

COMMUTING GRAPH PADA GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh :

MOH. KHOIRUL MUSTAGFIRIN N.

0710940001-94



JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN
ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2012

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

COMMUTING GRAPH PADA GRUP DIHEDRAL

oleh :

**MOH. KHOIRUL MUSTAGFIRIN N.
0710940001-94**

**Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 10 Februari 2012
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika**

Pembimbing I

Pembimbing II

**Dra. Ari Andari, M.S
NIP. 196105161987012002**

**Prof. Dr. Agus Widodo, M.Kes
NIP. 195305241983031002**

**Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya**

**Dr. Abdul Rouf A., M.Sc
NIP. 196709071992031001**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Moh. Khoirul Mustagfirin N.

NIM : 0710940001

Jurusan : Matematika

Penulis Skripsi berjudul : *Commuting Graph* pada Grup Dihedral

Dengan ini menyatakan bahwa:

1. isi dari Skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Skripsi ini,
2. apabila kemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya akan bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 10 Februari 2012

Yang menyatakan,

(Moh. Khoirul Mustagfirin N.)

NIM. 0710940001

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



COMMUTING GRAPH PADA GRUP DIHEDRAL

ABSTRAK

Misalkan G grup dan Ω himpunan bagian dari G . *Commuting graph* adalah graf sederhana tak berarah $\mathcal{C}(G, \Omega)$, dimana Ω adalah himpunan simpul-simpul dengan dua simpul berbeda dalam Ω dihubungkan oleh suatu garis bila keduanya berlaku hukum komutatif dalam G . Dalam skripsi ini, *commuting graph* dikaitkan dengan grup dihedral (D_n), yaitu dengan menggunakan elemen-elemen grup dihedral sebagai simpul-simpul dalam *commuting graph*. Graf yang diperoleh disebut *commuting graph* pada grup dihedral. Selanjutnya, dilakukan pengamatan terhadap *commuting graph* pada grup dihedral untuk $n = 3, 4, \dots$, sehingga diperoleh sifat-sifat dari *commuting graph* pada grup dihedral. Sifat-sifat tersebut berkenaan dengan derajat simpul, diameter graf, bilangan kromatik, bilangan *clique*, dan *matching* dari *commuting graph* pada grup dihedral.

Kata kunci: *commuting graph*, grup dihedral, bilangan kromatik, bilangan *clique*, dan *matching*.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



COMMUTING GRAPH ON DIHEDRAL GROUP

ABSTRACT

Let G be a group and $\Omega \subseteq G$. The commuting graph is undirected simple graphs $\mathcal{C}(G, \Omega)$, has Ω as its vertex set with two distinct elements of Ω joined by an edge when they commute in G . In this script, commuting graph is associated with dihedral group (D_n) i.e. by using elements of dihedral group as vertices of commuting graph. That graph is called commuting graph on dihedral group. Furthermore, it served to commuting graph on dihedral group for $n = 3, 4, \dots$, so it will be gotten the characteristics of commuting graph on dihedral group. That characteristics concern degree of vertex, diameter of graph, chromatic number, clique number, and matching of commuting graph on dihedral group.

Keywords: commuting graph, dihedral group, clique number, chromatic number, and matching.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



KATA PENGANTAR

Assalamualaikum Wr. Wb.

Segala puji dan syukur kehadirat Allah SWT yang telah memberikan bimbingan dan petunjuk-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul '*Commuting Graph pada Grup Dihedral*' dengan baik dan lancar. Shalawat serta salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW sebagai suri tauladan bagi penulis.

Banyak pihak yang telah memberikan dukungan baik moral maupun spiritual secara langsung maupun tidak langsung dalam penyelesaian skripsi ini. Penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Dra. Ari Andari, M.S selaku dosen pembimbing I sekaligus dosen pembimbing akademik atas segala bimbingan dan motivasi yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini.
2. Prof. Dr. Agus Widodo, M.Kes selaku pembimbing II atas segala bimbingan dan motivasi yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini.
3. Drs. M. Musliikh, M.Si, Dr. Abdul Rouf A., M.Sc, dan Drs. Marsudi, M.S, selaku dosen penguji atas segala saran dan kritik yang telah diberikan guna penyempurnaan skripsi ini.
4. Indah Yanti, S.Si dan Nur Shofiah, M.Si selaku dosen pembimbing akademik atas segala bimbingan dan motivasi yang telah diberikan.
5. Bapak & Ibu dosen Jurusan Matematika atas segala ilmu yang telah diberikan.
6. Kedua orang tuaku, terutama Ibundaku tercinta atas doa, kasih sayang dan dukungan yang telah diberikan.
7. Seluruh staf dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Brawijaya atas kerjasama yang telah diberikan.
8. Keluarga besar PP. Al-Mubarak Merjosari yang telah menjadi keluarga selama di Malang.
9. Teman-teman seperjuangan Matematika 2007, atas kebersamaannya selama ini.
10. Serta semua pihak yang tidak bisa disebutkan satu persatu.

Kami sadar dalam karya ini tentu masih terdapat banyak kekurangan dan keterbatasan, maka patutlah kami haturkan permohonan maaf yang terdalam kepada para pembaca, serta tidak

lupa masukan, kritik, dan saran yang bersifat membangun demi kesempurnaan skripsi ini akan selalu kami nantikan.

Akhir kata, semoga skripsi ini dapat menambah wawasan dan menjadi sumbangan yang bermanfaat untuk ilmu pengetahuan khususnya ilmu matematika.

Wassalamualaikum Wr. Wb.

Malang, 10 Februari 2012

Penulis



DAFTAR ISI

Halaman

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGESAHAN	iii
HALAMAN PERNYATAAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
DAFTAR SIMBOL	xix
BAB I : PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah	2
1.4 Tujuan	2
BAB II : KAJIAN TEORI	3
2.1 Operasi Biner	3
2.2 Konsep Dasar Grup	6
2.3 Grup Dihedral	9
2.4 Konsep Dasar Graf	16
2.5 Terminologi Dasar Graf	17
2.6 Jenis-jenis Graf	19
2.7 Pewarnaan Graf	22
2.8 <i>Clique</i> dan Graf Split	23
2.9 <i>Matching</i>	25
BAB III : HASIL DAN PEMBAHASAN	27
3.1 <i>Comuting Graph</i> pada Grup Dihedral	27

Halaman

3.2 Sifat-sifat *Comuting Graph* pada Grup Dihedral 30

BAB IV : KESIMPULAN	45
DAFTAR PUSTAKA	47
LAMPIRAN 1 OPERASI PERGANDAAN PADA D_6	49
LAMPIRAN 2 GAMBAR <i>COMMUTING GRAPH</i> PADA D_6	50
LAMPIRAN 3 OPERASI PERGANDAAN PADA D_7	51
LAMPIRAN 4 GAMBAR <i>COMMUTING GRAPH</i> PADA D_7	52
LAMPIRAN 5 GAMBAR PEWARNAAN SIMPUL <i>COMMUTING GRAPH</i> PADA D_7	53
LAMPIRAN 6 OPERASI PERGANDAAN PADA D_8	54
LAMPIRAN 7 GAMBAR <i>COMMUTING GRAPH</i> PADA D_8	55
LAMPIRAN 7 GAMBAR PEWARNAAN SIMPUL <i>COMMUTING GRAPH</i> PADA D_8	56



DAFTAR GAMBAR

Halaman

Gambar 2.1 Grafik pemetaan $f(x) = x$	5
Gambar 2.2 Poligon.....	11
Gambar 2.3 Rotasi dari poligon	11
Gambar 2.4 Refleksi dari poligon	12
Gambar 2.5 Refleksi dengan n bilangan ganjil	12
Gambar 2.6 Refleksi dengan n bilangan genap	13
Gambar 2.7 Rotasi-rotasi dari D_3	13
Gambar 2.8 Refleksi-refleksi dari D_3	14
Gambar 2.9 Rotasi-rotasi grup dihedral ke-4 (D_4)	14
Gambar 2.10 Refleksi-refleksi grup dihedral ke-4 (D_4)	15
Gambar 2.11 Graf G dengan 5 simpul dan 5 sisi	17
Gambar 2.12 (i) graf G dan (ii) subgraf dari G	17
Gambar 2.13 Bertetangga dan bersisian	17
Gambar 2.14 Sisi ganda dan gelang	18
Gambar 2.15 Jarak dan diameter graf G	19
Gambar 2.16 (a) graf sederhana dan (b) graf tak sederhana	20
Gambar 2.17 (a) graf tak berarah dan (b) graf berarah	20
Gambar 2.18 Graf lengkap K_1, K_2, K_3, K_4, K_5	20
Gambar 2.19 Graf teratur	21
Gambar 2.20 Graf bipartit $K_{2,3}$ dan $K_{3,3}$	21
Gambar 2.21 (a) graf terhubung dan (b) tak-terhubung	22
Gambar 2.22 Pewarnaan simpul graf	22
Gambar 2.23 Bilangan <i>clique</i>	23
Gambar 2.24 Graf <i>perfect</i>	24
Gambar 2.25 Graf split	25
Gambar 2.26 Graf G dengan 6 simpul	25
Gambar 3.1 <i>Commuting graph</i> pada D_3	28
Gambar 3.2 Graf $C(D_3, \Omega)$ dengan $\Omega = \{r, r^3, s\}$	28
Gambar 3.3 <i>Commuting graph</i> pada D_4	28
Gambar 3.4 Graf $C(D_4, \Omega)$ dengan $\Omega = \{r, r^4, s, sr, sr^2\}$	29
Gambar 3.5 <i>Commuting graph</i> pada D_5	29
Gambar 3.6 Graf $G = C(D_4, \Omega)$ dengan $\Omega = \{r, r^2, r^3, r^4\}$	33
Gambar 3.7 Graf $G = C(D_4, \Omega)$	34

Halaman

Gambar 3.8 Graf $G = C(D_4, \Omega)$ dengan $\Omega = D_4 - Z(D_4)$	34
Gambar 3.9 Graf $G = C(D_3, \Omega)$	35
Gambar 3.10 Graf $H = C(D_5, \Omega) = K_5$	36
Gambar 3.11 Graf Bipartit Lengkap $K_{1,n}$	37
Gambar 3.12 Graf $C(D_5, \Omega) = K_{1,5}$	38
Gambar 3.13 <i>Clique</i> dari $C(D_6, D_6)$	41
Gambar 3.14 Graf $G = C(D_6, D_6)$ dengan $\chi(G) = 6$	41

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR TABEL

Halaman

Tabel 2.1 Operasi pergandaan pada Q_8	8
Tabel 2.2 Operasi pergandaan dalam S_3	10
Tabel 2.3 Operasi pergandaan pada D_4	16
Tabel 3.1 Operasi pergandaan pada D_3	27
Tabel 3.2 Operasi pergandaan pada D_5	29



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol	Penjelasan Simbol
(G, \star)	Grup terhadap operasi biner \star
Q_8	Grup <i>quaternion</i>
$C_G(A)$	Centralizer A dalam grup G
$Z(G)$	Center dari grup G
S_n	Grup simetri pada n huruf
D_n	Grup Dihedral
r^k	Elemen rotasi dari grup dihedral
sr^k	Elemen refleksi dari grup dihedral
$G(V, E)$	Graf
(u, v)	Sisi yang menghubungkan simpul u ke simpul v
$\deg(v)$	Derajat simpul v
$ A $	Orde dari himpunan A
$d(v_1, v_2)$	Jarak dari simpul v_1 ke simpul v_2
$\text{diam}(G)$	Diameter
C_n	Graf lingkaran dengan n buah simpul
K_n	Graf lengkap dengan n buah simpul
$K_{m,n}$	Graf bipartit lengkap
$\chi(G)$	Bilangan kromatik dari graf G
C	<i>Clique</i>
$\omega(G)$	Bilangan <i>clique</i> dari graf G
I	Himpunan Bebas
$C(D_n, \Omega)$	<i>Commuting graph</i> pada grup dihedral

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Aljabar dapat didefinisikan sebagai manipulasi simbol-simbol. Secara historis, aljabar dibagi menjadi dua periode waktu. Aljabar yang dibicarakan sebelum abad ke-19 disebut aljabar klasik, sedangkan aljabar sesudah abad ke-19 hingga sekarang ini disebut aljabar modern atau aljabar abstrak. Aljabar klasik mempunyai karakteristik bahwa setiap simbol selalu mempunyai pengertian suatu bilangan tertentu. Bilangan yang dimaksud adalah bilangan riil atau bilangan kompleks. Oleh karena itu pada abad ke-17 dan abad ke-18, matematikawan mengalami kesulitan untuk mencari akar persamaan polinom.

Di dalam aljabar abstrak dibahas bermacam-macam struktur aljabar. Suatu sistem dimana terdapat sebuah himpunan dan satu atau lebih operasi yang didefinisikan pada himpunan tersebut dinamakan struktur aljabar. Pada dasarnya, suatu struktur aljabar dibangun oleh tiga komponen, yaitu himpunan, operasi biner, dan aksioma. Banyaknya operasi dan aksioma menjadi pembeda antara struktur yang satu dengan yang lain. Struktur aljabar yang dibangun oleh sebuah himpunan tak kosong, sebuah operasi biner, dan beberapa aksioma tertentu disebut grup.

Teori graf adalah salah satu topik dalam matematika diskrit yang memiliki berbagai aplikasi pada permasalahan modern seperti jaringan sosial, komunikasi, transportasi, ilmu komputer, dan sebagainya. Teori ini didasari ide yang pertama kali diperkenalkan oleh seorang matematikawan Swiss, Leonard Euler pada tahun 1736. Dalam tulisannya, Euler membahas tentang tujuh jembatan yang menyeberangi sungai Pregel di kota Konisberg Prussia (sekarang Kaliningrad, Rusia). Permasalahan yang dibahas dalam tulisan Euler adalah menentukan cara untuk melalui setiap jembatan tepat satu kali. Euler menggunakan representasi titik dan garis untuk menjelaskan masalah tersebut. Pada saat ini, konsep yang diperkenalkan oleh Euler disebut graf.

Seiring dengan pesatnya perkembangan ilmu matematika, teori graf dan grup juga turut dikembangkan oleh para matematikawan. Hubungan antara kedua teori tersebut juga mulai menjadi topik yang menarik untuk dipelajari. Pada tahun 2006, konsep tentang

commuting graph dikenalkan oleh D. Bundy dalam jurnal teori kombinatorika yang berjudul *The Connectivity of Commuting Graphs*.

Selanjutnya, dalam skripsi ini akan dibahas kaitan antara *commuting graph* dengan salah satu jenis grup yaitu grup dihedral. Pengaitan antara *commuting graph* dengan grup dihedral disebut *commuting graph* pada grup dihedral. *Commuting graph* pada grup dihedral dikenalkan oleh Chelvam, dkk dalam jurnal matematika yang berjudul *Commuting Graphs on Dihedral Group*. Beberapa teorema, lema, dan akibat yang berhubungan dengan *commuting graph* pada grup dihedral, serta bukti-bukti juga dibahas dalam skripsi ini.

1.2 Rumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah

1. bagaimana hubungan antara *commuting graph* dengan grup dihedral, dan
2. bagaimana sifat-sifat (teorema, lema, dan akibat) yang berkaitan dengan *commuting graph* pada grup dihedral.

1.3 Batasan Kajian

Pembahasan *commuting graph* pada grup dihedral pada skripsi ini dibatasi pada:

1. graf sederhana tak berarah,
2. grup dihedral yang digunakan adalah grup dihedral ke-3 sampai grup dihedral ke-8.

1.4 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan dari penulisan skripsi ini adalah untuk :

1. memahami hubungan antara *commuting graph* dengan grup dihedral,
2. membahas dan membuktikan beberapa teorema, lema, dan akibat yang berhubungan dengan *commuting graph* pada grup dihedral.

BAB II DASAR TEORI

Sebelum melangkah ke pembahasan, pada bab ini dibahas beberapa definisi yang sangat menunjang pokok bahasan bab III. Definisi-definisi tersebut berkaitan dengan teori dasar grup dan graf.

2.1. Operasi Biner

Suatu himpunan yang dilengkapi sebuah operasi biner dan beberapa aksioma tertentu disebut grup. Untuk memahami konsep grup perlu dipahami terlebih dahulu tentang operasi biner.

Definisi 2.1.1 Hasil Kali Kartesian

Misalkan A dan B adalah himpunan-himpunan tak kosong. Hasil kali kartesian (*cartesian product*) dari A dan B dilambangkan dengan $A \times B$ adalah Himpunan dari semua pasangan terurut (a, b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$. Hasil kali kartesian disimbolkan dengan

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$$

(Marsudi, 2010).

Contoh 2.1.2

Misalkan $C = \{1,2,3\}$ dan $D = \{a, b\}$, maka hasil kali kartesian dari C dan D adalah

$$C \times D = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}.$$

Definisi 2.1.3 Relasi

Relasi R antara A dan B adalah himpunan bagian dari $A \times B$.

Jika $(a, b) \in R$, digunakan notasi $a R b$ yang artinya a dihubungkan dengan b oleh R , dan jika $(a, b) \notin R$, digunakan notasi $a \not R b$ yang artinya a tidak dihubungkan dengan b oleh R

(Marsudi, 2010).

Contoh 2.1.4

Misalkan $P = \{2,3,4\}$ dan $Q = \{2,4,8,9\}$. Jika didefinisikan relasi R dari P ke Q dengan $(p, q) \in R$ jika p habis membagi q , maka diperoleh $R = \{(2,2), (2,4), (2,8), (4,4), (4,8), (3,9)\}$.

Definisi 2.1.5 Pemetaan

Misalkan A dan B adalah himpunan-himpunan tidak kosong. Pemetaan f dari A ke B dilambangkan dengan $f : A \rightarrow B$ adalah relasi dari A ke B sedemikian sehingga untuk setiap $a \in A$ mempunyai kawan yang tunggal di B .

Dalam hal ini, a disebut argumen dari pemetaan f dan kawan dari a disebut peta (*image*) dari a atas f . Pada pemetaan $f : A \rightarrow B$, himpunan A disebut daerah asal (domain) dan himpunan B disebut daerah hasil (kodomain) dari f

(Marsudi, 2010).

Secara umum dikenal dua macam pemetaan yaitu :

1. $f : A \rightarrow B$ disebut pemetaan satu ke satu atau injektif jika setiap elemen di B muncul paling banyak satu kali sebagai peta dari suatu elemen A . Dengan kata lain, f adalah pemetaan injektif jika $f(a_1) = f(a_2)$ maka $a_1 = a_2$,
2. $f : A \rightarrow B$ disebut pemetaan pada atau surjektif jika $\forall b \in B, \exists a \in A \ni f(a) = b$ atau $f(A) = B$. Dengan kata lain, f adalah pemetaan surjektif jika bayangan dari f adalah seluruh kodomainnya.

Suatu pemetaan $f : A \rightarrow B$ yang memenuhi sifat injektif dan surjektif disebut pemetaan bijektif

(Lipschutz dan Lipson, 2007).

Contoh 2.1.6

Misalkan $A = [0,1]$ dan $B =$ himpunan bilangan riil \mathbb{R} . Pemetaan $f : A \rightarrow B$ yang didefinisikan sebagai $f(x) = x$, dimana $x \in A$.

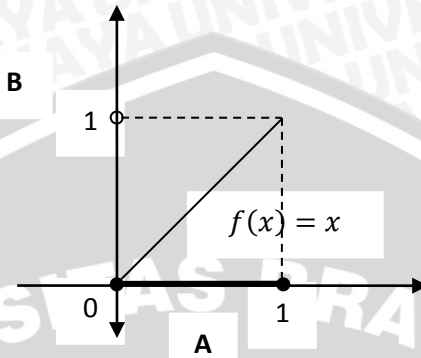
Apakah f merupakan pemetaan yang bijektif?

Penyelesaian:

Untuk menunjukkan bahwa f pemetaan bijektif, maka harus buktikan f pemetaan injektif dan surjektif.

a. Ambil $0 \in A$, maka $f(0) = 0$ dan $1 \in A$, maka $f(1) = 1$.

Untuk elemen-elemen A yang berada diantara selang tertutup 0 sampai 1 , dapat dilihat pada grafik pemetaan berikut.



Gambar 2.1 Grafik pemetaan $f(x) = x$

Pada gambar 2.1, terlihat bahwa jika $f(a_1) = f(a_2)$ maka $a_1 = a_2$ untuk sebarang $a_1, a_2 \in A$, sehingga f merupakan pemetaan yang injektif.

- b. Ambil $2 \in \mathbb{R}$, maka $f(x) \neq 2$ untuk $\forall x \in A$. Jadi terdapat elemen di B yang bukan merupakan peta dari pemetaan f , sehingga f bukan pemetaan surjektif.

Karena f merupakan pemetaan injektif tetapi bukan pemetaan surjektif, maka f bukan pemetaan bijektif.

Definisi 2.1.7 Komposisi Pemetaan

Jika $f: A \rightarrow B$ dan $g: B \rightarrow C$, komposisi pemetaan dari f dan g dilambangkan dengan $g \circ f: A \rightarrow C$ yang didefinisikan sebagai

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad \forall x \in A$$

(Marsudi, 2010).

Contoh 2.1.8

Misalkan $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{a, b, c\}$, dan $C = \{w, x, y, z\}$. Didefinisikan $f: A \rightarrow B$ dengan $f = \{(1, a), (2, a), (3, b), (4, c)\}$ dan $g: B \rightarrow C$ dengan $g = \{(a, x), (b, y), (c, z)\}$.

Untuk setiap elemen dari A ,

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(a) = x,$$

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(a) = x,$$

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(b) = y, \text{ dan}$$

$$(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(c) = z.$$

Jadi, $g \circ f = \{(1, x), (2, x), (3, y), (4, z)\}$.

Definisi 2.1.9 Operasi Biner

Suatu operasi biner (\star) pada himpunan S merupakan pemetaan khusus dari $\star: S \times S \rightarrow S$. Dengan kata lain, operasi biner (\star) memetakan sebarang $a, b \in S$ pada $a \star b \in S$. Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa operasi (\star) adalah operasi biner bila operasi itu tertutup dalam S

(Wahyudin, 1989).

Contoh 2.1.10

Misalkan \mathbb{R} adalah himpunan bilangan riil.

Operasi penjumlahan, pengurangan dan perkalian merupakan operasi biner pada \mathbb{R} , karena $\forall x, y \in \mathbb{R}$ maka $x + y \in \mathbb{R}$, $x - y \in \mathbb{R}$, dan $x \cdot y \in \mathbb{R}$.

2.2. Konsep Dasar Grup

Salah satu struktur aljabar yang sederhana adalah grup. Grup merupakan himpunan tak-kosong dengan satu operasi biner dan memenuhi beberapa aksioma tertentu. Pada sub bab ini dibahas beberapa definisi dan contoh tentang grup, subgrup, *center*, dan *centralizer*.

Definisi 2.2.1 Grup

Misalkan himpunan $G \neq \emptyset$. G yang dilengkapi dengan satu operasi biner \star disebut grup, jika memenuhi sifat-sifat berikut:

1. sifat asosiatif yaitu
 $\forall a, b, c \in G$, maka $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$,
2. G mempunyai elemen identitas yaitu
 $\exists e \in G, \forall a \in G$ sedemikian sehingga $a \star e = e \star a = a$,
3. setiap elemen mempunyai invers yaitu
 $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga
 $a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = e$ (a^{-1} adalah invers dari a).

Jika G dengan operasi biner \star merupakan grup, maka ditulis (G, \star)
(Dummit dan Foote, 1999).

Jika dalam (G, \star) berlaku sifat komutatif yaitu $\forall a, b \in G$, $a \star b = b \star a$, maka (G, \star) disebut grup komutatif. Sedangkan Grup yang tidak memenuhi sifat komutatif disebut grup tak-komutatif

(Judson, 2009).

Contoh 2.2.2

Misalkan \mathbb{Z} adalah himpunan bilangan bulat, maka \mathbb{Z} dengan operasi penjumlahan merupakan grup.

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup, maka \mathbb{Z} harus memenuhi sifat-sifat berikut.

1. Tertutup

ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$, maka $a + b = c$ dan $c \in \mathbb{Z}$ sehingga berlaku sifat tertutup. Dengan kata lain penjumlahan merupakan operasi biner pada \mathbb{Z} .

2. Asosiatif

ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}$, maka

$$\begin{aligned}(a + b) + c &= a + b + c \\ &= a + (b + c).\end{aligned}$$

3. \mathbb{Z} mempunyai elemen identitas yaitu $e = 0$ terhadap operasi penjumlahan, karena untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ maka berlaku

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

4. Setiap elemen \mathbb{Z} mempunyai invers

Ambil $a^{-1} \in \mathbb{Z}$, maka

$$\begin{aligned}a + (a^{-1}) &= (a^{-1}) + a = 0 \\ a^{-1} &= -a,\end{aligned}$$

sehingga diperoleh invers untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ adalah $-a \in \mathbb{Z}$.

Karena $(\mathbb{Z}, +)$ memenuhi aksioma-aksioma dari grup maka terbukti bahwa $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup.

Untuk sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$ maka berlaku $a + b = b + a$. Jadi $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup komutatif.

Contoh 2.2.3

$(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, dan $(\mathbb{C}, +)$ merupakan grup komutatif terhadap operasi penjumlahan. Elemen identitasnya adalah 0 dan invers dari tiap elemennya adalah negatif dari elemen itu sendiri. Sifat tertutup, asosiatif, dan komutatif berlaku pada ketiga himpunan tersebut.

Contoh 2.2.4

$(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$, dan $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$ terhadap operasi pergandaan merupakan grup komutatif. Elemen identitasnya adalah 1 dan invers dari tiap elemennya adalah satu per elemen itu sendiri. Sedangkan $(\mathbb{Z} - \{0\}, \cdot)$ bukan merupakan grup, karena elemen-elemen \mathbb{Z} tidak mempunyai invers terhadap pergandaan.

Contoh 2.2.5

Misalkan himpunan $Q_8 = \{\pm I, \pm J, \pm K, \pm L\}$, dengan

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \text{ dan } L = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

dimana $i^2 = -1$. Akan dibuktikan bahwa Q_8 dengan operasi pergandaan matriks merupakan grup.

Bukti

Untuk menunjukkan bahwa Q_8 dengan operasi pergandaan matriks adalah grup, maka Q_8 harus memenuhi aksioma-aksioma dari grup. Hasil operasi pergandaan matriks dari elemen-elemen Q_8 dapat dilihat pada Tabel 2.1 berikut.

Tabel 2.1 Operasi pergandaan pada Q_8

\cdot	I	$-I$	J	$-J$	K	$-K$	L	$-L$
I	I	$-I$	J	$-J$	K	$-K$	L	$-L$
$-I$	$-I$	I	$-J$	J	$-K$	K	$-L$	L
J	J	$-J$	$-I$	I	L	$-L$	$-K$	K
$-J$	$-J$	J	I	$-I$	$-L$	L	K	$-K$
K	K	$-K$	$-L$	L	$-I$	I	J	$-J$
$-K$	$-K$	K	L	$-L$	I	$-I$	$-J$	J
L	L	$-L$	K	$-K$	$-J$	J	$-I$	I
$-L$	$-L$	L	$-K$	K	J	$-J$	I	$-I$

Dari Tabel 2.1, terlihat bahwa:

1. Tertutup

Ambil $J, K \in Q_8$ maka berlaku $J \cdot K = L \in Q_8$. Dengan cara yang sama, maka berlaku untuk setiap elemen Q_8 .

2. Asosiatif

Ambil $I, J, K \in Q_8$ maka berlaku $(I \cdot J) \cdot K = I \cdot (J \cdot K)$. Dengan cara yang sama, maka berlaku untuk setiap elemen Q_8 .

3. Q_8 mempunyai elemen netral, yaitu I .

4. Setiap elemen mempunyai invers

Invers dari I adalah I , invers dari $-I$ adalah $-I$, dan invers dari J, K, L adalah $-J, -K, -L$.

Karena Q_8 memenuhi aksioma-aksioma dari grup maka (Q_8, \cdot) adalah grup. Karena $J \cdot K = L \neq K \cdot J = -L$ sehingga terdapat elemen-elemen yang tidak berlaku hukum komutatif dalam Q_8 , maka (Q_8, \cdot) bukan grup komutatif. Grup Q_8 disebut *quaternion group*.

Definisi 2.2.6 Subgrup

Misalkan (G, \star) adalah grup, $H \subseteq G$, dan $H \neq \emptyset$. H disebut subgrup dari G jika H juga merupakan grup terhadap operasi biner \star (Dummit dan Foote, 1999).

Contoh 2.2.7

$\mathbb{Q} - \{0\}$ adalah subgrup dari grup $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$.

Definisi 2.2.8 Centralizer dan Center

centralizer A dalam G disimbolkan dengan $C_G(A)$ adalah himpunan bagian dari G yang elemen-elemennya komutatif dengan A . Jadi,

$$C_G(A) = \{g \in G \mid gag^{-1} = a, \forall a \in A\}.$$

Center dari G adalah himpunan dari elemen-elemen komutatif dengan semua elemen di G . *Center* dari G dinotasikan dengan

$$Z(G) = \{g \in G \mid gx = xg, \forall x \in G\}$$

(Dummit dan Foote, 1999).

Contoh 2.2.9

Q_8 adalah grup terhadap operasi pergandaan matriks. *Centralizer* dari I dalam Q_8 adalah $C_{Q_8}(I) = \{\pm I, \pm J\}$. *Center* dari grup quaternion Q_8 adalah $Z(Q_8) = \{I, -I\}$.

2.3. Grup Dihedral

Salah satu tipe dari grup yang menarik untuk dipelajari adalah grup dihedral. Grup dihedral ke- n ialah grup yang elemen-elemennya merupakan simetri-simetri n -segi banyak (poligon) beraturan. Sebelum melangkah lebih jauh tentang grup dihedral akan dibahas terlebih dahulu tentang grup simetri.

Definisi 2.3.1 Permutasi

Misalkan $A = \{1, 2, \dots, n\}$ adalah himpunan yang memuat n bilangan asli. Pemetaan $\pi: A \rightarrow A$ yang bersifat satu-satu dan pada disebut permutasi pada A .

Himpunan semua permutasi pada n dinotasikan dengan S_n . Permutasi pada A juga bisa dilambangkan dengan tanda

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

dimana $x_i = \pi(i)$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$.

Definisi 2.3.2 Grup Simetri

Diberikan A himpunan berhingga $\{1,2,\dots,n\}$. Grup yang terdiri dari semua permutasi untuk A disebut grup simetri pada n huruf. Grup tersebut dilambangkan dengan S_n . Grup simetri S_n mempunyai elemen sebanyak $n!$

(Arifin, 2000).

Contoh 2.3.3

Diberikan himpunan $A = \{1,2,3\}$, maka permutasi-permutasi pada A adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \rho_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \rho_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \rho_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} & \rho_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \rho_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Operasi biner pada S_3 adalah operasi pergandaan komposisi. (S_3, \circ) dapat disajikan dalam Tabel 2.2 berikut.

Tabel 2.2 Operasi pergandaan dalam S_3

\circ	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_0	ρ_5	ρ_3	ρ_4
ρ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	ρ_4	ρ_5	ρ_3
ρ_3	ρ_3	ρ_4	ρ_5	ρ_0	ρ_1	ρ_2
ρ_4	ρ_4	ρ_5	ρ_3	ρ_2	ρ_0	ρ_1
ρ_5	ρ_5	ρ_3	ρ_4	ρ_1	ρ_2	ρ_0

Dari Tabel 2.2 terlihat bahwa dengan cara yang sama pada Contoh 2.2.2, pada (S_3, \circ) berlaku:

1. sifat tertutup,
2. sifat asosiatif,
3. mempunyai elemen identitas yaitu ρ_0 , dan
4. setiap elemen mempunyai invers.

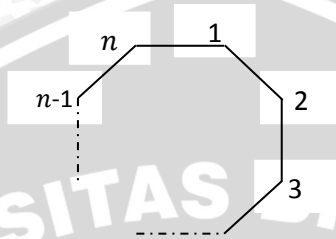
Invers dari ρ_0 adalah ρ_0 , invers dari ρ_1 adalah ρ_2 , invers dari ρ_3 adalah ρ_4 , dan invers dari ρ_5 adalah ρ_5 .

Jadi terbukti bahwa (S_3, \circ) adalah grup terhadap operasi pergandaan komposisi.

Definisi 2.3.4 Grup Dihedral

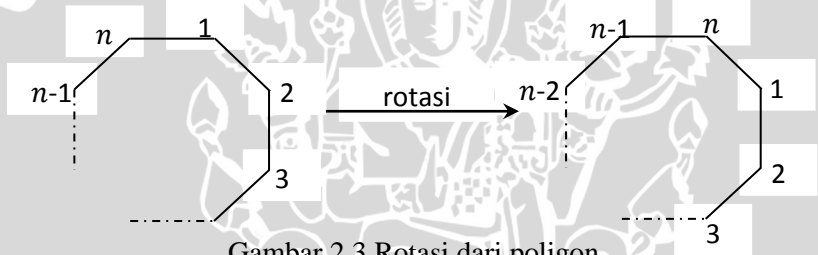
Untuk sebarang $n = 3, 4, 5, \dots$, didefinisikan grup dihedral ke- n sebagai grup dari simetri-simetri n -gon (poligon) beraturan. Grup

dihedral ke- n disimbolkan dengan D_n . Titik-titik dari poligon dapat dinomori dengan $1, 2, 3, \dots, n$ seperti pada Gambar 2.2 berikut.



Gambar 2.2 Poligon

Terdapat n pilihan cara untuk meletakkan nomor pada titik pertama. Jika titik pertama diletakkan pada posisi k , maka titik kedua diletakkan pada posisi $k - 1$ atau $k + 1$. Terdapat $2n$ perubahan yang mungkin dari poligon. Perubahan tersebut adalah rotasi dan refleksi sebagaimana Gambar 2.4 dan Gambar 2.5 berikut.



Gambar 2.3 Rotasi dari poligon

Dari Gambar 2.3 terlihat bahwa terdapat n rotasi yang mungkin, yaitu

$$1 \cdot \frac{360^\circ}{n}, 2 \cdot \frac{360^\circ}{n}, 3 \cdot \frac{360^\circ}{n}, \dots, (n-1) \cdot \frac{360^\circ}{n}, n \cdot \frac{360^\circ}{n}.$$

Rotasi-rotasi tersebut dinotasikan dengan

$$r^k = k \cdot \frac{360^\circ}{n}$$

dimana $k = 1, 2, \dots, n$ dan r^n adalah elemen netral.

Secara umum, r^i dapat diperoleh dengan menggunakan rumus berikut

$$r^i = \left(\begin{matrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i+1(\text{mod } n) & i+2(\text{mod } n) & \dots & i+n(\text{mod } n) \end{matrix} \right).$$

Sama halnya dengan rotasi, terdapat n macam refleksi yang mungkin dari poligon. Refleksi-refleksi tersebut dilambangkan dengan $s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}$, dimana s merupakan refleksi dengan

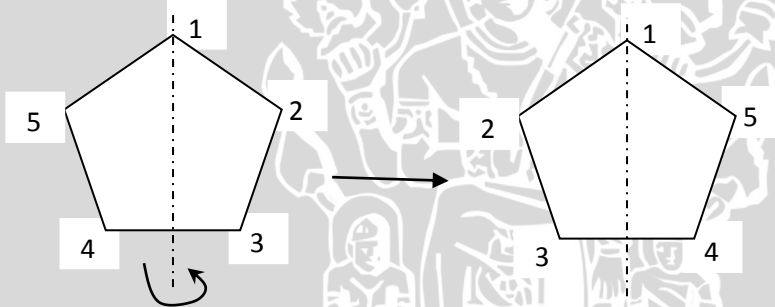
titik pertama sebagai sumbu refleksinya. Elemen-elemen refleksi ini juga merupakan hasil kali dari s dengan r .

Adapun refleksi dengan titik pertama sebagai sumbu refleksinya disajikan dalam Gambar 2.4 berikut.



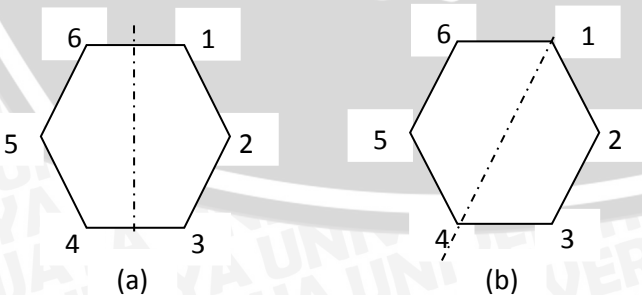
Gambar 2.4 Refleksi dari poligon

Pada refleksi terdapat dua kasus, yaitu n berupa bilangan genap atau bilangan ganjil. Jika n bilangan ganjil, maka sumbu-sumbu refleksi tepat berada pada masing-masing titik dari poligon. Grup dihedral ke- n dengan n bilangan ganjil dapat diilustrasikan dengan gambar 2.6 berikut.



Gambar 2.5 Refleksi dengan n bilangan ganjil

Pada refleksi dengan n genap, terdapat $n/2$ macam sumbu refleksi pada titik-titik poligon dan $n/2$ macam sumbu refleksi pada sisi bisektor-bosektor tegak lurus.



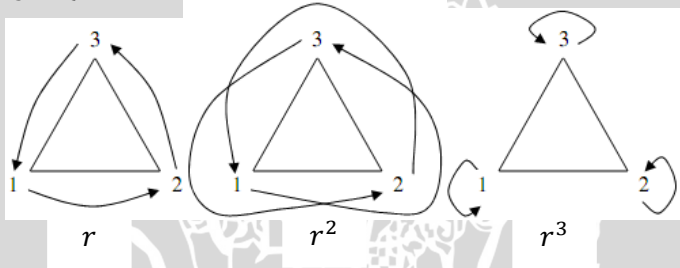
Gambar 2.6 Refleksi dengan n bilangan genap

Gambar 2.6 (a) merupakan contoh refleksi dengan sumbu refleksi berupa sisi bisektor tegak lurus. Gambar 2.6 (b) merupakan contoh refleksi dengan titik 1 dan 4 sebagai sumbu refleksi. Karena terdapat n buah rotasi dan n buah refleksi yang bisa diperoleh dari grup dihedral ke- n , maka orde dari D_n adalah $|D_n| = 2n$

(Judson, 2007).

Contoh 2.3.5

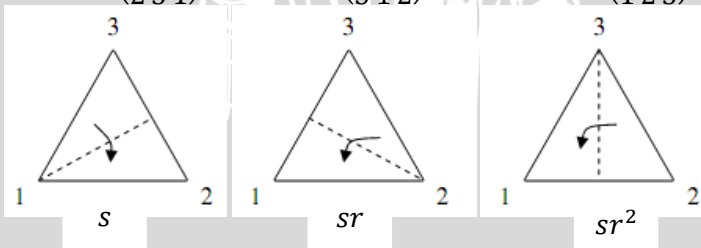
Misalkan D_3 grup dihedral ke-3, maka elemen-elemen dari D_3 adalah $D_3 = \{r, r^2, r^3, s, sr, sr^2\}$.



Gambar 2.7 Rotasi-rotasi dari D_3

Berdasarkan Gambar 2.7 terdapat tiga macam bentuk refleksi pada D_3 yaitu

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad r^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad r^3 = e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$



Gambar 2.8 Refleksi-refleksi dari D_3

Seperti yang terlihat pada Gambar 2.8 terdapat tiga macam refleksi pada D_3 yaitu

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$sr = s \cdot r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

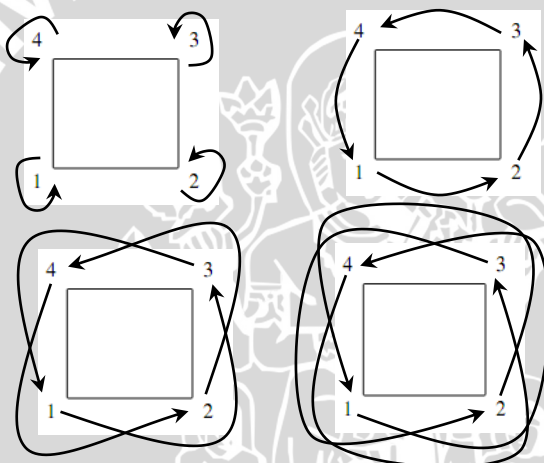
$$sr^2 = s \cdot r^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ dan } sr^3 = s \cdot r^3 = s.$$

Dari Contoh 2.3.5 terlihat bahwa elemen-elemen D_3 sama dengan elemen-elemen S_3 . Hal ini disebabkan grup dihedral merupakan subgrup dari grup simetri.

Contoh 2.3.6

Misalkan D_4 adalah grup dihedral ke-4, maka terdapat 8 buah elemen dari D_4 . Elemen-elemen tersebut adalah

$$D_4 = \{r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3\}$$

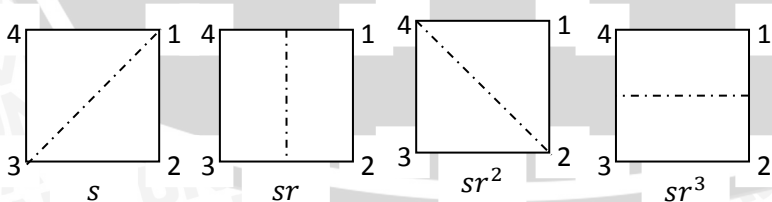


Gambar 2.9 Rotasi-rotasi grup dihedral ke-4 (D_4)

Elemen-elemen rotasi pada D_4 adalah

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, r^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, r^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, r^4 = e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, dengan melakukan refleksi pada segi empat maka diperoleh elemen-elemen refleksi dari grup dihedral ke-4.



Gambar 2.10 Refleksi-refleksi grup dihedral ke-4 (D_4)

Elemen-elemen refleksi dari D_4 adalah

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$sr = s \cdot r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$sr^2 = s \cdot r^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$sr^3 = s \cdot r^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \text{ dan } sr^4 = s \cdot r^4 = s.$$

D_4 adalah grup terhadap operasi pergandaan komposisi permutasi. Sifat tertutup dan asosiatif berlaku dalam grup dihedral ke-4 (D_4). Elemen identitas dari D_4 adalah r^n . Setiap elemen dari D_4 juga mempunyai invers. Pada D_4 tidak berlaku hukum komutatif, hal ini dapat ditunjukkan dengan Tabel 2.3 berikut.



Tabel 2.3 Operasi pergandaan pada D_4

\circ	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3
r	r^2	r^3	r^4	r	sr^3	s	sr	sr^2
r^2	r^3	r^4	r	r^2	sr^2	sr^3	s	sr
r^3	r^4	r	r^2	r^3	sr	sr^2	sr^3	s
r^4	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3
s	sr	sr^2	sr^3	s	r^4	r	r^2	r^3
sr	sr^2	sr^3	s	sr	r^3	r^4	r	r^2
sr^2	sr^3	s	sr	sr^2	r^2	r^3	r^4	r
sr^3	s	sr	sr^2	sr^3	r	r^2	r^3	r^4

Dari Tabel 2.3 terlihat bahwa $sr^3 \circ r \neq r \circ sr^3$, maka dalam D_4 tidak berlaku hukum komutatif. Jadi D_4 grup tak komutatif (*non-abelian*).

2.4. Konsep Dasar Graf

Definisi 2.4.1 Graf

Suatu graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) , dinotasikan dengan $G(V, E)$, yang dalam hal ini V adalah himpunan berhingga tak-kosong yang elemen-elemennya disebut verteks (titik/simpul) dan E adalah himpunan berhingga (boleh kosong) garis atau *edge* yang menghubungkan sepasang simpul.

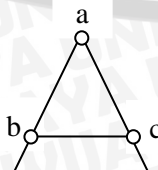
Himpunan $V(G)$ disebut himpunan simpul dan $E(G)$ disebut himpunan garis dari graf G

(Munir, 2005).

Contoh 2.4.2

Misalkan $G(V, E)$ adalah graf, dimana $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ dan $E(G) = \{(a, b), (a, c), (b, c), (b, d), (c, e)\}$. $G(V, E)$ merupakan graf dengan lima simpul dan lima garis.

Untuk memudahkan pemahaman dari suatu graf biasanya diberikan interpretasi geometri dari graf tersebut. Setiap simpul dari suatu graf digambarkan sebagai titik pada bidang datar dan setiap garis digambarkan sebagai garis yang menghubungkan dua simpul pada graf tersebut. Adapun interpretasi geometri dari graf pada Contoh 2.4.2 adalah sebagai berikut.



Gambar 2.11 Graf G dengan 5 simpul dan 5 garis

Definisi 2.4.3 Subgraf

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf, graf H adalah subgraf dari G jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$

(Chartrand dan Oellermann, 1993).

Contoh 2.4.4



Gambar 2.12 (a) graf G dan (b) subgraf dari G

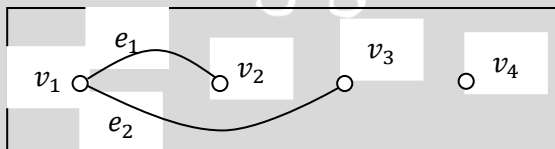
2.5. Terminologi Dasar Graf

Definisi 2.5.1 Bertetangga, Bersisian, dan Simpul Terasing

Dua buah simpul pada graf G dikatakan bertetangga (*adjacent*) bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah garis. Untuk sebarang garis $e = (u, v)$ dikatakan bersisian (*incident*) dengan simpul u dan simpul v . Simpul u yang tidak bersisian dengan garis-garis pada graf G disebut simpul terasing

(Lipschutz dan Lipson, 2007).

Contoh 2.5.2



Gambar 2.13 Bertetangga dan bersisian

Pada Gambar 2.13 tampak bahwa v_1 bertetangga dengan v_2 dan v_3 , begitu juga sebaliknya. Tetapi v_2 tidak bertetangga dengan v_3 .

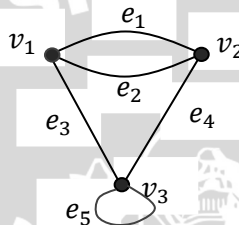
Garis e_1 bersisian dengan v_1 dan v_2 . Garis e_2 bersisian dengan v_1 dan v_3 . Simpul v_4 adalah simpul terasing.

Definisi 2.5.3 Garis Ganda dan Gelang

Garis-garis yang menghubungkan dua simpul yang sama disebut garis ganda. Garis yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama disebut gelang (*loop*)

(Chartrand dan Oellermann, 1993).

Contoh 2.5.4



Gambar 2.14 Garis ganda dan gelang

Garis e_1 dan e_2 adalah garis ganda. Garis e_5 adalah garis gelang atau *loop*.

Definisi 2.5.5 Derajat (*Degree*)

Derajat simpul adalah jumlah garis yang bersisian dengan simpul tersebut dan dinotasikan dengan $\deg(v)$. Gelang dihitung berderajat dua.

Definisi 2.5.6 Orde graf

Orde graf adalah banyak simpul dalam graf dan dilambangkan dengan $|V(G)|$

(Munir, 2005).

Contoh 2.5.7

Dari Gambar 2.14 terlihat bahwa $|V(G)| = 3$, $\deg(v_1) = \deg(v_2) = 3$ dan $\deg(v_3) = 4$ karena gelang (*loop*) dihitung berderajat dua.

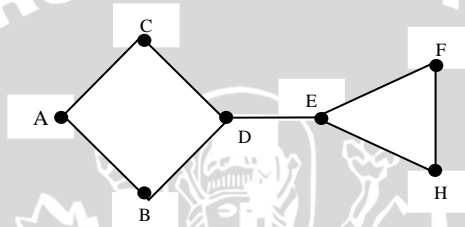
Definisi 2.5.8 Jarak dan Diameter

Misalkan u dan v adalah dua simpul dalam graf G . Jarak antara simpul u dan v , yang ditulis dengan $d(u, v)$ adalah panjang lintasan terpendek antara u dan v .

Diameter dari graf G adalah jarak maksimum dari jarak-jarak antara sebarang dua titik dalam G . Diameter dari graf G dilambangkan dengan $diam(G)$

(Lipschutz dan Lipson, 2007).

Contoh 2.5.9



Gambar 2.15 Jarak dan diameter graf G

Pada Gambar 2.15 terlihat bahwa:

$$d(A, C) = d(A, B) = 1,$$

$$d(A, D) = 2,$$

$$d(A, F) = 3, \text{ dan}$$

$d(A, G) = d(A, H) = 4$, ini adalah jarak maksimum dari sebarang dua titik di G , sehingga $diam(G) = 4$.

2.6. Jenis-Jenis Graf

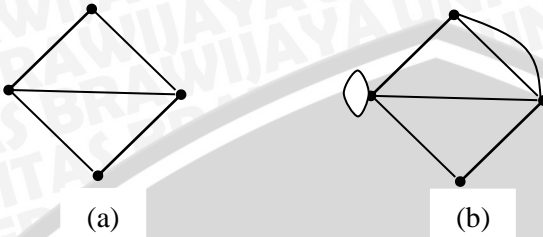
Graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa kategori (jenis) bergantung pada sudut pandang pengelompokannya. Pengelompokan graf dapat dipandang berdasarkan ada tidaknya garis ganda atau gelang, berdasarkan jumlah simpul, atau berdasarkan orientasi arah pada garis. Pada sub bab ini hanya akan dibahas beberapa jenis graf yang berkaitan dengan bab pembahasan dalam skripsi ini.

Definisi 2.6.1 Graf Sederhana dan Tak-sederhana

Graf yang tidak mempunyai garis ganda atau gelang disebut graf sederhana, yang selanjutnya disebut graf. Graf yang mempunyai garis ganda atau gelang disebut graf tak-sederhana

(Lipschutz dan Lipson, 2007).

Contoh 2.6.2



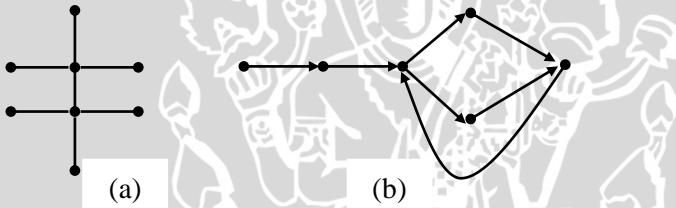
Gambar 2.16 (a) graf sederhana dan (b) graf tak sederhana

Definisi 2.6.3 Graf Berarah dan Tak-berarah

Graf yang garisnya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tak-berarah. Graf yang setiap garisnya diberi orientasi arah disebut graf berarah

(Munir, 2005).

Contoh 2.6.4



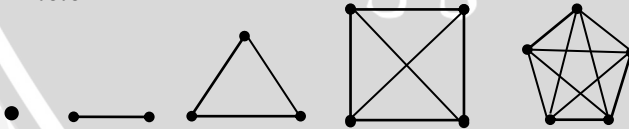
Gambar 2.17 (a) graf tak berarah dan (b) graf berarah

Definisi 2.6.5 Graf Lengkap

Graf lengkap ialah graf sederhana yang setiap dua simpul berbeda dihubungkan dengan suatu garis. Graf lengkap dengan n buah simpul dilambangkan dengan K_n . Setiap simpul pada K_n berderajat $n - 1$

(Munir, 2005).

Contoh 2.6.6



Gambar 2.18 Graf lengkap K_1, K_2, K_3, K_4, K_5

Definisi 2.6.7 Graf Teratur (regular graph)

Graf yang setiap simpulnya mempunyai derajat sama disebut graf teratur. Apabila derajat setiap simpul dari graf G adalah r , maka graf G disebut graf teratur derajat r

(Munir, 2005).

Contoh 2.6.8



Gambar 2.19 Graf teratur

Definisi 2.6.9 Graf Bipartit

Suatu graf G disebut bipartit jika himpunan simpulnya $V(G)$ dapat dikelompokkan menjadi dua himpunan bagian V_1 dan V_2 , sedemikian sehingga setiap garis dalam G menghubungkan sebuah simpul di V_1 ke sebuah simpul di V_2 . Dengan kata lain, setiap pasang simpul di V_1 (demikian pula simpul-simpul di V_2) tidak bertetangga. Apabila setiap simpul di V_1 bertetangga dengan semua simpul di V_2 , maka G disebut sebagai graf bipartit lengkap, yang dilambangkan dengan $K_{m,n}$

(Munir, 2005).

Contoh 2.6.10



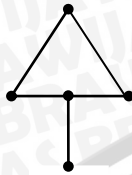
Gambar 2.20 Graf bipartit lengkap $K_{2,3}$ dan $K_{3,3}$

Definisi 2.6.11 Graf Terhubung dan Tak-terhubung

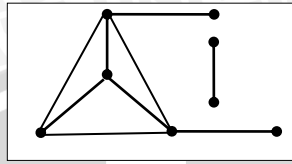
Graf $G = (V, E)$ dikatakan terhubung jika untuk setiap pasang simpul v_i dan v_j di dalam himpunan V terdapat lintasan dari v_i ke v_j . Bila tidak terdapat lintasan dari v_i ke v_j , maka G disebut graf tak-terhubung

(Lipschutz dan Lipson, 2007).

Contoh 2.6.12



(a)



(b)

Gambar 2.21 (a) graf terhubung dan (b) graf tak-terhubung

2.7. Pewarnaan Graf

Pada kajian teori graf terdapat tiga macam masalah pewarnaan graf, yaitu pewarnaan simpul, pewarnaan garis, dan pewarnaan wilayah. Pada skripsi ini akan dibahas pewarnaan simpul saja.

Definisi 2.7.1 Pewarnaan Simpul

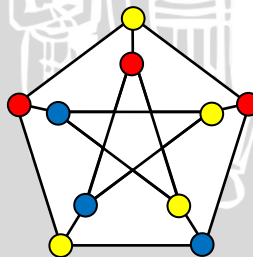
Pewarnaan simpul adalah memberi warna pada simpul-simpul di dalam graf sedemikian sehingga setiap dua buah simpul bertetangga mempunyai warna berbeda.

Definisi 2.7.2 Bilangan Kromatik

Jumlah warna minimum yang dapat digunakan untuk mewarnai simpul suatu graf disebut bilangan kromatik graf G , disimbolkan dengan $\chi(G)$. Suatu graf G yang mempunyai bilangan kromatik k dilambangkan dengan $\chi(G) = k$

(Chartrand dan Zhang, 2005).

Contoh 2.7.3



Gambar 2.22 Pewarnaan simpul graf

Gambar 2.22 merupakan graf dengan sepuluh simpul dan mempunyai bilangan kromatik $\chi(G) = 3$.

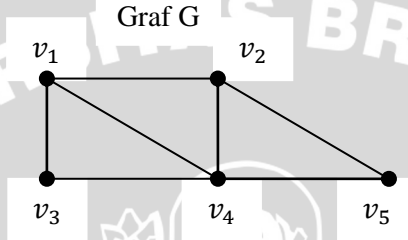
2.8. Clique dan Graf Split

Definisi 2.8.1 *Clique*

Suatu *Clique* $C \subseteq V$ pada graf G adalah himpunan simpul yang memuat subgraf lengkap dari G . Banyak simpul maksimum suatu *clique* dalam G disebut bilangan *clique* yang dinotasikan dengan $\omega(G)$

(Chartrand dan Zhang, 2005).

Contoh 2.8.2



Gambar 2.23 Bilangan *clique*

Pada Gambar 2.23 dapat ditulis beberapa macam *clique* dari graf G yaitu $C_1 = \{v_1, v_2\}$, $C_2 = \{v_1, v_3\}$, $C_3 = \{v_1, v_4\}$, $C_4 = \{v_2, v_4\}$, $C_5 = \{v_3, v_4\}$, $C_6 = \{v_2, v_5\}$, dan $C_7 = \{v_4, v_5\}$ yang masing memuat subgraf lengkap K_2 . Sedangkan $C_8 = \{v_1, v_2, v_4\}$, $C_9 = \{v_2, v_4, v_5\}$, dan $C_{10} = \{v_1, v_3, v_4\}$ memuat subgraf lengkap K_3 yang merupakan subgraf maksimum, sehingga bilangan *clique* dari graf G adalah $\omega(G) = 3$.

Definisi 2.8.3 Himpunan Bebas

Suatu himpunan simpul $I \subseteq V$ pada graf G disebut himpunan bebas jika tidak terdapat dua titik di I yang bertetangga. Himpunan bebas maksimum adalah sebuah himpunan bebas dengan kardinalitas paling banyak. Banyaknya simpul maksimum dalam himpunan bebas dinotasikan dengan $\alpha(G)$ dan disebut bilangan bebas dari G

(Chartrand dan Zhang, 2005).

Contoh 2.8.4

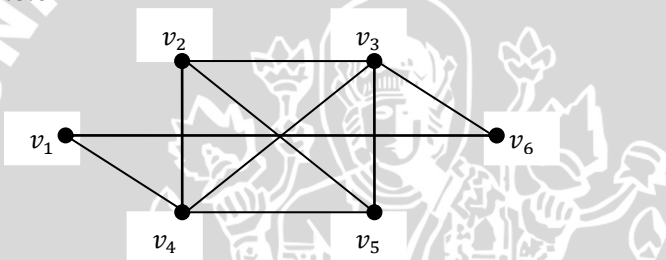
Pada Gambar 2.23 graf G semua simpulnya terhubung langsung kecuali v_2 dan v_3 serta simpul v_1 dan v_5 , sehingga himpunan bebas dari G yaitu $I_1 = \{v_2, v_3\}$ dan $I_2 = \{v_1, v_5\}$ yang masing-masing berorde maksimum. Oleh karena itu, bilangan bebas dari graf G adalah $\alpha(G) = 2$.

Definisi 2.8.5 Graf Perfect

Graf *perfect* adalah suatu graf yang mempunyai bilangan kromatik dan bilangan clique sama atau $\chi(G) = \omega(G)$

(Chartrand dan Zhang, 2005).

Contoh 2.8.6



Gambar 2.24 Graf *perfect*

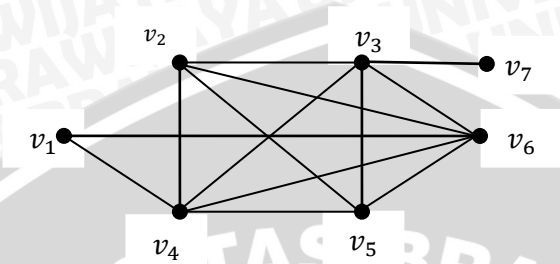
Pada Gambar 2.24 subgraf lengkap maksimum dari graf G adalah graf K_4 , sehingga ordennya adalah $\omega(G) = 4$. Graf G dapat diwarnai dengan pewarnaan minimum sebanyak 4 sehingga $\chi(G) = 4$. Dengan demikian, graf G adalah graf *perfect* yang memenuhi $\omega(G) = \chi(G) = 4$.

Definisi 2.8.7 Graf Split

Suatu graf $G = (V, E)$ disebut graf split jika terdapat suatu partisi $V = I + C$ dari himpunan simpulnya menjadi himpunan bebas I dan himpunan *clique* C . Bentuk graf split merupakan himpunan bagian dari graf *perfect*. Oleh karena itu, graf split memenuhi $\omega(G) = \chi(G) = k$

(Chartrand dan Zhang, 2005).

Contoh 2.8.8



Gambar 2.25 Graf split

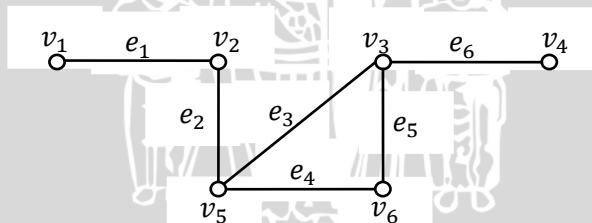
Pada Gambar 2.25, himpunan simpul $V(G)$ dapat dipartisi menjadi dua buah himpunan, yaitu $I = \{v_1, v_7\}$ dan $C = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ sedemikian sehingga $V(G) = I + C$. Karena simpul-simpul dalam graf G dapat dipartisi menjadi dua bagian $V(G) = I + C$, maka graf pada Gambar 2.25 merupakan graf split.

2.9. Matching

Definisi 2.9.1 Matching

Matching M pada graf $G = (V, E)$ adalah himpunan bagian dari $E(G)$ dimana tidak terdapat dua garis yang bertetangga (*adjacent*). Garis di G yang merupakan *matching* disebut garis *matched* dan garis di G yang bukan merupakan *matching* disebut *unmatched* (Chartrand dan Zhang, 2005).

Contoh 2.9.2



Gambar 2.26 Graf G dengan 6 simpul

Beberapa contoh *matching* dari graf Pada Gambar 2.26 adalah $M_1 = \{e_1, e_3\}$, $M_2 = \{e_1, e_4, e_6\}$, $M_3 = \{e_1, e_5\}$, dan seterusnya. Garis-garis yang termuat dalam M_i disebut garis *matched* dan garis yang tidak termuat dalam M_i disebut garis *unmatched*. Misalkan pada M_2 , garis-garis e_1, e_4, e_6 disebut garis *matched* dan garis-garis e_2, e_3, e_5 disebut garis *unmatched*.

Definisi 2.9.3 *Matching* Maksimum

Matching Maksimum adalah *matching* yang memuat garis *matched* paling banyak.

Definisi 2.9.4 *Perfect Matching*

Simpul v disebut sebagai M -saturated, jika v bersisian dengan suatu garis di M . Sebaliknya, jika v tidak bersisian dengan garis di M maka v disebut M -unsaturated.

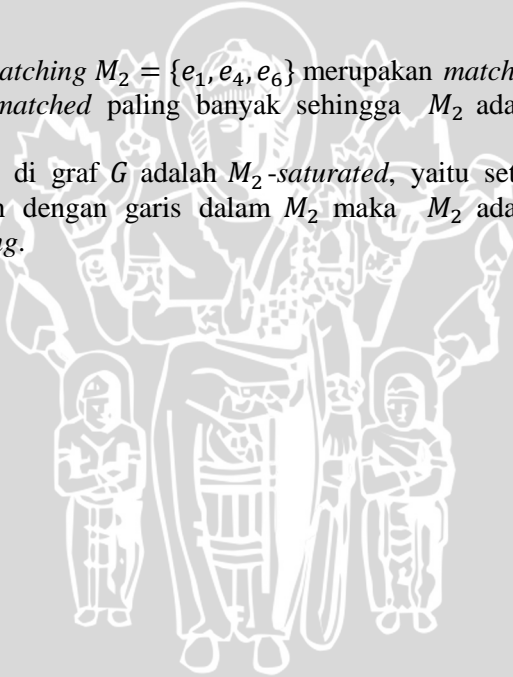
Jika setiap simpul di G adalah M -saturated, maka *matching* M merupakan *perfect matching*

(Chartrand dan Oellermann, 1993).

Contoh 2.9.5

Pada Gambar 2.26, *matching* $M_2 = \{e_1, e_4, e_6\}$ merupakan *matching* yang memuat garis *matched* paling banyak sehingga M_2 adalah *matching* maksimum.

Karena setiap simpul di graf G adalah M_2 -saturated, yaitu setiap simpul di G bersisian dengan garis dalam M_2 maka M_2 adalah *perfect matching*.



BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini, dibahas tentang *commuting graph* pada grup dihedral. Pembahasan dibagi menjadi dua sub bab, yaitu *commuting graph* pada grup dihedral, dan sifat-sifat *commuting graph* pada grup dihedral. Dalam sub bab pertama dibahas definisi dan contoh dari *commuting graph* pada grup dihedral. Sedangkan pada sub bab kedua dibahas teorema, lema, dan akibat serta bukti-buktinya.

6.1 *Commuting Graph* pada Grup Dihedral

Pada sub bab ini dibahas tentang graf yang dikaitkan dengan grup dihedral. Graf yang diperoleh disebut dengan *commuting graph* pada grup dihedral. Adapun definisi formal dari graf tersebut adalah sebagai berikut.

Definisi 3.1.1 *Commuting Graph* pada Grup Dihedral

Untuk sebarang Ω himpunan bagian dari D_n , *commuting graph* pada grup dihedral adalah graf $C(D_n, \Omega)$, dimana Ω merupakan himpunan simpul-simpul dengan dua simpul berbeda dalam Ω dikatakan bertetangga (*adjacent*) jika dua simpul tersebut komutatif dalam D_n .

Contoh 3.1.2

Misalkan untuk $n = 3$, maka D_3 merupakan grup dihedral dengan 6 elemen. Hal ini seperti ditunjukkan pada Contoh 2.3.5. Adapun penyajian D_3 dalam Tabel 3.1 adalah sebagai berikut.

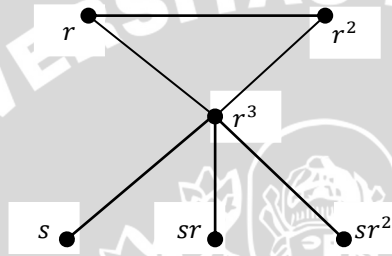
Tabel 3.1 Operasi pergandaan pada D_3

\circ	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2
r	r^2	r^3	r	sr^2	s	sr
r^2	r^3	r	r^2	sr	sr^2	s
r^3	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2
s	sr	sr^2	s	r^2	r^3	r
sr	sr^2	s	sr	r	r^2	r^3
sr^2	s	sr	sr^2	r^3	r	r^2

Dari Tabel 3.1 terlihat bahwa:

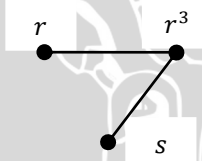
1. r^3 komutatif dengan setiap elemen D_3 (sifat elemen identitas) sehingga r^3 bertetangga dengan setiap elemen D_3 ,
2. $r \circ r^2 = r^2 \circ r = r^3$ merupakan elemen-elemen yang komutatif sehingga elemen-elemen tersebut bertetangga satu sama lain,
3. sedangkan elemen yang tidak termasuk pada poin 1 dan 2 merupakan elemen-elemen yang tidak komutatif maka elemen-elemen tersebut tidak bertetangga.

Secara geometri *commuting graph* pada D_3 dapat disajikan sebagai berikut.



Gambar 3.1 *Commuting graph* pada D_3

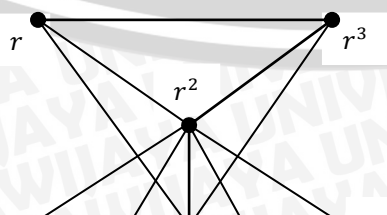
Misalkan $\Omega \subset D_3$, dimana $\Omega = \{r, r^3, s\}$ maka $C(D_3, \Omega)$ dapat diilustrasikan pada Gambar 3.2 berikut.



Gambar 3.2 Graf $C(D_3, \Omega)$ dengan $\Omega = \{r, r^3, s\}$

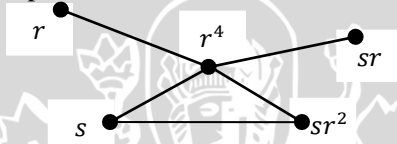
Contoh 3.1.3

Misalkan $n = 4$ maka D_4 merupakan grup dihedral dengan delapan elemen. Berdasarkan Tabel 2.3 dapat dibentuk *commuting graph* pada D_4 sebagai berikut.



Gambar 3.3 *Commuting graph* pada D_4

Misalkan $\Omega \subset D_4$, dimana $\Omega = \{r, r^4, s, sr, sr^2\}$ maka $C(D_4, \Omega)$ dapat diilustrasikan pada Gambar 3.4 berikut.



Gambar 3.4 Graf $C(D_4, \Omega)$ dengan $\Omega = \{r, r^4, s, sr, sr^2\}$

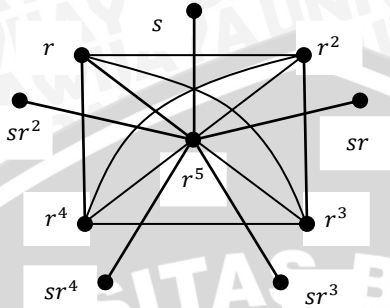
Contoh 3.1.4

Misalkan $n = 5$ maka D_5 adalah grup dihedral ke-5. Operasi pergandaan komposisi pada D_5 disajikan dalam Tabel 3.2 berikut.

Tabel 3.2 Operasi pergandaan pada D_5

\circ	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r	r^2	r^3	r^4	r^5	r	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3
r^2	r^3	r^4	r^5	r	r^2	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2
r^3	r^4	r^5	r	r^2	r^3	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr
r^4	r^5	r	r^2	r^3	r^4	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s
r^5	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s	r^5	r	r^2	r^3	r^4
sr	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr	r^4	r^5	r	r^2	r^3
sr^2	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2	r^3	r^4	r^5	r	r^2
sr^3	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3	r^2	r^3	r^4	r^5	r
sr^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r	r^2	r^3	r^4	r^5

Dari Tabel 3.2 dapat dibuat *commuting graph* pada D_5 , yaitu $G = C(D_5, D_5)$ yang diilustrasikan pada Gambar 3.5 berikut.



Gambar 3.5 Commuting graph pada D_5

Dengan menggunakan cara seperti pada Contoh 3.1.2, Contoh 3.1.3, dan Contoh 3.1.4 maka dapat diperoleh *commuting graph* pada D_n untuk $n \geq 3$, namun pada skripsi ini hanya dibahas untuk $3 \leq n \leq 8$. Tabel operasi pergandaan untuk D_6, D_7, D_8 dan gambar dari *commuting graph* pada D_6, D_7, D_8 disajikan pada Lampiran. Secara umum, bila dilakukan pengamatan pada *commuting graph* pada grup dihedral maka akan diperoleh sifat-sifat sebagaimana yang dipaparkan pada sub bab 3.2.

3.2 Sifat-sifat *Commuting Graphs* pada Grup Dihedral

Pada sub bab ini dipaparkan beberapa teorema, lema, dan akibat serta contoh-contoh yang berkaitan dengan *commuting graph* pada grup dihedral. Hampir seluruh teorema, lema dan akibat pada sub bab ini dikutip dari karya T. Tamizh Chelvama, K. Selvakumar dan S. Raja yang berjudul *Commuting Graphs On Dihedral Group*, kecuali teorema 3.2.22 yang diperoleh dari hasil pengamatan penulis.

Lema 3.2.1

Misalkan $\Omega \subseteq D_n$ dan $G = C(D_n, \Omega)$ adalah *commuting graph* pada grup dihedral, maka untuk sebarang $a \in \Omega$, berlaku $\deg(a) = |C_\Omega(a)| - 1$, dimana $C_\Omega(a)$ adalah himpunan elemen-elemen Ω yang komutatif dengan a .

Bukti

Misalkan $a \in \Omega$ maka $a \in C_\Omega(a)$ karena a komutatif dengan a . Misalkan anggota $C_\Omega(a)$ sebanyak k (termasuk a), maka $|C_\Omega(a)| =$

k . Berdasarkan Definisi 3.1.1, dua elemen berbeda dikatakan bertetangga bila keduanya berlaku hukum komutatif sehingga tidak terdapat garis yang berawal dan berakhir pada elemen yang sama (a tidak bertetangga dengan a). Oleh karena itu, hanya terdapat $k - 1$ elemen yang bertetangga dengan a .

Jadi $\deg(a) = k - 1 = |C_{\Omega}(a)| - 1$. ■

Contoh 3.2.2

Pada *commuting graph* pada D_3 , elemen-elemen yang komutatif dengan r adalah $\{r, r^2, r^3\}$ maka $|C_{\Omega}(r)| = 3$. Berdasarkan Gambar 3.1 dapat dilihat bahwa terdapat dua elemen yang bertetangga dengan r , yaitu r^3 dan r^2 sehingga $\deg(r) = 2$.

Lema 3.2.3

Misalkan $n \geq 3$ adalah bilangan genap dan $G = C(D_n, D_n)$. Maka

i) $\deg(sr^i) = 3$ untuk setiap $i, 1 \leq i \leq n$,

ii) $\deg(r^i) = \begin{cases} 2n - 1, & \text{jika } i = n \text{ atau } i = \frac{n}{2} \\ n - 1, & \text{yang lainnya.} \end{cases}$

Bukti

i) Karena n bilangan genap, maka elemen-elemen yang komutatif dengan sr^i adalah $C_{D_n}(sr^i) = \{r^{\frac{n}{2}}, r^n, sr^i, sr^{\frac{n}{2}+i}\}$ untuk semua $i, 1 \leq i \leq n$ sehingga $|C_{D_n}(sr^i)| = 4$. Berdasarkan Lema 3.2.1, maka untuk $1 \leq i \leq n$,

$$\deg(sr^i) = |C_{D_n}(sr^i)| - 1 = 4 - 1 = 3.$$

ii) Karena n bilangan genap, maka r^i dengan $i = n$ atau $i = \frac{n}{2}$ merupakan elemen yang komutatif dengan semua elemen D_n sehingga $|C_{D_n}(r^i)| = 2n$ untuk $i = n$ atau $i = \frac{n}{2}$. Berdasarkan Lema 3.2.1, maka $\deg(r^i) = 2n - 1$.

Jika $i \neq n$ atau $i \neq \frac{n}{2}$ maka elemen-elemen yang komutatif dengan r^i adalah semua elemen rotasi dari D_n sehingga $|C_{D_n}(r^i)| = n$. Karena $|C_{D_n}(r^i)| = n$, maka $\deg(r^i) = |C_{D_n}(r^i)| - 1 = n - 1$ untuk $i \neq n$ atau $i \neq \frac{n}{2}$. ■

Contoh 3.2.4

$C(D_4, D_4)$ adalah *commuting graph* pada D_4 . Seperti terlihat pada Gambar 3.3 maka

$$\deg(r) = \deg(r^3) = 4 - 1 = 3,$$

$$\deg(r^2) = \deg(r^4) = 2(4) - 1 = 7, \text{ dan}$$

$$\deg(s) = \deg(sr) = \deg(sr^2) = \deg(sr^3) = 3.$$

Lema 3.2.5

Misalkan $n \geq 3$ adalah bilangan bulat ganjil dan $G = C(D_n, D_n)$ maka

i) $\deg(sr^i) = 1$ untuk setiap $i, 1 \leq i \leq n,$

ii) $\deg(r^i) = \begin{cases} 2n - 1, & \text{jika } i = n \\ n - 1, & \text{yang lainnya.} \end{cases}$

Bukti

i) Karena $C_{D_n}(sr^i) = \{r^n, sr^i\}$ untuk setiap $i, 1 \leq i \leq n$. berdasarkan Lema 3.2.1 maka $\deg(sr^i) = |C_{D_n}(sr^i)| - 1$, sehingga $\deg(sr^i) = 2 - 1 = 1$ untuk setiap $i, 1 \leq i \leq n.$

ii) Jika $i = n$ maka r^i merupakan elemen yang komutatif dengan semua anggota D_n sehingga $|C_{D_n}(r^i)| = 2n$. Berdasarkan Lema 3.2.1, maka $\deg(r^i) = 2n - 1$ untuk $i = n.$

Jika $i \neq n$ maka r^i merupakan elemen yang komutatif dengan elemen-elemen rotasi dari D_n sehingga

$$|C_{D_n}(r^i)| = n. \text{ Karena } |C_{D_n}(r^i)| = n, \text{ maka}$$

$$\deg(r^i) = |C_{D_n}(r^i)| - 1 = n - 1 \text{ untuk } i \neq n. \quad \blacksquare$$

Contoh 3.2.6

$C(D_3, D_3)$ adalah *commuting graph* pada D_3 . Seperti terlihat pada Gambar 3.1 maka

$$\deg(r) = \deg(r^2) = 3 - 1 = 2,$$

$$\deg(r^3) = 2(3) - 1 = 5, \text{ dan}$$

$$\deg(s) = \deg(sr) = \deg(sr^2) = 1.$$

Lema 3.2.7

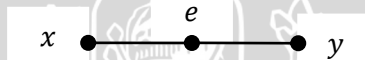
Misalkan $G = C(D_n, \Omega)$ dimana $\Omega \subseteq D_n$ dan $n \geq 3$. Maka berlaku sifat-sifat berikut.

i) Jika Ω adalah subgrup komutatif dari D_n , maka $\text{diam}(G) = 1.$

- ii) Jika Ω adalah subgrup dari D_n , maka $diam(G) = 2$.
- iii) Jika $\Omega = D_n - Z(D_n)$, maka $diam(G) = \infty$.

Bukti

- i) Jika Ω adalah subgrup komutatif dari D_n , maka G adalah graf lengkap. Karena pada graf lengkap setiap simpul terhubung langsung (bertetangga) dengan simpul-simpul yang lain, maka jarak antara simpul satu dengan yang lainnya adalah 1. Karena jarak dari sebarang dua simpul dalam G adalah 1, maka $diam(G) = 1$.
- ii) Misalkan Ω subgrup dari D_n . Karena Ω bukan subgrup komutatif, maka untuk sebarang $x, y \in \Omega$ berlaku $xy \neq yx$ sehingga $diam(G) \geq 2$. Karena $e \in \Omega$, maka untuk sebarang $x, y \in \Omega$ berlaku



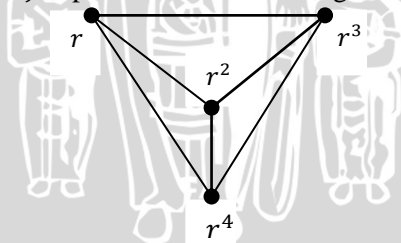
yaitu lintasan dengan panjang dua. Oleh karena itu, $diam(g) = 2$.

- iii) Misalkan $\Omega = D_n - Z(D_n)$, maka G adalah graf tak-terhubung, sehingga $diam(G) = \infty$. ■

Contoh 3.2.8

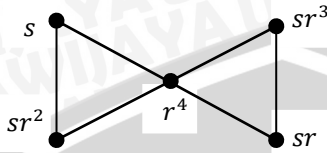
Misalkan $C(D_4, D_4)$ adalah *commuting graph* pada D_4 .

- a. Misalkan subgrup komutatif dari D_4 adalah $\Omega = \{r, r^2, r^3, r^4\}$, maka $G = C(D_4, \Omega)$ dapat diilustrasikan sebagai berikut.



Gambar 3.6 Graf $G = C(D_4, \Omega)$ dengan $\Omega = \{r, r^2, r^3, r^4\}$
 Dari Gambar 3.6 dapat dilihat bahwa jarak setiap simpul pada $C(D_4, \Omega)$ adalah 1. Oleh karena itu, $diam(G) = 1$.

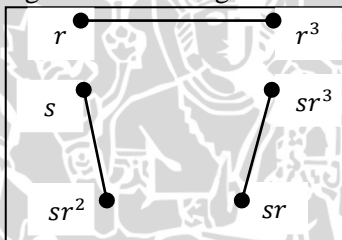
- b. Misalkan subgrup yang tidak komutatif dari D_4 adalah $\Omega = \{r^4, s, sr, sr^2, sr^3\}$.



Gambar 3.7 Graf $G = C(D_4, \Omega)$

Dari Gambar 3.7 dapat dilihat bahwa $d(s, sr) = d(sr^2, sr^3) = d(r^4, sr^i) = 1$ dan $d(s, sr^2) = d(s, sr^3) = d(sr, sr^2) = d(sr, sr^3) = 2$, sehingga jarak maksimum antar simpul adalah 2. Oleh karena itu, $diam(G) = 2$.

- c. Center dari D_4 adalah $Z(D_4) = \{r^2, r^4\}$ dan $\Omega = D_4 - Z(D_4)$ sehingga $\Omega = \{r, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. $G = C(D_4, \Omega)$ dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3.8 Graf $G = C(D_4, \Omega)$ dengan $\Omega = D_4 - Z(D_4)$

Graf G pada Gambar 3.8 merupakan graf tak-terhubung sehingga $diam(G) = \infty$.

Akibat 3.2.9

Misalkan $G = C(D_n, \Omega)$, dimana $\Omega \subseteq D_n$, maka berlaku sifat-sifat berikut.

- i) Jika n ganjil dan $\Omega = \{r^i, sr^j\}$; untuk $1 \leq i \leq n - 1$ dan $1 \leq j \leq n\}$, maka $diam(G) = \infty$.
- ii) Jika n genap dan $\Omega = \{r^i, sr^j\}$; untuk $1 \leq i \leq n - 1, i \neq \frac{n}{2}$, dan $1 \leq j \leq n\}$, maka $diam(G) = \infty$.

Bukti

- i) n adalah bilangan ganjil dan

$$\Omega = \{r^i, sr^j \mid 1 \leq i \leq n - 1 \text{ dan } 1 \leq j \leq n\}.$$

Akan ditunjukkan bahwa $\text{diam}(G) = \infty$. Karena $r^n \notin \Omega$, dan n ganjil, maka tidak terdapat $a \in \Omega$ yang komutatif dengan sr^j , sehingga sr^j untuk $1 \leq j \leq n$ merupakan simpul-simpul terasing. Karena terdapat simpul terasing dalam G , maka $\text{diam}(G) = \infty$.

ii) n adalah bilangan genap dan

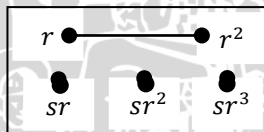
$$\Omega = \{r^i, sr^j \mid 1 \leq i \leq n-1, i \neq \frac{n}{2} \text{ dan } 1 \leq j \leq n\}.$$

Akan dibuktikan bahwa $\text{diam}(G) = \infty$. Bila $i \neq n$ atau $i \neq \frac{n}{2}$ maka r^i adalah elemen yang komutatif dengan setiap anggota D_n . Jika $\Omega = D_n - \{r^i \mid i = n \text{ atau } i = \frac{n}{2}\}$ maka merupakan graf tak-terhubung sehingga $\text{diam}(G) = \infty$. ■

Contoh 3.2.10

Misalkan $n = 4$ dan graf $G = C(D_4, \Omega)$ dengan $\Omega = \{r, r^3, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$, maka $\text{diam}(G) = \infty$. Hal ini seperti ditunjukkan pada Gambar 3.8.

Misalkan $n = 3$ dan graf $G = C(D_3, \Omega)$ dengan $\Omega = \{r, r^2, sr, sr^2, sr^3\}$, maka graf $G = C(D_3, \Omega)$ adalah graf tak-terhubung, sehingga $\text{diam}(G) = \infty$. Hal ini dapat dilihat pada Gambar 3.9 berikut.



Gambar 3.9 Graf $G = C(D_3, \Omega)$

Teorema 3.2.11

Misalkan $n \geq 3$ bilangan bulat dan $G = C(D_n, \Omega)$, dimana $\Omega \subseteq D_n$, maka $G = K_n$ jika dan hanya jika $\Omega = \{r^i \mid 1 \leq i \leq n\}$.

Bukti

(\Rightarrow) Diketahui $G = K_n$.

Akan ditunjukkan bahwa $\Omega = \{r^i \mid 1 \leq i \leq n\}$.

K_n adalah graf lengkap dengan n buah simpul. Graf lengkap merupakan graf yang setiap simpulnya bertetangga satu sama lain. Dalam *commuting graph*, bila $G = K_n$ maka setiap elemen dalam G harus berlaku hukum komutatif. Pada D_n , subgrup komutatif berorde

n merupakan subgrup yang elemen-elemennya diperoleh dari hasil rotasi-rotasi poligon, sehingga $\Omega = \{r, r^2, \dots, r^n\}$. Jadi $\Omega = \{r, r^2, \dots, r^n\} = \{r^i | 1 \leq i \leq n\}$.

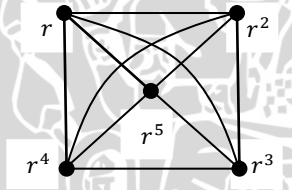
(\Leftarrow) Diketahui $\Omega = \{r^i | 1 \leq i \leq n\}$.

Akan ditunjukkan bahwa $G = K_n$.

Ω merupakan himpunan yang elemen-elemennya bersifat komutatif, sehingga setiap elemen Ω bertetangga dengan simpul lainnya. Berdasarkan Definsi 2.6.3 graf lengkap adalah graf yang setiap simpulnya terhubung dengan dengan simpul yang lainnya, maka $G = C(D_n, \Omega)$ dengan $\Omega = \{r^i | 1 \leq i \leq n\}$ merupakan graf dengan setiap simpulnya bertetangga satu sama lain. Dengan demikian, G merupakan graf lengkap dengan n buah simpul. Jadi $G = K_n$. ■

Contoh 3.2.12

Misalkan $n = 5$ dan $G = C(D_5, D_5)$ adalah *commuting graph* pada grup dihedral ke-5. Jika $\Omega = \{r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$ maka $H = C(D_5, \Omega)$ adalah graf lengkap dengan 5 simpul.



Gambar 3.10 Graf $H = C(D_5, \Omega) = K_5$

Akibat 3.2.13

Misalkan $n \geq 3$ bilangan bulat maka tidak terdapat $\Omega \subseteq D_n$, sedemikian sehingga $C(D_n, \Omega)$ adalah n -regular (graf teratur berderajat n).

Bukti

Berdasarkan Lema 3.2.2 dan Lema 3.2.3 $deg(sr^i) = 1$ atau 3 dan $deg(r^i) = n - 1$ atau $2n - 1$ sehingga tidak terdapat simpul yang berderajat n . Oleh karena itu, tidak terdapat Ω sedemikian sehingga $C(D_n, \Omega)$ adalah graf teratur berderajat n . ■

Teorema 3.2.14

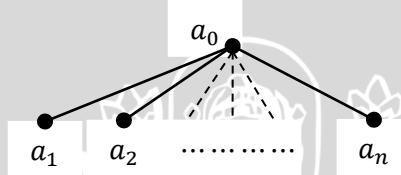
Misalkan $n \geq 3$ bilangan bulat ganjil dan $C(D_n, \Omega)$, dimana $\Omega \subseteq D_n$, maka $C(D_n, \Omega) = K_{1,n}$ jika dan hanya jika $\Omega = \{r^n, s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$.

Bukti

(\Rightarrow) Diketahui $C(D_n, \Omega) = K_{1,n}$ dan n bilangan ganjil.

Akan dibuktikan $\Omega = \{r^n, s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$.

Berdasarkan Definisi 2.6.6 tentang graf bipartit, maka simpul-simpul pada $C(D_n, \Omega) = K_{1,n}$ dapat dikelompokkan menjadi $V_1 = \{a_0\}$ dan $V_2 = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ dimana antar elemen di V_1 tidak bertetangga begitu juga di V_2 . Graf bipartit lengkap $C(D_n, \Omega) = K_{1,n}$ dapat diilustrasikan dengan Gambar 3.11 berikut.



Gambar 3.11 Graf bipartit lengkap $K_{1,n}$

Berdasarkan Definisi 3.1.1 dan Gambar 3.11 dapat dilihat bahwa a_0 komutatif dengan a_1, a_2, \dots, a_n , tetapi tidak berlaku hukum komutatif antar a_i untuk $1 \leq i \leq n$. Pada D_n , hal ini hanya akan dipenuhi bila $V_1 = \{r^n\}$ dan $V_2 = \{sr^i | 1 \leq i \leq n\}$ sehingga $V_1 \cap V_2 = \{r^n, s, sr^1, \dots, sr^{n-1}\}$.

Jadi $\Omega = V_1 \cap V_2 = \{r^n, s, sr^1, \dots, sr^{n-1}\}$.

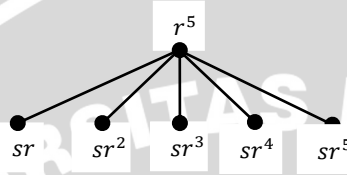
(\Leftarrow) Diketahui $\Omega = \{r^n, s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$ dan n bilangan ganjil.

Akan dibuktikan $C(D_n, \Omega) = K_{1,n}$.

Berdasarkan Definisi 3.2.3 $\deg(sr^i) = 1$, hal ini disebabkan $C_\Omega(sr^i) = \{r^n, sr^i\}$, untuk setiap $i, 1 \leq i \leq n$. Dengan kata lain, r^n komutatif dengan setiap elemen sr^i sedangkan sr^1, sr^2, \dots, sr^n tidak berlaku hukum komutatif. Oleh sebab itu, Ω dapat dipartisi menjadi dua bagian yaitu $\Omega_1 = \{r^n\}$ dan $\Omega_2 = \{s, sr, \dots, sr^n\}$. Karena simpul-simpul Ω dapat dipartisi menjadi Ω_1 dan Ω_2 dengan antar elemen di Ω_1 tidak komutatif atau tidak bertetangga begitu juga di Ω_2 , maka graf yang dibentuk dari $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$ adalah graf bipartit lengkap $K_{1,n}$. Jadi $C(D_n, \Omega) = K_{1,n}$. ■

Contoh 3.2.15

Misalkan $n = 5$, $\Omega = \{r^5, s, sr^1, sr^2, sr^3, sr^4\}$ maka $C(D_5, \Omega) = K_{1,5}$. Himpunan simpul $C(D_5, \Omega)$ dapat dipartisi menjadi dua buah himpunan yaitu V_1 dan V_2 , dimana $V_1 = \{r^5\}$ dan $V_2 = \{s, sr^1, sr^2, sr^3, sr^4\}$. Graf bipartit lengkap $C(D_5, \Omega) = K_{1,5}$ dapat digambar sebagai berikut.



Gambar 3.12 Graf $C(D_5, \Omega) = K_{1,5}$

Akibat 3.2.16

Misalkan $n \geq 3$ bilangan bulat ganjil dan $G = C(D_n, D_n)$ maka G adalah graf split.

Bukti

Diketahui n bilangan ganjil dan $G = C(D_n, D_n)$. Akan ditunjukkan G adalah graf split. Untuk menunjukkan G adalah graf split maka himpunan simpul dalam G harus ditunjukkan bahwa $V(G) = I + C$, dimana I adalah himpunan bebas dan C adalah himpunan clique.

Berdasarkan Lema 3.2.5, $\deg(sr^i) = 1$ atau $C_{D_n}(sr^i) = \{r^n, sr^i\}$ sehingga tidak berlaku hukum komutatif antar sr^i . Oleh karena itu, sr^i untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dapat dikelompokkan menjadi himpunan bebas $I = \{sr^i | 1 \leq i \leq n\}$, dan himpunan bagian yang lain dari D_n adalah $\Omega = \{r^i | 1 \leq i \leq n\}$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa Ω adalah graf lengkap maksimal. Berdasarkan Lema 3.2.5, $\deg(r^i) = n - 1$, untuk $i \neq n$ dan $\deg(r^i) = 2n - 1$, untuk $i = n$. Karena $\Omega = D_n - I$, maka $C_\Omega(r^i) = \{r^i | 1 \leq i \leq n\}$ sehingga $|C_\Omega(r^i)| = n$ dan $\deg(r^i) = n - 1$. Karena $\deg(r^i) = n - 1$ untuk setiap i , maka $C(D_n, \Omega)$ adalah graf lengkap maksimal sehingga Ω merupakan clique. Dengan kata lain, $\Omega = C$. Karena $V(G)$ dapat dipartisi menjadi dua himpunan I dan C dengan $V(G) = I + C$, maka $G = C(D_n, D_n)$ adalah graf split.



Contoh 3.2.17

Misalkan $n = 5$, maka graf $G = C(D_5, D_5)$ adalah graf split. Hal ini disebabkan $V(G) = I + C$ dengan $I = \{s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, \}$ dan $C = \{r, r^1, r^2, r^3, r^4, r^5\}$.

Teorema 3.2.18

Untuk sebarang bilangan bulat $n \geq 3$ dan $G = C(D_n, D_n)$ maka banyak garis pada G adalah $\varepsilon(G) = \begin{cases} \frac{n(n+1)}{2} & \text{jika } n \text{ ganjil} \\ \frac{n(n+4)}{2} & \text{yang lainnya.} \end{cases}$

Bukti

Misalkan $\Omega_1 = \{r, r^2, \dots, r^n\}$ dan $\Omega_2 = \{sr, sr^2, \dots, sr^n\}$, maka $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ dan $\Omega_1 \cup \Omega_2 = D_n$.

Kasus 1. Misalkan n ganjil, maka $C(D_n, \Omega_1)$ adalah subgraf lengkap dan $C(D_n, \Omega_2)$ subgraf *null* (subgraf yang tidak mempunyai garis). Oleh karena itu, banyak garis pada G adalah jumlah dari banyak garis pada $C(D_n, \Omega_1)$ dan banyak garis yang menghubungkan r^n dengan Ω_2 sehingga

$$\varepsilon(G) = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Kasus 2. Misalkan n genap, maka $C(D_n, \Omega_1)$ adalah subgraf lengkap dan $C(D_n, \Omega_2)$ subgraf $\frac{n}{2}K_2$. Oleh karena itu, banyak garis pada G adalah jumlah dari banyak garis pada $C(D_n, \Omega_1)$, banyak garis pada $C(D_n, \Omega_2)$ dan banyak garis yang menghubungkan $r^{\frac{n}{2}}$ dan r^n dengan Ω_2 . Dengan kata lain, banyak garis pada G adalah

$$\varepsilon(G) = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n}{2}(1) + 2n = \frac{n(n+4)}{2}.$$

■

Contoh 3.2.19

Pada Gambar 3.3, banyak garis pada $G = C(D_5, D_5)$ adalah $\varepsilon(G) = \frac{5(5+1)}{2} = \frac{30}{2} = 15$. Sedangkan banyak garis pada *commuting graph* $H = C(D_4, D_4)$ adalah $\varepsilon(H) = \frac{4(4+4)}{2} = 16$, hal ini dapat dilihat pada Gambar 3.2.

Teorema 3.2.20

Misalkan $n \geq 3$ bilangan bulat, $\Omega \subseteq D_n$, dan $G = C(D_n, D_n)$ maka $\omega(G) = \chi(G) = n$.

Bukti

Misalkan $\Omega = \{r, r^2, \dots, r^n\} \subset D_n$ maka $C(D_n, \Omega) = K_n$ adalah subgraf lengkap maksimal dari $G = C(D_n, D_n)$. Dengan kata lain, bilangan *clique* dari G adalah $\omega(G) = n$.

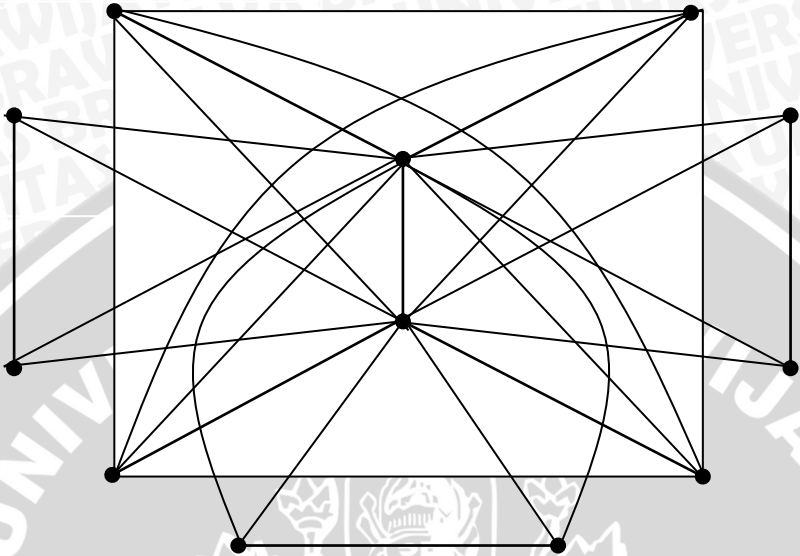
Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $\chi(G) = n$. Telah diketahui bahwa jika $\Omega = \{r, r^2, \dots, r^n\}$ maka $H = C(D_n, \Omega)$ adalah subgraf lengkap dari $G = C(D_n, D_n)$ sehingga setiap simpul dalam H bertetangga satu sama lain. Oleh karena itu, setiap simpul harus diberi warna yang berbeda. Karena terdapat n buah simpul dalam H maka banyak warna minimum yang dibutuhkan adalah n buah warna atau $\chi(H) = n$.

Pada n ganjil, sr^i untuk $1 \leq i \leq n$ merupakan simpul yang hanya komutatif dengan r^n , sehingga untuk mewarnai sr^i dapat digunakan warna yang berbeda dengan r^n . Dengan kata lain, terdapat $n - 1$ buah warna yang dapat digunakan untuk mewarnai sr^i . Oleh karena itu, $\chi(G) = n$.

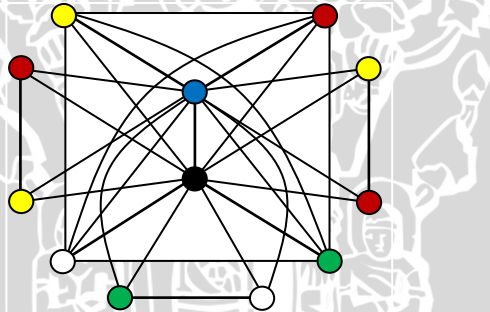
Pada n genap, sr^i untuk $1 \leq i \leq n$ merupakan simpul yang komutatif dengan $r^n, r^{\frac{n}{2}}$, dan $sr^{\frac{n}{2}+i}$ sehingga untuk mewarnai sr^i dapat digunakan warna yang berbeda dengan $r^n, r^{\frac{n}{2}}$. Dengan kata lain, terdapat $n - 2$ buah warna yang dapat digunakan untuk mewarnai sr^i dan $sr^{\frac{n}{2}+i}$ sedemikian sehingga keduanya memiliki warna berbeda. Oleh karena itu, $\chi(G) = n$. Jadi, $\omega(G) = \chi(G) = n$. ■

Contoh 3.2.21

Misalkan $n = 6$, dan $G = C(D_6, D_6)$. Maka *clique* dari G adalah $C(D_6, \Omega)$ dengan $\Omega = \{r^i | 1 \leq i \leq n\}$, yang disajikan pada gambar 3.13 dan G mempunyai bilangan kromatik $\chi(C(D_6, D_6)) = 6$ seperti yang disajikan pada Gambar 3.14.



Gambar 3.13 *Clique* dari $C(D_6, D_6)$



Gambar 3.14 Graf $G = C(D_6, D_6)$ dengan $\chi(G) = 6$

Teorema 3.2.22

Misalkan $G = C(D_n, D_n)$, $M \subset V(G)$ dan M adalah *matching* maksimum dalam G . Maka berlaku :

- i) bila n ganjil maka $|M| = \frac{n+1}{2}$,
- ii) bila n genap maka $|M| = n$.

Bukti

Berdasarkan Definisi 2.9.3, *matching* maksimum adalah *matching* dengan jumlah garis *matched* paling banyak.

i) Diketahui n ganjil dan M *matching* maksimum dalam G . Akan ditunjukkan bahwa $|M| = \frac{n+1}{2}$.

Misalkan $\Omega = \{r^i | 1 \leq i \leq n\}$, maka banyak garis *matched* yang mungkin adalah $\frac{n-1}{2}$ sehingga terdapat sebuah simpul dalam G yang tidak *matched*. Karena r^n adalah simpul yang bertetangga dengan setiap simpul dalam G , agar diperoleh garis *matched* berikutnya, maka diambil garis yang menghubungkan r^n dengan salah satu dari sr^i untuk $1 \leq i \leq n$. Berdasarkan Lema 3.2.5, $\deg(sr^i) = 1$ sehingga tidak lagi terdapat garis *matched* yang mungkin. Oleh karena itu, banyak garis *matched* terbanyak dalam G adalah jumlah dari banyak garis *matched* dalam $C(D_n, \Omega)$ dan sebuah garis yang menghubungkan r^n dengan salah satu dari sr^i . Dengan kata lain, $|M| = \frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}$.

ii) Diketahui n genap dan M *matching* maksimum dalam G . Akan ditunjukkan bahwa $|M| = n$.

Misalkan $\Omega_1 = \{r^i | 1 \leq i \leq n\}$, maka banyak garis *matched* yang mungkin adalah $\frac{n}{2}$. Berdasarkan bukti dari Lema 3.2.3, elemen-elemen yang komutatif dengan sr^i adalah $C_{D_n}(sr^i) = \{r^n, r^{\frac{n}{2}}, sr^i, sr^{\frac{n}{2}+i}\}$ sehingga masih terdapat garis *matched* yang mungkin, yaitu garis yang menghubungkan sr^i dengan $sr^{\frac{n}{2}+i}$. Karena terdapat n buah sr^i untuk setiap i , $1 \leq i \leq n$ maka banyak garis *matched* yang mungkin adalah $\frac{n}{2}$. Oleh sebab itu, $|M| = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$. ■

Contoh 3.2.23

Misalkan graf $G = C(D_3, D_3)$ seperti pada Gambar 3.1 dan $M \subset V(G)$, maka *matching* maksimum yang mungkin pada G adalah

$$M_1 = \{(r, r^2), (r^3, sr)\} \text{ dengan } |M_1| = \frac{3+1}{2} = 2,$$

$$M_2 = \{(r, r^2), (r^3, sr^2)\} \text{ dengan } |M_2| = 2, \text{ dan}$$

$$M_3 = \{(r, r^2), (r^3, sr^3)\} \text{ dengan } |M_3| = 2.$$

Misalkan graf $H = C(D_4, D_4)$ seperti pada Gambar 3.3 dan $M \subset V(H)$, maka beberapa *matching* maksimum yang mungkin dalam G adalah

$$M_1 = \{(r, r^2), (r^3, r^4), (sr, sr^3), (sr^2, s)\},$$

$$M_2 = \{(r, r^3), (r^2, r^4), (sr, sr^3), (sr^2, s)\},$$

$M_3 = \{(r, r^3), (r^2, sr), (r^4, sr^3), (sr^2, s)\}$, dan seterusnya. Dari *matching-matching* maksimum yang diperoleh terlihat bahwa masing-masing berorde $|M_i| = n = 4$, untuk setiap i .

Akibat 3.2.24

Misalkan $n \geq 3$ dan $G = C(D_n, D_n)$ adalah *commuting graph* pada D_n maka pada G berlaku sifat-sifat berikut :

- i) jika n bilangan ganjil maka G tidak mempunyai *perfect matching*,
- ii) jika n bilangan genap maka G mempunyai *perfect matching*.

Bukti

Perfect matching dari graf G merupakan himpunan garis-garis M dalam G sedemikian sehingga setiap simpul di G bersisian dengan M . Misalkan G mempunyai k buah simpul, maka banyak garis *perfect matching* yang mungkin adalah $\frac{k}{2}$. Karena banyak simpul dalam $G = C(D_n, D_n)$ adalah $2n$ maka $|M| = n$.

- i) Misalkan n bilangan ganjil, akan ditunjukkan bahwa $G = C(D_n, D_n)$ tidak mempunyai *perfect matching*. Berdasarkan Teorema 3.2.22, bila n ganjil maka $|M| = \frac{n+1}{2}$. Karena $|M| \neq n$ maka terdapat simpul dalam G yang tidak M -saturated, sehingga G tidak mempunyai *perfect matching*.
- ii) Misalkan n bilangan genap, maka berdasarkan Teorema 3.2.22 banyak garis *matched* dalam G adalah $|M| = n$. Oleh karena itu, setiap simpul dalam G merupakan M -saturated sehingga G mempunyai *perfect matching*. ■

Contoh 3.2.25

Misalkan graf $G = C(D_3, D_3)$ seperti pada Gambar 3.1, *matching-matching* dari G yang diperoleh pada Contoh 3.2.23 merupakan *matching* maksimum tetapi bukan *perfect matching*, hal ini disebabkan terdapat simpul dalam G yang bukan M -saturated. Oleh karena itu, graf G tidak mempunyai *perfect matching*.

Misalkan graf $H = C(D_4, D_4)$ seperti pada Gambar 3.3, *matching* dari H yang diperoleh pada Contoh 3.2.23 merupakan *matching* maksimum dengan setiap simpul dalam H merupakan *M-saturated*. Jadi, H mempunyai *perfect matching*.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB IV KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan pada bab III, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

1. Dengan *commuting graph*, dapat diketahui secara langsung bahwa dua elemen berbeda dalam D_n berlaku hukum komutatif atau sebaliknya.
2. Secara umum, *commuting graph* pada grup dihedral memiliki sifat-sifat berikut.
 - a. Bilangan kromatik dari $C(D_n, D_n)$ sebanyak n .
 - b. Graf $G = C(D_n, D_n)$ merupakan graf split.
 - c. Jika n ganjil, maka *matching* maksimum dari G berorde $|M| = \frac{n+1}{2}$ dan G tidak mempunyai *perfect matching*.
 - d. Jika n genap, maka *matching* maksimum dari G berorde $|M| = n$ dan G mempunyai *perfect matching*.



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR PUSTAKA

- Arifin, A. 2000. Aljabar. ITB. Bandung.
- Chartrand, G., dan O.R. Oellermann. 1993. Applied and Algorithmic Graph Theory. McGraw-Hill, Inc. New York.
- Chartrand, G., dan P. Zhang. 2005. Introduction to Graph Theory. McGraw-Hill, Inc. New York.
- Chelvam, T.T., dkk. 2011. Commuting Graphs on Dihedral Group. The Journal of Mathematics and Computer Science . Vol. 2 No.2, pages 402 – 406.
- Dummit, D.S. and R.M. Foote 2002. Abstract Algebra Second Edition. New York : John Wiley and Sons, Inc.
- Judson, T.W. 2007. Abstract Algebra, Theory and Applications. Stephen F. Austin State University.
- Lipschutz, S., dan M. Lipson. 2007. Discrete Mathematics Third Edition. McGraw-Hill, Inc. New York.
- Marsudi. 2010. Logika dan Teori Himpunan. UB Press. Malang.
- Munir, R. 2005. Matematika Diskrit, Edisi Ketiga. Informatika. Bandung.
- Wahyudin. 1989. Aljabar Modern. Tarsito. Bandung.

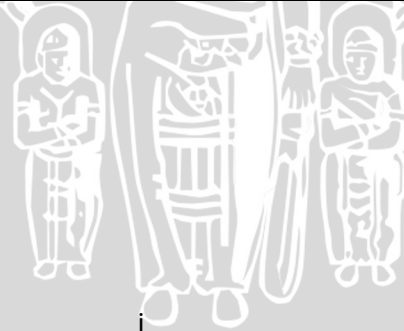
UNIVERSITAS BRAWIJAYA



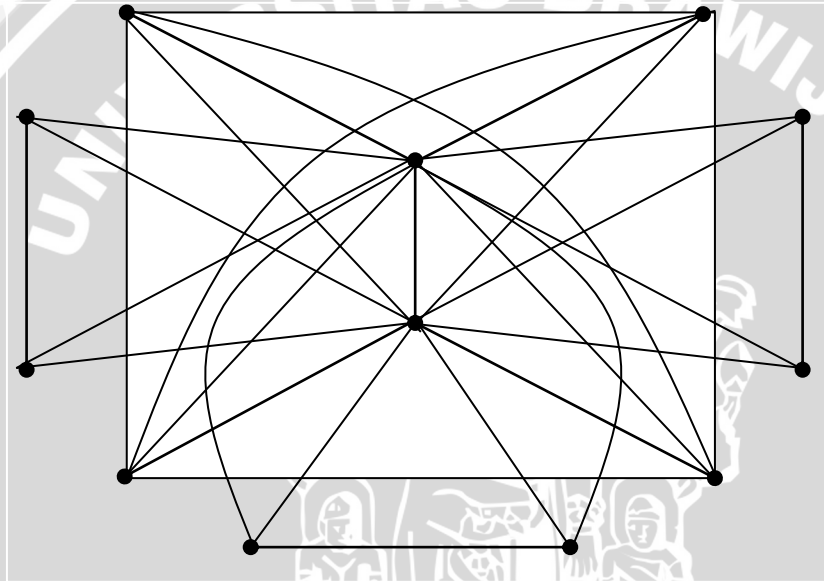
LAMPIRAN 1 OPERASI PERGANDAAN PADA D_6

Operasi pergandaan pada D_6

\circ	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r	r^2	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3
r^3	r^4	r^5	r^6	r	r^2	r^3	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2
r^4	r^5	r^6	r	r^2	r^3	r^4	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr
r^5	r^6	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s
r^6	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	r^6	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	r^5	r^6	r	r^2	r^3	r^4
sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	r^4	r^5	r^6	r	r^2	r^3
sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	r^3	r^4	r^5	r^6	r	r^2
sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r
sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6



LAMPIRAN 2 GAMBAR *COMMUTING GRAPH* PADA D_6



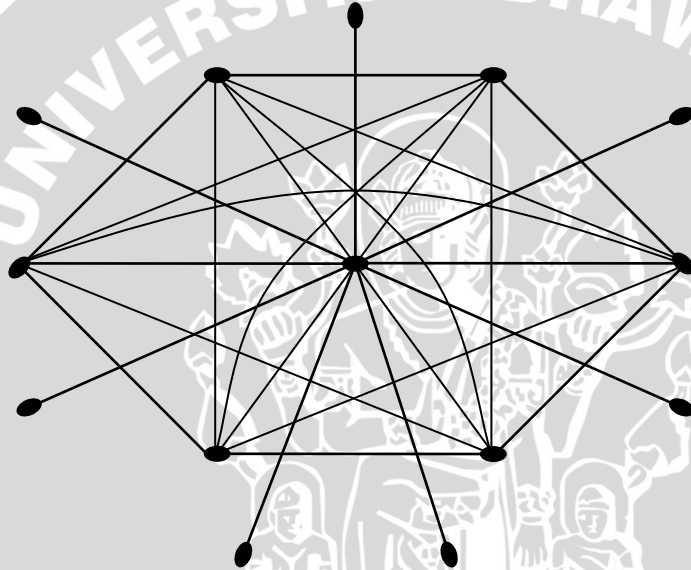
Gambar *commuting graph* pada D_6

LAMPIRAN 3 OPERASI PERGANDAAN PADA D_7

Operasi pergandaan pada D_7

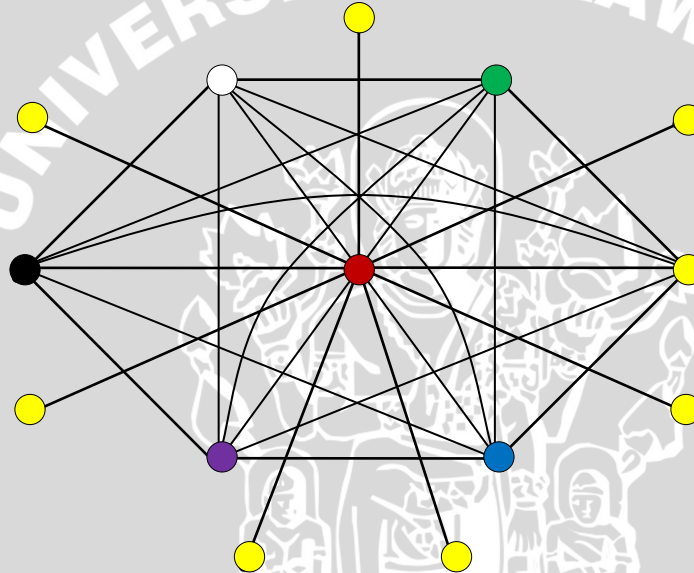
\circ	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r	r^2	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r	r^2	r^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3
r^4	r^5	r^6	r^7	r	r^2	r^3	r^4	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2
r^5	r^6	r^7	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr
r^6	r^7	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s
r^7	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	r^7	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	r^6	r^7	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	r^5	r^6	r^7	r	r^2	r^3	r^4
sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r	r^2	r^3
sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r	r^2
sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r
sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7

LAMPIRAN 4 GAMBAR *COMMUTING GRAPH* PADA D_7



Gambar *commuting graph* pada D_7

LAMPIRAN 5 GAMBAR PEWARNAAN SIMPUL *COMMUTING GRAPH* PADA D_7



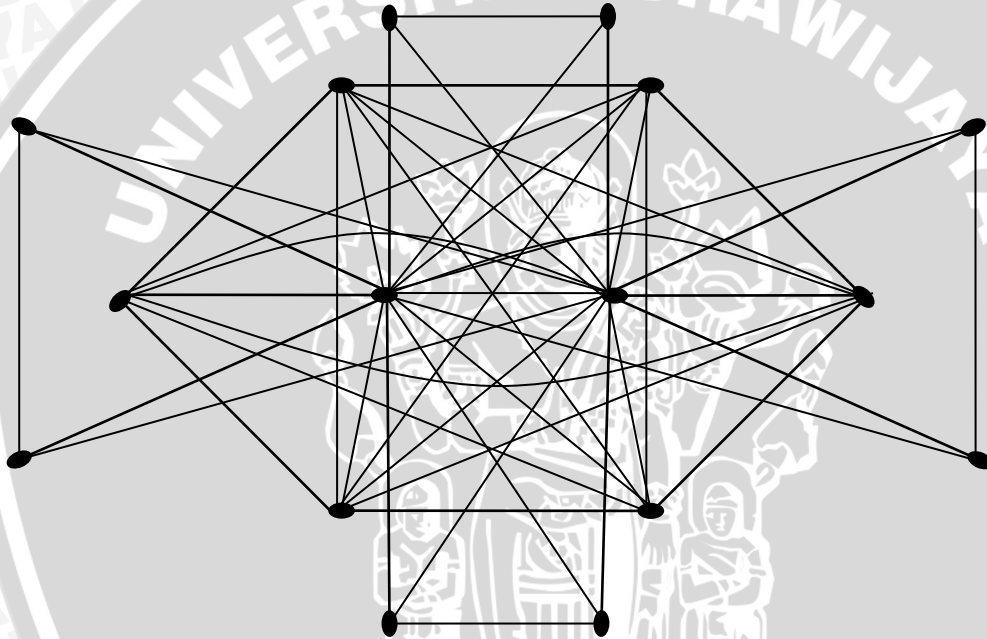
Gambar graf $G = C(D_7, D_7)$ dengan $\chi(G) = 7$

LAMPIRAN 6 OPERASI PERGANDAAN PADA D_8

Operasi pergandaan pada D_8

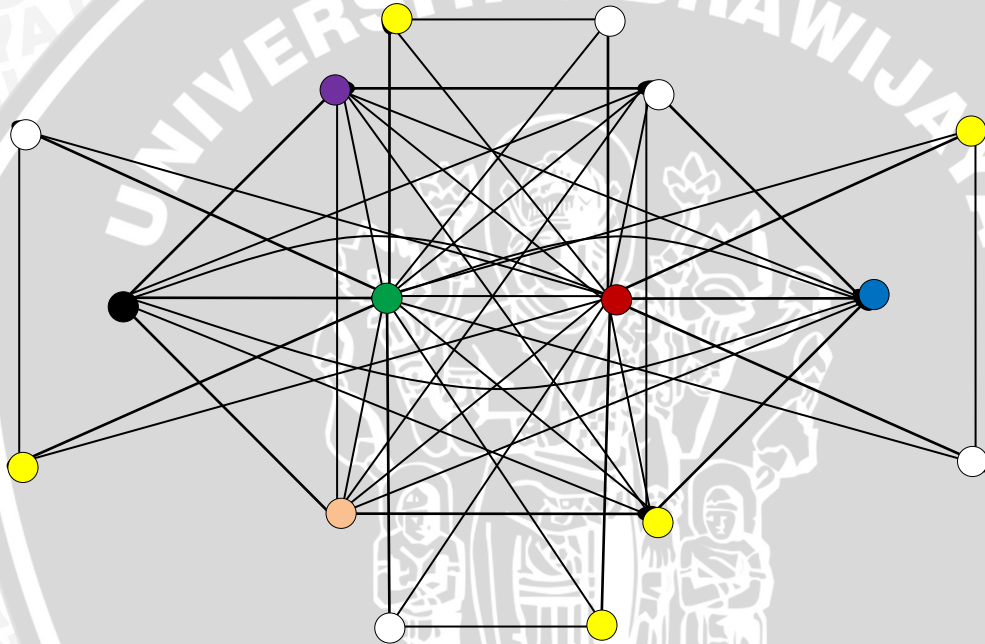
\circ	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r	r^2	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r	r^2	r^3	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r	r^2	r^3	r^4	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3
r^5	r^6	r^7	r^8	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2
r^6	r^7	r^8	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr
r^7	r^8	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s
r^8	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	r^8	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7
sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	r^7	r^8	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	r^6	r^7	r^8	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	r^5	r^6	r^7	r^8	r	r^2	r^3	r^4
sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r	r^2	r^3
sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r	r^2
sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r
sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8

LAMPIRAN 7 GAMBAR *COMMUTING GRAPH* PADA D_8



Gambar *commuting graph* pada D_8

LAMPIRAN 8 GAMBAR PEWARNAAN SIMPUL *COMMUTING GRAPH* PADA D_8



Gambar graf $G = C(D_8, D_8)$ dengan $\chi(G) = 8$