^*)}{u + P^*} = 0$$

$$r(1 - P^*) - a(u + P^*) = 0$$

$$r - au = P^*(r + a)$$

$$\frac{r - ua}{r + a} = P^*$$

sehingga diperoleh tiga titik kesetimbangan yakni $E_1=(0,0), E_2=(1,0),$ dan $E_3=(N_u^*,P_u^*)$ di mana $N_u^*=P_u^*=\frac{r-ua}{r+a}$.

3.3 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan

3.3.1 Model Predator Prey Diskrit tanpa efek Allee

Hasil linearisasi sistem (3.3) adalah matriks Jacobi yang berbentuk

$$J = \begin{bmatrix} 1 + r - 2rN^* - aP^* & -aN^* \\ aP^* & 1 + aN^* - 2aP^* \end{bmatrix}.$$

Sistem dinamik diskrit bersifat stabil jika memenuhi $|\lambda_1| < 1$ dan $|\lambda_2| < 1$, di mana λ_1 dan λ_2 adalah nilai eigen matriks Jacobi. Masing-masing matriks Jacobi merupakan matriks segitiga bawah dan matriks segitiga atas, maka nilai eigen masing-masing titik kesetimbangan adalah entri-entri pada diagonal matriks tersebut. Oleh karena itu, diperoleh jenis kestabilan masing-masing titik kesetimbangan sebagai berikut.

1. $E_1 = (0,0)$

Matriks Jacobi sistem (3.3) di E_1 adalah

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 1 + r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen dari matriks Jacobi J(0,0) adalah $\lambda_1 = 1 + r$ dan $\lambda_2 = 1$, jelas bahwa $\lambda_1 > 0$ sehingga jenis kestabilan E_1 adalah tidak stabil.

2. $E_2 = (1,0)$

Matriks Jacobi di E_2 adalah

$$J(1,0) = \begin{bmatrix} 1-r & -a \\ 0 & 1+a \end{bmatrix}.$$

Dari matriks Jacobi J(1,0) diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = 1 - r$ dan $\lambda_2 = 1 + a$, jelas terlihat bahwa $\lambda_2 > 1$ sehingga jenis kestabilan E_2 adalah tidak stabil.

3.
$$E_3 = (N_o^*, P_o^*)$$
 di mana $N_o^* = P_o^* = \frac{r}{r+a}$

Matriks Jacobi untuk titik kesetimbangan $E_3 = (N_o^*, P_o^*)$ adalah

$$J(E_3) = J\left(\frac{r}{r+a}, \frac{r}{r+a}\right) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{r^2}{a+r} & -\frac{ar}{a+r} \\ \frac{ar}{a+r} & 1 - \frac{ar}{a+r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix},$$

di mana

di mana
$$J_{11} = 1 + r - 2rN_0^* - aP_0^* = 1 + r - 2r\left(\frac{r}{a+r}\right) - a\left(\frac{r}{a+r}\right)$$

$$= 1 + r - \frac{2r^2 + ar}{a+r}$$

$$= \frac{(1+r)(a+r) - 2r^2 - ar}{a+r}$$

$$= \frac{a+r+ar+r^2 - 2r^2 - ar}{a+r}$$

$$= 1 - \frac{r^2}{a+r}$$

$$J_{12} = -aN_0^* = -a\left(\frac{r}{a+r}\right) = -\frac{ar}{a+r}$$

$$J_{21} = aP_0^* = a\left(\frac{r}{a+r}\right) = \frac{ar}{a+r}$$

$$J_{22} = 1 + aN_0^* - 2P_0^* = 1 + a\left(\frac{r}{a+r}\right) - 2a\left(\frac{r}{a+r}\right)$$
$$= 1 + \frac{ar}{a+r} - \frac{2ar}{a+r} = 1 - \frac{ar}{a+r}.$$

Persamaan karakteristik dari matriks $I(E_3)$ adalah

$$f(\lambda) = \left(1 - \lambda - \frac{r^2}{a+r}\right) \left(1 - \lambda - \frac{ar}{a+r}\right) - \left(-\frac{ar}{a+r}\right) \left(\frac{ar}{a+r}\right) = 0.$$

Persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk

$$f(\lambda) = \lambda^2 - p_1 \lambda + p_2,$$

di mana

$$p_{1} = 1 - \frac{r^{2}}{a + r} + 1 - \frac{ar}{a + r}$$

$$= 2 - \frac{r^{2} + ar}{a + r}$$

$$= 2 - \frac{r(a + r)}{a + r}$$

$$= 2 - r$$

$$p_{2} = \left(1 - \frac{r^{2}}{a + r}\right)\left(1 - \frac{ar}{a + r}\right) - \left(-\frac{ar}{a + r}\right)\left(\frac{ar}{a + r}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{ar}{a + r} - \frac{r^{2}}{a + r} + \frac{ar^{3}}{(a + r)^{2}}\right) - \left(-\frac{a^{2}r^{2}}{(a + r)^{2}}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{ar + r^{2}}{a + r} + \frac{ar^{3}}{(a + r)^{2}}\right) + \frac{a^{2}r^{2}}{(a + r)^{2}}$$

$$= \left(1 - \frac{r(a + r)}{a + r} + \frac{ar^{3}}{(a + r)^{2}}\right) + \frac{a^{2}r^{2}}{(a + r)^{2}}$$

$$= 1 - r + \frac{ar^{3} + a^{2}r^{2}}{(a + r)^{2}}$$

$$= 1 - r + \frac{ar^{2}(a + r)}{(a + r)(a + r)}$$

$$= 1 - r + \frac{ar^{2}(a + r)}{a + r}$$

Berdasarkan Teorema 2.2, $f(\lambda) = \lambda^2 + (r-2)\lambda + 1 - r + \frac{ar^2}{a+r}$ memiliki dua akar yang memenuhi $|\lambda_1| < 1$ dan $|\lambda_2| < 1$, jika kondisi berikut dipenuhi

$$1.f(1) = 1 - p_1 + p_2 > 0$$

 $2.f(-1) = 1 + p_1 + p_2 > 0$
 $3.f(0) = p_2 < 1$.

Jika

$$f(1) = 1 - p_1 + p_2 = \frac{ar^2}{a+r}$$

maka f(1) bernilai positif, karena a, r > 0 sehingga diperoleh

$$f(1) = \frac{ar}{a+r} > 0$$

Selanjutnya ditunjukkan f(-1) juga bernilai positif, di mana

$$f(-1) = 4 - 2r + \frac{ar^2}{a+r}$$

$$= \frac{4(a+r) - 2r(a+r) + ar^2}{a+r}$$

$$= \frac{(a-2)r^2 + (-2a+4)r + 4a}{a+r}.$$

Karena a dan r selalu bernilai positif sehingga (a + r) > 0. f(-1) bernilai positif hanya ditentukan oleh

$$g(r) = (a-2)r^2 + (-2a+4)r + 4a$$
.

Untuk mengetahui fungsi g(r) bernilai positif ditunjukkan dengan menggunakan nilai diskriminan D < 0 dan a - 2 > 0. Diskriminan dari g(r) terdapat tiga kasus yakni

a) D = 0

$$(4-2a)^{2}-4(a-2)4a=0$$

$$16-16a+4a^{2}+32a-16a^{2}=0$$

$$-12a^{2}+16a+16=0.$$
(3.8)

Akar karakteristik dari persamaan (3.8) adalah

$$a_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4(-12)16}}{2(-12)}$$
$$= \frac{-16 \pm 32}{-24},$$

sehingga diperoleh $a_1 = -\frac{2}{3} \operatorname{dan} a_2 = 2$.

b) D < 0

$$D = (4 - 2a)^{2} - 4(a - 2)4a$$

$$= 16 - 16a + 4a^{2} + 32a - 16a^{2}$$

$$= -12a^{2} + 16a + 16$$

$$= -12\left(a^2 - \frac{4}{3}a - \frac{4}{3}\right)$$
$$= -12\left(\left(a - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{16}{9}\right).$$

D bernilai negatif jika

lai negatif jika
$$\left(a - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{16}{9} > 0$$

$$\left(a - \frac{2}{3}\right)^2 > \frac{16}{9}$$

$$a - \frac{2}{3} > \sqrt{\frac{16}{9}}$$

$$a - \frac{2}{3} > \frac{4}{3}$$

$$a > 2,$$

maka nilai a yang memenuhi a > 2.

c)
$$D > 0$$

$$-12a^2 + 16a + 16 > 0$$

sehingga nilai a yang memenuhi $-\frac{2}{3} < a < 2$.

Jadi g(r) selalu bernilai positif jika D < 0 dengan a > 2 maka ekuivalen dengan kondisi (-1). Dari penjabaran tersebut terbukti bahwa

$$f(-1) = 4 - 2r + \frac{ar^2}{a+r} > 0$$
$$\frac{ar}{a+r} > 2 - \frac{4}{r}.$$

Ditunjukkan pula kondisi $f(0) = 1 - p_2 > 0$, di mana $1 - p_2 = r + \frac{ar^2}{a + r}.$

$$1 - p_2 = r + \frac{ar^2}{a+r}.$$

Karena a, r > 0 sehingga terbukti bahwa f(0) bernilai positif, jika

$$f(0) = r + \frac{ar^2}{a+r} > 0$$
$$\frac{ar^2}{a+r} > -r$$

$$\frac{ar(r)}{\frac{a+r}{a+r}} > -r$$

$$\frac{ar}{\frac{a+r}{a+r}} > -1$$

$$\frac{ar}{a+r} < 1.$$
(3.9)

maka f(0) > 0 apabila memenuhi pertidaksamaan (3.9).

Berdasarkan kondisi f(1), f(-1) dan f(0) yang masingmasing bernilai positif sehingga sesuai dengan Definisi 2.1 dan Teorema 2.2, titik kesetimbangan $E_3(N_o^*, P_o^*)$ model predator prey diskrit persamaan (3.3) bersifat stabil asimtotik jika kondisi berikut dipenuhi

$$2 - \frac{4}{r} < \frac{ar}{a+r} < 1,$$

di mana 0 < r < 2.

3.3.2 Model Predator Prey Diskrit dengan Efek Allee

Matriks Jacobi sistem (3.5) pada titik kesetimbangan $E^* = (N^*, P^*)$ adalah

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{(2rN^* - 3r(N^*)^2)(u + N^*) - (r(N^*)^2 - r(N^*)^3)}{(u + N)^2} - aP^* & -aN^* \\ aP^* & 1 + aN^* - 2aP^* \end{bmatrix},$$

Analog dengan model predator prey tanpa efek Allee, karena masing-masing matriks Jacobi merupakan matriks segitiga atas, maka nilai eigen masing-masing titik kesetimbangan adalah entrientri pada diagonal matriks tersebut. Agar stabil disyaratkan bahwa $|\lambda_1| < 1$ dan $|\lambda_2| < 1$. Jenis kestabilan untuk masing-masing titik kesetimbangan adalah

$$1.E_1 = (0.0)$$

Matriks Jacobi di E_1 adalah

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen dari matriks Jacobi J(0,0) adalah $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ sehingga jelas bahwa jenis kestabilan E_1 adalah tidak stabil.

2. $E_2 = (1,0)$

Matriks Jacobi sistem (3.5) di E_2 adalah

$$J(1,0) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{(2r - 3r)(u+1)}{(u+1)^2} & -a \\ 0 & 1+a \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 - \frac{ru + r}{(u+1)^2} & -a \\ 0 & 1+a \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen dari matriks $J(E_2)$ adalah $\lambda_1 = 1 - \frac{ru+r}{(u+1)^2} \operatorname{dan} \lambda_2 = 1 + a$, jelas terlihat bahwa $\lambda_2 > 1$ sehingga jenis kestabilan E_2 adalah tidak stabil.

3.
$$E_3 = (N_u^*, P_u^*)$$
 di mana $N_u^* = P_u^* = \frac{r - ua}{a + r}$

Matriks Jacobi untuk titik kesetimbangan $E_3(N_u^*, P_u^*)$ sebagaimana perhitungan tercantum di Lampiran 1 adalah

$$J(E_3) = J\left(\frac{r - ua}{a + r}, \frac{r - ua}{a + r}\right) = \begin{bmatrix} 1 - \alpha_u N_u^* & -aN_u^* \\ aN_u^* & 1 - aN_u^* \end{bmatrix},$$

di mana

$$\alpha_u = \frac{rN_u^*}{u + N_u^*} - \frac{ru(1 - N_u^*)}{(u + N_u^*)^2} = \frac{r - ua}{u + 1} - \frac{ua(a + r)}{r(u + 1)}.$$

Persamaan karakteristik matriks Jacobi $I(E_3)$ adalah

$$f(\lambda) = (1 - \lambda - \alpha_u N_u^*)(1 - \lambda - aN_u^*) - (-aN_u^*)(aN_u^*) = 0.$$
 Persamaan di atas dapat ditulis sebagai

$$f(\lambda) = \lambda^2 - p_1 \lambda + p_2$$

di mana

$$p_{1} = (1 - \alpha_{u}N_{u}^{*}) + (1 - aN_{u}^{*})$$

$$= 2 - (a + \alpha_{u}) N_{u}^{*}$$

$$p_{2} = (1 - \alpha_{u}N_{u}^{*}) (1 - aN_{u}^{*}) - (-aN_{u}^{*}) (aN_{u}^{*})$$

$$= (1 - aN_{u}^{*} - \alpha_{u}N_{u}^{*} + a\alpha_{u}(N_{u}^{*})^{2}) + a^{2}N_{u}^{*2}$$

$$= 1 - (a + \alpha_{u})N_{u}^{*} + a\alpha_{u}(N_{u}^{*})^{2} + a^{2}(N_{u}^{*})^{2}$$

$$= 1 - (a + \alpha_{u})N_{u}^{*} + a(a + \alpha_{u})(N_{u}^{*})^{2}$$

yang menghasilkan persamaan karakteristik

$$f(\lambda) = \lambda^2 - (2 - (a + \alpha_u)N_u^*)\lambda + 1 - (a + \alpha_u)N_u^* + a(a + \alpha_u)(N_u^*)^2.$$

Berdasarkan Teorema 2.2, persamaan kuadrat $f(\lambda)$ memiliki dua ika ko. akar yang memenuhi $|\lambda_1| < 1$ dan $|\lambda_2| < 1$, jika kondisi berikut dipenuhi

$$1.f(1) = 1 - p_1 + p_2 > 0$$

$$2.f(-1) = 1 + p_1 + p_2 > 0$$

$$3.f(0) = p_2 < 1.$$

Jika

$$f(1) = 1 - p_1 + p_2 = a(a + \alpha_u)(N_u^*)^2$$

maka kondisi f(1) bernilai positif, yang ekuivalen dengan bentuk $a + \alpha_u > 0$. Oleh karena itu, akan dibuktikan $a + \alpha_u > 0$, dengan memisalkan $a + \alpha_u$ sebagai fungsi $\varphi(u)$ pada interval [0, r / a]sehingga diperoleh

$$\varphi(u) = a + \alpha_{u}$$

$$= \frac{r(1 - N_{u}^{*})}{u + N_{u}^{*}} + \frac{rN_{u}^{*}}{u + N_{u}^{*}} - \frac{ru(1 - N_{u}^{*})}{(u + N_{u}^{*})^{2}}$$

$$= \frac{r(1 - N_{u}^{*})(u + N_{u}^{*}) + rN_{u}^{*}(u + N_{u}^{*}) - ru(1 - N_{u}^{*})}{(u + N_{u}^{*})^{2}}$$

$$= \frac{r - rN_{u}^{*}(u + N_{u}^{*}) + rN_{u}^{*}(u + N_{u}^{*}) - ru(1 - N_{u}^{*})}{(u + N_{u}^{*})^{2}}$$

$$= \frac{r}{u + N_{u}^{*}} - \frac{ru(1 - N_{u}^{*})}{(u + N_{u}^{*})^{2}}$$

$$= \frac{r}{u + N_{u}^{*}} - \frac{ru(1 - N_{u}^{*})}{(u + N_{u}^{*})^{2}}$$

$$= \frac{r}{(u + \frac{r - ua}{a + r})} - \frac{ua(a + r)}{r(u + 1)}$$

$$= \frac{r^{2} + ar - a^{2}u + aru}{r(u + 1)}.$$

Untuk membuktikan bahwa $\varphi(u) > 0$ dilakukan uji turunan pertama dengan fungsi kemonotonan

$$\varphi'(u) = \frac{(-a^2 + ar)(ur + r) - r(r^2 + ar - a^2u + aru)}{r^2(u+1)^2}$$

$$= \frac{-a^2ur - a^2r + aur^2 + ar^2 - r^3 - ar^2 + a^2ur - ar^2u}{r^2(u+1)^2}$$

$$= \frac{-a^2r - r^3}{r^2(u+1)^2}$$

$$= \frac{r(-a^2 - r^2)}{r^2(u+1)^2}$$

$$= \frac{-a^2 - r^2}{r(u+1)^2}$$

$$= -\frac{(r+a)^2}{r(u+1)^2} < 0.$$

Fungsi $\varphi'(u) < 0$ sehingga φ fungsi monoton turun pada interval [0, r/a] jadi φ mempunyai nilai minimum di u = r/a. Dari penjabaran tersebut, disimpulkan bahwa $a + \alpha_u > 0$ untuk semua $u \in (0, r/a)$ di mana ekuivalen dengan kondisi f(1) > 0.

Pada kondisi ke dua akan dibuktikan f(-1) bernilai positif, di mana

$$f(-1) = 1 - (-2 + (a + \alpha_u)N_u^* + 1 - (a + \alpha_u)N_u^* + a(a + \alpha_u)(N_u^*)^2$$

$$= 1 + 2 - (a + \alpha_u)N_u^* + 1 - (a + \alpha_u)N_u^* + a(a + \alpha_u)(N_u^*)^2$$

$$= 4 - 2(a + \alpha_u)N_u^* + a(a + \alpha_u)(N_u^*)^2.$$

f(-1) bernilai positif jika

$$4 - 2(a + \alpha_u)N_u^* + a(a + \alpha_u)(N_u^*)^2 > 0$$

$$a(a + \alpha_u)(N_u^*)^2 > -4 + 2(a + \alpha_u)N_u^*.$$
 (3.10)

 $a(a + \alpha_u)(N_u^*)^2 > -4 + 2(a + \alpha_u)N_u^*.$ (3.10) Pertidaksamaan (3.10) dikalikan dengan $\frac{1}{(a + \alpha_u)N_u^*}$, sehingga diperoleh

$$aN_u^* > -\frac{4}{(a+\alpha_u)N_u^*} + 2$$

$$aN_u^* > 2 - \frac{4}{(a + \alpha_u)N_u^*}$$
 (3.11)

Dengan mensubstitusikan $N_u^* = \frac{r - ua}{a + r}$ ke pertidaksamaan (3.11) sebagaimana tercantum dalam Lampiran 2, sehingga diperoleh pertidaksamaan sebagai berikut.

$$a\left(\frac{r-ua}{a+r}\right) > 2 - \frac{4r(u+1)}{(r-ua)^2}.$$
 (3.12)

Jadi kondisi f(-1) bernilai positif jika memenuhi pertidaksamaan (3.12).

Untuk kondisi ke tiga akan dibuktikan $f(0) = 1 - p_2 > 0$, di mana

$$f(0) = 1 - p_2$$

= 1 - \{1 - (a + \alpha_u)N_u^* + a(a + \alpha_u)(N_u^*)^2\}
= (a + \alpha_u)N_u^* - a(a + \alpha_u)(N_u^*)^2.

Kondisi f(0) bernilai positif jika

$$(a + \alpha_{u})N_{u}^{*} - a(a + \alpha_{u})(N_{u}^{*})^{2} > 0$$

$$-a(a + \alpha_{u})(N_{u}^{*})^{2} > -(a + \alpha_{u})N_{u}^{*}$$

$$a(a + \alpha_{u})(N_{u}^{*})^{2} < (a + \alpha_{u})N_{u}^{*}$$

$$a(N_{u}^{*})^{2} < \frac{(a + \alpha_{u})N_{u}^{*}}{(a + \alpha_{u})}$$

$$aN_{u}^{*} < \frac{(a + \alpha_{u})N_{u}^{*}}{(a + \alpha_{u})N_{u}^{*}}$$

$$aN_{u}^{*} < 1.$$
(3.13)

 $N_u^* = \frac{r - ua}{a + r}$ disubstitusi ke pertidaksamaan (3.13), sehingga diperoleh

$$a\left(\frac{r-ua}{a+r}\right) < 1. \tag{3.14}$$

f(0) > 0 jika memenuhi pertidaksamaan (3.14).

Terbukti bahwa kondisi f(1), f(-1) dan f(0) masing-masing bernilai positif sehingga berdasarkan Definisi 2.1 dan Teorema 2.2 titik kesetimbangan $E_3 = (N_u^*, P_u^*)$ model predator prey diskrit persamaan (3.5) bersifat stabil asimtotik jika kondisi berikut dipenuhi

$$2 - \frac{4r(u+1)}{(r-ua)^2} < a\left(\frac{r-ua}{a+r}\right) < 1,$$

di mana 2u < r < 4u + 2.

3.4 Simulasi Numerik

Pada subbab ini, akan ditunjukkan simulasi numerik untuk memverifikasi hasil analisis pada subbab sebelumnya dengan menggunakan program MATLAB. Hasil simulasi numerik ini menggambarkan solusi N_j terhadap P_j terutama di sekitar titik kesetimbangan untuk model predator prey dengan dan tanpa efek Allee (sistem (3.3) dan (3.5)).

3.4.1 Model predator prey diskrit tanpa efek Allee

Pada hasil analisis yang telah diperoleh, model predator prey diskrit tanpa efek Allee persamaan (3.3) mempunyai tiga titik kesetimbangan yakni $E_1(0,0)$ dan $E_2(1,0)$ yang bersifat tidak stabil dan $E_3(N_o^*, P_o^*)$ bersifat stabil asimtotik jika kondisi berikut dipenuhi

$$2 - \frac{4}{r} < \frac{ar}{a+r} < 1,$$

di mana 0 < r < 2.

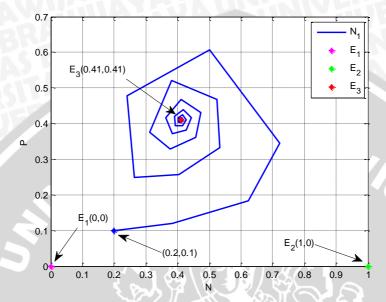
Pada simulasi pertama digunakan nilai parameter r = 1.4, a = 2.01 dan nilai awal $N_0^* = 0.2$, $P_0^* = 0.1$. Dari kondisi syarat kestabilan titik kesetimbangan $E_3 = (N_o^*, P_o^*)$ terpenuhi karena

$$2 - \frac{4}{r} = -0.8571$$

dan

$$\frac{ar}{a+r} = 0.8252,$$

sehingga E_3 bersifat stabil asimtotik seperti terlihat pada Gambar 3.1.



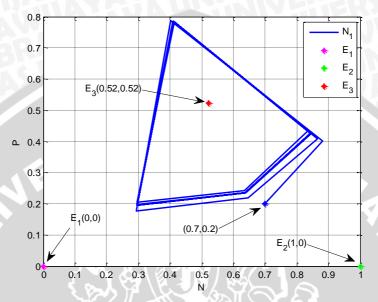
Gambar 3.1 Potret fase model (3.3) untuk r = 1.4

Pada simulasi ke dua diambil nilai r=2.2, a=2.01 dan nilai awal $N_0^*=0.7, P_0^*=0.2$, berdasarkan kondisi syarat kestabilan tidak terpenuhi karena

 $\frac{ar}{a+r} = 1.0476 > 1$,

sehingga titik E_3 bersifat tidak stabil seperti terlihat pada Gambar 3.2.

Gambar 3.2 menunjukkan bahwa solusi tidak konvergen ke titik kesetimbangan $E_3(N_o^*, P_o^*) = (0.52, 0.52)$. Lebih tepatnya gambar tersebut menunjukkan adanya solusi periodik 4-*cycle* yaitu (0.29, 0.19), (0.63, 0.23), (0.85, 0.43) dan (0.41, 0.78).



Gambar 3.2 Potret fase model (3.3) untuk r = 2.2

3.4.2 Model predator prey diskrit dengan efek Allee

Model predator prey diskrit dengan efek Allee persamaan (3.5) mempunyai tiga titik kesetimbangan yakni $E_1(0,0)$ dan $E_2(1,0)$ yang bersifat tidak stabil dan $E_3(N_u^*, P_u^*)$ bersifat stabil asimtotik jika kondisi berikut dipenuhi

$$2 - \frac{4r(u+1)}{(r-ua)^2} < a\left(\frac{r-ua}{a+r}\right) < 1,$$

di mana 2u < r < 4u + 2.

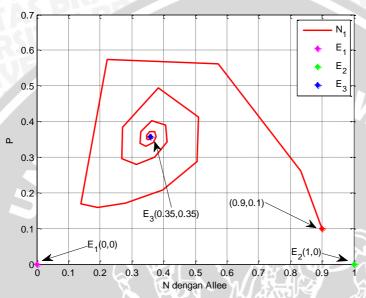
Pada simulasi ke tiga ditunjukkan simulasi numerik model predator prey diskrit dengan efek Allee menggunakan nilai u=0.09, r=1.4, a=2.01 dan nilai awal $N_0^*=0.9$, $P_0^*=0.1$. Berdasarkan kondisi syarat kestabilan titik kesetimbangan $E_3(N_u^*, P_u^*)$ terpenuhi, karena

$$2 - \frac{4r(u+1)}{(r-ua)^2} = -2.1071$$

dan

$$a\left(\frac{r-ua}{a+r}\right) = 0.7186,$$

sehingga seperti terlihat pada Gambar 3.3 titik kesetimbangan $E_3(N_u^*, P_u^*)$ bersifat stabil asimtotik konvergen menuju titik 0.35.



Gambar 3.3 Potret fase model (3.5) untuk r = 1.4

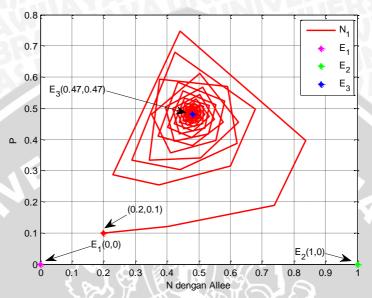
Pada simulasi ke empat diambil nilai u = 0.09, r = 2.2, a = 2.01 dan nilai awal $N_0^* = 0.2, P_0^* = 0.1$, sehingga titik kesetimbangan E_3 juga bersifat stabil asimtotik karena memenuhi kondisi syarat kestabilan, yakni

$$2 - \frac{4r(u+1)}{(r-ua)^2} = -0.3528$$

dan

$$a\left(\frac{r-ua}{a+r}\right) = 0.9640.$$

Seperti terlihat pada Gambar 3.4 konvergen ke titik 0.47. Dari sistem (3.3) dan (3.5) dengan nilai parameter sama yakni r=2.2, menunjukkan kestabilan yang berbeda pada Gambar 3.2 dan Gambar 3.4, dari semula tidak stabil menjadi stabil karena adanya efek Allee.

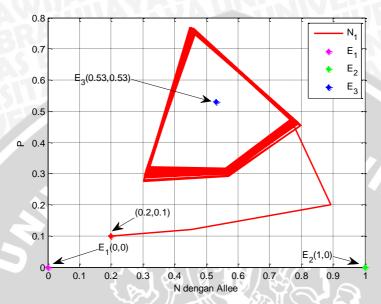


Gambar 3.4 Potret fase model (3.5) untuk r = 2.2

Pada simulasi ke lima digunakan nilai u=0.09, r=2.66, a=2.01 dan nilai awal $N_0^*=0.2, P_0^*=0.1$. Dari kondisi syarat kestabilan titik kesetimbangan $E_3(N_u^*, P_u^*)$ tidak terpenuhi karena

$$a\left(\frac{r-ua}{a+r}\right) = 1.0680 > 1.$$

Seperti terlihat pada Gambar 3.5 titik kesetimbangan E_3 bersifat tidak stabil. Gambar 3.5 menunjukkan bahwa terbentuk solusi periodik 4-*cycle* yaitu (0.29,0.28), (0.57,0.3), (0.79,0.46) dan (0.45,0.77).



Gambar 3.5 Potret fase model (3.5) untuk r = 2.66

3.5 Interpretasi Hasil

Pada simulasi numerik ditunjukkan lintasan solusi kepadatan model predator prey (3.3) dan (3.5) dengan mengambil nilai a = 2.01. Untuk nilai parameter r = 1.4 pada Gambar 3.1 dan Gambar 3.3 sementara nilai r = 2.2 diambil untuk Gambar 3.2 dan Gambar 3.4. Pada Gambar 3.3 jelas terlihat bahwa ketika populasi prey mengalami efek Allee, lintasan solusi konvergen ke titik kesetimbangan lebih cepat daripada lintasan solusi pada Gambar 3.1.

Gambar 3.2 dan Gambar 3.4 menunjukkan bahwa titik kesetimbangan berubah tidak stabil menjadi stabil di bawah pengaruh efek Allee. Dari Gambar 3.2 terlihat bahwa tidak stabil, yaitu laju pertumbuhan untuk populasi prey terus meningkat sampai dengan batas daya lingkungan, dan pada Gambar 3.4 bersifat stabil asimtotik, yaitu apabila populasi prey mengalami efek Allee laju pertumbuhan prey akan terhambat. Jadi efek Allee pada skripsi ini menghambat laju pertumbuhan populasi prey.

Pada skripsi ini diambil fungsi efek Allee $N_i/(u+N_i)$ dengan asumsi 0 < u < r / a dan konstanta Allee u = 0.09. Jadi dapat disimpulkan bahwa simulasi numerik sesuai dengan hasil analisis yang telah diperoleh karena sesuai dengan kondisi kestabilan titik kesetimbangan bahwa $E_3(N_o^*, P_o^*)$ stabil asimtotik jika $2 - \frac{4}{r} < \frac{ar}{a+r} < 1,$ dengan 0 < r < 2 dan $E_3(N_u^*, P_u^*)$ bersifat stabil asimtotik jika

$$2 - \frac{4}{r} < \frac{ar}{a+r} < 1,$$

$$2 - \frac{4r(u+1)}{(r-ua)^2} < a\left(\frac{r-ua}{a+r}\right) < 1,$$

dengan 2u < r < 4u + 2, sehingga pada hasil simulasi numerik diambil nilai parameter yang diperlukan agar dapat ditunjukkan analisis kestabilan dari fungsi Allee pada populasi prey.

ERSITAS BRAWIUM 36

BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan tujuan yang ingin dicapai dan pembahasan pada bab sebelumnya, maka kesimpulan yang diperoleh sebagai berikut.

- 1. Diskritisasi model predator prey diskrit dengan dan tanpa efek Allee menggunakan pendekatan metode beda hingga standar yaitu metode Euler.
- 2. Pada model predator prey tanpa dan dengan efek Allee diperoleh masing-masing tiga titik kesetimbangan, yakni $E_1(0,0)$, $E_2(1,0)$ yang bersifat tidak stabil sedangkan untuk $E_3(N_o^*, P_0^*)$ dan $E_3(N_u^*, P_u^*)$ bersifat stabil asimtotik.
- 3.Simulasi numerik untuk model predator prey diskrit dengan dan tanpa efek Allee sesuai dengan hasil analisis. Untuk beberapa nilai parameter yang diambil sesuai kondisi yang diperlukan.

4.2 Saran

Pada pengkajian selanjutnya diharapkan efek Allee tidak hanya pada populasi prey melainkan pada populasi predator atau pada populasi keduanya dan untuk analisis kestabilan yang menunjukkan adanya solusi periodik 4-cycle, sebaiknya pada pengkajian selanjutnya dianalisis dengan mencari 2^n -cycle $(n \ge 3)$ menggunakan metode iterasi titik tetap.

ERSITAS BRAWIUM 38

DAFTAR PUSTAKA

- Arrowsmith, D.K dan C.M Place. 1990. An Introduction to Dynamical Systems. Cambridge University Press. USA.
- Banagaaya, N. 2008. Nonstandard Finite Difference Method: Definitions and Implementation, Thesis. African Institute for Mathematical Sciences (AIMS).
- Celik, C., dan O. Duman. 2009. Allee effect in a discrete-time predator-prey system. *Chaos Solitons & Fractals*.40.1956-1962
- Courchamp, F., Clutton, T., dan Grenfell, B. 1999. Inverse density dependence and the Allee effect. *Trends Ecol. Evol.* 14. 405–410
- Cronin, J. 1994. *Differential Equations Introduction and Qualitative Theory*. Second edition, Marcell Dekker, Inc. New York.
- Elaydi, S. 2005. An Introduction to Difference Equations. Third edition, Springer. New York.
- Erjaee G.H., Alnasr, M., dan S. Momani. 2001. Non-Standard Discretization of Fractional Differential Equations. Qatar University Interior Research Under Grant QUUG-CAS-MATH-08-03.
- Perko, L. 1996. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Third edition, Springer-Verlag. New York.
- Skalski, G.T. dan J.F. Gilliam. 2001. Functional Responses with Predator Interference: viable alternatives to the Holling Type II Model. Ecology 82:11. 3083-3092.
- Stephens, P.A., dan Sutherland, W.J. 1999. Consequences of the Allee effect for behaviour, ecology and conservation. *Trends Ecol. Evol.* 14. 401–405



LAMPIRAN

Lampiran 1. Penyederhanaan Matriks $J(N_u^*, P_u^*)$

Matriks Jacobi dari $E_3 = (N_u^*, P_u^*)$ di mana $N_u^* = P_u^* = \frac{r - ua}{a + r}$ diberikan oleh :

$$J = \begin{bmatrix} 1 - \frac{(2rN_u^* - 3r(N_u^*)^2)(u + N_u^*) - (r(N_u^*)^2 - r(N_u^*)^3}{(u + N_u^*)^2} - aP_u^* & -aN_u^* \\ aP_u^* & 1 + aN_u^* - 2a, P_u^* \end{bmatrix}$$

di mana
$$N_u^* = \frac{r-ua}{a+r} \Leftrightarrow N_u^*a + N_u^*r = r - ua$$

$$\Leftrightarrow N_u^*a + ua = r - N_u^*r$$

$$\Leftrightarrow a(N_u^* + u) = r(1 - N_u^*)$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{r(1 - N_u^*)}{(u + N_u^*)}$$

$$\begin{split} J_{11} &= 1 - \frac{(2rN_u^* - 3r(N_u^*)^2)(u + N_u^*) - (r(N_u^*)^2 - r(N_u^*)^3}{(u + N_u^*)^2} - aP_u^* \\ &= 1 - \frac{(2rN_u^* - 3r(N_u^*)^2)(u + N_u^*) - r(N_u^*)^2 + r(N_u^*)^3 - aN_u^*(u + N_u^*)^2}{(u + N_u^*)^2} \\ &= 1 \\ &- \frac{rN_u^*(2 - 3N_u^*)(u + N_u^*) - r(N_u^*)^2(1 - (N_u^*) - (\frac{r(1 - N_u^*)}{(u + N_u^*)})(u + N_u^*)^2N_u^*}{(u + N_u^*)^2} \end{split}$$

$$= 1 - \frac{rN_u^*(2 - 3N_u^*)(u + N_u^*) - r(N_u^*)^2(1 - (N_u^*) - r(1 - N_u^*)(u + N_u^*)N_u^*}{(u + N_u^*)^2}$$

$$= 1 \\ + \left(\frac{r(2 - 3N_u^*)(u + N_{u^*}) - rN_u^*(1 - (N_u^*) - r(1 - N_u^*)(u + N_{u^*})}{(u + N_u^*)^2} \right) N_u^* \\ = 1 \\ + \left(\frac{2r(u + N_u^*) - 3rN_u^*(u + N_u^*) - r(N_u^*) + r(N_u^*)^2 - r(u + N_u^*) + rN_u^*(u + N_u^*)}{(u + N_u^*)^2} \right) N_u^* \\ = 1 + \left(\frac{r(u + N_u^*) - 2rN_u^*(u + N_u^*) - rN_u^*(1 - N_u^*)}{(u + N_u^*)^2} \right) N_u^* \\ = 1 + \left(\frac{ru + rN_u^* - 2rN_u^*(u + N_u^*) - rN_u^* + r(N_u^*)^2}{(u + N_u^*)^2} \right) N_u^* \\ = 1 + \left(\frac{ru - 2rN_u^*(u + N_u^*) + r(N_u^*)^2}{(u + N_u^*)^2} \right) N_u^* \\ = 1 + \left(\frac{ru - 2rN_u^* - r(N_u^*)^2}{(u + N_u^*)^2} \right) N_u^* \\ = 1 + \left(\frac{r(u - ruN_u^* - ruN_u^* - r(N_u^*)^2}{(u + N_u^*)^2} \right) N_u^* \\ = 1 + \left(\frac{r(u - ruN_u^* - ruN_u^* - r(N_u^*)^2}{(u + N_u^*)^2} \right) N_u^* \\ = 1 + \left(\frac{r(u - ruN_u^* - ru(1 - N_u^*))}{(u + N_u^*)^2} \right) N_u^* \\ = 1 - \left(\frac{r(u - ruN_u^*) + ru(1 - N_u^*)}{(u + N_u^*)^2} \right) N_u^* \\ = 1 - \left(\frac{r(u - ruN_u^*) + ru(1 - N_u^*)}{(u + N_u^*)^2} \right) N_u^*$$

$$= 1 - \left(\frac{rN_u^*}{(u + N_u^*)} - \frac{ru(1 - N_u^*)}{(u + N_u^*)^2}\right)N_u^*$$

$$= 1 - \alpha_u N_u^*$$

$$\alpha_u = \frac{rN_u^*}{(u + N_u^*)} - \frac{ru(1 - N_u^*)}{(u + N_u^*)^2}$$

$$=\frac{r\left(\frac{r-ua}{a+r}\right)}{u+\frac{r-ua}{a+r}}-\frac{ru\left(1-\frac{r-ua}{a+r}\right)}{\left(u+\frac{r-ua}{a+r}\right)^2}$$

$$= 1 - \alpha_u N_u^*$$
di mana
$$\alpha_u = \frac{r N_u^*}{(u + N_u^*)} - \frac{r u (1 - N_u^*)}{(u + N_u^*)^2}$$

$$= \frac{r \left(\frac{r - ua}{a + r}\right)}{u + \frac{r - ua}{a + r}} - \frac{r u \left(1 - \frac{r - ua}{a + r}\right)}{\left(u + \frac{r - ua}{a + r}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{r^2 - r ua}{a + r}}{\frac{u (a + r) + r - ua}{a + r}} - \frac{r u \left(\frac{a + r - r + ua}{a + r}\right)}{\left(\frac{ur + r}{ar + r}\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{r^2-rua}{a+r}}{\frac{ua+ur-r-ua}{a+r}}-\frac{ru\left(\frac{a+ua}{a+r}\right)}{\left(\frac{ur+r}{ar+r}\right)^2}$$

$$=\frac{r^2-rua}{a+r}\frac{a+r}{ur+r}-ru\left(\frac{a+ua}{a+r}\right)\left(\frac{a+r}{ur+r}\right)^2$$

$$= \frac{r^2 - rua}{ur + r} - \frac{ru(a + ua)(a + r)}{(ur + r)^2}$$

$$= \frac{r(r - ua)}{r(u+1)} - \frac{rua(u+1)(a+r)}{(ur+r)(ur+r)}$$

$$= \frac{r - ua}{u + 1} - \frac{rua(u + 1)(a + r)}{r(u + 1)r(u + 1)}$$



Lampiran 2. Perhitungan pertidaksamaan (3.12)

$$f(-1) > 0 \iff aN_{u}^{*} > 2 - \frac{4}{(a + \alpha_{u})N_{u}^{*}}$$

$$\iff a\left(\frac{r - ua}{a + r}\right) > 2 - \frac{4}{\left(\frac{r}{u + N_{u}^{*}} - \frac{ru(1 - N_{u}^{*})}{(u + N_{u}^{*})^{2}}\right)N_{u}^{*}}$$

$$\iff a\left(\frac{r - ua}{a + r}\right) > 2 - \frac{r(u + N_{u}^{*}) - ru(1 - N_{u}^{*})}{(u + N_{u}^{*})^{2}}N_{u}^{*}}$$

$$\iff a\left(\frac{r - ua}{a + r}\right) > 2 - \frac{4}{\left(\frac{ru + rN_{u}^{*} - ru + ruN_{u}^{*}}{(u + N_{u}^{*})^{2}}\right)N_{u}^{*}}$$

$$\iff a\left(\frac{r - ua}{a + r}\right) > 2 - \frac{4}{\left(\frac{rN_{u}^{*} + ruN_{u}^{*}}{(u + N_{u}^{*})^{2}}\right)N_{u}^{*}}$$

$$\iff a\left(\frac{r - ua}{a + r}\right) > 2 - \frac{4}{\left(\frac{rN_{u}^{*} + ruN_{u}^{*}}{(u + N_{u}^{*})^{2}}\right)N_{u}^{*}}$$

$$\iff a\left(\frac{r - ua}{a + r}\right) > 2 - \frac{4}{\left(\frac{rN_{u}^{*} + ruN_{u}^{*}}{(u + N_{u}^{*})^{2}}\right)N_{u}^{*}}$$

$$\iff a\left(\frac{r - ua}{a + r}\right) > 2 - \frac{4(u + N_{u}^{*})^{2}}{(rN_{u}^{*})^{2} + (ruN_{u}^{*})^{2}}$$

$$\iff a\left(\frac{r - ua}{a + r}\right) > 2 - \frac{4(u + N_{u}^{*})^{2}}{(rN_{u}^{*})^{2} + (ruN_{u}^{*})^{2}}$$

$$\iff a\left(\frac{r - ua}{a + r}\right) > 2 - \frac{4(u + N_{u}^{*})^{2}}{(rN_{u}^{*})^{2} + (ruN_{u}^{*})^{2}}$$

$$\iff a\left(\frac{r - ua}{a + r}\right) > 2 - \frac{4(u + N_{u}^{*})^{2}}{(rN_{u}^{*})^{2} + (ruN_{u}^{*})^{2}}$$

$$\iff a\left(\frac{r - ua}{a + r}\right) > 2 - \frac{4(u + N_{u}^{*})^{2}}{(rN_{u}^{*})^{2} + (ruN_{u}^{*})^{2}}$$

$$\Leftrightarrow a\left(\frac{r-ua}{a+r}\right) > 2 - \frac{4\left(\frac{r(u+1)}{a+r}\right)^2}{(rN_u^*)^2(1+u)}$$

$$\Leftrightarrow a\left(\frac{r - ua}{a + r}\right) > 2 - \frac{4\frac{(r(u+1))^2}{(a+r)^2}}{(rN_u^*)^2(1+u)}$$

$$\Leftrightarrow a\left(\frac{r - ua}{a+r}\right) > 2 - 4$$

$$\left(\frac{(r(u+1))^2}{(a+r)^2} \frac{1}{(rN_u^*)^2(1+u)}\right)$$

$$\Leftrightarrow a\left(\frac{r - ua}{a+r}\right) > 2 - \frac{4r(u+1)}{(a+r)^2(N_u^*)^2}$$

$$\Leftrightarrow a\left(\frac{r-ua}{a+r}\right) > 2 - \frac{4r(u+1)}{(a+r)^2(N_u^*)^2}$$

$$\Leftrightarrow a\left(\frac{r-ua}{a+r}\right) > 2 - \frac{4r(u+1)}{(a+r)^2(\frac{r-ua}{a+r})^2}$$

$$\Leftrightarrow a\left(\frac{r-ua}{a+r}\right) > 2 - \frac{4r(u+1)}{(r-ua)^2}$$

maka
$$f(-1) > 0 \Leftrightarrow a\left(\frac{r-ua}{a+r}\right) > 2 - \frac{4r(u+1)}{(r-ua)^2}$$

Lampiran 3. Program Model Predator Prey Diskrit tanpa efek Alle

Simulasi numerik sistem persamaaan (3.3) dibuat pada *software MATLAB R2008a.*

Listing Program:

```
clc;
clear all;
h=1;
t=0:h:300;
m=length(t);
a=2.01;
r=2.2;
N(1) = 0.2;
P(1) = 0.1;
ba1=2-(4/r)
b1=a*r/(a+r)
N0=r/(a+r)
for i=1:m-1
    N(i+1)=N(i)+r*N(i)*(1-N(i))-a*N(i)*P(i);
    P(i+1)=P(i)+a*P(i)*(N(i)-P(i));
figure(1);
plot(t, N, '-m', t, P, '-g');
xlabel('t');
ylabel('N & P');
legend('N','P');
grid;
figure(2);
plot(N,P,'b',0,0,'b*',1,0,'g*',N0,N0,'k*',N(1),P(1),'b*',
'LineWidth',2);
xlabel('N');
ylabel('P');
legend('N 1', 'E 1', 'E 2', 'E 3');
grid on;
```

ERSITAS BRAWIUPLE 48

Lampiran 4. Program Model Predator Prey Diskrit dengan efek Alle

Simulasi numerik sistem persamaaan (3.5) dibuat pada *software MATLAB R2008a.*

Listing Program:

```
clc;
clear all;
h=1;
t=0:h:300;
m=length(t);
a=2.01;
r=2.665;
u=0.09;
NA(1) = 0.2;
PA(1) = 0.1;
zalle=(r-u*a)/(a+r)
valle=2-(4*r*(u+1)/(r-u*a)^2)
xalle=a*((r-u*a)/(a+r))
for i=1:m-1
    NA(i+1) = NA(i) + r*NA(i) * (1-NA(i)) * (NA(i) / (u+NA(i)))
a*NA(i)*PA(i);
    PA(i+1) = PA(i) + a*PA(i)*(NA(i) - PA(i));
figure(3);
plot(t, NA, '-m', t, PA, '-q');
xlabel('t');
ylabel('N dengan Allee & P');
legend('N dengan Allee', 'P');
grid;
figure (4);
plot(NA, PA, 'r', 0, 0, 'b*', 1, 0, 'r*', zalle, zalle, 'k*', NA(1), PA(1),
'r*', 'LineWidth',2);
xlabel('N dengan Allee');
ylabel('P');
legend('N 1','E 1','E 2','E 3');
grid on;
```

ERSITAS BRAWIUM 50