# DINAMIK PERSAMAAN BEDA UNTUK MODEL EPIDEMIK SIS DENGAN *DELAY*

**SKRIPSI**

oleh:
**RETNO WAHYU DEWANTI**
**0710940034-94**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**
**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS BRAWIJAYA**
**MALANG**
**2012**

# DINAMIK PERSAMAAN BEDA UNTUK MODEL EPIDEMIK SIS DENGAN *DELAY*

## SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh:

**RETNO WAHYU DEWANTI**
**0710940034-94**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**
**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS BRAWIJAYA**
**MALANG**
**2012**

## LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

## DINAMIK PERSAMAAN BEDA UNTUK MODEL EPIDEMIK SIS DENGAN *DELAY*

**Oleh:**
**RETNO WAHYU DEWANTI**
**0710940034-94**

**Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji**
**pada tanggal 10 Februari 2012**
**dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar**
**Sarjana Sains dalam bidang Matematika**

| DOSEN PEMBIMBING I | DOSEN PEMBIMBING II |
|---|---|
| **Dr. Agus Suryanto, M.Sc.** | **Dr. Abdul Rouf A., M.Sc.** |
| **NIP. 196908071994121001** | **NIP. 196709071992031001** |

**MENGETAHUI**
**KETUA JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS MIPA UNIVERSITAS BRAWIJAYA**

**Dr. Abdul Rouf A., M.Sc.**
**NIP. 196709071992031001**

## LEMBAR PERNYATAAN

**Saya yang bertanda tangan di bawah ini :**

| | | |
|---|---|---|
| **Nama** | **:** | **RETNO WAHYU DEWANTI** |
| **NIM** | **:** | **0710940034** |
| **Jurusan** | **:** | **MATEMATIKA** |
| **Judul Skripsi** | **:** | **DINAMIK PERSAMAAN BEDA UNTUK MODEL EPIDEMIK SIS DENGAN *DELAY*** |

**Dengan ini menyatakan bahwa:**

1. **isi Skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Skripsi ini,**
2. **apabila di kemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala risiko yang akan saya terima.**

**Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.**

**Malang, 10 Februari 2012**
**Yang menyatakan,**

**RETNO WAHYU DEWANTI**
**NIM. 0710940034**

**DINAMIK PERSAMAAN BEDA UNTUK MODEL EPIDEMIK SIS DENGAN *DELAY***

## ABSTRAK

Model SIS (*Susceptible Infected Susceptible*) dengan *delay* merupakan persamaan diferensial tak linear yang memodelkan interaksi antara populasi rentan (*susceptible*) dan terinfeksi (*infected*). Pada skripsi ini dibahas analisis dinamik model SIS yang diselesaikan secara numerik menggunakan metode Euler. Ditunjukkan bahwa model diskrit yang dihasilkan dari metode Euler mempunyai dua titik kesetimbangan yang sama dengan model kontinunya, tetapi hasil analisis dari simulasi numerik menunjukkan bahwa kestabilan kedua titik kesetimbangan tersebut konsisten dengan model kontinu hanya jika ukuran langkah integrasi bernilai relatif kecil.

**Kata kunci:** model SIS diskrit dengan *delay*, metode Euler, konsistensi dinamik.

# DINAMICAL DIFERENCE EQUATION OF EPIDEMIC MODEL WITH *DELAY*


## ABSTRACT

SIS (Susceptible Infected Susceptible) model is a system of nonlinear differential equations which describes an interaction between susceptible and infected population. This final project analyze the dynamic of the delay SIS model which is solved by Euler Method. The discrete model have two equilibrium which are equal to the continuous system, but it is shown analytically and numerically that stability of each equilibrium is consistent with the continuous system if step-size is relatively small.



**Keywords:** SIS discrete model with *a delay*, Euler Method, dynamically consistent.

# KATA PENGANTAR

Segala puji, syukur, hormat dan kemuliaan kepada Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "**DINAMIK PERSAMAAN BEDA UNTUK MODEL EPIDEMIK SIS DENGAN *DELAY***". Skripsi ini merupakan sebagian persyaratan kelulusan dalam memperoleh gelar kesarjanaan di Fakultas MIPA Jurusan Matematika Universitas Brawijaya.

Pada penyelesaian skripsi ini penulis banyak mendapat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak, karena itu pada kesempatan kali ini penulis ingin mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Dr. Agus Suryanto, M.Sc., selaku pembimbing I atas segala bimbingan, nasihat, motivasi, ilmu serta kesabaran yang telah diberikan selama penulis menempuh kuliah dan dalam penulisan skripsi ini,
2. Dr. Abdul Rouf A., M.Sc., selaku pembimbing II sekaligus Ketua Jurusan Matematika atas segala bimbingan, nasihat, motivasi, ilmu serta kesabaran yang telah diberikan selama penulis menempuh kuliah dan dalam penulisan skripsi ini,
3. Prof. Dr. Agus Widodo, Dr. Wuryansari M.K., M.Si., dan Drs. Marsudi, M.S. selaku dosen penguji atas segala masukan dan saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini,
4. seluruh dosen Matematika yang telah mencurahkan ilmunya selama penulis melaksanakan studi, serta staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya,
5. Ayah dan Ibu tersayang atas kasih sayang, semangat, motivasi, dan do'a yang tiada henti untuk putrinya, juga adik-adikku yang tersayang, Cucuk dan Ayu,
6. Chacha, Cetty, Lady, Vika, Meirina, dan Awan atas semangat, bantuan, dan pengorbanannya selama ini,
7. Paskah, Fadly, Retna, Azib, Indah Yuni, Risca, dan sahabat-sahabat seperjuangan Matematika angkatan 2007 lainnya sekaligus keluarga besar Matematika dan semua pihak yang telah membantu proses penulisan skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu. Terimakasih.

Semoga Allah SWT memberikan anugerah dan karunia-Nya kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini. Penulis menyadari bahwa dalam skripsi ini masih banyak kekurangan. Untuk itu penulis sangat mengharapkan kritik dan saran melalui email penulis re2_02@yahoo.com.

Akhirnya semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca, khususnya mahasiswa Matematika Universitas Brawijaya.

Malang, 10 Februari 2012

Penulis

## DAFTAR ISI

# DAFTAR GAMBAR

Halaman

# DAFTAR LAMPIRAN

# BAB I
# PENDAHULUAN

## 1.1. Latar Belakang

Setiap individu pasti menginginkan tubuh yang sehat sepanjang usianya, tetapi pada usia-usia tertentu ada penyakit yang menyerang, misalnya penyakit menular seksual (PMS). *Delay* adalah selang waktu antara kelahiran sampai individu berpotensi untuk tertular suatu penyakit.

Pada skripsi ini dibahas model epidemik *susceptible-infected-susceptible* (SIS) dengan *delay*. Model epidemik SIS dengan *delay* dikonstruksi dari model kompartemen sehingga diperoleh persamaan diferensial tak-linear yang diselesaikan secara numerik. Secara umum, integrasi numerik dilakukan dengan mereduksi persamaan diferensial yang kontinu terhadap waktu menjadi model diskrit terhadap waktu. Salah satu metode yang sering diaplikasikan adalah menghampiri turunan yang terdapat dalam persamaan diferensial dengan menggunakan metode Euler. Persamaan diskrit yang diperoleh dikatakan konsisten secara dinamik dengan persamaan diferensialnya jika kedua persamaan tersebut mempunyai titik tetap yang sama dengan sifat kestabilan yang sama pula. Selain itu dalam skripsi ini juga dikenalkan sebuah angka reproduksi dasar $\left(R_0\right)$ yang merupakan ukuran terjadi atau tidaknya endemik dalam suatu populasi.

## 1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, pokok permasalahan dalam penulisan skripsi ini adalah

1. bagaimana hasil diskritisasi sistem persamaan diferensial model epidemik SIS dengan *delay* menggunakan metode Euler,
2. bagaimana konsistensi dinamik model diskrit epidemik SIS dengan *delay* jika dibandingkan dengan persamaan diferensialnya.

## 1.3. Batasan Masalah

Model yang baik adalah model yang mempunyai sedikit batasan. Namun, model yang diperoleh boleh jadi lebih kompleks. Dengan demikian, skripsi ini dibatasi oleh hal-hal berikut.

1. Setiap populasi yang terinfeksi memiliki peluang yang sama untuk menularkan infeksi ke populasi yang rentan.
2. Populasi yang rentan dapat terinfeksi jika melakukan kontak langsung dengan populasi yang terinfeksi.
3. Populasi yang terinfeksi dapat kembali menjadi populasi yang rentan.
4. Penyakit tidak menyebabkan kematian.

## 1.4. Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah

1. memperoleh model diskrit epidemik SIS dengan *delay* menggunakan metode Euler,
2. menganalisis dan membandingkan konsistensi dinamik model epidemik SIS dengan *delay* yang diskrit dengan persamaan diferensialnya.

# BAB II
# TINJAUAN PUSTAKA

## 2.1. Sistem Dinamik

Sistem dinamik merupakan suatu keadaan yang dipengaruhi oleh waktu ($t$). Dalam penerapannya, terdapat dua jenis sistem dinamik, yaitu sistem dinamik diskrit ($t \in \mathbb{Z}$ atau $\mathbb{N}$) dan sistem dinamik kontinu $t \in \Re$. Sistem dinamik diskrit dinyatakan sebagai persamaan beda, yaitu

$$x_{t+1} = f\left(x_t\right), \ t \in \mathbb{Z} \text{ atau } \mathbb{N}, \text{ dan } x, f \in \Re^n$$

Apabila $t$ kontinu, sistem dinamik merupakan sistem persamaan diferensial, yaitu

$$\frac{dx}{dt} = f\left(x\right), \ x \in \Re^n$$

(Arrowsmith dan Place, 1990).

Secara geometri, sistem dinamik diskrit dan sistem dinamik kontinu menggambarkan pergerakan titik-titik di bidang fase sepanjang kurva penyelesaian sistem persamaan diferensialnya (Perko, 1996).

## 2.2. Sistem Dinamik Kontinu

### 2.2.1. Sistem Otonomus

Sistem persamaan diferensial orde satu yang berbentuk

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1,\ldots,x_n), \qquad i=1,\ldots,n$$

dengan $f_i$ adalah fungsi bernilai *real* yang tidak bergantung secara eksplisit terhadap $t$ disebut sistem otonomus (Boyce dan DiPrima, 2005).

### 2.2.2. Titik Kesetimbangan

Pandang suatu sistem otonomus

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f\left(x, y\right) \\ \frac{dy}{dt} &= g\left(x, y\right). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Titik $(x^*, y^*)$ yang memenuhi $f(x^*, y^*) = 0$ dan $g(x^*, y^*) = 0$ disebut titik kritis sistem (2.1). Titik kritis $(x^*, y^*)$ adalah solusi sistem (2.1) yang bernilai konstan sebab $\frac{dx}{dt} = 0.$ dan $\frac{dy}{dt} = 0.$ Oleh karena itu $(x^*, y^*)$ disebut juga titik kesetimbangan (Boyce dan DiPrima, 2005).

### 2.2.3. Kestabilan Titik Kesetimbangan

Jenis kestabilan titik kesetimbangan $(x^*, y^*)$ dapat dibagi menjadi tiga kriteria, yaitu

1. stabil apabila $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian sehingga jika $\|(x(0), y(0)) - (x^*, y^*)\| < \delta$ maka $\|(x(t), y(t)) - (x^*, y^*)\| < \varepsilon,$ $\forall t > 0,$
2. tak-stabil apabila tidak memenuhi kriteria pertama,
3. stabil asimtotik jika stabil dan $\exists \delta_0,\ 0 < \delta_0 < \delta,$ sedemikian sehingga suatu solusi $x = x(t)$ dan $y = y(t)$ yang memenuhi $\|(x(t), y(t)) - (x^*, y^*)\| < \delta_0$ akan bersifat $\lim_{t \to \infty}(x(t), y(t)) = (x^*, y^*)$ (Boyce dan DiPrima, 2005).

## 2.3. Sistem Dinamik Diskrit

Sistem dinamik diskrit adalah relasi berbentuk

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n). \end{aligned} \tag{2.2}$$

di mana $f$ dan $g$ disebut fungsi pembangkit sistem. Jika $f$ dan $g$ bergantung pada parameter *a*, maka fungsi pembangkitnya dinyatakan sebagai $f(a, x, y)$ dan $g(a, x, y)$ Titik ($x^*$, $y^*$) disebut titik tetap sistem (2.2) jika $f(x^*, y^*) = x^*$ dan $g(x^*, y^*) = y^*$ (Elaydi, 2005).

### 2.3.1. Sistem Dinamik Diskrit Tak-Linear

Jika *f* atau *g* pada persamaan (2.2) memuat perkalian antara variabel tak bebas, maka sistem (2.2) disebut sistem dinamik diskrit tak-linear. Penentuan kestabilan titik tetap sistem dinamik diskrit tak-linear dapat dilakukan dengan hampiran linear di sekitar titik tersebut. Proses linearisasi sistem tak-linear dilakukan dengan melakukan ekspansi deret Taylor.

Jika titik ($x^*,y^*$) adalah titik tetap sistem (2.2), dan diasumsikan bahwa $f$ dan $g$ mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik ($x^*,y^*$), maka $f$ dan $g$ dapat dinyatakan sebagai deret Taylor di sekitar titik ($x^*,y^*$), yaitu

$$f(x_n, y_n) = f(x^*, y^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x_n}(x_n - x^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y_n}(y_n - y^*) + \eta_1(x_n, y_n)$$

$$g(x_n, y_n) = g(x^*, y^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x_n}(x_n - x^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y_n}(y_n - y^*) + \eta_2(x_n, y_n),$$

di mana $\eta_1(x_n, y_n)$ dan $\eta_2(x_n, y_n)$ merupakan suku sisa. Untuk hampiran orde satu di atas, jika $(x_n, y_n) \to (x^*, y^*)$, maka suku sisa tersebut memenuhi :

$$\lim_{(x_n, y_n)\to(x^*, y^*)} \frac{\eta_1(x_n, y_n)}{\|\vec{w}_n\|} = 0 \text{ dan } \lim_{(x_n, y_n)\to(x^*, y^*)} \frac{\eta_2(x_n, y_n)}{\|\vec{w}_n\|} = 0,$$

di mana $\vec{w}_n = (x_n - x^*, y_n - y^*)^T$. Oleh karena itu $\eta_1(x_n, y_n)$ dan $\eta_2(x_n, y_n)$ dapat diabaikan.

Karena ($x^*,y^*$) adalah titik tetap, maka $f(x^*, y^*) = x^*$ dan $g(x^*, y^*) = y^*$, sehingga sistem (2.2) dapat didekati oleh

$$x_{n+1} = x^* + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x_n}(x_n - x^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y_n}(y_n - y^*)$$

$$y_{n+1} = y^* + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x_n}(x_n - x^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y_n}(y_n - y^*)$$

atau

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x^* &= \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x_n}(x_n - x^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y_n}(y_n - y^*) \\ y_{n+1} - y^* &= \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x_n}(x_n - x^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y_n}(y_n - y^*). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Jika $u_n = x_n - x^*$ dan $v_n = y_n - y^*$, maka sistem (2.3) menjadi

$$u_{n+1} = \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x_n} u_n + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y_n} v_n$$

$$v_{n+1} = \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x_n} u_n + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y_n} v_n \quad .$$

Dengan demikian linearisasi persamaan (2.2) menghasilkan sistem

$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x_n} & \dfrac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x_n} & \dfrac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}$$

(Elaydi, 2005).

### 2.3.2. Perilaku Pendekatan Solusi Persamaan Beda

**Lemma 2.1.**

Perhatikan persamaan beda orde $k$

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \cdots + p_k y(n) = 0. \qquad (2.4)$$

Persamaan karakteristik untuk persamaan (2.4) adalah

$$\lambda^{n+k} + p_1 \lambda^{n+k-1} + \cdots + p_k \lambda^n = 0.$$

Jika $\lambda_i, i = 1,2,\ldots,k$ adalah akar-akar persamaan karakteristik untuk persamaan (2.4). Maka semua solusi persamaan (2.4) konvergen menuju 0 (stabil asimtotik) jika dan hanya jika maksimum $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_k|\} < 1$ (Elaydi, 2005).

**Lemma 2.2.**

Misalkan $p_i = 1,2,\ldots,k$ adalah koefisien untuk persamaan (2.4), maka semua solusi persamaan (2.4) konvergen menuju 0 (stabil asimtotik) jika dan hanya jika $\sum_{i=1}^{k} |p_i| < 1$ (Kocic dan Ladas, 1993).

## 2.4. Metode Beda Hingga

Persamaan diferensial dapat didekati dengan metode beda hingga, dengan kata lain dilakukan pendekatan turunan pertama dengan beda maju, beda pusat, atau beda mundur. Metode beda hingga yang sering digunakan untuk pendekatan turunan pertama adalah metode Euler.

Perhatikan ekspansi deret Taylor $f(x)$ pada titik $x_i$ berikut

$$f(x_i+\Delta x)=f(x_i)+\Delta x\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_i}+\frac{\Delta x^2}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x_i}+\frac{\Delta x^3}{6}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_{x_i}+\cdots \quad (2.5)$$

$$f(x_i-\Delta x)=f(x_i)-\Delta x\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_i}+\frac{\Delta x^2}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x_i}-\frac{\Delta x^3}{6}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_{x_i}+\cdots \quad (2.6)$$

### 2.4.1. Beda Maju Turunan Pertama

Dari persamaan (2.5), diperoleh

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_i}=\frac{f(x_i+\Delta x)-f(x_i)}{\Delta x}-\frac{\Delta x}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x_i}-\frac{\Delta x^2}{6}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_{x_i}+\cdots$$

Jika dituliskan $f_i = f(x_i)$ dan $f_{i+1} = f(x_i+\Delta x)$, maka pendekatan turunan pertama dengan beda maju dapat dinyatakan sebagai

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_i}\approx\frac{f_{i+1}-f_i}{\Delta x}$$ (Elaydi, 2005).

### 2.4.2. Beda Mundur Turunan Pertama

Dari persamaan (2.6), diperoleh

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_i}=\frac{f(x_i)-f(x_i-\Delta x)}{\Delta x}+\frac{\Delta x}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x_i}-\frac{\Delta x^2}{6}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_{x_i}+\cdots$$

Jika dituliskan $f_i = f(x_i)$ dan $f_{i-1} = f(x_i-\Delta x)$, maka pendekatan turunan pertama dengan beda mundur dapat dinyatakan sebagai

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_i}\approx\frac{f_i-f_{i-1}}{\Delta x}$$ (Elaydi, 2005).

### 2.4.3. Beda Pusat Turunan Pertama

Pendekatan turunan pertama dengan metode beda pusat diperoleh dari selisih persamaan (2.5) dengan persamaan (2.6), yaitu

$$f(x_i+\Delta x)-f(x_i-\Delta x)=2\Delta x\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_i}+\frac{\Delta x^3}{3}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_{x_i}+\cdots$$

sehingga

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_i}=\frac{f(x_i+\Delta x)-f(x_i-\Delta x)}{2\Delta x}-\frac{\Delta x^2}{6}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_{x_i}+\cdots$$

Jika dituliskan $f_{i+1}=f(x_i+\Delta x)$ dan $f_{i-1}=f(x_i-\Delta x)$, maka pendekatan turunan pertama dengan beda pusat dapat dinyatakan sebagai

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_i}\approx\frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2\Delta x}$$ (Elaydi, 2005).

## 2.5. Konsistensi Dinamik

Solusi yang diberikan oleh sistem dinamik kontinu maupun diskrit dapat mendekati atau menjauhi titik kesetimbangan. Analisis sistem dinamik meliputi penyelidikan perilaku solusi di sekitar titik kesetimbangan.

Jika suatu skema numerik memiliki titik kesetimbangan dengan sifat kestabilan yang sama dengan sistem kontinunya, maka skema numerik tersebut dikatakan konsisten secara dinamik (Dimitrov dan Kojouharov, 2007).

## 2.6. Angka Reproduksi Dasar ($R_0$)

Untuk mengetahui dinamika penyebaran penyakit, digunakan suatu angka yang menjadi ukuran apakah dalam suatu populasi terjadi endemik atau tidak. Angka tersebut dikenal sebagai angka reproduksi dasar $(R_0)$. Ketika $R_0<1$ setiap individu terinfeksi akan menyebabkan kurang dari satu infeksi baru, sehingga dalam populasi tidak terjadi endemik dan untuk jangka waktu yang lama populasi akan terbebas dari penyakit. Sebaliknya, jika $R_0>1$ maka setiap individu terinfeksi akan menyebabkan lebih dari satu infeksi baru sehingga terjadi endemik.

## 2.7. Persamaan Diferensial dengan *Delay*

Persamaan diferensial dengan *delay* dinyatakan dalam bentuk

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dt^k} x(t) + \sum_{k=0}^{m} b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t-\tau) = 0$$

di mana $\tau$ adalah *delay* dan $\frac{d^0}{dt^0} x(t) = x(t)$.

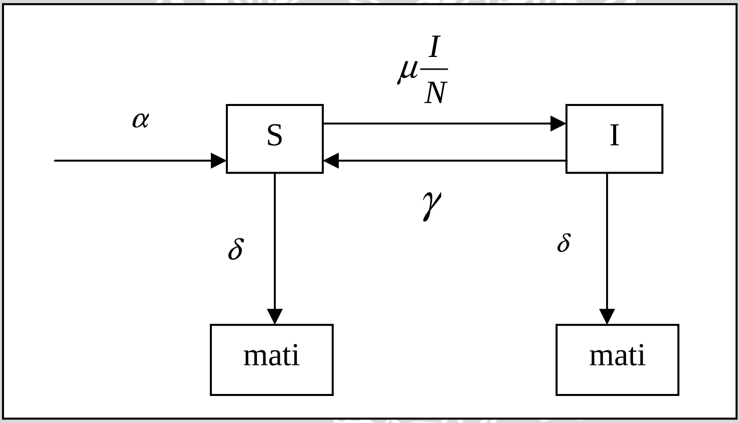
Sistem persamaan diferensial dengan *delay* dinyatakan sebagai

$$\begin{gathered}\dot{x}_1(t) = f_1(x(t), x(t-\tau)) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x(t), x(t-\tau))\end{gathered}$$

(Kuang, 1993).

## 2.8. Sistem Dinamik Kontinu Model SIS dengan *Delay*

Pada bagian ini dibahas model epidemik SIS dengan *delay*. Populasi yang digambarkan dalam model kompartemen meliputi subpopulasi yang rentan (S) dan subpopulasi yang terinfeksi (I). Perubahan kepadatan populasi pada masing-masing kompartemen disajikan pada Gambar 2.1.




**Gambar 2.1.** Diagram kompartemen Model SIS

Pada Model SIS dengan *delay* ini, digunakan parameter-parameter sebagai berikut.

$N(t)$ = total populasi pada waktu t,

$S(t)$ = kepadatan subpopulasi yang rentan pada waktu t,

$I(t)$ = kepadatan subpopulasi yang terinfeksi pada waktu t

$\alpha$ = $B(N(t-\tau))e^{-\delta_1 \tau}$,

$B(N)$ = laju kelahiran,

$\tau$ = waktu tunda (*delay*),

$\delta_1$ = laju kematian menuju tahap dewasa,

$\mu$ = laju kontak antara subpopulasi terinfeksi dan subpopulasi rentan

$\gamma$ = laju penyembuhan,

$\delta$ = laju kematian alami.

Dengan demikian model SIS dengan *delay* yang dikonstruksikan pada Gambar 2.1 memenuhi sistem persamaan diferensial tak-linear.

$$\begin{aligned}
\dot{S}(t) &= B(N(t-\tau))N(t-\tau)e^{-\delta_1 \tau} - \delta S(t) - \mu S(t)\frac{I(t)}{N(t)} + \gamma I(t) \\
\dot{I}(t) &= \mu S(t)\frac{I(t)}{N(t)} - (\gamma+\delta)I(t) \\
\dot{N}(t) &= B(N(t-\tau))N(t-\tau)e^{-\delta_1 \tau} - \delta N(t).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Jika diambil $B(N(t)) = pe^{-aN(t)}$ dan $\delta_1 = 0$, dengan $p$ adalah laju pertumbuhan maksimum dan $a$ adalah parameter model yang mengontrol laju pertumbuhan agar seimbang, maka model menjadi lebih sederhana dan mudah dianalisis. Dengan demikian persamaan (2.7) menjadi persamaan berikut (Bolker, 2007).

$$\begin{aligned}
\dot{S}(t) &= pN(t-\tau)e^{-aN(t-\tau)} - \delta S(t) - \mu S(t)\frac{I(t)}{N(t)} + \gamma I(t) \\
\dot{I}(t) &= \mu(N(t) - I(t))\frac{I(t)}{N(t)} - (\gamma+\delta)I(t) \\
\dot{N}(t) &= pN(t-\tau)e^{-aN(t-\tau)} - \delta N(t),
\end{aligned} \tag{2.8}$$

karena total populasi $N(t) = I(t) + S(t)$ dan parameter $S(t)$ tidak muncul pada dua persamaan terakhir dari persamaan (2.8), maka cukup di analisis sistem dengan dua persamaan berikut,

$$
\begin{aligned}
\dot{I}(t) &= \mu\left(N(t)-I(t)\right)\frac{I(t)}{N(t)}-(\gamma+\delta)I(t) \\
\dot{N}(t) &= pN(t-\tau)e^{-aN(t-\tau)}-\delta N(t).
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

Sistem dinamik kontinu model SIS dengan *delay* seperti persamaan (2.9) memiliki tiga titik kesetimbangan dengan $R_0=\dfrac{\mu}{\delta+\gamma}$. Titik kesetimbangan yang pertama $\mathrm{E}_0=\left(I_0^*,N_0^*\right)=(0,0)$. Titik kesetimbangan yang kedua $\mathrm{E}_1=\left(I_1^*,N_1^*\right)=\left(0,\dfrac{1}{a}\ln\dfrac{p}{\delta}\right)$ yang bersifat stabil asimtotik jika $R_0<1$, yaitu proporsi individu yang terinfeksi dalam suatu populasi bernilai nol. Hal ini menunjukkan bahwa tidak terdapat individu yang terinfeksi. Artinya, tidak terjadi kontak antara individu yang rentan dan individu yang terinfeksi. Titik kesetimbangan pada keadaan ini disebut titik kesetimbangan bebas penyakit. Titik kesetimbangan yang ketiga adalah

$$
\mathrm{E}_2=\left(I_2^*,N_2^*\right)=\left(\left(1-\frac{1}{R_0}\right)N^*,\frac{1}{a}\ln\frac{p}{\delta}\right)
$$

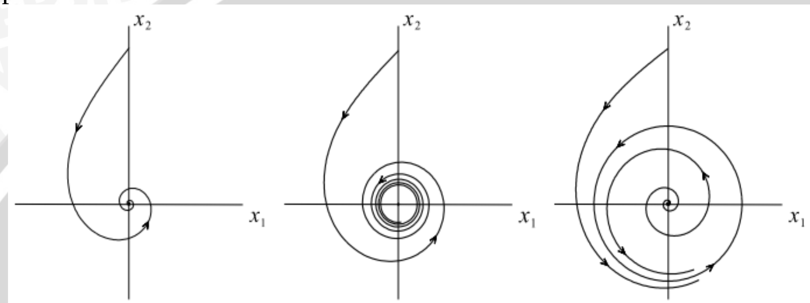
untuk $R_0>1$, yaitu setiap individu terinfeksi akan menyebabkan lebih dari satu infeksi baru sehingga menjadi suatu endemik. Oleh karena itu titik kesetimbangan pada keadaan ini disebut dengan titik kesetimbangan endemik yang bersifat stabil asimtotik (Ekkachai, 2010).

## 2.9. Bifurkasi Hopf

Bifurkasi Hopf adalah berubahnya jenis kestabilan suatu titik kesetimbangan suatu persamaan diferensial dikarenakan munculnya sepasang nilai eigen yang bernilai imajiner seiring dengan perubahan nilai parameter. Misalkan terdapat titik kesetimbangan dengan nilai eigen $\lambda(\tau)=\xi(\tau)\pm i\eta(\tau)$. Bila terdapat $\tau_0$, sehingga $\xi(\tau_0)=0$ dan $\eta(\tau_0)=\eta_0$, maka jenis kestabilan dari titik kesetimbangan akan berubah bila $\tau$ berubah di sekitar $\tau_0$ (Robinson, 2004).

### 2.9.1. Bifurkasi Hopf *Supercritical*

Jika terdapat $\tau = \tau_0$ sehingga membentuk suatu orbit periodik stabil pada sistem ketika $\tau$ melewati titik kritis $\tau_0$ maka sistem tersebut mengalami bifurkasi Hopf *Supercritical* yang ditunjukkan pada Gambar 2.2.

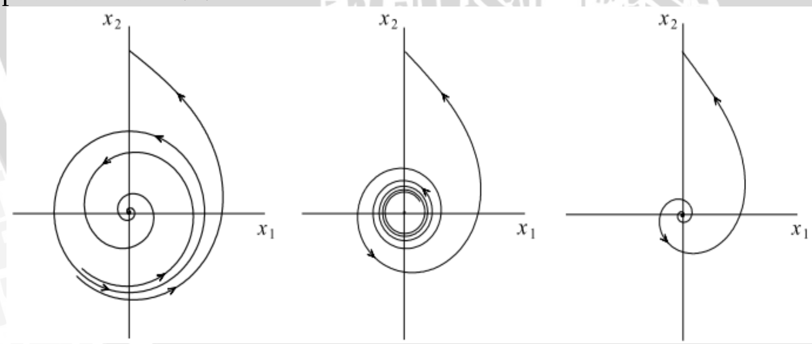



$\tau < \tau_0$ $\tau = \tau_0$ $\tau > \tau_0$

**Gambar 2.2.** Bifurkasi Hopf *supercritical* (*Kuznetsov*, *1998*).

### 2.9.2. Bifurkasi Hopf *Subcritical*

Jika terdapat $\tau = \tau_0$ sehingga membentuk suatu orbit periodik tak-stabil pada sistem ketika $\tau$ melewati titik kritis $\tau_0$ maka sistem tersebut mengalami bifurkasi Hopf *Subcritical* yang ditunjukkan pada Gambar 2.3.




$\tau < \tau_0$ $\tau = \tau_0$ $\tau > \tau_0$

**Gambar 2.3.** Bifurkasi Hopf *subcritical* (*Kuznetsov*, *1998*).

# BAB III
# HASIL DAN PEMBAHASAN

## 3.1. Diskritisasi Model SIS dengan *Delay*

$$\dot{I}(t) = \mu(N(t) - I(t))\frac{I(t)}{N(t)} - (\gamma + \delta)I(t)$$
$$\dot{N}(t) = pN(t-\tau)e^{-aN(t-\tau)} - \delta N(t) \qquad (3.1)$$
$$I(0), N(0) \geq 0.$$

Secara analitik model SIS dengan *delay* relatif sulit untuk diselesaikan, oleh karena itu untuk menyelesaikan akan digunakan formulasi waktu diskrit untuk memperoleh solusi numerik. Pada skripsi ini digunakan metode Euler untuk menyelesaikan persamaan (3.1). Dalam hal ini bentuk $\dot{I}$ dan $\dot{N}$ dihampiri dengan beda maju.

$$\dot{y}(t) \cong \frac{y_{n+1} - y_n}{h}, \quad y \in \Re^n$$

dimana, $n = 0,1,2,\ldots, y_n = y(t_n)$, $t_n = t_0 + nh$ dan $h$ adalah ukuran langkah. Jika $I_n = I(t_n)$, $N_n = N(t_n)$, dan $k = \frac{\tau}{h}$, $k = \mathrm{Z}^+$ maka persamaan SIS diskrit dengan *delay* adalah sebagai berikut

$$\frac{I_{n+1} - I_n}{h} = \mu(N_n - I_n)\frac{I_n}{N_n} - (\delta + \gamma)I_n$$
$$\frac{N_{n+1} - N_n}{h} = pN_{n-k}e^{-aN_{n-k}} - \delta N_n. \qquad (3.2)$$

Persamaan (3.2) dapat ditulis

$$I_{n+1} = (1 + h\mu - h(\delta + \gamma))I_n - h\mu\frac{I_n^2}{N_n}$$
$$N_{n+1} = hpN_{n-k}e^{-aN_{n-k}} + (1 - h\delta)N_n \qquad (3.3)$$
$$I(0), N(0) \geq 0.$$

Sifat-sifat dinamik dari model kontinu SIS dengan *delay* telah dijelaskan pada Subbab 2.8. Berikut ini akan diselidiki apakah persamaan diskrit dengan metode Euler dapat mempertahankan kekonsistenan terhadap persamaan diferensialnya.

## 3.2. Titik Kesetimbangan

Berikut akan ditunjukkan bahwa persamaan SIS diskrit mempunyai titik kesetimbangan yang sama dengan persamaan diferensialnya. Misalkan $\left(I^*, N^*\right)$ adalah titik kesetimbangan. Substitusi $I_n = I^*$ dan $N_n = N^*, \forall n$ ke persamaan (3.3) menghasilkan

$$
\begin{aligned}
I^* &= (1 + h\mu - h(\delta+\gamma))I^* - h\mu \frac{(I^*)^2}{N^*} \\
&\Leftrightarrow (1-(1+h\mu - h(\delta+\gamma)))I^* + h\mu\frac{(I^*)^2}{N^*} = 0 \\
&\Leftrightarrow (-h\mu + h(\delta+\gamma))I^* + h\mu\frac{(I^*)^2}{N^*} = 0 \\
&\Leftrightarrow -hI^*\left(\mu - (\delta+\gamma) - \mu\frac{I^*}{N^*}\right) = 0.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Jika $R_0 = \dfrac{\mu}{\delta+\gamma}$ maka persamaan (3.4) menjadi

$$\Leftrightarrow -h\mu I^*\left(1 - \frac{1}{R_0} - \frac{I^*}{N^*}\right) = 0, \tag{3.5}$$

sehingga diperoleh solusi $I^* = 0$ atau $I^* = \left(1 - \dfrac{1}{R_0}\right)N^*$.

Dengan mensubstitusikan $I^* = 0$ ke persamaan (3.3) diperoleh

$$
\begin{aligned}
N^* &= hpN^* e^{-aN^*} + (1-h\delta)N^* \\
&\Leftrightarrow (1-(1-h\delta))N^* - hpN^* e^{-aN^*} = 0 \\
&\Leftrightarrow h\delta N^* - hpN^* e^{-aN^*} = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\delta - pe^{-aN^*}\right)hN^* = 0.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Dari persamaan (3.6) dihasilkan solusi $N^* = 0$ atau $N^* = \dfrac{1}{a}\ln\dfrac{p}{\delta}$. Berdasarkan perhitungan tersebut didapatkan dua titik kesetimbangan, $E_0 = \left(I_0^*, N_0^*\right) = (0,0)$ dan $E_1 = \left(I_1^*, N_1^*\right) = \left(0, \dfrac{1}{a}\ln\dfrac{p}{\delta}\right)$.

Selanjutnya substitusi $I^* = \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) N^*$ ke persamaan (3.3) menghasilkan

$$\begin{aligned} N^* &= hpN^* e^{-aN^*} + (1 - h\delta) N^* \\ \Leftrightarrow (1 - (1 - h\delta)) N^* - hpN^* e^{-aN^*} &= 0 \\ \Leftrightarrow h\delta N^* - hpN^* e^{-aN^*} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\delta - pe^{-aN^*}\right) hN^* &= 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Dengan demikian diperoleh solusi $N^* = 0$ atau $N^* = \frac{1}{a} \ln \frac{p}{\delta}$ .

Jadi, persamaan SIS diskrit dengan *delay* mempunyai titik kesetimbangan lain, yaitu $E_2 = (I_2^*, N_2^*) = \left(\left(1 - \frac{1}{R_0}\right) N^*, \frac{1}{a} \ln \frac{p}{\delta}\right)$,

dengan $N^* = \frac{1}{a} \ln \frac{p}{\delta}$.

Pada skripsi akan dianalisis dua titik kesetimbangan, yaitu $E_1 = (I_1^*, N_1^*) = \left(0, \frac{1}{a} \ln \frac{p}{\delta}\right)$ dan $E_2 = (I_2^*, N_2^*) = \left(\left(1 - \frac{1}{R_0}\right) N^*, \frac{1}{a} \ln \frac{p}{\delta}\right)$.

## 3.3. Kestabilan Titik Kesetimbangan

Pada bagian ini akan dilakukan analisis kestabilan titik kesetimbangan persamaan SIS diskrit dengan *delay*.

Sistem persamaan (3.3) merupakan sistem tak-linier sehingga perlu dilakukan linierisasi untuk memeriksa kestabilan titik-titik kesetimbangannya sebagaimana telah dijelaskan dalam Subbab 2.3. Jika $I_n = I^* + \varepsilon u_n$, $N_n = N^* + \varepsilon v_n$, $\varepsilon << 1$, dan $(I^*, N^*)$ adalah titik kesetimbangan, maka sistem (3.3) menjadi

$$I^* + \varepsilon u_{n+1} = (1 + h\mu - h(\delta + \gamma))(I^* + \varepsilon u_n) - h\mu \frac{(I^* + \varepsilon u_n)^2}{(N^* + \varepsilon v_n)}$$

$$\Leftrightarrow I^* + \varepsilon u_{n+1} = (1 + h\mu - h(\delta + \gamma)) I^* + (1 + h\mu - h(\delta + \gamma)) \varepsilon u_n$$

$$- h\mu \left( \frac{(I^*)^2}{N^*} + \frac{2\varepsilon I^*}{N^*} u_n - \frac{\varepsilon (I^*)^2}{(N^*)^2} v_n \right)$$

$$\Leftrightarrow I^* + \varepsilon u_{n+1} = (1 + h\mu - h(\delta+\gamma))I^* - h\mu\frac{(I^*)^2}{N^*} + (1 + h\mu - h(\delta+\gamma))\varepsilon u_n$$

$$-h\mu\left(\frac{2\varepsilon I^*}{N^*}u_n - \frac{\varepsilon(I^*)^2}{(N^*)^2}v_n\right)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon u_{n+1} = (1 + h\mu - h(\delta+\gamma))\varepsilon u_n - h\mu\left(\frac{2I^*}{N^*}u_n - \frac{(I^*)^2}{(N^*)^2}v_n\right)\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = (1 + h\mu - h(\delta+\gamma))u_n - h\mu\left(\frac{2I^*}{N^*}u_n - \frac{(I^*)^2}{(N^*)^2}v_n\right)$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = \left((1 + h\mu - h(\delta+\gamma)) - 2h\mu\frac{I^*}{N^*}\right)u_n + \left(h\mu\frac{(I^*)^2}{(N^*)^2}\right)v_n.$$

Jika $R_0 = \dfrac{\mu}{\delta+\gamma}$ maka diperoleh

$$u_{n+1} = \left(1 + h\mu\left(1 - \frac{1}{R_0}\right) - 2h\mu\frac{I^*}{N^*}\right)u_n + \left(h\mu\frac{(I^*)^2}{(N^*)^2}\right)v_n.$$

Secara analisis juga diperoleh

$$N^* + \varepsilon v_{n+1} = hp(N^* + \varepsilon v_{n-k})e^{-a(N^* + \varepsilon v_{n-k})} + (1 - h\delta)(N^* + \varepsilon v_n)$$

$$\Leftrightarrow N^* + \varepsilon v_{n+1} = hp(N^* + \varepsilon v_{n-k})e^{-aN^*}e^{-a\varepsilon v_{n-k}} + (1 - h\delta)(N^* + \varepsilon v_n)$$

$$\Leftrightarrow N^* + \varepsilon v_{n+1} = hp(N^* + \varepsilon v_{n-k})e^{-aN^*}(1 - a\varepsilon v_{n-k}) + (1 - h\delta)(N^* + \varepsilon v_n)$$

$$\Leftrightarrow N^* + \varepsilon v_{n+1} = hp(N^* - aN^*\varepsilon v_{n-k} + \varepsilon v_{n-k})e^{-aN^*} + (1 - h\delta)(N^* + \varepsilon v_n)$$

$$\Leftrightarrow N^* + \varepsilon v_{n+1} = hpN^*e^{-aN^*} + hp(1 - aN^*)\varepsilon e^{-aN^*}v_{n-k} + (1 - h\delta)(N^* + \varepsilon v_n)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon v_{n+1} = hp(1 - aN^*)\varepsilon e^{-aN^*}v_{n-k} + (1 - h\delta)\varepsilon v_n$$

$$\Leftrightarrow v_{n+1} = hp(1 - aN^*)e^{-aN^*}v_{n-k} + (1 - h\delta)v_n.$$

Dengan demikian persamaan (3.3) menghasilkan

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \left(1 + h\mu\left(1 - \frac{1}{R_0}\right) - 2h\mu\frac{I^*}{N^*}\right)u_n + \left(h\mu\frac{(I^*)^2}{(N^*)^2}\right)v_n \\ v_{n+1} &= (1 - h\delta)v_n + hpe^{-aN^*}(1 - aN^*)v_{n-k}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Jika $\vec{x}_n = \begin{bmatrix} x_n^0 \\ x_n^1 \\ \vdots \\ x_n^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_n \\ v_{n-1} \\ \vdots \\ v_{n-k} \end{bmatrix}$

maka persamaan (3.8) menghasilkan sistem

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \left(1 + h\mu\left(1 - \frac{1}{R_0}\right) - 2h\mu\frac{I^*}{N^*}\right)u_n + \left(h\mu\frac{(I^*)^2}{(N^*)^2}\right)x_n^0, \\ x_{n+1}^0 &= (1 - h\delta)x_n^0 + hpe^{-aN^*}(1 - aN^*)x_n^k \\ x_{n+1}^1 &= x_n^0, \\ &\vdots \\ x_{n+1}^k &= x_n^{k-1}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

dengan $X_n = \left(u_n, x_n^0, x_n^1, \ldots, x_n^{k-1}, x_n^k\right)^T$. Akibatnya persamaan (3.9) dapat ditulis sebagai $X_{n+1} = A(X^*)X_n$, $X^* = \left(I^*, N^*, N^*, \ldots, N^*\right)^T$ dan

$$A(X^*) = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_{2,2} & 0 & \cdots & 0 & A_{2,k+2} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned} A_{1,1} &= \left(1 + h\mu\left(1 - \frac{1}{R_0}\right) - 2h\mu\frac{I^*}{N^*}\right) \\ A_{1,2} &= h\mu\frac{(I^*)^2}{(N^*)^2} \\ A_{2,2} &= 1 - h\delta \\ A_{2,k+2} &= hpe^{-aN^*}(1 - aN^*). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Matriks $A$ berukuran $(k+2)\times(k+2)$ dan nilai eigen matriks $A$ adalah solusi persamaan karakteristik $\left|A(X^*) - I\lambda\right| = 0$. Perhatikan bahwa

$$\left|A(X^*)-I\lambda\right| = \begin{vmatrix} A_{1,1}-\lambda & A_{1,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_{2,2}-\lambda & 0 & \cdots & 0 & A_{2,k+2} \\ 0 & 1 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

sehingga persamaan karakteristiknya adalah

$$(A_{1,1}-\lambda)\left((A_{2,2}-\lambda)\lambda^k + A_{2,k+2}\right) = 0\,.$$

Akar-akar karakteristik yang diperoleh

$$\lambda_1 = A_{1,1}\,, \tag{3.11}$$

dan akar karakteristik yang lain memenuhi persamaan berikut

$$\begin{aligned} \phi(\lambda) &= \left((A_{2,2}-\lambda)\lambda^k + A_{2,k+2}\right) \\ \Leftrightarrow \lambda^{k+1} &- A_{2,2}\lambda^k - A_{2,k+2} = 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

### 3.3.1. Kestabilan Titik $E_1 = (I_1^*, N_1^*) = \left(0, \frac{1}{a}\ln\frac{p}{\delta}\right)$

Dengan mensubstitusikan $I^* = 0$ dan $N^* = \frac{1}{a}\ln\frac{p}{\delta}$ ke persamaan (3.10) diperoleh

$$\begin{aligned} A_{1,1} &= 1 + h\mu\left(1-\frac{1}{R_0}\right) \\ A_{1,2} &= h\mu\frac{(I^*)^2}{(N^*)^2} = 0 \\ A_{2,2} &= 1 - h\delta \\ A_{2,k+2} &= hpe^{-aN^*}(1-aN^*) \\ &= hpe^{-\ln\frac{p}{\delta}}\left(1-\ln\frac{p}{\delta}\right) \\ &= \delta h\left(1-\ln\frac{p}{\delta}\right). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Substitusi persamaan (3.13) ke persamaan (3.11) dan persamaan (3.12) menghasilkan persamaan karakteristik

$$\lambda_1 = 1 + h\mu\left(1 - \frac{1}{R_0}\right), \tag{3.14}$$

dan persamaan karakteristik yang lain memenuhi persamaan berikut

$$\lambda_{k+1} = \lambda^{k+1} - (1 - h\delta)\lambda^k - \delta h\left(1 - \ln\frac{p}{\delta}\right). \tag{3.15}$$

Berdasarkan **Lemma 2.1.** titik kesetimbangan akan bersifat stabil asimtotik jika persamaan (3.14) memenuhi,

$$|\lambda_1| < 1$$

$$\left|1 + h\mu\left(1 - \frac{1}{R_0}\right)\right| < 1$$

$$-1 < 1 + h\mu\left(1 - \frac{1}{R_0}\right) < 1$$

$$-2 < h\mu\left(1 - \frac{1}{R_0}\right) < 0 \quad .$$

Karena $R_0 < 1$ dan $R_0 = \dfrac{\mu}{\delta + \gamma}$, maka

$$0 < h\mu < \frac{2}{\frac{1}{R_0} - 1} = \frac{2\mu}{(\delta + \gamma) - \mu}$$

$$0 < h\mu < \frac{2\mu}{(\delta + \gamma) - \mu}$$

$$0 < h < \frac{2}{(\delta + \gamma) - \mu} \, .$$

Berdasarkan **Lemma 2.2.** titik kesetimbangan akan bersifat stabil asimtotik jika persamaan (3.15) memenuhi,

$$\lambda_{k+1} = \lambda^{k+1} - (1 - h\delta)\lambda^k - \delta h\left(1 - \ln\frac{p}{\delta}\right)$$

$$|1 - h\delta| + \left|\delta h\left(1 - \ln\frac{p}{\delta}\right)\right| < 1.$$

Jika $1-h\delta>0$, maka $1-h\delta+\left|\delta h\left(1-\ln\frac{p}{\delta}\right)\right|<1$,

$$\left|\delta h\left(1-\ln\frac{p}{\delta}\right)\right|<h\delta$$

$$-h\delta<\delta h\left(1-\ln\frac{p}{\delta}\right)<h\delta$$

$$-1<\left(1-\ln\frac{p}{\delta}\right)<1$$

$$0<\ln\frac{p}{\delta}<2$$

$$1<\frac{p}{\delta}<e^2.$$

Titik kesetimbangan $\left(I_1^*,N_1^*\right)=\left(0,\frac{1}{a}\ln\frac{p}{\delta}\right)$ akan stabil jika $h<\min\left\{\frac{1}{\delta},\frac{2}{(\delta+\gamma)-\mu}\right\}$ dan $1<\frac{p}{\delta}<e^2$, yaitu dengan kondisi $R_0<1$. Keadaan ini disebut bebas penyakit.

### 3.3.2. Kestabilan Titik $E_2=\left(I_2^*,N_2^*\right)=\left(\left(1-\frac{1}{R_0}\right)N^*,\frac{1}{a}\ln\frac{p}{\delta}\right)$

Dengan mensubstitusikan $I^*=\left(1-\frac{1}{R_0}\right)N^*$ dan $N^*=\frac{1}{a}\ln\frac{p}{\delta}$ ke persamaan (3.10) dihasilkan,

$$A_{1,1}=\left(1+h\mu\left(1-\frac{1}{R_0}\right)-2h\mu\frac{I^*}{N^*}\right)$$

$$=1+h\mu\left(1-\frac{1}{R_0}\right)-2h\mu\frac{\left(1-\frac{1}{R_0}\right)N^*}{N^*}$$

$$=1+h\mu\left(1-\frac{1}{R_0}\right)-2h\mu\left(1-\frac{1}{R_0}\right)$$

$$=1-h\mu\left(1-\frac{1}{R_0}\right)$$

$$A_{1,2}=h\mu\frac{\left(I^*\right)^2}{\left(N^*\right)^2}$$

$$A_{2,2}=1-h\delta \tag{3.16}$$

$$A_{2,k+2}=hpe^{-aN^*}\left(1-aN^*\right).$$

$$=hpe^{-\ln\frac{p}{\delta}}\left(1-\ln\frac{p}{\delta}\right)$$

$$=\frac{\delta}{p}hp\left(1-\ln\frac{p}{\delta}\right)$$

$$=\delta h\left(1-\ln\frac{p}{\delta}\right).$$

Substitusi persamaan (3.16) ke persamaan (3.11) dan persamaan (3.12) menghasilkan persamaan karakteristik

$$\lambda_1=1-h\mu\left(1-\frac{1}{R_0}\right), \tag{3.17}$$

dan persamaan karakteristik yang lain memenuhi persamaan berikut

$$\lambda_{k+1}=\lambda^{k+1}-\left(1-h\delta\right)\lambda^k-\delta h\left(1-\ln\frac{p}{\delta}\right) \tag{3.18}$$

Berdasarkan **Lemma 2.1.** titik kesetimbangan akan bersifat stabil asimtotik jika persamaan (3.17) memenuhi,

$$\left|\lambda_1\right|<1$$

$$\left|1-h\mu\left(1-\frac{1}{R_0}\right)\right|<1$$

$$-1<1-h\mu\left(1-\frac{1}{R_0}\right)<1$$

$$0 < h\mu\left(1 - \frac{1}{R_0}\right) < 2 \quad .$$

Karena $R_0 > 1$ dan $R_0 = \dfrac{\mu}{\delta + \gamma}$, maka

$$0 < h\mu < \frac{2}{1 - \frac{1}{R_0}} = \frac{2\mu}{\mu - (\delta + \gamma)}$$

$$0 < h\mu < \frac{2\mu}{\mu - (\delta + \gamma)}$$

$$0 < h < \frac{2}{\mu - (\delta + \gamma)} \, .$$

Berdasarkan **Lemma 2.2.** maka titik kesetimbangan akan bersifat stabil asimtotik jika persamaan (3.18) memenuhi,

$$\lambda_{k+1} = \lambda^{k+1} - (1 - h\delta)\lambda^{k} - \delta h\left(1 - \ln\frac{p}{\delta}\right)$$

$$|1 - h\delta| + \left|\delta h\left(1 - \ln\frac{p}{\delta}\right)\right| < 1.$$

Jika $1 - h\delta > 0$, maka $1 - h\delta + \left|\delta h\left(1 - \ln\frac{p}{\delta}\right)\right| < 1$,

$$\left|\delta h\left(1 - \ln\frac{p}{\delta}\right)\right| < h\delta$$

$$-h\delta < \delta h\left(1 - \ln\frac{p}{\delta}\right) < h\delta$$

$$-1 < \left(1 - \ln\frac{p}{\delta}\right) < 1$$

$$0 < \ln\frac{p}{\delta} < 2$$

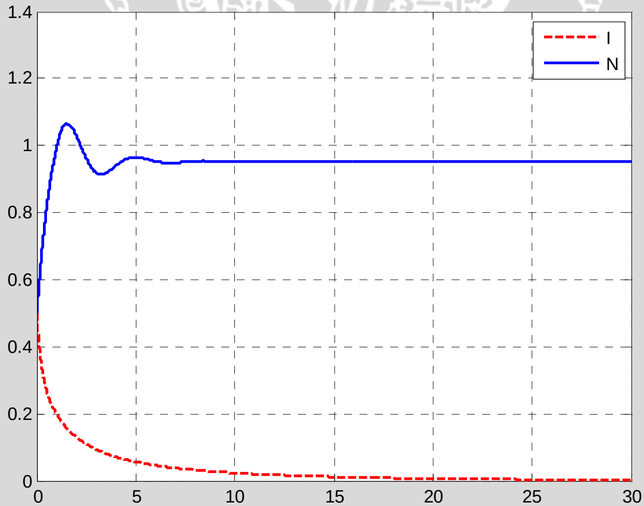
$$1 < \frac{p}{\delta} < e^{2}.$$

Titik kesetimbangan $\left(I_2^*, N_2^*\right) = \left(\left(1 - \frac{1}{R_0}\right)N^*, \frac{1}{a}\ln\frac{p}{\delta}\right)$ akan stabil jika $h < \min\left\{\frac{1}{\delta}, \frac{2}{\mu-(\delta+\gamma)}\right\}$ dan $1 < \frac{p}{\delta} < e^2$, yaitu dengan kondisi $R_0 > 1$. Keadaan ini disebut endemik.

## 3.4. Simulasi Numerik

### 3.4.1. Simulasi Numerik untuk Titik Kesetimbangan Kondisi $R_0 < 1$ dan $\tau = 1.0$ $(p/\delta < e^2)$

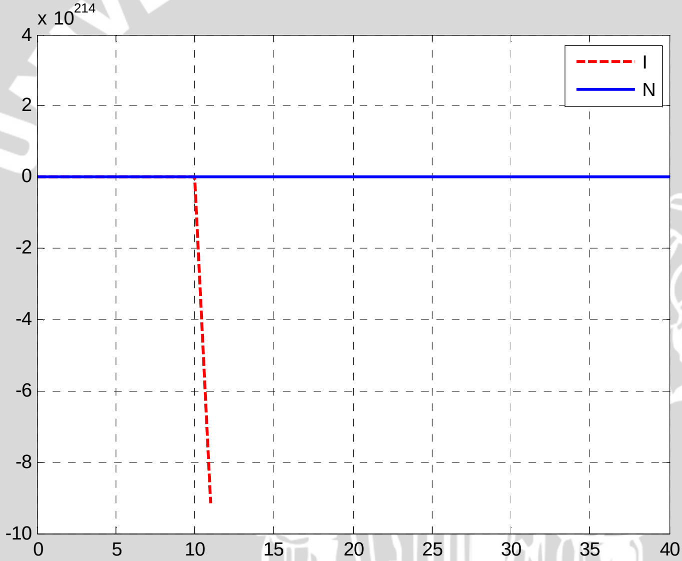
Pada Gambar 3.1 ditunjukkan solusi persamaan SIS diskrit dengan nilai parameter $p = e^2$, $\delta = 1.1$, $a = 2.0$, $\mu = 2.0$, $\gamma = 1.0$, $\tau = 1.0$, $(I_0, N_n) = (0.5, 0.5)$ $n = -k, -k+1, -k+2, \ldots, 0$, $R_0 = 0.9524$, dan $h = 0.01$ $(h < \min(0.909, 20))$. Berdasarkan hasil tersebut dapat dilihat bahwa persamaan SIS *delay* yang diskrit mempunyai solusi yang konvergen menuju titik kesetimbangan (di titik (0,0.9523)).




**Gambar 3.1.** Solusi numerik model SIS untuk $R_0 < 1$ dan $\tau = 1.0$

### 3.4.2. Simulasi Numerik untuk Titik Kesetimbangan Kondisi $R_0 < 1$, h=1 dan $\tau = 1.0$ $(p/\delta < e^2)$

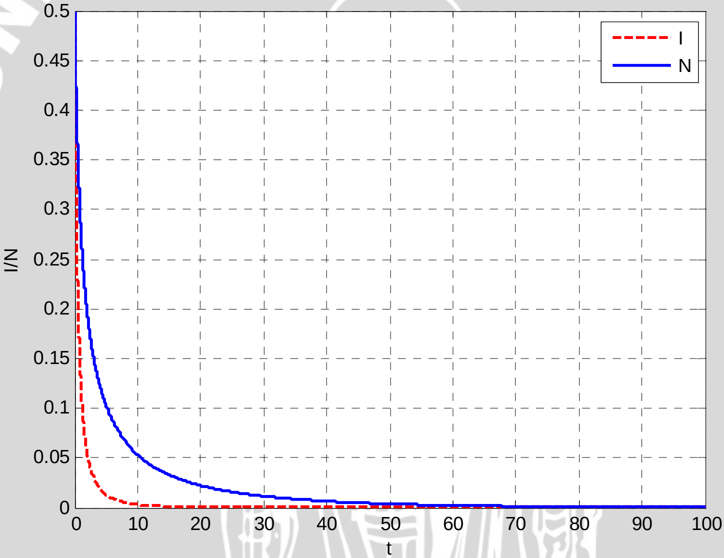
Pada Gambar 3.2 ditunjukkan solusi persamaan SIS diskrit dengan nilai parameter $p = e^2$, $\delta = 1.1$, $a = 2.0$, $\mu = 2.0$, $\gamma = 1.0$, dan $\tau = 1.0$, $(I_0, N_n) = (0.5, 0.5)$ $n = -k, -k+1, -k+2, \ldots, 0$, $R_0 = 0.9524$, $h = 1.0$ (tidak memenuhi syarat stabil asimtotik) dan $h < \min(0.909, 20)$. Dari hasil tersebut dapat dilihat bahwa persamaan SIS diskrit mempunyai penyelesaian negatif dan tidak konvergen.




**Gambar 3.2.** Solusi numerik model SIS untuk $R_0 < 1$, $\tau = 1.0$ dan $h = 1.0$

### 3.4.3. Simulasi Numerik untuk Titik Kesetimbangan Kondisi $R_0 < 1$ dan $\tau = 1.0$ $(p/\delta < 1)$

Pada simulasi Gambar 3.3 nilai parameter yang digunakan adalah $p = 1.0$, $\delta = 1.1$, $\frac{p}{\delta} < 1$ yang tidak memenuhi syarat kestabilan asimtotik, $a = 2.0$, $\mu = 2.0$, $\gamma = 1.0$, $\tau = 1.0$, $(I_0, N_n) = (0.5, 0.5)$ $n = -k, -k+1, -k+2, \ldots, 0$, $R_0 = 0.9524$ dan $h = 0.01$ $(h < \min(0.909, 20))$. Berdasarkan hasil tersebut dapat dilihat bahwa persamaan SIS diskrit dengan *delay* mempunyai solusi yang konvergen menuju titik $(0,0)$.

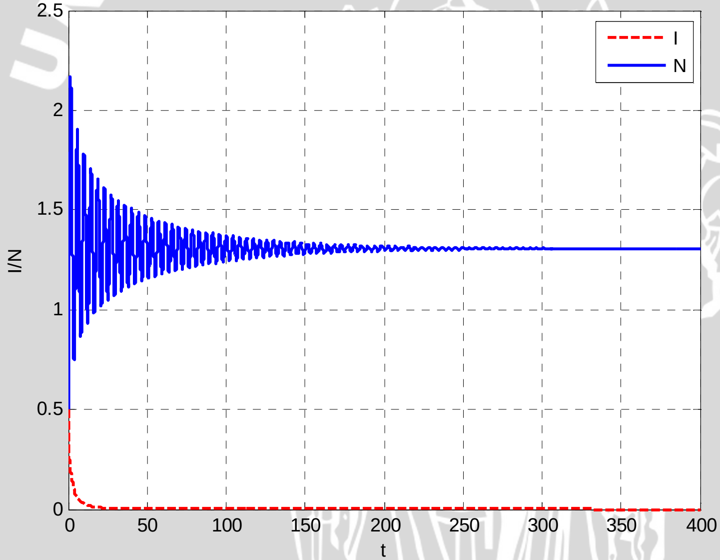



**Gambar 3.3.** Solusi numerik model SIS untuk

$R_0 < 1$, $\tau = 1.0$, dan $\frac{p}{\delta} < 1$

### 3.4.4. Simulasi Numerik untuk Titik Kesetimbangan Kondisi $R_0 < 1$ dan $\tau = 1.5$ $(p/\delta > e^2)$

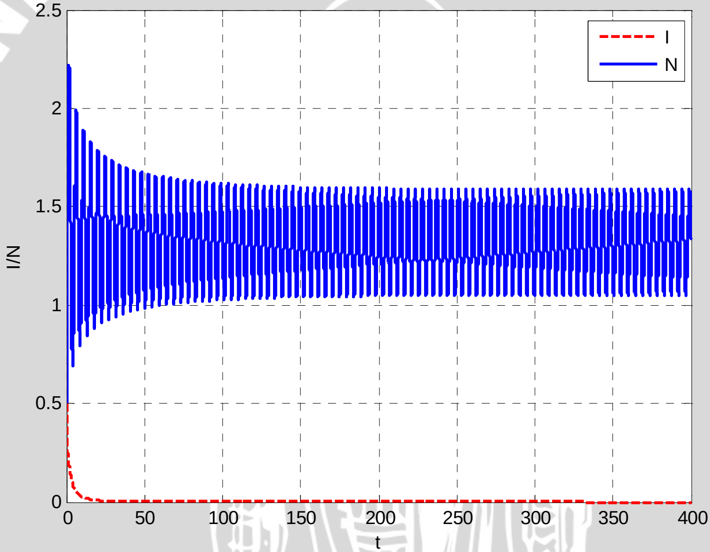
Pada Gambar 3.4 ditunjukkan solusi persamaan SIS diskrit dengan nilai parameter $p = 15$, $\delta = 1.1$, $\frac{p}{\delta} > e^2$ (tidak memenuhi syarat stabil asimtotik), $a = 2.0$, $\mu = 2.0$, $\gamma = 1.0$, $\tau = 1.5$, $(I_0, N_n) = (0.5, 0.5)$ $n = -k, -k+1, -k+2, \ldots, 0,$ $R_0 = 0.9524$ dan $h = 0.01$ $(h < \min(0.909, 20))$. Berdasarkan hasil tersebut dapat dilihat bahwa persamaan SIS diskrit dengan *delay* mempunyai solusi yang konvergen menuju titik kesetimbangan (di titik (0,1.3063)).




**Gambar 3.4.** Solusi numerik model SIS untuk $R_0 < 1$, $\tau = 1.5$, dan $\frac{p}{\delta} > e^2$

### 3.4.5. Simulasi Numerik untuk Titik Kesetimbangan Kondisi $R_0 < 1$ dan $\tau = 1.65$ $(p/\delta > e^2)$

Solusi persamaan SIS diskrit ditunjukkan Gambar 3.5 dengan nilai parameter $p = 15$, $\delta = 1.1$, $\frac{p}{\delta} > e^2$ yang tidak memenuhi syarat kestabilan asimtotik, $a = 2.0$, $\mu = 2.0$, $\gamma = 1.0$, $\tau = 1.65$, $(I_0, N_n) = (0.5, 0.5)$ $n = -k, -k+1, -k+2, \ldots, 0$, $R_0 = 0.9524$ dan $h = 0.01$ $(h < \min(0.909, 20))$. Dari hasil tersebut dapat dilihat bahwa persamaan SIS diskrit dengan *delay* mempunyai solusi yang periodik.




**Gambar 3.5.** Solusi numerik model SIS untuk

$R_0 < 1$, $\tau = 1.65$, dan $\frac{p}{\delta} > e^2$

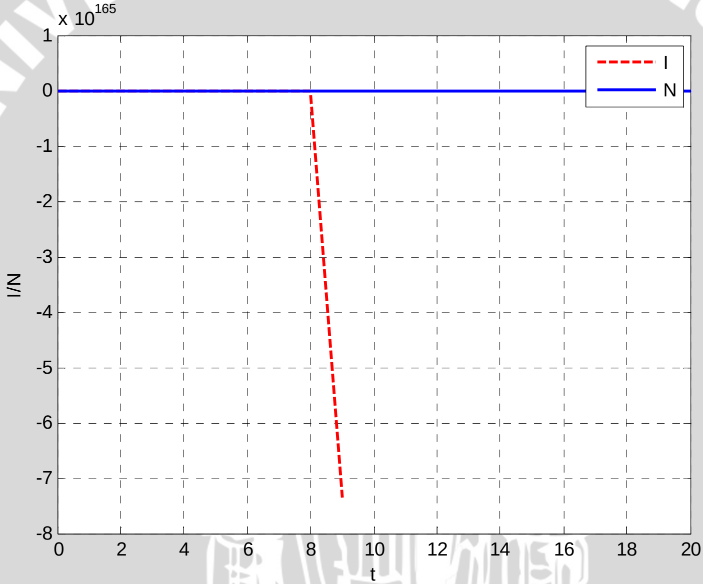
### 3.4.6. Simulasi Numerik untuk Titik Kesetimbangan Kondisi $R_0 > 1$ dan $\tau = 1.0$ $(p/\delta < e^2)$

Pada Gambar 3.6 ditunjukkan solusi persamaan SIS diskrit dengan nilai parameter $p = e^2$, $\delta = 1.1$, $a = 2.0$, $\mu = 5.0$, $\gamma = 1.0$, $\tau = 1.0$, $(I_0, N_n) = (0.5, 0.5)$ $n = -k, -k+1, -k+2, \ldots, 0$, $R_0 = 2.3810$ dan $h = 0.01$ $(h < \min(0.689, 0.909))$. Berdasarkan hasil tersebut dapat dilihat bahwa persamaan SIS diskrit dengan *delay* mempunyai solusi yang konvergen menuju titik kesetimbangan (di titik (0.5523,0.9523)).


**Gambar 3.6.** Solusi numerik model SIS untuk $R_0 > 1$ dan $\tau = 1.0$

### 3.4.7. Simulasi Numerik untuk Titik Kesetimbangan Kondisi $R_0 > 1$ h=1 dan $\tau = 1.0$ ($p/\delta < e^2$)

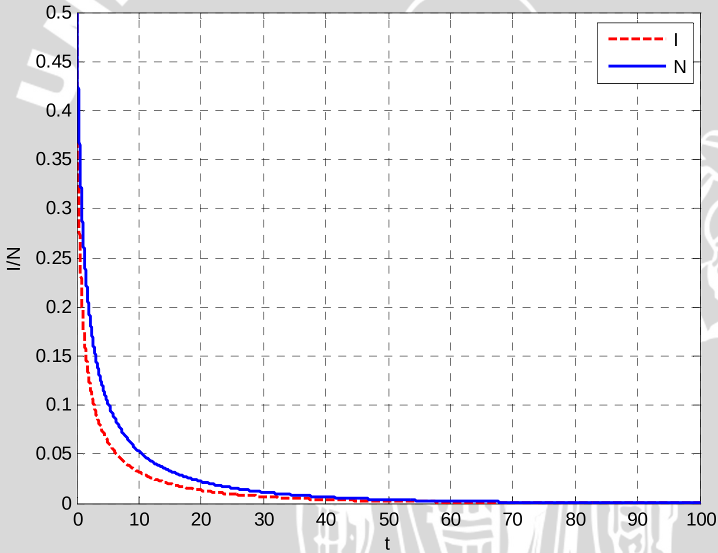
Pada simulasi Gambar 3.7 ditunjukkan solusi persamaan SIS diskrit dengan nilai parameter $p = e^2$, $\delta = 1.1$, $a = 2.0$, $\mu = 5.0$, $\gamma = 1.0$, $\tau = 1.0$, $(I_0, N_n) = (0.5, 0.5)$ $n = -k, -k+1, -k+2, \ldots, 0$, $R_0 = 2.3810$ dan $h = 1.0$ (tidak memenuhi syarat kestabilan) dengan $h < \min(0.689, 0.909)$. Dari hasil tersebut dapat dilihat bahwa persamaan SIS diskrit mempunyai penyelesaian negatif dan tidak konvergen.




**Gambar 3.7.** Solusi numerik model SIS untuk $R_0 > 1$, $\tau = 1.0$, dan $h = 1.0$

### 3.4.8. Simulasi Numerik untuk Titik Kesetimbangan Kondisi $R_0 > 1$ dan $\tau = 1.0$ $(p/\delta < 1)$

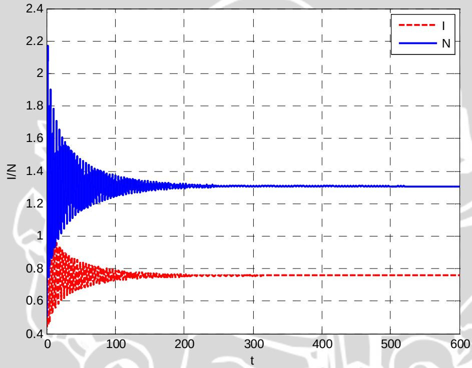
Pada Gambar 3.8 ditunjukkan solusi persamaan SIS diskrit dengan nilai parameter $p = 1.0$, $\delta = 1.1$, $\frac{p}{\delta} < 1$ yang tidak memenuhi syarat kestabilan asimtotik, $a = 2.0$, $\mu = 5.0$, $\gamma = 1.0$, $\tau = 1.0$, $(I_0, N_n) = (0.5, 0.5)$ $n = -k, -k+1, -k+2, \ldots, 0,$ $R_0 = 2.3810$ dan $h = 0.01$ $(h < \min(0.689, 0.909))$. Berdasarkan hasil tersebut dapat dilihat bahwa persamaan SIS diskrit dengan *delay* mempunyai solusi yang konvergen menuju titik $(0,0)$.

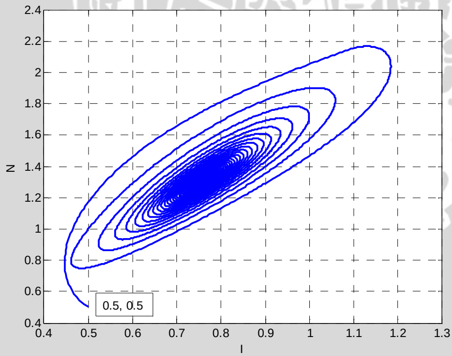



**Gambar 3.8.** Solusi numerik model SIS untuk $R_0 > 1$, $\tau = 1.0$, dan $\frac{p}{\delta} < 1$

### 3.4.9. Simulasi Numerik untuk Titik Kesetimbangan Kondisi $R_0 > 1$ dan $\tau = 1.5$ ($p/\delta > e^2$)

Pada simulasi Gambar 3.9 digunakan nilai parameter $p=15$, $\delta=1.1$, $\frac{p}{\delta} > e^2$ (tidak memenuhi syarat stabil asimtotik), $a=2.0$, $\mu=5.0$, $\gamma=1.0$, $\tau=1.5$, $(I_0, N_n)=(0.5,0.5)$ $n=-k,-k+1,-k+2,\ldots,0$, $R_0=2.3810$ dan $h=0.01$ $(h<\min(0.689,0.909))$. Dari hasil tersebut dapat dilihat bahwa persamaan SIS diskrit dengan *delay* mempunyai solusi yang konvergen menuju titik kesetimbangan (di titik (0.7576,1.3063)).

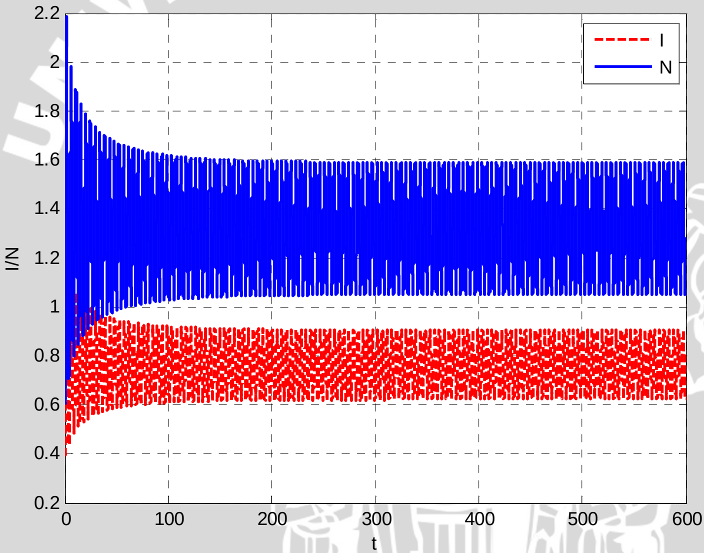



**Gambar 3.9.** Solusi numerik dan potret fase model SIS untuk $R_0 > 1$, $\tau=1.5$, dan $\frac{p}{\delta} > e^2$

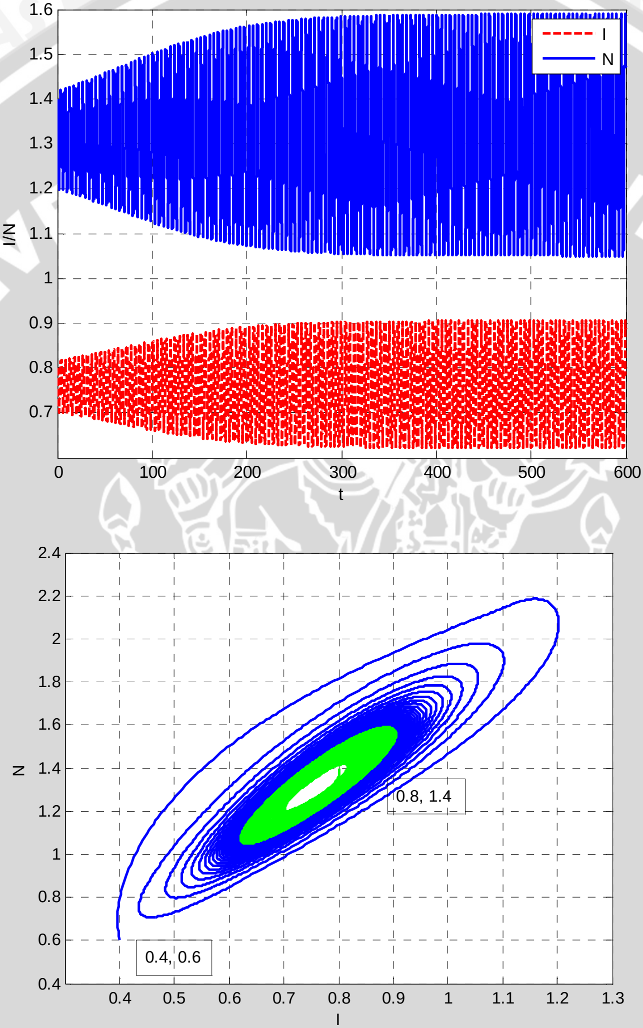
### 3.4.10. Simulasi Numerik untuk Titik Kesetimbangan Kondisi $R_0 > 1$ dan $\tau = 1.65$ $(p/\delta > e^2)$

Pada Gambar 3.10 ditunjukkan solusi persamaan SIS diskrit Zdengan nilai parameter $p = 15$, $\delta = 1.1$, $\frac{p}{\delta} > e^2$ (tidak memenuhi $(I_0, N_n) = (0.4, 0.6)$ $n = -k, -k+1, -k+2, \ldots, 0$, $R_0 = 2.3810$ dan $h = 0.01$ dengan $h < \min(0.689, 0.909)$. Berdasarkan hasil tersebut dapat dilihat bahwa persamaan SIS diskrit memberikan fenomena bifurkasi.




**Gambar 3.10.** Solusi numerik model SIS untuk $R_0 > 1$, $\tau = 1.65$, dan $\frac{p}{\delta} > e^2$

Gambar 3.11 menunjukkan bahwa solusi persamaan SIS diskrit dengan $(I_0, N_n)\; n = -k, -k+1, -k+2, \ldots, 0,$ adalah syarat awal, yaitu berada di titik $(0.4, 0.6)$ dan $(0.8, 1.4)$ terjadi bifurkasi *supercritical.*




**Gambar 3.11.** Solusi numerik dan potret fase model SIS untuk

$R_0 > 1$, $\tau = 1.65$, dan $\dfrac{p}{\delta} > e^2$

# BAB IV
# KESIMPULAN DAN SARAN

## 4.1. Kesimpulan

Pada skripsi ini dibahas model SIS yang diselesaikan secara numerik menggunakan metode Euler. Berdasarkan pembahasan yang telah diuraikan, ditunjukkan bahwa model diskrit yang dihasilkan oleh metode Euler mempunyai dua titik kesetimbangan yang sama dengan model kontinunya, tetapi hasil analisis dari simulasi numerik menunjukkan bahwa kestabilan kedua titik kesetimbangan tersebut konsisten dengan model kontinu hanya jika ukuran langkah integrasi bernilai relatif kecil.

## 4.2. Saran

Dalam skripsi ini hanya dibahas kestabilan dua titik kesetimbangan. Untuk penelitian berikutnya disarankan menyelidiki kemungkinan kondisi lain yang menyebabkan bifurkasi.

# DAFTAR PUSTAKA


Arrowsmith, D.K dan C.M Place. 1990. *An Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press. USA.

Bolker, B. 2007. *Deterministic Functions for Ecological Modeling.*

Boyce, W.E. dan R.C. DiPrima. 2005. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Eight edition, John Willey & Sons, Inc. United State of America.

Dimitrov, D.T. dan H.V. Kojouharov. 2007. Nonstandard numerical methods for a class of predator-prey models with predator interference, *Electronic journal of Differential Equations*. 15. 67-75.

Elaydi, S. 2005. *An Introduction to Difference Equations.* Third edition, Springer. New York.

Ekkachai, K. 2010. Proceedings of the world Congress on Engineering, *Stability of a Numerical Discretisation Scheme for the SIS Epidemic Model with a Delay*. London.

Kocic, V.L. dan G. Ladas, 1993. *Global Behaviour of Nonlinear Difference Equations of Higher Order with Applications*. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

Kuang, Y. 1993. *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*. Academic Press. London.

Kuznetsov, Y.A. 1998. *Elements of Applied Bifurcations Theory*. Second Edition. Springer Verlag. New York.

Perko, L. 1996. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Third edition, Springer-Verlag. New York.

Robinson, R. C. 2004. *An Introduction to Dynamical Systems: Continuous and Discrete.* USA: Prentice Hall Education.

# LAMPIRAN

**Lampiran 1.** Listing Program Menggunakan Matlab 7.0

```
clc;
clear all;
tau=2.0;
miu=5;
delta=1.1;
gamma=1;
rho=15;
alfa=2;
T=100;
h=0.01;
k=tau/h;
Ro=miu/(gamma+delta)
t=0:h:T;
M=length(t);
I=zeros(1,M);
N=zeros(1,M);
n=zeros(1,k+1);
I(1)=0.8;
n(:)=1.4;
N(1)=n(end);
for i=1:M-1
    I(i+1)=(1+h*miu-h*(delta+gamma))*I(i)-
h*miu*I(i)^2/N(i);
    if i>=k+1
        N(i+1)=(1-h*delta)*N(i)+h*rho*N(i-k)*exp(-
alfa*N(i-k));
    else
        N(i+1)=(1-h*delta)*N(i)+h*rho*n(i)*exp(-
alfa*n(i));
    end;
end;
figure(1)
plot(t,I,'--r',t,N,'b','LineWidth',2); grid on;
legend('I','N')
xlabel('t');
ylabel('I/N');

figure(2);
plot(I,N,'b','LineWidth',2); grid on;
```

```
xlabel('I');
ylabel('N');
hold on;
I(1)=0.8;
n(:)=1.4;
N(1)=n(end);
for i=1:M-1
    I(i+1)=(1+h*miu-h*(delta+gamma))*I(i)-
h*miu*I(i)^2/N(i);
    if i>=k+1
        N(i+1)=(1-h*delta)*N(i)+h*rho*N(i-k)*exp(-
alfa*N(i-k));
    else
        N(i+1)=(1-h*delta)*N(i)+h*rho*n(i)*exp(-
alfa*n(i));
    end;
end;
plot(I,N,'g','LineWidth',2); grid on;
xlabel('I');
ylabel('N');
hold off;
figure(3)
plot(t,I,'--r',t,N,'b','LineWidth',2); grid on;
legend('I','N')
xlabel('t');
ylabel('I/N');
```