RING DENGAN ELEMEN IDENTITAS LEMAH

SKRIPSI

Oleh:
FARIS BUDI HAMSAH
0510940016-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2011

RING DENGAN ELEMEN IDENTITAS LEMAH

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh:
FARIS BUDI HAMSAH
0510940016-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2011

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

RING DENGAN ELEMEN IDENTITAS LEMAH

Oleh:
FARIS BUDI HAMSAH
0510940016-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 11 Februari 2011
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang matematika

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dra. Ari Andari, MS	**Dr. Abdul Rouf Alghofari, MSc**
NIP.196105161987012001	**NIP.196709071992031001**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Abdul Rouf Alghofari, MSc
NIP. 196709071992031001

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	**: Faris Budi Hamsah**
NIM	**: 0510940016-94**
Jurusan	**: Matematika**
Penulis skripsi berjudul	**: Ring dengan Elemen Identitas Lemah**

Dengan ini menyatakan bahwa:

1. **Skripsi ini adalah benar-benar karya sendiri, dan bukan hasil plagiat karya orang lain. Karya-karya yang tercantum dalam Daftar Pustaka Skripsi ini, semata-mata digunakan sebagai referensi.**
2. **Apabila di kemudian hari diketahui bahwa isi Skripsi saya merupakan hasil plagiat, maka saya bersedia menanggung akibat hukum dari keadaan tersebut.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 11 Februari 2011
Yang menyatakan,

(Faris Budi Hamsah)
NIM. 0510940016

RING DENGAN ELEMEN IDENTITAS LEMAH

ABSTRAK

Pada skripsi ini akan dibahas tentang definisi-definisi dan teorema-teorema yang berhubungan dengan ring yang memuat elemen identitas lemah. Suatu elemen e di dalam ring R disebut elemen identitas lemah jika untuk setiap x, y di dalam R sedemikian sehingga $xy = xey$. Jika suatu ring memuat elemen identitas lemah e maka ring tersebut adalah jumlahan langsung dari dua buah subringnya, salah satunya ideal nilpoten dan yang lainnya adalah ring dengan elemen identitas, yaitu $R = I \oplus eRe$.

Kata kunci: elemen identitas lemah

RING WITH WEAK IDENTITY

ABSTRACT

In this final project will be discussed about definitions and theorems related to the ring with weak identity. An e element in the ring R called weak identity element, if for each x, y in the ring R so that $xy = xey$. If a ring contains weak identity element e, then ring R is direct sum of two of its subrings, one of them is nilpotent ideal and the other is ring with identity, that is $R = I \oplus eRe$.

Keyword: weak identity

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat ALLAH SWT yang telah melimpahkan rahmat, pertolongan, dan petunjukNya sehingga skripsi yang berjudul **"Ring dengan Elemen Identitas Lemah"** ini dapat diselesaikan dengan baik. Sholawat serta salam semoga selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, keluarga, sahabat, serta umat beliau yang senantiasa istiqomah memegang Alquran dan Assunnah.

Skripsi ini disusun dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang Matematika. Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini mungkin tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Dra. Ari Andari, M.Si, selaku dosen Pembimbing I dan Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc, selaku dosen Pembimbing II dan Ketua Jurusan Matematika, atas segala bimbingan, motivasi serta kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini.
2. Dr. Wuryansari Muharini K., M.Si selaku Ketua Prodi Matematika yang telah memberikan pertimbangan-pertimbangan waktu dan saran bagi kelancaran studi penulis.
3. Prof. Dr. Marjono, M.Phil, Drs. Bambang Sugandi, M.Si dan Dra. Endang Wahyu H.,M.Si selaku dosen penguji atas segala saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
4. Kwardiniya A., S.Si, M.Si, selaku Penasihat Akademik yang telah banyak memberikan bimbingan dan masukan demi kelancaran kuliah penulis selama menempuh kuliah.
5. Seluruh dosen pengajar Fakultas MIPA Universitas Brawijaya yang telah membagikan ilmunya kepada penulis.
6. Bapak dan Ibu tercinta, atas kasih sayang dan doa yang tiada henti demi kesuksesan putranya, saudara kandung penulis Rani atas dorongan, semangat dan motivasi yang diberikan selama penulisan skripsi ini.
7. Segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya.

8. Teman-teman Mahasiswa Prodi Matematika Angkatan 2005 dan Angkatan 2006, atas semua doa dan semangat yang diberikan kepada penulis.
9. Deny, Desta, Hakiki, Puspito, Hermin, Safi'i, Kholil, Aziz, Andi, Kharis, Khoirul, Hasan dan Ebit atas doa, dukungan dan semangat yang diberikan kepada penulis.
10. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih belum sempurna. Untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran dari berbagai pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Harapan penulis, semoga skripsi ini dapat memberi sumbangan bagi dunia sains Indonesia, khususnya di bidang Aljabar.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, 11 Februari 2011

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

Notasi	**Keterangan**
$\emptyset$	Himpunan kosong
$*$	Operasi aljabar
$\Rightarrow$	Jika … maka … (implikasi)
$\Leftrightarrow$	Jika dan hanya jika (biimplikasi)
$\mathbb{N}$	Himpunan bilangan asli
$\mathbb{Q}$	Himpunan bilangan rasional
$\mathbb{R}$	Himpunan bilangan *real*
$\mathbb{Z}$	Himpunan bilangan bulat
$\mathbb{Z}^+$	Himpunan bilangan bulat positif
A^n	A dikalikan sebanyak n kali
$\mathbb{Z}_n$	Himpunan bilangan bulat modulo n
$\langle a \rangle$	Ideal yang dibangun elemen a $\langle a \rangle = \{ra \mid r \in R\}$
$\bar{a}$	a elemen kelas *residu*
$f(x)$	x dipetakan oleh f
$[a, b]$	a dibagi oleh b
$f : R \to R'$	Pemetaan oleh f dari R ke R'
$A \cong B$	A dan B adalah isomorfisma
$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$	Hasil penjumlahan dari $a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n$
$\oplus$	Jumlahan langsung
$M_{n\times n}(R)$	Matrik M berukuran $n \times n$ atas ring R
$n\mathbb{Z}$	Himpunan bilangan bulat yang dikalikan dengan n atau $\{n\mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{Z}\}$
$\blacksquare$	Pembuktian selesai

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Aljabar merupakan salah satu cabang matematika. Namun, aljabar masih terbagi lagi menjadi beberapa cabang ilmu, salah satu di antaranya adalah aljabar modern atau aljabar abstrak, yang membahas bermacam-macam struktur aljabar, di mana masing-masing struktur aljabar mempunyai sifat yang berbeda-beda.

Bentuk struktur aljabar yang paling sederhana dengan suatu operasi biner adalah semigrup. Semigrup kemudian berkembang menjadi grup, yang selanjutnya berkembang lagi menjadi ring. Di dalam ring, terdapat subring dan ideal. Ideal dibedakan atas dua macam, yakni ideal kiri dan ideal kanan. Jika suatu ideal memenuhi kedua jenis ideal tersebut, maka dikatakan sebagai ideal dua sisi atau cukup disebut dengan ideal. Selain itu, ada juga jenis-jenis dari ideal di antanya ideal maksimal, ideal prima dan ideal nilpoten.

Pada perkembangan struktur dari ring baik ring komutatif maupun *non* komutatif, banyak yang mengasumsikan bahwa ring-ring memuat elemen identitas terhadap operasi perkalian, contohnya *field* dan daerah integral. Skripsi ini akan memperkenalkan suatu konsep baru, yakni akan memperlemah elemen identitas terhadap operasi perkalian di dalam ring. Jika untuk setiap $x, y \in R$ sedemikan sehingga berlaku $xey = xy$ maka e disebut elemen identitas lemah (Ghosseiri, 2008). Serta akan menjelaskan juga mengenai definisi-definisi dan teorema-teorema yang menyangkut konsep ring dengan elemen identitas lemah.

1.2 Rumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah bagaimana definisi-definisi dan teorema-teorema yang berhubungan dengan ring yang memuat elemen identitas lemah.

1.3 Batasan Masalah

Dalam skripsi ini permasalahan yang akan dibahas hanya untuk ring dengan elemen identitas lemah.

1.4 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah untuk menjelaskan definisi-definisi dan membuktikan teorema-teorema yang berhubungan dengan ring yang memuat elemen identitas lemah.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dibahas mengenai beberapa definisi, sifat dan teorema beserta contoh yang akan digunakan sebagai dasar pembahasan pada bab-bab selanjutnya. Teori-teori yang akan dibahas adalah mengenai grup, ring dan homomorfisma ring.

2.1 Teori Grup

Definisi 2.1.1 (Grup) Suatu himpunan tak kosong G yang dilengkapi dengan operasi biner $*$ (dinotasikan dengan $(G,*)$) disebut grup jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. Tertutup, untuk setiap $a, b \in G$ sedemikian sehingga $a * b \in G$.
2. Assosiatif, untuk setiap $a, b, c \in G$ sedemikian sehingga
$$(a * b) * c = a * (b * c).$$
3. Mempunyai elemen identitas, terdapat $e \in G$ untuk setiap $a \in G$ sedemikian sehingga $e * a = a * e = a$.
4. Setiap elemen mempunyai invers, untuk setiap $a \in G$ terdapat $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$.

(Bhattacharya, dkk, 1990)

Definisi 2.1.2 (Grup Komutatif) Misalkan $(G,*)$ adalah suatu grup. $(G,*)$ disebut grup komutatif atau grup abelian jika untuk setiap $a, b \in G$, memenuhi $a * b = b * a$ (Dummit dan Foote, 2004).

Contoh 2.1.3

1. Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ merupakan grup komutatif terhadap operasi penjumlahan.
2. Himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ bukan merupakan grup terhadap operasi penjumlahan, karena tidak mempunyai elemen identitas dan setiap elemen dari $\mathbb{N}$ tidak mempunyai invers.

Definisi 2.1.4 (Subgrup) Misalkan $(G,*)$ suatu grup dan H suatu subset dari G. H disebut suatu subgrup dari G jika H terhadap operasi biner $*$ membentuk suatu grup. Dengan kata lain, $(H,*)$ merupakan grup (Bhattacharya, dkk, 1990).

Teorema 2.1.5 (Subgrup) Misalkan G adalah grup. Suatu H *subset* tak kosong dari G adalah subgrup dari G jika dan hanya jika memenuhi:

1. Untuk setiap $a, b \in H$ sedemikian sehingga $a \cdot b \in H$ dan $a^{-1} \in H$.
2. Untuk setiap $a, b \in H$ sedemikian sehingga $a \cdot b^{-1} \in H$.

(Bhattacharya, dkk, 1990)

Bukti:

(⇒) jika H adalah subgrup dari grup G maka H tertutup, terdapat elemen identitas, setiap elemen punya invers sehingga (1) dan (2) terpenuhi.

(⇐) (1) $\forall a, b \in H$ sedemikian sehingga $a \cdot b \in H$ (tertutup). $\forall a, b \in H$ karena berlaku sifat tertutup maka $b = x \cdot y$; $x, y \in H$ sedemikian sehingga $a \cdot b = a \cdot (x \cdot y) = (a \cdot x) \cdot y$ (asosiatif). Untuk sembarang $a \in H, a^{-1} \in H$, akibatnya $e = a \cdot a^{-1} \in H$. Jadi H mempunyai elemen netral. (2) Setiap elemen dari H mempunyai invers. ■

Definisi 2.1.6 Jika S dan T adalah subgrup-subgrup dari grup komutatif G, maka G adalah jumlahan langsung, yang dinotasikan oleh

$$G = S \oplus T$$

jika $S + T = G$ (dengan kata lain, untuk setiap $g \in G$ terdapat $s \in S$ dan $t \in T$ dengan $g = s + t$) dan $S \cap T = \{0\}$ (Rotman, 2003).

Contoh 2.1.7

$\mathbb{Z}$ adalah grup komutatif. $\mathbb{Z}$ dan $\{0\}$ adalah subgrup komutatif dari $\mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $\mathbb{Z} \cap \{0\} = \{0\}$ maka $\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \oplus \{0\}$.

Proposisi 2.1.8 Untuk suatu grup komutatif G dan S, T adalah subgrup-subgrup dari G. Jika $G = S \oplus T$ maka Untuk setiap $g \in G$ dapat dinyatakan secara tunggal dari bentuk

$$g = s + t$$

di mana $s \in S$ dan $t \in T$ (Rotman, 2003).

Bukti:

$G = S + T$, sedemikian sehingga untuk setiap $g \in G$ dapat dinyatakan dalam bentuk $g = s + t$ dengan $s \in S$ dan $t \in T$. Untuk melihat bahwa ini adalah pernyataan yang dapat dinyatakan secara tunggal, misalkan juga $g = s' + t'$ dengan $s' \in S$ dan $t' \in T$, maka $s + t = s' + t' \Leftrightarrow s - s' = t - t' \in S \cap T = \{0\}$. Oleh karena itu $s = s'$ dan $t = t'$, terbukti bahwa $s \in S$ dan $t \in T$ adalah tunggal. ■

2.2 Teori Ring

Definisi 2.2.1 (Ring) Suatu himpunan tak kosong R yang dilengkapi dengan dua operasi biner $(+,\cdot)$, dinotasikan dengan $(R,+,\cdot)$ disebut ring jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. $(R,+)$ grup komutatif.
2. $(R,\cdot)$ semigrup.
   (a) Tertutup, untuk setiap $a, b \in R$ sedemikian sehingga $a \cdot b \in R$.
   (b) Assosiatif, untuk setiap $a, b, c \in R$ sedemikian sehingga
   $$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$
3. $(R,+,\cdot)$ berlaku distibutif.
   (a) Untuk setiap $a, b, c \in R$ sedemikian sehingga
   $$a \cdot (b + c) = (ab) + (a \cdot c).$$
   (b) Untuk setiap $a, b, c \in R$ sedemikian sehingga
   $$(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a).$$

(Cameron, 2008)

Untuk selanjutnya, penulisan notasi ring $(R,+,\cdot)$ dapat disederhanakan menjadi R, serta penulisan perkalian $a \cdot b$ dapat disederhanakan menjadi ab.

Contoh 2.2.2 $\mathbb{R}, \mathbb{Z}$, dan $\mathbb{Q}$ merupakan ring.

Definisi 2.2.3 (Ring Trivial): Suatu ring R disebut ring trivial jika terhadap $(R,+)$ adalah grup komutatif dan $(R,\cdot)$ adalah semigrup sedemikian sehingga $\forall a, b \in R, ab = 0$ (Bhattacharya, dkk, 1990).

Contoh 2.2.4

1. $\{0\}$ adalah ring trivial.
2. Matriks atas ring R yang didefinisikan
   $$M_{2\times 2}(R) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; a \in R \right\}$$
   adalah ring trivial.

Definisi 2.2.5 (Ring Komutatif) Misalkan R adalah ring. R dikatakan sebagai ring komutatif jika pada ring R berlaku sifat untuk setiap $a, b \in R$ maka $ab = ba$ (Dummit dan Foote, 2004).

Contoh 2.2.6
1. $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{Z}$ merupakan ring komutatif
2. Himpunan semua matriks $M_{n\times n}(R)$ tidak selalu merupakan ring komutatif karena operasi perkalian pada matriks tidak selalu komutatif.

Definisi 2.2.7 (Ring dengan Elemen Identitas) Misalkan R adalah ring komutatif. R dikatakan mempunyai elemen identitas jika terdapat $e \in R$ dimana untuk setiap $a \in R$ sedemikian sehingga

$$ea = ae = a$$

(Dummit dan Foote, 2004).

Definisi 2.2.8 (Matriks Atas Ring) Misalkan R adalah suatu ring dan $\{M_{n\times n}(R)\}$ suatu himpunan dari semua matriks-matriks $n \times n$ atas ring R. Maka $M_{n\times n}(R)$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian dari matriks-matriks disebut suatu matriks $M_{n\times n}$ atas ring R (Bhattacharya, dkk, 1990).

Jika $n > 1$ dan R bukan ring trivial, maka

$$M_{2\times 2}(R) = \left\{\begin{bmatrix} x & y \\ w & z \end{bmatrix}; x, y, w, z \in R\right\}$$

tidak komutatif. Jika untuk sembarang $x, y \in R$ dan $A, B \in M_{2\times 2}(R)$ sedemikian sehingga

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, xy \neq 0, \text{ maka } AB \neq BA.$$

Definisi 2.2.9 (Nilpoten) Suatu elemen a di dalam ring R disebut nilpoten jika terdapat suatu bilangan bulat positif n sedemikian sehingga $a^n = 0$ (Bhattacharya, dkk, 1990).

Contoh 2.2.10 Nol selalu nilpotent. Elemen $\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; a \in R$ di dalam matriks ring $M_{2\times 2}(R)$ juga nilpoten, karena

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definisi 2.2.11 (Idempoten) Suatu elemen a di dalam ring R disebut idempoten jika $a^2 = a$ (Bhattacharya, dkk, 1990).

Contoh 2.2.12 Secara jelas bahwa 0 dan 1 di dalam ring R (ring dengan elemen identitas) adalah elemen-elemen idempoten.

Definisi 2.2.13 (Subring) Misalkan R suatu ring dan S suatu *subset* dari R. S disebut suatu subring dari R jika S terhadap operasi biner $(+,\cdot)$ membentuk suatu ring. Dengan kata lain, S merupakan ring (Durbin, 1985).

Teorema 2.2.14 (Subring) Misalkan R adalah ring, $S \subseteq R$ dan $S \neq \emptyset$. S disebut subring di R jika memenuhi aksioma berikut:
1. Untuk setiap $a, b \in S$ maka $a - b \in S$.
2. Untuk setiap $a, b \in S$ maka $ab \in S$.

(Bhattacharya, dkk, 1990)
Bukti: pada kondisi $a - b \in S$ untuk setiap $a, b \in S$ berimplikasi dengan $(S, +)$ adalah suatu grup komutatif.
(a) Untuk setiap $a, -b \in S$ sedemikian sehingga menurut (1)
$$a - (-b) = a + b \in S \text{ (tertutup).}$$
(b) Untuk setiap $a, -x \in S;\ x = b + c$ sedemikian sehingga menurut (1) $a + x = a + (b + c) = a + b + c = (a + b) + c$ (asosiatif).
(c) Untuk setiap $a, b \in S;\ b = 0$ sedemikian sehingga
$$a - b = a - 0 = a \text{ (setiap elemen } S \text{ adalah elemen satuan).}$$
(d) Untuk setiap $a, -b \in S;\ b = -a$ sedemikian sehingga
$$a - b = a - a = 0 \text{ (setiap elemen } S \text{ mempunyai invers).}$$
(e) Untuk setiap $a, -b \in S$ sedemikian sehingga menurut (1)
$$a - (-b) = a + b = b + a \text{ (komutatif).}$$

Pada kondisi $ab \in S$ untuk setiap $a, b \in S$ berimplikasi dengan $(S,\cdot)$ adalah suatu semigrup.
(a) Untuk setiap $a, b \in S$ sedemikian sehingga $ab \in S$ (tertutup).
(b) Untuk setiap $a, x \in S;\ x = bc$ sedemikian sehingga
$$ax = a(bc) = (ab)c \text{ (assosiatif).}$$

Akan dibuktikan berlakunya sifat distributif. Untuk setiap $a, b \in S; b = x - y$ sedemikian sehingga
$$ab = a(x - y) = ax - ay \in S$$
dan

$$ba = (x - y)a = xa - ya \in S. \blacksquare$$

Contoh 2.2.15 $n\mathbb{Z} = \{n\mathbb{Z} | n \in \mathbb{Z}\}$ adalah subring di ring $\mathbb{Z}$.

Definisi 2.2.16 (Ideal) Misalkan R adalah ring, $I \subseteq R$ dan $I \neq \emptyset$. I disebut ideal dua sisi di R jika memenuhi aksioma berikut:

1. Untuk setiap $a, b \in I$ maka $a - b \in I$
2. Untuk setiap $a \in I, r \in R$ maka $ra \in I$ dan $ar \in I$

Ideal I disebut ideal trivial jika $I = \{0\}$ dan ideal I disebut ideal sejati jika $I \neq R$ (Dummit dan Foote, 2004).

Contoh 2.2.17

1. Misalkan $p\mathbb{Z} = \{pz | \forall z \in \mathbb{Z}\}$ adalah suatu himpunan di mana p adalah bilangan prima. Akan dibuktikan bahwa $p\mathbb{Z}$ adalah suatu ideal di ring $\mathbb{Z}$. Ambil sembarang $a, b \in p\mathbb{Z}$, maka $a = pz_1$ dan $b = pz_2$ di mana $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$. Akibatnya,
$$a - b = pz_1 - pz_2 = p(z_1 - z_2) \in p\mathbb{Z}$$
Selanjutnya, untuk setiap $r \in R$ memenuhi:
$$ra = r(pz_1) = p(rz_1) \in p\mathbb{Z}$$
Jadi, $p\mathbb{Z}$ adalah ideal di $\mathbb{Z}$. $\blacksquare$
2. Misalkan didefinisikan suatu himpunan yang dibangun oleh elemen $a \in R$, yaitu $Ra = \{ra | r \in R\}$. Akan dibuktikan bahwa Ra adalah ideal di R. Ambil $m_1, m_2 \in Ra$ di mana $m_1 = r_1 a$ dan $m_2 = r_2 a$, untuk setiap $r_1, r_2 \in R$. Maka:
$$m_1 - m_2 = r_1 a - r_2 a = (r_1 - r_2)a \in Ra$$
selanjutnya, untuk $m \in Ra$ di mana $m = ra$ dan $r_1 \in R$, maka
$$r_1 m = r_1(ra) = (r_1 r)a \in Ra$$
Jadi, Ra adalah suatu ideal. $\blacksquare$

Definisi 2.2.18 (Hasil Kali Ideal) Misalkan I dan J adalah ideal-ideal di ring R yang komutatif. Hasil kali dari I dan J, dinotasikan IJ, merupakan himpunan penjumlahan berhingga dari elemen-elemen dalam bentuk ab di mana $a \in I$ dan $b \in J$. Oleh karena itu, hasil kali I dan J dapat didefinisikan
$$IJ = \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i | a_i \in I, b_i \in J\right\}$$
(Dummit dan Foote, 2004).

Teorema 2.2.19 Jika R ring komutatif dengan identitas, I dan J adalah ideal-ideal di R, maka IJ ideal di R (Dummit dan Foote, 2004).

Bukti:

Misalkan I dan J adalah ideal-ideal di R. Akan dibuktikan IJ adalah ideal di R.

(a) Karena I dan J adalah ideal, maka $0 \in I$ dan $0 \in J$, sehingga, $0 \in IJ$, yaitu $IJ \neq \emptyset$.

(b) Ambil sembarang $a = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, $b = \sum_{i=1}^{n} x_i q_i \in IJ$ sedemikian sehingga

$$a - b = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i q_i\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i - x_i q_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - q_i) \in IJ$$

(c) Ambil sembarang $a = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in IJ$ dan $r \in R$ sedemikian sehingga

$$ra = r\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} r(x_i y_i) = \sum_{i=1}^{n} (r x_i) y_i \in IJ$$
$$ar = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) r = \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i) r = \sum_{i=1}^{n} x_i (y_i r) \in IJ. \blacksquare$$

Definisi 2.2.20 (Jumlahan Ideal) Misalkan $A_1, A_2, \dots, A_n$ adalah keluarga ideal kanan (kiri) di dalam ring R. Maka ideal kanan (kiri) terkecil dari R yang memuat setiap A_i, $1 \leq i \leq n$ (dengan kata lain, irisan dari semua ideal kanan (kiri) di dalam R yang memuat setiap A_i) disebut jumlahan dari $A_1, A_2, \dots, A_n$ (Bhattacharya, dkk, 1990).

Teorema 2.2.21 (Teorema Jumlahan Ideal) Jika $A_1, A_2, \dots, A_n$ adalah ideal di dalam ring R, maka

$$S = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_n | a_i \in A_i, i = 1,2,..,n\}$$

adalah jumlahan dari ideal $A_1, A_2, \dots, A_n$ (Bhattacharya, dkk, 1990).

Bukti:

Ambil sembarang $a, b \in S$ dan $a_i, b_i \in A_i, i = 1,2,..,n$

$$a = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$
$$b = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

sedemikian sehingga

$$a - b = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

$$= (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \cdots + (a_n - b_n) \in S.$$

Ambil sembarang $a \in S, r \in R$ dan $a_i \in A_i, i = 1,2,3.., n$ sedemikian sehingga

$$ar = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)r = a_1 r + a_2 r + \cdots + a_n r \in S$$
$$ra = r(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = ra_1 + ra_2 + \cdots + ra_n \in S$$

terbukti S adalah ideal di ring R.

Akan ditunjukkan juga bahwa ideal $A_1, A_2, \ldots, A_n$ termuat di dalam S. Ambil sembarang $a_i \in A_i$ maka $a_i = 0 + \cdots + a_i + \cdots + 0 \subset S$ dimana $i = 1,2, \ldots, n$. Terbukti $A_1, A_2, \ldots, A_n$ termuat di dalam S. Misalkan terdapat ideal T yang memuat ideal $A_1, A_2, \ldots, A_n$ maka $S \subseteq T \subseteq R$, sehingga S adalah ideal terkecil di dalam R yang memuat $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ■

Definisi 2.2.22 (Jumlahan Langsung) Suatu jumlahan $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$ dari ideal-ideal kanan atau kiri dikatakan suatu jumlahan langsung jika setiap elemen $a \in A$ dapat dinyatakan secara tunggal di dalam bentuk $\sum_{i=1}^{n} a_i$, $a_i \in A_i, 1 \leq i \leq n$. Jika jumlahan $\sum A_i$ adalah suatu jumlahan langsung maka ditulis sebagai

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

(Bhattacharya, dkk, 1990).

Teorema 2.2.23 (Teorema Jumlahan Langsung)
Misalkan A_1, A_2,..., A_n adalah ideal kanan (atau ideal kiri) di dalam ring R. Maka penyataan berikut adalah ekuivalen.

1. $R = \sum_{i=1}^{n} A_i$ adalah jumlahan langsung.
2. $A_i \cap \sum_{i=1, j \neq i}^{n} A_j = \{0\}, i = 1,2, .., n$.

(Bhattacharya, dkk, 1990)

Bukti:

(2) ⇒ (1)

Misalkan $a = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ dan $a = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ di mana $a_i, b_i \in A_i, i = 1,2, \ldots, n$, maka

$$\begin{aligned} 0 = a - a &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \\ &= (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \cdots + (a_n - b_n) \\ &\in A_i \cap \sum_{i=1, j \neq i}^{n} A_j = \{0\} \end{aligned}$$

karena $A_i \cap \sum_{i=1, j\neq i}^{n} A_j = \{0\}$ adalah ideal dan berlaku sifat tertutup, sehingga

$$a_1 - b_1 \in A_1 \cap \sum_{i=2}^{n} A_i = \{0\}$$

$$a_2 - b_2 \in A_2 \cap \sum_{i=1, i\neq 2}^{n} A_i = \{0\}$$

dan seterusnya

$$a_n - b_n \in A_n \cap \sum_{i=1}^{n-1} A_i = \{0\}$$

akibatnya $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$, karena a dapat dinyatakan secara tunggal, jadi $R = \sum_{i=1}^{n} A_i$ adalah jumlahan langsung.

(1) ⇒ (2)

Ambil sembarang $x \in A_i \cap \sum_{i=1, j\neq i}^{n} A_j$. Maka

$$x = a_1 + \cdots + a_{i-1} + a_{i+1} + \cdots + a_n$$
$$0 = a_1 + \cdots + a_{i-1} + (-x) + a_{i+1} + \cdots + a_n$$

karena $0 \in \sum_{i=1}^{n} A_i$ maka $a_i \in A_i$ sedemikian sehingga $a_i = 0$ untuk $i = 1,2, \ldots, n$, sehingga $(-x) = 0$, jadi $A_i \cap \sum_{i=1, j\neq i}^{n} A_j = \{0\}$. ■

Definisi 2.2.24 (Ideal Maksimal) Suatu ideal I di ring R disebut ideal maksimal jika I adalah ideal sejati dan untuk sembarang ideal N di ring R dengan $I \subseteq N$, maka $N = I$ atau $N = R$ (Hungerford, 2003).

Contoh 2.2.25

1. Misalkan $M_{2\times 2}(F)$ adalah matriks atas *field* F yang didefinisikan oleh $M_{2\times 2}(F) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; a, b \in F\right\}$.

   Maka himpunan matriks $N_{2\times 2}(F) = \left\{\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; b \in F\right\}$ adalah ideal maksimal di dalam ring $M_{2\times 2}(F)$.
2. Misalkan R merupakan *field* ($R - \{0\}, \cdot$) merupakan grup komutatif), maka $\{0\}$ di R merupakan ideal maksimal, karena ideal-ideal di *field* R hanya $\{0\}$ dan R, serta ideal sejatinya adalah $\{0\}$.

Definisi 2.2.26 (Ideal Prima) Misalkan R adalah ring komutatif dan I adalah ideal di R. I disebut ideal prima jika dan hanya jika I ideal sejati dan $\forall a, b \in R$ dengan $ab \in I$ berlaku $a \in I$ atau $b \in I$ (Hungerford, 2003).

Contoh 2.2.27

1. Misalkan $\mathbb{Z}$ adalah ring. Himpunan $p\mathbb{Z}$ dengan p adalah bilangan prima merupakan ideal prima dari ring $\mathbb{Z}$.
2. Misalkan ring R merupakan daerah integral (ring yang tidak memuat pembagi nol sejati), $\{0\}$ yang merupakan ideal prima dari R, karena untuk setiap $x, y \in R$ jika $xy \in \{0\}$ maka $x \in \{0\}$ atau $y \in \{0\}$.

Teorema 2.2.28 Ideal I di ring R disebut ideal prima jika dan hanya jika $AB \subseteq I$ maka $A \subseteq I$ atau $B \subseteq I$ untuk sembarang ideal-ideal A dan B di ring R (Hungerford, 2003).

Bukti:

(⇒) Misalkan I adalah ideal prima di R. Ambil sembarang ideal A dan B di R di mana $AB \subseteq I$. Untuk sembarang $a \in A$ dan $b \in B$ diperoleh $ab \in I$. Karena I adalah ideal prima, maka $a \in I$ atau $b \in I$. Hal ini berarti $A \subseteq I$ atau $B \subseteq I$.

(⇐) Misalkan $AB \subseteq I \Rightarrow A \subseteq I$ atau $B \subseteq I$ untuk setiap ideal-ideal A dan B di ring R. Ambil sebarang $a, b \in R$ dengan $ab \in I$. Akibatnya, $\langle a \rangle \langle b \rangle \subseteq I$ dengan $\langle a \rangle = \{ra | r \in R\}$ dan $\langle b \rangle = \{rb | r \in R\}$ adalah ideal-ideal di R. Sehingga, $\langle a \rangle \subseteq I$ atau $\langle b \rangle \subseteq I$, yaitu $a \in I$ atau $b \in I$. Oleh karena itu, jika $ab \in I$ maka $a \in I$ atau $b \in I$, artinya I adalah ideal prima.

Definisi 2.2.29 (Ideal Semiprima) Ideal I di ring R disebut ideal semiprima jika dan hanya jika $A^2 \subseteq I \Rightarrow A \subseteq I$ untuk sembarang ideal A di ring R. Jika I adalah ideal semiprima maka I adalah ideal prima (T.Y.Lam, 1991).

Definisi 2.2.30 (Ideal Nilpoten) Suatu A adalah ideal kanan atau kiri di dalam ring R disebut ideal nilpoten jika $A^n = \{0\}$ untuk suatu n bilangan bulat positif atau $n \in \mathbb{Z}^+$ (Bhattacharya, dkk, 1990).

Secara jelas bahwa setiap ideal nol adalah suatu ideal nilpoten dan setiap elemen di dalam ideal nilpoten adalah suatu elemen nilpoten.

Contoh 2.2.31

1. Misalkan ring $R = \mathbb{Z}_4$. Ideal $A = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ bukan ideal nol. Tetapi $A^2 = \{0\}$. Jadi A adalah suatu ideal nilpoten begitu juga elemen $\bar{0}$ dan $\bar{2}$ adalah elemen-elemen yang nilpoten (T.Y.Lam, 1991).
2. Diketahui $M_{2\times 2}(\mathbb{Z}) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}; a, b, c \in \mathbb{Z}\right\}$. Suatu ideal $A_{2\times 2}(\mathbb{Z}) = \left\{\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; a \in \mathbb{Z}\right\}$ adalah ideal nilpoten sedemikian sehingga $A^2 = \left\{\sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} 0 & a_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; a_i \in \mathbb{Z}\right\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Teorema 2.2.32 (Hubungan Ideal Maksimal dengan Ideal Prima) Jika R ring dengan elemen identitas, maka setiap ideal maksimal adalah ideal prima. Tetapi belum tentu untuk sebaliknya (Bhattacharya, dkk, 1990).

Bukti:

Misalkan M adalah ideal maksimal dan misalkan A dan B juga ideal di dalam R sedemikian sehingga $AB \subseteq M$. Misalkan $A \not\subset M$ maka $A + M = R$ dan $1 \in R$ dapat dinyatakan

$$1 = a + m, a \in A, m \in M$$

Misalkan $b \in B$ maka

$$b = 1b = (a + m)b = ab + mb = AB + M \subseteq M$$

sehingga $B \subseteq M$, terbukti bahwa M adalah ideal prima dari ring R. ■

Contoh 2.2.33 Diberikan ring $\mathbb{Z}$, maka $p\mathbb{Z} = \{pz | \forall z \in \mathbb{Z}\}$ di mana p adalah bilangan prima merupakan ideal maksimal dari ring $\mathbb{Z}$ dan juga merupakan ideal prima. $\{0\}$ adalah ideal prima tetapi bukan ideal maksimal.

Definisi 2.2.34 (Ring Semiprima) Suatu ring R disebut ring semiprima (atau prima), jika $\{0\}$ adalah suatu ideal semiprima (atau prima) (T.Y.Lam, 1991).

Contoh 2.2.35 Ring *reduced* merupakan ring semiprima. Karena Ring *reduced* tidak mempunyai elemen nilpoten kecuali nol (dengan kata lain $\forall a \in R$ sedemikian sehingga $a^n = 0$ maka $a = 0$, untuk suatu $n \in \mathbb{Z}^+$) sehingga jika A ideal dari R dan $A^n \subseteq \{0\}$ maka $A \subseteq \{0\}$, jadi $\{0\}$ memenuhi sebagai ideal semiprima di dalam ring R. Contoh Ring *reduced* adalah $\mathbb{Z}$ (T.Y.Lam, 1991).

2.3. Homomorfima Ring

Definisi 2.3.1 (Pemetaan) Suatu pemetaan $f : A \to B$ adalah

1. Pemetaan injektif (satu-satu), jika untuk semua $x_1, x_2 \in A$ memenuhi $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ atau ekuivalen dengan $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
2. Pemetaan surjektif (pada), jika untuk setiap $y \in B$ maka terdapat suatu $x \in A$ sedemikian sehingga $y = f(x)$.
3. Pemetaan bijektif adalah pemetaan yang injektif dan surjektif.

(Bhattacharya, dkk, 1990)

Definisi 2.3.2 (Homomorfisma Ring) Misalkan R dan S ring komutatif. Pemetaan $\varphi : R \to S$ disebut suatu homomorfisma ring, untuk setiap $a, b \in R$ memenuhi:

1. $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$.
2. $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

(Dummit dan Foote, 2004)

Definisi 2.3.3

1. Homomorfisma ring yang surjektif (onto/pada) disebut epimorfisma ring.
2. Homomorfisma ring yang injektif (satu-satu) disebut monomorfisma ring.
3. Homomorfisma ring $\varphi : R \longrightarrow S$ yang bijektif (satu-satu onto) disebut isomorfisma ring dan dilambangkan $R \cong S$.
4. Homomorfisma ring $\varphi : R \longrightarrow R$ disebut endomorfisma ring.
5. Isomorfisma ring $\varphi : R \longrightarrow R$ disebut automorfisma ring.

(Bhattacharya, dkk, 1990)

Teorema 2.3.4 Misalkan $\varphi : R \longrightarrow S$ adalah suatu homomorfima dari ring R ke ring S. Maka memenuhi sebagai berikut:

1. Jika 0 adalah elemen identitas $(R, +)$ maka $\varphi(0)$ adalah elemen identitas $(S, +)$.

2. Jika $a \in R$ maka $\varphi(-a) = -\varphi(a)$.
3. Himpunan $\{\varphi(a) | a \in R\}$ adalah suatu subring dari S disebut bayangan homomosfis dari R oleh pemetaan φ dan dinotasikan oleh $Im\ \varphi$ atau $\varphi(R)$.
4. Himpunan $\{a \in R | \varphi(a) = 0\}$ adalah suatu ideal di dalam R disebut kernel dari φ dan dinotasikan oleh $kernel\ \varphi$ atau $\varphi^{-1}(0)$.
5. Jika $e \in R$ maka $\varphi(e)$ adalah elemen identitas dari subring $\varphi(R)$.
6. Jika R komutatif maka $\varphi(R)$ juga komutatif.

(Bhattacharya, dkk, 1990)

Bukti:

1. Untuk setiap $a \in R$. Maka $\varphi(a) = \varphi(a + 0) = \varphi(a) + \varphi(0)$. Terlihat suatu pemetaan $\varphi : 0 \to \varphi(0)$ dan $\varphi(0)$ elemen satuan dari $(S, +)$. Untuk selanjutnya $\varphi(0)$ cukup ditulis sebagai 0 di dalam $\varphi(R)$ atau S.
2. $\varphi(0) = \varphi\big(a + (-a)\big) = \varphi(a) + \varphi(-a)$ dan menurut (1) terlihat bahwa $\varphi(0) = 0 = \varphi(a) + \varphi(-a)$ maka $-\varphi(a) = \varphi(-a)$.
3. Ambil sembarang $\varphi(a), \varphi(b) \in \varphi(R)$. Akan dibuktikan $\varphi(R)$ adalah subring.
   (a) $\varphi(a) - \varphi(b) = \varphi(a) + \varphi(-b) = \varphi(a - b) \in \varphi(R)$
   (b) $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) \in \varphi(R)$
   terbukti bahwa $\varphi(R)$ adalah subring dari S.
4. Misalkan $a, b \in \varphi^{-1}(0) = kernel\ \varphi,\ \ r \in R$ akan dibuktikan bahwa $\varphi^{-1}(0)$ adalah ideal di dalam R.
   (a) $\varphi(a - b) = \varphi\big(a + (-b)\big) = \varphi(a) + \varphi(-b) = \varphi(a)\varphi(b)$
   $= 0 - 0 = 0$ sehingga $a - b \in \varphi^{-1}(0)$
   (b) $\varphi(ar) = \varphi(a)\varphi(r) = 0\varphi(r) = 0$
   $\varphi(ra) = \varphi(r)\varphi(a) = \varphi(r)0 = 0$
   terlihat bahwa $ar = ra \in \varphi^{-1}(0)$
   maka terbukti bahwa $\varphi^{-1}(0)$ adalah ideal di dalam R.
5. Jika diambil sembarang $a \in R,\ e$ elemen satuan di dalam R maka $\varphi(a)\varphi(e) = \varphi(ae) = \varphi(a)$ dan $\varphi(e)\varphi(a) = \varphi(ea) = \varphi(a)$. Jadi $\varphi(e)$ adalah elemen identitas dari $\varphi(R)$.
6. Ambil sembarang $a, b \in R$ dan R adalah ring komutatif, maka $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) = \varphi(ba) = \varphi(b)\varphi(a)$, jadi $\varphi(R)$ juga komutatif. ■

Contoh 2.3.5

1. Diberikan ring R dan $R^{'} = \{[a,1] | a \in R\}$ yang mana $[a,1]$ didefinisikan $a/1$ disebut *fraction field* dari R. Suatu pemetaan $f : R \to R'$ diberikan oleh $f(a) = [a,1]$ (Rotman, 2003).
   Bukti:
   Akan ditunjukan bahwa $f : R \to R'$ yang didefinisikan oleh $f(a) = [a,1]$ adalah suatu isomorfisma.
   (a) $f(a+b) = [a+b,1] = (a+b)/1 = a/1 + b/1$
   $= f(a) + f(b)$
   $f(ab) = [ab,1] = ab/1 = (a/1)(b/1) = f(a)f(b)$
   (terbukti homomorfisma).
   (b) Misalkan $f(a) = f(b) \Rightarrow [a,1] = [b,1] \Rightarrow a/1 = b\,/\,1$ jadi haruslah $a = b$ (injektif).
   (c) Ambil sembarang $[a,1] \in R'$ maka akan dapat ditemukan $a \in R$, karena setiap $[a,1] \in R'$ ditentukan oleh $a \in R$ (surjektif).
   Dari pernyataan dari (a), (b) dan (c) terbukti bahwa pemetaan $f : R \to R'$ adalah isomorfima ring ($R \cong R'$). ■
2. Suatu pemetaan $g : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$ didefinisikan oleh $g(x) = 2x$, bukan merupakan suatu homomorfisma ring (Rotman, 2003).
   Bukti:
   Untuk sembarang $x, y \in \mathbb{Z}$ berlaku:
   (a) $g(x+y) = 2(x+y) = 2x + 2y = g(x) + g(y)$
   (b) $g(xy) = 2(xy) \neq 2x2y = g(x)g(y)$
   dari (a) dan (b) terbukti bahwa pemetaan $g : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$ bukan suatu homomorfisma ring. ■

BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas tentang definisi ring dengan elemen identitas lemah, dekomposisi dari ring dengan elemen identitas lemah, bentuk ideal dari ring tersebut, serta hubungan antara ideal maksimal dengan ideal prima.

3.1 Dekomposisi Ring R

Definisi 3.1.1 Suatu elemen e di dalam ring R disebut elemen identitas lemah jika untuk setiap $x, y \in R$ berlaku $xey = xy$ (Ghosseiri, 2008).

Contoh 3.1.2
Diberikan suatu ring bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan $M_{3\times3}(\mathbb{Z})$ adalah matriks ring yang didefiniskan

$$M_{3\times3}(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

maka

$$e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

adalah elemen identitas lemah dari ring $M_{3\times3}(\mathbb{Z})$.

Bukti:
Untuk setiap $M_1, M_2 \in M_{3\times3}(\mathbb{Z});\ a_i, b_i \in \mathbb{Z}; i = 1,2$

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sedemikian sehingga

$$M_1 e M_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M_1 M_2$$

$$M_1 e = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq M_1$$

$$eM_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq M_1$$

Didefinisikan e adalah elemen identitas lemah yang *proper* jika e bukan elemen identitas dari ring R (diperlihatkan pada Contoh 3.1.2). Pada pernyataan-pernyataan selanjutnya akan diasumsikan bahwa R adalah suatu ring dengan elemen identitas lemah, kecuali ditetapkan lain.

Definisi 3.1.3 Misalkan $A \subseteq R$ dan $B \subseteq R$ didefinisikan oleh

1. $A = \{r - re | r \in R\}$
2. $B = \{r - er | r \in R\}$

(Ghosseiri, 2008).

Lemma 3.1.4

1. $A = \{r \in R | re = 0\}$
2. $B = \{r \in R | er = 0\}$
3. A dan B adalah ideal di dalam ring R

(Ghosseiri, 2008).

Bukti:

1. Ambil sembarang $a \in A$ menurut Definisi 3.1.3 maka $a = r - re$ didapatkan $ae = (r - re)e = re - re = 0$ maka $a = r - re \in R$ di mana berlaku $ae = 0$. Sehingga
$$A = \{r - re | r \in R\} \subseteq \{r \in R | re = 0\}.$$
Sebaliknya, di dalam Lemma 3.1.4.1 jika $r \in R$ berlaku $re = 0$ maka dapat dinyatakan bahwa $r = r - re \in A$ di mana $r \in R$. Sehingga
$$\{r \in R | re = 0\} \subseteq \{r - re | r \in R\} = A$$
jadi $A = \{r - re | r \in R\} = \{r \in R | re = 0\}$.

2. Ambil sembarang $b \in B$ menurut Definisi 3.1.3 maka $b = r - er$ didapatkan $eb = e(r - er) = er - er = 0$ maka $b = r - er \in R$ di mana berlaku $eb = 0$. Sehingga
$$B = \{r - er | r \in R\} \subseteq \{r \in R | er = 0\}.$$
Sebaliknya, di dalam Lemma 3.1.4.2 jika $r \in R$ berlaku $er = 0$ maka dapat dinyatakan bahwa $r = r - er \in B$ di mana $r \in R$. Sehingga
$$B_1 = \{r \in R | er = 0\} \subseteq \{r - er | r \in R\} = B$$
jadi $B = \{r - er | r \in R\} = \{r \in R | er = 0\} = B_1$.
3. Menurut Definisi 3.1.3, untuk setiap $a_1, a_2 \in A$, $a_1 = r_1 - r_1 e$, $a_2 = r_2 - r_2 e$.
$$a_1 - a_2 = (r_1 - r_1 e) - (r_2 - r_2 e) = (r_1 - r_2) - (r_1 - r_2)e$$
karena $(r_1 - r_2) \in R$ maka $(r_1 - r_2) - (r_1 - r_2)e \in A$,
untuk setiap $a_1 \in A, a_1 = r_1 - r_1 e$ dan $\forall r \in R$
$$a_1 r = (r_1 - r_1 e)r = r_1 r - r_1 er = r_1 r - r_1 r = 0 \in A$$
$$ra_1 = r(r_1 - r_1 e) = rr_1 - rr_1 e = (rr_1) - (rr_1)e \in A$$
terbukti bahwa A adalah ideal dari ring R.
Untuk setiap $b_1, b_2 \in B$, $b_1 = r_1 - er_1$, $b_2 = r_2 - er_2$.
$$b_1 - b_2 = (r_1 - er_1) - (r_2 - er_2) = (r_1 - r_2) - e(r_1 - r_2)$$
karena $(r_1 - r_2) \in R$ maka $(r_1 - r_2) - e(r_1 - r_2) \in B$,
untuk setiap $b_1 \in B, b_1 = r_1 - er_1$ dan $\forall r \in R$
$$b_1 r = (r_1 - er_1)r = r_1 r - er_1 r = (r_1 r) - e(r_1 r) \in B$$
$$rb_1 = r(r_1 - er_1) = rr_1 - rer_1 = rr_1 - rr_1 = 0 \in B$$
terbukti bahwa B juga ideal di dalam ring R.■

***Remark* 3.1.5**
1. Dengan menggunakan bukti lemma di atas maka didapatkan $AR = \{0\} = RB$, sedemikian sehingga ideal $I = A + B$ memenuhi
$$I^2 = (A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = BA$$
$$RIR = R(A + B)R = \{0\}$$
dengan $A^2 = B^2 = I^3 = \{0\}$.
2. Jika diasumsikan R adalah ring semiprima maka $I = \{0\}$, di mana $A = \{0\} = B$.
3. $eRe = e^2Re^2$ adalah suatu ring dengan elemen identitas e^2.

(Ghosseiri, 2008)

Bukti:

1. (i) Untuk sembarang $r'_i \in R$

$$AR = \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i r'_i \,|a_i \in A, r'_i \in R\right\} = \left\{\sum_{i=1}^{n} (r_i - r_i e) r'_i\right\}$$

$$= \left\{\sum_{i=1}^{n} (r_i r'_i - r_i e r'_i)\right\} = \left\{\sum_{i=1}^{n} (r_i r'_i - r_i r'_i)\right\} = \{0\}$$

$$RB = \left\{\sum_{i=1}^{n} r'_i a_i \,|r'_i \in R, a_i \in A\right\} = \left\{\sum_{i=1}^{n} r'_i (r_i - e r_i)\right\}$$

$$= \left\{\sum_{i=1}^{n} (r'_i r_i - r'_i e r_i)\right\} = \left\{\sum_{i=1}^{n} (r'_i r_i - r'_i r_i)\right\} = \{0\}$$

(ii) Akan ditunjukkan $I = A + B$ merupakan suatu ideal.

Untuk setiap $y_1, y_2 \in I = A + B$, $r_1, r_2, r_3, r_4 \in R$ misalkan

$$y_1 = (r_1 - r_1 e) + (r_2 - e r_2); (r_1 - r_1 e) \in A; (r_2 - e r_2) \in B$$

$$y_2 = (r_3 - r_3 e) + (r_4 - e r_4); (r_3 - r_3 e) \in A; (r_4 - e r_4) \in B$$

sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &= (r_1 - r_1 e) + (r_2 - e r_2) - [(r_3 - r_3 e) + (r_4 - e r_4)] \\ &= [(r_1 - r_1 e) - (r_3 - r_3 e)] + [(r_2 - e r_2) - (r_4 - e r_4)] \\ &= [(r_1 - r_3) - (r_1 - r_3)e] - [(r_2 - r_4) - e(r_2 - r_4)] \\ &\in I = A + B \end{aligned}$$

Untuk setiap $y = (r_1 - r_1 e) + (r_2 - e r_2) \in I = A + B$ dan untuk setiap $r \in R$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} yr &= [(r_1 - r_1 e) + (r_2 - e r_2)]r = (r_1 r - r_1 e r) + (r_2 r - e r_2 r) \\ &= (r_1 r - r_1 r) + (r_2 r - e r_2 r) \\ &= 0 + (r_2 r - e r_2 r) \in I = A + B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ry &= r[(r_1 - r_1 e) + (r_2 - e r_2)] = (r r_1 - r r_1 e) + (r r_2 - r e r_2) \\ &= (r r_1 - r r_1 e) - (r r_2 - r r_2) \\ &= (r r_1 - r r_1 e) + 0 \in I = A + B \end{aligned}$$

jadi $I = A + B$ adalah ideal di dalam ring R.

(iii) untuk menunjukkan bahwa

$$I^2 = (A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = BA$$

cukup ditunjukkan $A^2 = B^2 = AB = \{0\}$

$$A^2 = AA = \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i a'_i \mid a_i, a'_i \in A\right\} = \left\{\sum_{i=1}^{n} (r_i - r_i e)(r'_i - r'_i e)\right\}$$
$$= \left\{\sum_{i=1}^{n} (r_i r'_i - r_i e r'_i - r_i r'_i e + r_i e r'_i e)\right\}$$
$$= \left\{\sum_{i=1}^{n} (r_i r'_i - r_i r'_i - r_i r'_i e + r_i r'_i e)\right\} = \{0\}$$
$$AB = \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid a_i \in A, b_i \in B\right\} = \left\{\sum_{i=1}^{n} (r_i - r_i e)(r'_i - e r'_i)\right\}$$
$$= \left\{\sum_{i=1}^{n} (r_i r'_i - r_i e r'_i - r_i e r'_i + r_i e e r'_i)\right\}$$
$$= \left\{\sum_{i=1}^{n} (r_i r'_i - r_i r'_i - r_i r'_i + r_i r'_i)\right\} = \{0\}$$
$$B^2 = BB = \left\{\sum\nolimits_{i=1}^{n} b_i b'_i \mid b_i, b'_i \in B\right\}$$
$$= \left\{\sum\nolimits_{i=1}^{n} (r_i - e r_i)(r'_i - e r'_i)\right\}$$
$$= \left\{\sum\nolimits_{i=1}^{n} (r_i r'_i - e r_i r'_i - r_i e r'_i + e r_i e r'_i)\right\}$$
$$= \left\{\sum\nolimits_{i=1}^{n} (r_i r'_i - e r_i r'_i - r_i r'_i + e r_i r'_i)\right\} = \{0\}$$

maka terbukti $I^2 = BA$.
(iv) Akan ditunjukkan I adalah ideal nilpoten.
$I^3 = I^2(I) = BA(A + B) = BAA + BAB = B\{0\} + B\{0\} = \{0\}$
terbukti bahwa I merupakan ideal nilpoten.

(v) Akan ditunjukkan pula bahwa $RIR = R(A + B)R = \{0\}$

$$RIR = R(A + B)R = (RA + RB)R = RAR + RBR$$
$$= R\{0\} + \{0\}R = \{0\} + \{0\} = \{0\}.$$

2. Menurut Definisi 2.2.17. $A^2 \subseteq \{0\}$ maka $A \subseteq \{0\}$, $B^2 \subseteq \{0\}$ maka $B \subseteq \{0\}$. Karena $A = \{0\}$ dan $B = \{0\}$ maka $I = A + B = \{0\}$.

3. Akan dibuktikan eRe adalah suatu ring.

(a) $(eRe, +)$ adalah grup komutatif.

(1) Untuk setiap $er_1e, er_2e \in eRe$ sedemikian sehingga $er_1e + er_2e = e(r_1 + r_2)e \in eRe$ (tertutup).

(2) Untuk setiap $er_1e, er_2e, er_3e \in eRe$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned}(er_1e + er_2e) + er_3e &= [e(r_1 + r_2)e] + er_3e \\ &= e(r_1 + r_2 + r_3)e \\ &= er_1e + [e(r_2 + r_3)e] \\ &= er_1e + (er_2e + er_3e)\end{aligned}$$

(assosiatif).

(3) Terdapat $0 = e0e \in eRe$ sedemikian sehingga untuk setiap $ere \in eRe$ sedemikian sehingga $0 + ere = ere + 0 = ere$ (eRe mempunyai elemen netral).

(4) Untuk setiap $ere \in eRe$, terdapat $-(ere) \in eRe$ sedemikian sehingga $ere + e(-r)e = e(r - r)e = 0$ (setiap elemen eRe mempunyai invers).

(5) Untuk setiap $er_1e, er_2e \in eRe$ sedemikian sehingga

$$er_1e + er_2e = e(r_1 + r_2)e = e(r_2 + r_1)e = er_2e + er_1e$$

(komutatif).

(b) $(eRe, \cdot)$ adalah semi-grup.

(1) Untuk setiap $er_1e, er_2e \in eRe$ sedemikian sehingga $(er_1e)(er_2e) = e(r_1r_2)e \in eRe$ (tertutup).

(2) Untuk setiap $er_1e, er_2e, er_3e \in eRe$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned}[(er_1e)(er_2e)](er_3e) &= (er_1r_2e)er_3e = er_1r_2r_3e \\ &= er_1e(er_2r_3e) \\ &= (er_1e)[(er_2e)(er_3e)]\end{aligned}$$

(assosiatif).

(c) Berlaku sifat distributif.

(1) Untuk setiap $er_1e, er_2e, er_3e \in eRe$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned}er_1e(\, er_2e + \, er_3e) &= (\, er_1e)(er_2e) + \, (er_1e)(er_3e) \\ &= er_1r_2e + er_1r_3e\end{aligned}$$

(2) Untuk setiap $er_1e, er_2e, er_3e \in eRe$ sedemikian sehingga

$$(er_2e + er_3e)er_1e = (er_2e)(er_1e) + (er_3e)(er_1e)$$
$$= er_2r_1e + er_3r_1e$$

Dari (a), (b), (c) terbukti bahwa eRe adalah suatu ring, karena berlaku tertutup maka $eRe \subseteq R$, sehingga eRe adalah subring dari R.

Kemudian akan dibuktikan bahwa ring eRe mempunyai elemen identitas e dan juga $eRe = e^2Re^2$ yaitu ring dengan elemen identitas e^2.

Bukti: Terdapat $e \in eRe$ untuk sembarang $a \in eRe$ maka $a = ere$ sedemikian sehingga $ea = e(ere) = ere = (ere)e = ae$ (menurut Definisi 3.1.1). Ambil sembarang $a \in eRe$ maka $a = ere$. menurut Definisi 3.1.1 maka $a = ere = eeree = e^2re^2 \in e^2Re^2$, jadi $eRe \subseteq e^2Re^2$. Ambil sembarang $b \in e^2Re^2$ maka $b = e^2re^2$. Karena $b = e^2re^2 = eeree = ere \in eRe$, jadi $e^2Re^2 \subseteq eRe$. Terbukti bahwa $eRe = e^2Re^2$.

Karena $eRe = e^2Re^2$ maka e^2Re^2 juga merupakan suatu ring dan terdapat $e^2 \in e^2Re^2$ untuk sembarang $a = e^2re^2 \in e^2Re^2$ sedemikian sehingga

$$e^2a = e^2(e^2re^2) = ae^2 = (e^2re^2)e^2 = e^2re^2$$

terbukti e^2 adalah elemen identitas dari ring e^2re^2. ■

Teorema 3.1.6 Jika R adalah ring dengan elemen identitas lemah, e elemen identitas dari ring eRe dan I adalah ideal nilpoten di dalam ring R, maka

$$R = I \oplus eRe$$

(Ghosseiri, 2008).

Bukti: Untuk setiap $r \in R$ dapat dinyatakan

$$r = (r - re) + (r - er)e + ere = r - er - re - ere + ere = r$$

Maka $R = A + B + eRe = I + eRe$. Ambil sembarang $t \in I \cap eRe$, maka $t \in I$ dan $t \in eRe$. Karena $t \in I$ maka $ete \in eIe$, menurut *Remark* 3.1.5.1 $eIe = \{0\}$ sehingga $ete = 0$. Karena $t \in eRe$ maka $ete \in e(eRe)e = eRe$. Akibatnya $I \cap eRe = \{0\}$. Menurut Teorema 2.2.4 terbukti bahwa $R = I \oplus eRe$. ■

***Remarks* 3.1.7**

1. Didefinisikan $I = \{x \in R | exe = 0\}$.

2. Didefinisikan $U = \{xe - ex | x \in R\}$. Sebagai suatu grup komutatif terhadap perjumlahan, I adalah jumlahan langsung dari subgrup-subgrupnya yaitu $A \cap B$ dan U, dengan kata lain $I = (A \cap B) \oplus U$.

(Ghosseiri, 2008)

Bukti:

(1) Ambil sembarang $x \in I = A + B$ maka $x = a + b$ di mana $a = r_1 - r_1 e \in A$, $b = r_2 - er_2 \in B$ dan $r_1, r_2 \in R$ sehingga

$$\begin{aligned} exe = e(a+b)e &= e[(r_1 - r_1 e) + (r_2 - er_2)]e \\ &= [(er_1 - er_1 e) + (er_2 - eer_2)]e \\ &= er_1 e - er_1 ee + er_2 e - eer_2 e \\ &= er_1 e - er_1 e + er_2 e - er_2 e = 0 \end{aligned}$$

karena tertutup maka $x \in R$ di mana $exe = 0$, jadi

$$I = A + B \subseteq \{x \in R | exe = 0\}$$

Sebaliknya, ambil sembarang $x \in \{x \in R | exe = 0\}$, sehingga $x = x - 0 = x - exe = x - xe + xe - exe = x - xe + (x - ex)e$ di mana $x - xe \in A$ dan $xe - e(xe) \in B$. Jadi,

$$\{x \in R | exe = 0\} \subseteq A + B = I$$

Terbukti $I = A + B = \{x \in R | exe = 0\}$.

(2) Karena $I = A + B$, menurut pembuktian *Remark* 3.1.5.1 bahwa I merupakan ideal dari R. Karena I ideal maka $(I, +)$ adalah merupakan grup komutatif.

(i) $A \cap B \subseteq I$ dan $A \cap B$ merupakan subgrup dari I karena A dan B adalah subgrup dari I.
Bukti : Ambil sembarang $x, y \in A \cap B$ maka $x, y \in A$ dan $x, y \in B$, karena berlaku $xy \in A$ dan $xy \in B$ maka $xy \in A \cap B$, karena berlaku $x^{-1} \in A$ dan $x^{-1} \in B$ maka $x^{-1} \in A \cap B$.
Ambil sembarang $x, y \in A \cap B$ maka $x, y \in A$ dan $x, y \in B$, karena berlaku $ab^{-1} \in A$ dan $ab^{-1} \in B$ maka $ab^{-1} \in A \cap B$.

(ii) Sekarang akan dibuktikan bahwa $(U, +)$ adalah subgrup dari I. Pertama akan ditunjukkan $U \subseteq I$. Ambil sembarang $u \in U$ di mana $x \in R$ maka

$$\begin{aligned} u = xe - ex &= (xe - ex) - x + x \\ &= (x - ex) + [(-x) - (-x)e] \in I = A + B \end{aligned}$$

jadi $U \subseteq I$. Diketahui $U = \{xe - ex | x \in R\}$.

(a) Untuk setiap $u_1, u_2 \in U,\ u_1 = x_1e - ex_1, u_2 = x_2e - ex_2$ sedemikian sehingga

$$u_1 + u_2 = (x_1e - ex_1) + (x_2e - ex_2)$$
$$= (x_1 + x_2)e - e(x_1 + x_2) \in U$$

(tertutup).

(b) Untuk setiap $u_1, u_2, u_3 \in U$ maka

$$u_1 = x_1e - ex_1, u_2 = x_2e - ex_2, u_3 = x_3e - ex_3$$

sedemikian sehingga

$$\begin{aligned}(u_1 + u_2) + u_3 &= [(x_1e - ex_1) + (x_2e - ex_2)] + (x_3e - ex_3)\\ &= [(x_1 + x_2)e - e(x_1 + x_2)] + (x_3e - ex_3)\\ &= (x_1 + x_2 + x_3)e - e(x_1 + x_2 + x_3)\\ &= (x_1e - ex_1) + [(x_2e - ex_2) + (x_3e - ex_3)]\\ &= u_1 + (u_2 + u_3) \text{ (assosiatif).}\end{aligned}$$

(c) Terdapat $x_1 = 0 \in R$ maka terdapat juga $0 = x_1e - ex_1$, untuk sembarang $u = xe - ex \in U$ sedemikian sehingga

$$(xe - ex) + 0 = 0 + (xe - ex) = xe - ex$$

(U mempunyai elemen netral).

(d) Untuk setiap $x \in R$ maka $-x \in R$ sehingga untuk setiap $u \in U$ dimana $u = xe - ex$.

$$\big((-x)e - e(-x)\big) = (-xe + ex) = (ex - xe) \in U$$

sedemikian sehingga

$$(xe - ex) + (ex - xe) = (ex - xe) + (xe - ex) = 0$$

(setiap elemen dari U mempunyai invers).

Dari (a), (b), (c) dan (d) terbukti bahwa $(U, +)$ adalah subgrup dari I.

(iii) Akan ditunjukkan bahwa $I = A \cap B \oplus U$. Bukti : Ambil sembarang $t \in I = A + B$ maka $t = a + b$, di mana $a \in A$ dan $b \in B$. Maka oleh Lemma 3.1.3 dan 3.1.4 diperoleh :

$$\begin{aligned}t = a + b &= a + b - ae - eb\\ &= a + b - ae - eb + (be - be + ea - ae)\\ &= a + b - be - ea + be - ae - eb + ea\\ &= (a + b - be - ea) + (b - a)e - e(b - a)\end{aligned}$$

(a) Akan diperlihatkan $(a + b - be - ea) \in A \cap B$. Menurut Definisi 3.1.1,

$$\begin{aligned}(a + b - be - ea) &= (r_1 - r_1e) + (r_2 - er_2) - (r_2 - er_2)e - e(r_1 - r_1e)\\ &= r_1 - r_1e + r_2 - er_2 - r_2e - er_2e - er_1 - er_1e\end{aligned}$$

$$= (r_1 + r_2) - (r_1 + r_2)e - e(r_1 + r_2) + e(r_1 + r_2)e$$

yang mana dapat dinyatakan bahwa

$$[(r_1 + r_2) - e(r_1 + r_2)] - [(r_1 + r_2) - e(r_1 + r_2)]e \in A$$

dan

$$[(r_1 + r_2) - (r_1 + r_2)e] - e[(r_1 + r_2) - (r_1 + r_2)e] \in B$$

maka $(a + b - be - ea) \in A \cap B$.

(b) Akan ditunjukkan $(b - a)e - e(b - a) \in U$. Karena berlaku sifat tertutup untuk setiap $a, b \in R$ maka $(b - a) \in R$ dan $(b - a) \in R$. Sehingga menurut *Remarks* 3.1.7.2 terbukti bahwa $(b - a)e - e(b - a) \in U$.

Maka dari (a) dan (b) terbukti bahwa sembarang $t \in I = A + B$ dapat dinyatakan dalam $A \cap B + U$.

Akan ditunjukkan $A \cap B \cap U = \{0\}$, ambil sembarang $w \in A \cap B \cap U$ maka $w \in U$, $w = re - er$ di mana $r \in R$. Karena $w \in A$ maka oleh Lemma 3.1.4.1 diperoleh

$$we = 0 = (re - er)e = re - ere$$

dan $w \in B$ maka oleh lemma 3.1.4.2 diperoleh

$$ew = 0 = e(re - er) = ere - er$$

karena $re - ere = we = 0 = ew = ere - er$, maka $re = ere = er$, sehngga $w = re - er = 0$, jadi $A \cap B \cap U = \{0\}$, terbukti

$$I = A \cap B \oplus U. \blacksquare$$

Meskipun elemen identitas dari suatu ring adalah tunggal, tetapi tidak demikian untuk kasus elemen identitas lemah dari suatu ring.

Teorema 3.1.8 Misalkan e adalah suatu elemen identitas lemah dari ring R. Jika W adalah himpunan dari semua elemen identitas lemah dari R maka

$$W = e + I = \{e + x | x \in I\}$$

(Ghosseiri, 2008).

Bukti:

Ambil sembarang $y \in e + I$ maka $y = e + x$ di mana $x \in I$, akan ditunjukkan bahwa $y \in W$. Untuk setiap $r_1, r_2 \in R$ sedemikian sehingga $r_1 y r_2 = r_1(e + x)r_2 = r_1 e r_2 + r_1 x r_2 = r_1 e r_2 + 0 = r_1 r_2$ (menurut *Remark* 3.1.5.1). Menurut Definisi 3.1.1 terbukti bahwa $y \in W$, jadi $e + I \subseteq W$.

Ambil sembarang $e' \in W$ karena W adalah himpunan elemen identitas lemah, maka

$$e(e^{'} - e)e = ee^{'}e - eee = ee - ee = 0$$

Menurut *Remarks* 3.1.7.1 dapat dilihat bahwa $e^{'} - e \in I$ sehingga $e^{'} \in e + I$, jadi $W \subseteq e + I$. Terbukti bahwa $W = e + I$. ■

Korolari 3.1.8 Misalkan R ring, e elemen identitas lemah di dalam R dan W adalah himpunan dari semua elemen identitas lemah dari R. Maka e adalah elemen identitas didalam R jika dan hanya jika $I = \{0\}$ (Ghosseiri, 2008).

Bukti:

($\Rightarrow$) Jika e adalah elemen identitas di dalam R, maka $A = \{r - re | r \in R\} = \{0\}$ dan $B = \{r - er | r \in R\}$ sehingga $I = A + B = \{0\}$.

($\Leftarrow$) Menurut Teorema 3.1.6, jika $I = \{0\}$ maka

$$R = I \oplus eRe = \{0\} \oplus eRe = eRe$$

kemudian menurut *Remark* 3.1.5.3 eRe adalah ring dengan elemen identitas e. Jadi terbukti bahwa e adalah elemen identitas dari ring R. ■

Teorema 3.1.6 memperlihatkan bahwa ideal-ideal A dan B di dalam dekomposisi $R = I \oplus eRe = A + B \oplus eRe$ adalah e sebagai elemen identitas lemah dipilih secara sembarang dari himpunan W. Pada teorema berikut, jika diambil e dan e' sebarang di dalam himpunan W kemudian $R = A + B \oplus eRe$ dan $R = A' + B' \oplus e'Re'$ merupakan dekomposisi yang bersesuaian di dalam ring R, maka $A = A'$, $B = B'$ dan $eRe \cong e'Re'$.

Teorema 3.1.10

Diasumsikan bahwa e dan e' adalah elemen identitas lemah dari ring R dan misalkan $R = A + B \oplus eRe$ dan $R = A' + B' \oplus e'Re'$ merupakan dekomposisi yang bersesuaian di dalam R. Maka $A = A'$, $B = B'$ dan $eRe \cong e'Re'$ (Ghosseiri, 2008).

Bukti:

(i) Ambil sembarang $x \in A$ maka $xe = 0$ sedemikian sehingga $xe^{'} = xee^{'} = 0e^{'} = 0$, jadi $x \in A'$ sehingga $A \subseteq A'$. Ambil sembarang $x \in A'$ maka $xe' = 0$ sedemikian sehingga

$$xe = xe'e = 0e = 0$$

jadi $x \in A$ sehingga $A' \subseteq A$. Terbukti $A = A'$.

(ii) Ambil sembarang $x \in B$ maka $ex = 0$ sedemikian sehingga $e^{'}x = e^{'}ex = e^{'}0 = 0$, jadi $x \in B'$ sehingga $B \subseteq B'$. Sebaliknya ambil sembarang $x \in B'$ maka $e'x = 0$ sedemikian sehingga $ex = ee'x = e0 = 0$, jadi $x \in B$ sehingga $B' \subseteq B$. Terbukti $B = B'$.

(iii) Akan dibuktikan juga bahwa pemetaan $\varphi : eRe \to e'Re'$ yang didefinisikan $\varphi(ere) = e're'$ adalah suatu isomorfisma.
Untuk setiap $a, b \in eRe$ maka $a = er_1e,\ b = er_2e$.

$$\begin{aligned}\varphi(er_1e + er_2e) &= \varphi(e(r_1 + r_2)e) = e'(r_1 + r_2)e' = e'r_1e' + e'r_2e' \\ &= \varphi(er_1e) + \varphi(er_2e)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(er_1e.er_2e) = \varphi(er_1er_2e) = \varphi(er_1r_2e) &= e^{'}(r_1r_2)e^{'} \\ &= (e^{'}r_1e^{'})(e^{'}r_2e^{'}) \text{ (Definisi 3.1.1)} \\ &= \varphi(er_1e)\varphi(er_2e)\end{aligned}$$

(terbukti pemetaan $\varphi : eRe \to e'Re'$ merupakan suatu homomorfisma).

Untuk sembarang $e^{'}r_1e', e^{'}r_2e^{'} \in e'Re'$, sedemikian sehingga $e^{'}r_1e^{'} = e^{'}r_2e^{'}$, maka

$$\begin{aligned}e^{'}r_1e^{'} &= e^{'}r_2e^{'} \\ \Leftrightarrow \varphi(er_1e) &= \varphi(er_2e) \\ \Leftrightarrow \quad er_1e &= er_2e\end{aligned}$$

jadi $er_1e = er_2e \in eRe$ (injektif).

Untuk setiap $e're' \in e'Re'$ sedemikian sehingga terdapat $ere \in eRe$ memenuhi $\varphi(ere) = e're'$ (surjektif). Terbukti bahwa pemetaan $\varphi : eRe \to e'Re'$ adalah suatu isomorfisma ($eRe \cong e'Re'$).
■

Contoh 3.1.11
Diberikan suatu ring bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan $M_{3\times3}(\mathbb{Z})$ adalah matriks ring yang didefiniskan

$$M_{3\times3}(\mathbb{Z}) = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{Z}\right\}$$

dan

$$e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Akan dibuktikan bahwa $M_{3\times3}(\mathbb{Z})$ adalah ring.

2. Akan ditunjukkan himpunan $A_{3\times 3}(\mathbb{Z})$, $B_{3\times 3}(\mathbb{Z})$, $I_{3\times 3}(\mathbb{Z})$, $W_{3\times 3}(\mathbb{Z})$ dan $e[M_{3\times 3}(\mathbb{Z})]e$.
3. Akan dibuktikan e adalah elemen identitas dari ring $e[M_{3\times 3}(\mathbb{Z})]e$.
4. Akan dibuktikan bahwa $M_{3\times 3}(\mathbb{Z}) = I_{3\times 3}(\mathbb{Z}) \oplus e[M_{3\times 3}(\mathbb{Z})]e$.

Bukti:

1.

(a) Akan ditunjukkan $(M_{3\times 3}(\mathbb{Z}), +)$ adalah grup komutatif.

(i) Untuk setiap $M_1, M_2 \in M_{3\times 3}(\mathbb{Z})$; $a_i, b_i \in \mathbb{Z}; i = 1,2$

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sedemikian sehingga

$$M_1 + M_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{Z})$$

(ii) Untuk setiap $M_1, M_2, M_3 \in M_{3\times 3}(\mathbb{Z})$; $a_i, b_i \in \mathbb{Z}; i = 1,2,3$

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sedemikian sehingga

$(M_1 + M_2) + M_3$

$$= \left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 + b_2 + b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 + a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 + b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$
$$= M_1 + (M_2 + M_3)$$

(iii) Terdapat $0 \in M_{3\times3}(\mathbb{Z})$; $\forall M_1 \in M_{3\times3}(\mathbb{Z}); a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sedemikian sehingga

$$0 + M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M_1$$
$$M_1 + 0 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M_1$$

(iv) Untuk setiap $M_1 \in M_{3\times3}(\mathbb{Z})$, terdapat $-M_1 \in M_{3\times3}(\mathbb{Z})$

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, -M_1 = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sedemikian sehingga

$$M_1 + (-M_1) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$
$$(-M_1) + M_1 = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

(v) Untuk setiap $M_1, M_2 \in M_{3\times3}(\mathbb{Z})$; $a_i, b_i \in \mathbb{Z}; i = 1,2$

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} M_1 + M_2 &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_2 + a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 + b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= M_2 + M_1 \end{aligned}$$

(b) Akan ditunjukkan $(M_{3\times 3}(\mathbb{Z}),\cdot)$ adalah semigrup

(i) Untuk setiap $M_1, M_2 \in M_{3\times 3}(\mathbb{Z});\ a_i, b_i \in \mathbb{Z}; i = 1,2$

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} M_1 M_2 &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

(ii) Untuk setiap $M_1, M_2, M_3 \in M_{3\times 3}(\mathbb{Z});\ a_i, b_i \in \mathbb{Z}; i = 1,2,3$

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sedemikian sehingga

$$(M_1M_2)M_3 = \left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1a_2a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_1(M_2M_3) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1a_2a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) Untuk setiap $M_1, M_2, M_3 \in M_{3\times3}(\mathbb{Z});\ a_i, b_i \in \mathbb{Z}; i = 1,2,3$

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sedemikian sehingga

$$M_1(M_2 + M_3) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 + a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 + b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1(a_2 + a_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1a_2 + a_1a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= M_1M_2 + M_1M_3$$

$$(M_2 + M_3)M_1 = \left(\begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_2 + a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 + b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a_2 + a_3)a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_2a_1 + a_3a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_2a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= M_2M_1 + M_3M_1$$

2. Untuk setiap $M_1 \in M_{3\times3}(\mathbb{Z});\ a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$
   $A_{3\times3}(\mathbb{Z}) = \{M_1 - M_1e\}$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; b \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$B_{3\times3}(\mathbb{Z}) = \{M_1 - eM_1\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; b \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$I_{3\times3}(\mathbb{Z}) = A_{3\times3}(R) + B_{3\times3}(R) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b+b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; c \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$W_{3\times3}(\mathbb{Z}) = e + I_{3\times3}(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; c_1 \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$e[M_{3\times3}(\mathbb{Z})]e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; a \in \mathbb{Z} \right\}$$

3. Untuk setiap $M_1 \in e[M_{3\times3}(\mathbb{Z})]e;\ a_1 \in \mathbb{Z},\ \ M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ sedemikian sehingga

$$eM_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_1 e = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.

(a) $M_{3\times 3}(\mathbb{Z})$ dapat dinyatakan dalam jumlahan $I_{3\times 3}(\mathbb{Z})$ dan $e[M_{3\times 3}(\mathbb{Z})]e$.

$$M_{3\times 3}(\mathbb{Z}) = \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

(b) $I_{3\times 3}(\mathbb{Z}) \cap e[M_{3\times 3}(\mathbb{Z})]e = \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} \cap \left\{\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$

$$= \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

Dari (a) dan (b) terbukti $M_{3\times 3}(\mathbb{Z}) = I_{3\times 3}(\mathbb{Z}) \oplus e[M_{3\times 3}(\mathbb{Z})]e$.

Teorema 3.1.12

Misalkan $\varphi : R \to R$ adalah suatu automorfisma dari ring R dan e adalah elemen identitas lemah dari R. Maka:

1. $\varphi(e) = e^{'}$ adalah suatu elemen identitas lemah dari R.
2. Pembatasan dari pemetaan φ terhadap sembarang ring-ring A atau B adalah suatu automorfima.
3. φ terinduksi secara *natural* suatu isomorfisma ring $\varphi^{'}: eRe \to e'Re'$ didefinisikan oleh $\varphi^{'}(ere) = e^{'}\varphi(r)e^{'}$.

(Ghosseiri, 2008)

Bukti:

(1) e adalah elemen identitas lemah dari R maka berlaku untuk setiap $r_1, r_2 \in R$ sedemikian sehingga

$$\varphi(r_1 e r_2) = \varphi(r_1)\varphi(e)\varphi(r_2) = r_1 e' r_2$$

disisi lain

$$\varphi(r_1 e r_2) = \varphi(r_1 r_2) = \varphi(r_1)\varphi(r_2) = r_1 r_2$$

maka $r_1 e' r_2 = r_1 r_2$. Jadi $\varphi(e) = e'$ adalah elemen identitas lemah dari R.

(2) Akan ditunjukkan bahwa $\varphi(A) \subseteq A$ dan $\varphi(B) \subseteq B$. Ambil sembarang $a \in A$ maka

$$\varphi(a)e^{'} = \varphi(a)\varphi(e) = \varphi(ae) = \varphi(0) = 0$$

menurut (1) $\varphi(e) = e^{'}$ adalah elemen identitas lemah dari A, sehingga untuk sembarang $\varphi(a) \in \varphi(A)$ maka

$$\varphi(a)e = \varphi(a)e^{'}e = (\varphi(a)e^{'})e = 0e = 0$$

menurut Lemma 3.1.4.1 $\varphi(a)e^{'} \in A$ karena berlaku tertutup terhadap pergandaan maka $\varphi(a) \in A$. Terbukti bahwa $\varphi(A) \subseteq A$.

Ambil sembarang $b \in B$ maka

$$e^{'}\varphi(b) = \varphi(e)\varphi(b) = \varphi(eb) = \varphi(0) = 0$$

menurut (1) $\varphi(e) = e^{'}$ adalah elemen identitas lemah dari B, sehingga untuk sembarang $\varphi(b) \in \varphi(B)$ maka

$$e\varphi(b) = ee^{'}\varphi(b) = e\left(e^{'}\varphi(b)\right) = e0 = 0$$

menurut Lemma 3.1.4.2 $\varphi(b)e^{'} \in B$ karena berlaku tertutup terhadap pergandaan maka $\varphi(b) \in B$. Terbukti bahwa $\varphi(B) \subseteq B$.

(3) Akan dibuktikan bahwa pemetaan $\varphi' : eRe \to e'Re'$ yang didefinisikan $\varphi'(ere) = e'\varphi(r)e'$ adalah suatu isomorfisma.

Untuk setiap $a, b \in eRe$ maka $a = er_1e,\ b = er_2e$.

$$\begin{aligned}\varphi'(er_1e + er_2e) = \varphi'(e(r_1 + r_2)e) &= e'\varphi'(r_1 + r_2)e' \\ &= e^{'}\varphi(r_1)e' + e^{'}\varphi(r_2)e' \\ &= \varphi'(er_1e) + \varphi'(er_2e)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi'(er_1e.er_2e) = \varphi'(er_1er_2e) = \varphi'(er_1r_2e) &= e^{'}\varphi(r_1r_2)e^{'} \\ = e^{'}\varphi(r_1)\varphi(r_2)e^{'} &= e^{'}\varphi(r_1)e^{'}e^{'}\varphi(r_2)e^{'} \\ = \varphi'(er_1e)\varphi'(er_2e)\end{aligned}$$

(terbukti pemetaan $\varphi' : eRe \to e'Re'$ merupakan suatu homomorfisma).

Untuk setiap $e^{'}\varphi(r_1)e', e^{'}\varphi(r_2)e^{'} \in e'Re'$ sedemikian sehingga $e^{'}\varphi(r_1)e^{'} = e^{'}\varphi(r_2)e^{'}$, maka

$$\begin{aligned} e^{'}\varphi(r_1)e^{'} &= e^{'}\varphi(r_2)e^{'} \\ \Leftrightarrow\ \varphi'(er_1e) &= \varphi'(er_2e) \\ \Leftrightarrow\ er_1e &= er_2e \end{aligned}$$

jadi $er_1e = er_2e \in eRe$ (injektif).

Untuk setiap $e^{'}\varphi(r)e' \in e'Re'$ sedemikian sehingga terdapat $ere \in eRe$ memenuhi $\varphi'(ere) = e'\varphi(r)e'$ (surjektif). Terbukti bahwa pemetaan $\varphi' : eRe \to e'Re'$ adalah suatu isomorfisma ($eRe \cong e'Re'$). ■

3.2 Ideal di Ring *R*

Teorema 3.2.1
Misalkan J adalah suatu ideal dari R. Maka
$$J = I \cap J + eJe = A \cap B \cap J + U \cap J + eJe$$
(Ghosseiri, 2008).

Bukti:

1. Akan dibuktikan $J \subseteq I \cap J + eJe$. Ambil sembarang $x \in J$, maka dapat dinyatakan
$$x = x - ex + e(x - xe) + exe \in I \cap J + eJe$$
di mana
$$x - ex + e(x - xe) \in A + B = I$$
dan $exe \in eJe$, jadi $J \subseteq I \cap J + eJe$.
2. Akan dibuktikan $I \cap J + eJe \subseteq A \cap B \cap J + U \cap J + eJe$ atau $I \cap J \subseteq A \cap B \cap J + U \cap J$. Menurut *Remark* 3.1.7.2
$$I = A + B = A \cap B \oplus U$$
Ambil sembarang $x \in I \cap J$ maka $x \in I$ dan $x \in J$, misalkan $x = t + u$ di mana $t \in A \cap B$ dan $u \in U$, $u = re - er$ untuk setiap $r \in R$. Akan ditunjukkan bahwa $t \in J$ dan $u \in J$. Karena $x \in I = A + B$ maka $x = a + b$ di mana $a = r - re \in A$ dan $b = r - er \in B$ sehingga
$$x = a + b = (r - re) + (r - er)$$
oleh karena $xe \in J$ (sifat tertutup), maka
$$\begin{aligned} xe &= [(r - re) + (r - er)]e = re - re + re - ere \\ &= re - ere = (re - er)e = ue \in J \end{aligned}$$
begitu juga $-x \in I = A + B$ maka $-x = -a + (-b)$ di mana
$$-a = -(r - re) = re - r \in A$$
dan
$$-b = (r - er) = er - r \in B$$
sehingga
$$-x = -a + (-b) = (re - r) + (er - r)$$
oleh karena $e(-x) \in J$ (sifat tertutup), maka
$$\begin{aligned} e(-x) &= e[(re - r) + (er - r)] = ere - er + er - er \\ &= ere - er = e(re - er) = eu \in J \end{aligned}$$
diperoleh $ue \in J$ dan $eu \in J$ maka $ue + eu \in J$ (sifat tertutup).
$$\begin{aligned} ue + eu &= (re - er)e + e(re - er) = re - ere + ere - er \\ &= re - er = u \in J \end{aligned}$$

karena $u \in J$ dan $x = t + u$ di mana $x \in J$, maka $t = x - u \in J$. Terbukti bahwa $x = t + u \in A \cap B \cap J + U \cap J$. Jadi

$$I \cap J \subseteq A \cap B \cap J + U \cap J$$

atau

$$I \cap J + eJe \subseteq A \cap B \cap J + U \cap J + eJe$$

3. Akan dibuktikan $A \cap B \cap J + U \cap J + eJe \subseteq J$. Ambil sembarang $y \in A \cap B \cap J + U \cap J + eJe$ maka $y = w_1 + w_2 + ew_3e$ di mana $w_1, w_2 \in J$ dan $ew_3e \in eJe$. Karena tertutup terhadap penjumlahan dan pergandaan maka $y = w_1 + w_2 + ew_3e \in J$. Jadi $A \cap B \cap J + U \cap J + eJe \subseteq J$.

Dari (1), (2) dan (3) terbukti bahwa

$$J = I \cap J + eJe = A \cap B \cap J + U \cap J + eJe. \blacksquare$$

Teorema berikut akan menunjukkan bahwa terdapat hubungan antara ideal maksimal dan ideal prima dari ring R dan eRe sebagai ring dengan elemen identitas. Jika ring R memenuhi $R^2 = R$, maka setiap ideal maksimal di dalam R adalah ideal prima.

Teorema 3.2.2

1. Jika N adalah ideal maksimal dari eRe maka $I + N$ juga merupakan ideal maksimal di dalam R. Jika N adalah ideal prima dari eRe maka $I + N$ juga merupakan ideal prima di dalam R.
2. Jika P adalah ideal prima dari R maka ePe juga merupakan ideal prima di dalam eRe.
3. Jika M adalah suatu ideal maksimal dari R maka salah satu dari $eMe = eRe$ atau eMe adalah sebuah ideal maksimal dari eRe di mana $M = I + eMe$ adalah ideal prima dari R.

(Ghosseiri, 2008)

Bukti:

(1) Akan dibuktikan $I + N$ adalah sebuah ideal maksimal dari R. Karena N adalah ideal maksimal dari eRe, maka $N \neq eRe$ sehingga menurut Teorema 3.1.6 $R \neq I + N$, jadi $I + N$ adalah ideal *proper* dari R. Misalkan T adalah suatu ideal di dalam R sedemikian sehingga $I + N \subseteq T \subseteq R$ akan diperlihatkan $T = I + N$ atau $T = R$.

Perkalian dua sisi oleh e dan N adalah ideal maksimal di dalam ring eRe dapat dinyatakan bahwa

$$e(I + N)e \subseteq eTe \subseteq eRe$$
$$\Leftrightarrow eIe + eNe \subseteq eTe \subseteq eRe$$

$$\Leftrightarrow \{0\} + eNe \subseteq eTe \subseteq eRe$$
$$\Leftrightarrow \qquad eNe \subseteq eTe \subseteq eRe$$
maka $eTe = eNe = N$ (e adalah elemen identitas dari ring eRe) atau $eTe = eRe$. Oleh karena itu menurut Teorema 3.2.1 maka akan diperoleh
$$T = I \cap T + eTe = I + eTe = I + N$$
atau
$$T = I \cap T + eTe = I + eRe = R$$
Jadi terbukti $I + N$ adalah sebuah ideal maksimal dari R.

Akan dibuktikan $I + N$ adalah sebuah ideal prima dari ring R. Misalkan eJe, eKe sebarang ideal dari eRe dan N adalah ideal prima di dalam ring eRe sedemikian sehingga $(eJe)(eKe) \subseteq N$ maka $eJe \subseteq N$ atau $eKe \subseteq N$. Karena
$$(eJe)(eKe) \subseteq N$$
$$I + (eJe)(eKe) \subseteq I + N$$
$$(I + eJe)(I + eKe) \subseteq I + (eJe)(eKe) \subseteq I + N$$
dan
$$eJe \subseteq N \Rightarrow I + eJe \subseteq I + N$$
$$eKe \subseteq N \Rightarrow I + eKe \subseteq I + N$$
Menurut Teorema 3.2.1 terlihat bahwa $(I + eJe)$ dan $(I + eKe)$ adalah sembarang ideal di R. Jadi terbukti bahwa $I + N$ adalah ideal prima dari ring R.

(2) P adalah ideal prima di dalam R dan misalkan J dan K adalah sembarang ideal dari eRe sedemikian sehingga $JK \subseteq ePe$, akan ditunjukkan $J \subseteq ePe$ atau $K \subseteq ePe$. Karena $I^3 = 0 \subseteq P$ dan P adalah ideal prima maka berlaku $I \subseteq P$, menurut Teorema 3.2.1 $P = I \cap P + ePe = I + ePe$. Karena diketahui $JK \subseteq ePe$ sehingga dapat diperoleh
$$JK \subseteq I + JK \subseteq I + ePe = P$$
Karena P adalah ideal prima maka $J \subseteq P$ atau $K \subseteq P$, jika dikalikan dengan e dari ruas kiri dan kanan didapatkan $eJe \subseteq ePe$ atau $eKe \subseteq ePe$, dengan kata lain $J \subseteq ePe$ atau $K \subseteq ePe$ karena e adalah elemen identitas dari ring eRe. Jadi terbukti bahwa ePe adalah ideal prima dari ring eRe.

(3) Misalkan bahwa M adalah ideal maksimal dari R dan $eMe \neq eRe$. Misalkan K adalah ideal dari eRe sedemikian sehingga $eMe \subseteq K \subseteq eRe$. Akan ditunjukkan $K = eMe$ atau $K = eRe$. Menurut Teorema 3.1.6 dan 3.2.1 didapatkan

$$M = I \cap M + eMe \subseteq I + eMe \subseteq I + K \subseteq I + eRe = R.$$

Karena M ideal maksimal maka $I + K = M$ atau $I + K = R$. Pergandaan dua ruas oleh e sebagai elemen identitas dari ring eRe ternyata dapat disimpulkan

$$K = eIe + eKe = eMe$$

atau

$$K = eIe + eKe = eRe$$

(karena K ideal di dalam ring eRe). Terbukti bahwa eMe adalah ideal maksimal dari ring eRe.

Akan dibuktikan bahwa $M = I + eMe$ adalah suatu ideal prima dari R. Menurut Teorema 3.2.1 dan M adalah ideal maksimal maka $M = I \cap M + eMe = I + eMe$. Karena eRe adalah ring dengan elemen identitas e dan eMe adalah ideal maksimal dari eRe, menurut Teorema 2.2.32 maka $M = eMe$ adalah ideal prima dari eRe. Berdasarkan Teorema 3.2.2.1 maka $M = I + eMe$ adalah ideal prima dari R. ■

Contoh 3.2.3

Diberikan suatu ring bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan $M_{3\times3}(\mathbb{Z})$ adalah matriks ring yang didefinisikan

$$M_{3\times3}(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

dan

$$N_{3\times3}(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; a \in \mathbb{Z}; p \in 2\mathbb{Z} \right\}$$

adalah ideal maksimal dari $M_{3\times3}(\mathbb{Z})$. Akan ditunjukkan bahwa $N_{3\times3}(\mathbb{Z})$ bukan suatu ideal prima (Ghosseiri, 2008).

Bukti:

(a) Akan ditunjukkan

$$N_{3\times3}(\mathbb{Z}) = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; a \in \mathbb{Z}; p \in 2\mathbb{Z}\right\}$$

adalah ideal di dalam matriks ring $M_{3\times3}(\mathbb{Z})$ dan jelas bahwa $2\mathbb{Z} = \{0, \pm2, \pm4, \dots\}$ adalah suatu ring.

Untuk setiap $N_1, N_2 \in N_{3\times3}(\mathbb{Z});\ a_i \in \mathbb{Z};\ p_i \in 2\mathbb{Z}; i = 1{,}2.$

$$N_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, N_2 = \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sedemikian sehingga

$$N_1 - N_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_1 - a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 - p_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in N_{3\times3}(\mathbb{Z})$$

Untuk setiap $N_1 \in N_{3\times3}(\mathbb{Z});\ \forall M_1 \in M_{3\times3}(\mathbb{Z});\ a_1, a_2, b \in \mathbb{Z};\ p \in 2\mathbb{Z}$

$$N_1 = \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sedemikian sehingga

$$N_1M_1 = \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in N_{3\times3}(\mathbb{Z})$$
$$M_1N_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in N_{3\times3}(\mathbb{Z})$$

(b) Akan ditunjukkan $N_{3\times3}(\mathbb{Z})$ adalah ideal maksimal. Misalkan terdapat ideal lain yaitu $K_{3\times3}(\mathbb{Z})$ sedemikian sehingga $N_{3\times3}(\mathbb{Z}) \subseteq K_{3\times3}(\mathbb{Z}) \subseteq M_{3\times3}(\mathbb{Z})$. Maka $K_{3\times3}(\mathbb{Z}) = M_{3\times3}(\mathbb{Z})$ atau $K_{3\times3}(\mathbb{Z}) = N_{3\times3}(\mathbb{Z})$, terbukti ideal $N_{3\times3}(\mathbb{Z})$ adalah ideal maksimal dari matriks ring $M_{3\times3}(\mathbb{Z})$.

(c) Akan ditunjukkan bahwa ideal

$$N_{3\times3}(\mathbb{Z}) = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; a \in \mathbb{Z}; p \in 2\mathbb{Z}\right\}$$

bukan merupakan ideal prima dari matriks ring $M_{3\times3}(\mathbb{Z})$. Misalkan terdapat *proper* ideal

$$I_{3\times3}(R) = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; a \in \mathbb{Z};\ i \in 5\mathbb{Z}\right\}$$

dan

$$J_{3\times3}(R) = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; a \in \mathbb{Z};\ j \in 3\mathbb{Z}\right\}$$

dari matriks ring $M_{3\times3}(\mathbb{Z})$, sedemikian sehingga

$$IJ = \left\{\sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} a_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i_k \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j_k \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; c \in \mathbb{Z}\right\} \subseteq N_{3\times3}(\mathbb{Z})$$

tetapi

$$I_{3\times3}(R) = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; a \in \mathbb{Z};\ i \in 5\mathbb{Z}\right\} \nsubseteq N_{3\times3}(\mathbb{Z})$$

atau

$$J_{3\times3}(R) = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; a \in \mathbb{Z};\ j \in 3\mathbb{Z}\right\} \nsubseteq N_{3\times3}(\mathbb{Z})$$

Terbukti bahwa ideal $N_{3\times3}(\mathbb{Z})$ bukan ideal prima.

Ideal $N_{3\times3}(\mathbb{Z})$ merupakan ideal maksimal tetapi bukan merupakan ideal prima disebabkan syarat $M_{3\times3}(\mathbb{Z}) = (M_{3\times3}(\mathbb{Z}))^2$ tidak dipenuhi. Bukti :

$$\begin{aligned} \left(M_{3\times3}(\mathbb{Z})\right)^2 &= \left\{\sum_{i=1}^{n} M_i M_i \ \middle|\ M_i \in M_{3\times3}(\mathbb{Z})\right\} \\ &= \left\{\sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} a_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} a_i a_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} \\ &= \left\{\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; a = a_i a_i;\ a \in R\right\}. \end{aligned}$$

Ambil sembarang $M_1 \in \left(M_{3\times3}(\mathbb{Z})\right)^2$ maka $M_1 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ di mana $a \in \mathbb{Z}$ sehingga $M_1 \in M_{3\times3}(\mathbb{Z})$. Tetapi jika diambil sembarang $M_2 \in M_{3\times3}(\mathbb{Z})$ maka $M_2 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ sehingga $M_2 \notin \left(M_{3\times3}(\mathbb{Z})\right)^2$, jadi $M_{3\times3}(\mathbb{Z}) \neq (M_{3\times3}(\mathbb{Z}))^2$.

BAB IV
KESIMPULAN

Dari pembahasan skripsi ini, dapat disimpulkan bahwa, jika R adalah ring dengan elemen identitas lemah e maka ring tersebut adalah jumlahan langsung dari dua buah subringnya yaitu ideal nilpoten I dan ring eRe dengan elemen identitas. Elemen identitas lemah dari suatu ring tidak harus tunggal. Suatu ring dengan elemen identitas lemah dapat didekomposisi dari elemen identitas lemah yang berbeda. Jika J adalah sembarang ideal di dalam ring R maka dapat dinyatakan $J = I \cap J + eJe$. Setiap ideal maksimal di dalam ring dengan elemen identitas lemah maka ideal prima dengan syarat $R^2 = R$.

DAFTAR PUSTAKA

Ash, R. 2000. *Basic Abstract Algebra: For Graduate Students and Advanced Undergraduates*. Dover Publication. New York.

Bhattacharya, dkk. 1990. *Basic Abstract Algebra*. The Press Syndicate of University of Cambrige. New York.

Cameron, J. Peter. 2008. *Introduction To Algebra*. Oxford University Press Inc. New York.

Dummit, D.S. and R.M. Foote. 2004. *Abstract Algebra* . Third Ed. John Willey and Sons Inc. New York.

Fraleigh, J.B. 2003. *A First Course in Abstract Algebra*. Seventh Ed. Addison-Wesley Pub. Comp. New York.

Ghosseiri, M, Nader. 2008. *Rings with Weak Identities. International Journal of Algebra, Vol. 2, no. 12, 563 – 570,* Department of Mathematics, Kurdistan University.

Hungerford, T.W. 2003. *Abstract Algebra An Introduction*. Cleveland State University. London.

Jacobson, N. 1989. *Basic Algebra II. Second Ed*. W.H. Freeman and Company. New York.

Lam, T.Y. 1991. *A First Course in Noncomutative Ring*. Springer-Verlag Inc. New York.

Rotman, J.J. 2003. *Advanced Modern Algebra*. Prentice Hall. New York.