

**MENDUGA KURVA REGRESI MENGGUNAKAN TEKNIK
PEMULUS KERNEL DAN ANALISIS WAVELET**

SKRIPSI

oleh:

**HUSNUL HOTIMAH HADIATUL HASANAH
0610950029-95**



**PROGRAM STUDI STATISTIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2011**

**MENDUGA KURVA REGRESI MENGGUNAKAN TEKNIK
PEMULUS KERNEL DAN ANALISIS WAVELET**

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Statistika

oleh:

HUSNUL HOTIMAH HADIATUL HASANAH
0610950029-95



PROGRAM STUDI STATISTIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2011

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

**MENDUGA KURVA REGRESI MENGGUNAKAN TEKNIK
PEMULUS KERNEL DAN ANALISIS WAVELET**

oleh:

**HUSNUL HOTIMAH HADIATUL HASANAH
0610950029-95**

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 7 Februari 2011
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Statistika

Pembimbing I

Pembimbing II

Dr. Ir. Ni Wayan Surya Wardhani, MS
NIP. 19551102 198103 2 001

Nurjannah, S.Si., M.Phil
NIP. 19800921 200501 2 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc
NIP. 19670907 199203 1 001

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : HUSNUL HOTIMAH H H
NIM : 0610950029-95
Program Studi : STATISTIKA
Penulis Skripsi Berjudul :

MENDUGA KURVA REGRESI MENGGUNAKAN TEKNIK PEMULUS KERNEL DAN ANALISIS WAVELET

Dengan ini menyatakan bahwa:

1. Isi dari Skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Skripsi ini.
2. Apabila di kemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya akan bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 7 Februari 2011
Yang menyatakan,

HUSNUL HOTIMAH H H
NIM 0610950029-95

MENDUGA KURVA REGRESI MENGGUNAKAN TEKNIK PEMULUS KERNEL DAN ANALISIS WAVELET

ABSTRAK

Pendekatan parametrik untuk menduga model regresi dapat digunakan jika asumsi bentuk kurva regresi diketahui. Jika asumsi bentuk kurva tidak diketahui dan diasumsikan mulus, maka dapat digunakan pendekatan nonparametrik. Tujuan dari penelitian ini adalah menduga model regresi menggunakan pendekatan nonparametrik, yaitu teknik pemulus Kernel dan analisis wavelet yang merupakan perluasan dari penduga histogram. Untuk mengetahui kebaikan dari penduga kurva digunakan MSE (*Mean Square Error*) dan MAPE (*Mean absolute Percentage Error*). Semakin kecil nilai MSE dan MAPE semakin baik hasil dari penduga kurva dan sebaliknya. Data yang digunakan pada penelitian ini adalah data penambahan tinggi tanaman suren, data biaya untuk berlayar dan data pertumbuhan burung Mutton. Dari hasil analisis terhadap tiga data sekunder diperoleh MSE dan MAPE hasil analisis wavelet lebih kecil dibandingkan dengan MSE dan MAPE hasil teknik pemulus Kernel sehingga dapat diambil kesimpulan bahwa analisis wavelet lebih baik dibandingkan dengan teknik pemulus Kernel.

Kata kunci : teknik pemulus Kernel, analisis wavelet

KERNEL ESTIMATION AND WAVELET ANALYSIS AS A CURVE ESTIMATION

ABSTRACT

The parametric approach can be used if the curve assumptions of regression is defined. If it is not and it looks smooth, we can use nonparametric approaches. The purpose of this study is to estimate regression models using Kernel smoothing and wavelet analysis as an histogram estimators. The goodness of fit used are MSE (Mean Square Error) and MAPE (Mean absolute Percentage Error). The smaller the MSE and MAPE the better estimators will occur. The data used is suren plant height, fuel cost data for the sail and the growth of Mutton bird. Based on the analysis, it can be seen that the result of MSE and MAPE using wavelet analysis is less than that using Kernel smoothing. So in conclusion, wavelet analysis is better than Kernel smoothing.

Keyword : Kernel smoothing, wavelet analysis

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang senantiasa memberikan rahmat, hidayah dan karunia-Nya sehingga dapat menyelesaikan skripsi dengan judul “Menduga Kurva Regresi Menggunakan Teknik Pemulus Kernel Dan Analisis Wavelet”.

Analisis wavelet dan teknik pemulus Kernel merupakan pendekatan nonparametrik yang dapat digunakan untuk menduga kurva regresi. Dengan adanya tulisan ini, diharapkan dapat memberikan metode alternatif untuk menduga model regresi nonparametrik.

Dalam penyusunan penelitian ini cukup banyak bantuan yang diberikan berbagai pihak, baik berupa bimbingan maupun saran. Oleh karena itu, penulis dalam kesempatan ini mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Dr. Ir. Ni Wayan Surya Wardhani, MS., selaku Dosen Pembimbing I dan Ibu Nurjannah, S.Si., M.Phil., selaku Dosen Pembimbing II atas bimbingan, masukan, serta bantuan yang telah diberikan.
2. Ibu Ir. Heni Kusdarwati, MS, Dra. Ani Budi Astuti, M.Si dan Bapak Adji Achmad Rinaldo Fernandes, S.Si., MSc. selaku dosen penguji atas saran dan nasihat yang telah diberikan.
3. Bapak Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc dan Dr. Agus Suryanto, MSc., selaku Ketua dan Mantan Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Brawijaya.
4. Mami, Bapak, Mas Uuk, Mas Didik, dan Mas Adi yang telah memberikan kasih sayang, doa, dan dukungan yang tulus selama ini.
5. Phie, Hanh, Ai dan teman-teman Statistika 2006 atas dukungan, bantuan dan kebersamaannya selama ini.
6. Semua pihak yang telah membantu dan memberikan dukungan selama penulisan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun demi perbaikan selanjutnya. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca.

Malang, 7 Februari 2011

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGESAHAN	ii
HALAMAN PERNYATAAN	iii
ABSTRAK	iv
ABSTRACT	v
KATA PENGANTAR	vi
DAFTAR ISI	vii
DAFTAR TABEL	ix
DAFTAR GAMBAR	x
DAFTAR LAMPIRAN	xi
BAB I PENDAHULUAN	
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Rumusan Masalah	2
1.3. Batasan Masalah	2
1.4. Tujuan Penelitian.....	3
1.5. Manfaat Penelitian.....	3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	
2.1. Regresi Nonparametrik	5
2.2. Teknik Pemulus Kernel	6
2.3. Penduga Nadaraya-Watson.....	8
2.4. Analisis Wavelet.....	9
2.4.1. Transformasi Wavelet Diskrit.....	12
2.4.2. Transformasi Wavelet Diskrit Invers (TWDI).....	14
2.4.3. Penduga Wavelet <i>Thresholding</i>	15
2.5. Kriteria Pemilihan Metode Terbaik	18
2.5.1. MSE (<i>Mean Square Error</i>).....	18
2.5.2. MAPE (<i>Mean Absolute Percentage Error</i>)	19
BAB III METODE PENELITIAN	
3.1. Data Penelitian.....	21
3.2. Metode.....	21

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1. Teknik Pemulus Kernel	25
4.1.1. Penduga Kernel Data 1 atau Data Pertambahan Tinggi Tanaman Suren	25
4.1.2. Penduga Kernel Data 2 atau Data Biaya Bahan Bakar Untuk Berlayar	26
4.1.3. Penduga Kernel Data 3 atau Data Pertumbuhan Burung Mutton	27
4.2. Analisis Wavelet.....	29
4.2.1. Analisis Wavelet Untuk Data 1 atau Data Pertambahan Tinggi Tanaman Suren	29
4.2.1.1. Transformasi Wavelet Diskrit Data 1	29
4.2.1.2. Thresholding Data 1	29
4.2.1.3. Invers Transformasi Wavelet Diskrit Data 1 ..	29
4.2.2. Analisis Wavelet Untuk Data 2 atau Data Biaya Bahan Bakar Untuk Berlayar.....	30
4.2.2.1. Transformasi Wavelet Diskrit Data 2.....	30
4.2.2.2. Thresholding Data 2	30
4.2.2.3. Invers Transformasi Wavelet Diskrit Data 2 ..	31
4.2.3. Analisis Wavelet Untuk Data 3 atau Data Pertumbuhan Burung Mutton	31
4.2.3.1. Transformasi Wavelet Diskrit Data 3	31
4.2.3.2. Thresholding Data 3	31
4.2.3.3. Invers Transformasi Wavelet Diskrit Data 3 ..	32
4.3. Perbandingan Hasil Pendugaan Kurva	33

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

5.1. Kesimpulan	35
5.2. Saran	35

DAFTAR PUSTAKA	37
-----------------------------	-----------

LAMPIRAN	41
-----------------------	-----------

DAFTAR TABEL

Halaman

Tabel 2.1. Nilai-Nilai <i>Threshold Minimax</i> Untuk Ukuran Sampel Yang Berbeda	18
Tabel 3.1. Data Sekunder Yang Digunakan Dalam Penelitian....	21
Tabel 4.1. Nilai GCV untuk Data 1	25
Tabel 4.2. Nilai GCV untuk Data 2	26
Tabel 4.3. Nilai GCV untuk Data 3	28
Tabel 4.4. Nilai MSE dan MAPE	33



DAFTAR GAMBAR

Halaman

Gambar 2.1. Contoh Pendekatan Fungsi Dengan Wavelet Haar	12
Gambar 2.2. Dekomposisi Dan Rekontruksi Wavelet Pada Level J	13
Gambar 3.1. Diagram Alir Metode Analisis	24



DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

Lampiran 1.	Data Penelitian	41
Lampiran 2.	Program Matlab Untuk Menghitung Nilai GCV dan Contoh Output Matlab	44
Lampiran 3.	Coding R Packages.....	47
Lampiran 4.	Hasil Transformasi Wavelet Diskrit.....	48
Lampiran 5.	Data Hasil <i>Thresholding</i>	51
Lampiran 6.	Data Hasil Invers Transformasi Wavelet Diskrit ..	54
Lampiran 7.	Kurva Hasil Analisis Menggunakan Teknik Pemulus Kernel dan Analisis Wavelet	57



BAB I PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Dalam ilmu statistika, salah satu analisis yang dapat digunakan untuk mengetahui hubungan antara dua peubah atau lebih adalah analisis regresi. Untuk menjelaskan hubungan tersebut dapat digunakan kurva regresi. Ada dua pendekatan dalam menduga kurva regresi yaitu pendekatan parametrik dan pendekatan nonparametrik. Pendekatan parametrik dilakukan jika asumsi bentuk kurva diketahui dan tergantung dari suatu parameter misalnya linear, eksponensial, dan lain-lain, sedangkan pendekatan nonparametrik dilakukan jika asumsi bentuk kurva tidak diketahui.

Untuk dapat menggunakan pendekatan parametrik, diperlukan pengetahuan masa lalu tentang karakteristik data. Berbeda dengan pendekatan parametrik, dalam regresi nonparametrik bentuk kurva regresi diasumsikan tidak diketahui. Kurva regresi hanya diasumsikan mulus, yang berarti kontinu dan *differensiable*. Pada pendekatan nonparametrik, data diharapkan mencari sendiri bentuk pendugaanya, tanpa dipengaruhi oleh faktor subyektifitas dari perancang penelitian (Eubank, 1988). Oleh karena itu, pendekatan regresi nonparametrik memiliki fleksibilitas yang tinggi.

Ada beberapa metode untuk menduga fungsi regresi nonparametrik diantaranya histogram, teknik pemulus Kernel, deret Fourier, dan analisis wavelet. Histogram merupakan metode klasik yang paling populer yang digunakan untuk menduga fungsi. Suatu histogram disusun dengan meletakkan titik-titik data ke dalam suatu bin atau kelas, di mana bin atau kelas diperoleh dengan menentukan nilai awal dan lebar kelas (*bandwidth*). Di dalam menduga suatu fungsi, fungsi diasumsikan berada pada ruang fungsi yang mulus. Oleh karena itu, Hardle (1990) mengembangkan histogram menjadi teknik pemulus Kernel dengan memberi bobot berupa fungsi Kernel. Ada beberapa fungsi Kernel diantaranya fungsi Gaussian, Segitiga, Epanechnikov, dan fungsi Seragam (*Uniform*). Fungsi Gaussian merupakan fungsi yang paling populer yang sering digunakan di dalam penelitian (Odgen, 1997). Ada beberapa macam teknik pemulus Kernel, di antaranya penduga Nadaraya-Watson dan penduga Gasser-Muller. Penduga yang

digunakan di dalam teknik pemulus Kernel adalah penduga Nadaraya-Watson karena memberikan hasil yang lebih baik dibandingkan penduga Gasser-Muller (Halim dan Bisono, 2006). Selain teknik pemulus Kernel, deret Fourier dan analisis wavelet dapat digunakan untuk menduga fungsi regresi. Menurut Walker (1997) dan Suparti (2005), analisis wavelet lebih efektif dibandingkan dengan deret Fourier karena analisis wavelet menyediakan pendekatan sederhana untuk merekonstruksi fungsi yang tidak mulus. Teknik pemulus Kernel memiliki karakteristik yang sama dengan analisis wavelet. Teknik pemulus Kernel dan analisis wavelet merupakan perluasan dari penduga histogram. Oleh karena itu, penelitian ini akan membandingkan teknik pemulus Kernel dan analisis wavelet yang digunakan untuk menduga kurva regresi.

Untuk mengetahui kebaikan dari penduga kurva digunakan MSE (*Mean Square Error*) dan MAPE (*Mean Absolute Percentage Error*). Semakin kecil nilai MSE dan MAPE semakin baik penduga dan sebaliknya.

1.2. Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penelitian ini antara lain :

1. Bagaimana mendapatkan *bandwidth* yang optimal agar memperoleh kurva yang optimal menggunakan teknik pemulus Kernel ?
2. Bagaimana mendapatkan nilai *threshold* agar memperoleh kurva yang optimal menggunakan analisis wavelet ?
3. Bagaimana perbandingan hasil pendugaan kurva regresi menggunakan teknik pemulus Kernel dan analisis wavelet ?

1.3. Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini antara lain :

1. Data yang digunakan adalah data univariat.
2. Fungsi Kernel yang digunakan adalah fungsi Gaussian.
3. Penduga yang digunakan adalah Penduga Nadaraya-Watson.
4. Wavelet yang digunakan adalah wavelet Haar.
5. Transformasi yang dilakukan adalah transformasi wavelet diskrit.
6. Penduga wavelet yang digunakan adalah penduga wavelet *thresholding* atau penduga wavelet *shrinkage*

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini sebagai berikut :

1. Untuk mendapatkan *bandwidth* yang optimal agar memperoleh kurva yang optimal menggunakan teknik pemulus Kernel.
2. Untuk mendapatkan nilai *threshold* agar memperoleh kurva yang optimal menggunakan analisis wavelet.
3. Membandingkan nilai MSE dan MAPE pendugaan kurva menggunakan teknik pemulus Kernel dan analisis wavelet

1.5 Manfaat penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah dapat memberikan metode penyelesaian alternatif untuk menduga kurva regresi.



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Regresi Nonparametrik

Analisis regresi adalah analisis statistik yang mempelajari bagaimana membangun sebuah model fungsional dari data untuk dapat menjelaskan ataupun meramalkan suatu fenomena alami atas dasar fenomena yang lain. Bentuk umum dari model regresi adalah sebagai berikut :

$$Y_i = g(X_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

di mana :

- Y_i : peubah respon
- $g(X_i)$: fungsi dari X_i
- X_i : peubah prediktor
- ε_i : sisaan

Ada dua pendekatan dalam menduga fungsi regresi, yaitu pendekatan parametrik dan pendekatan nonparametrik. Dalam kasus parametrik, peneliti biasanya menggunakan metode kuadrat terkecil untuk mencocokkan garis-garis regresi dan melandaskan kesimpulan-kesimpulan yang menyangkut parameter-parameter populasi pada asumsi-asumsi regresi parametrik. Akan tetapi, apabila asumsi-asumsi tersebut dilanggar maka akan menghasilkan kesimpulan yang salah mengenai penelitian tersebut (Daniel, 1989). Salah satu alternatif lain yang dapat digunakan untuk mengatasi penyimpangan terhadap asumsi-asumsi adalah pendekatan nonparametrik.

Hubungan antara dua peubah atau lebih dalam regresi parametrik biasanya dijelaskan oleh beberapa parameter yang ada dalam fungsi regresi yang jumlahnya terbatas. Dalam regresi nonparametrik, model tidak digunakan untuk merepresentasikan hubungan karena model tersebut tidak mempunyai parameter yang tetap (Hardle, 1989). Jadi, hubungan dalam regresi nonparametrik dapat dijelaskan oleh kurva regresi. Selain itu, regresi nonparametrik juga bebas dari asumsi distribusi. Jadi kita dapat menggunakan regresi ini untuk data yang tidak mempunyai sebaran atau sebarannya belum diketahui. Secara umum, pendekatan parametrik akan memberikan hasil yang lebih baik daripada pendekatan nonparametrik jika mempunyai informasi tentang bentuk kurva atau model yang terbentuk valid. Akan tetapi, jika tidak ada

informasi tentang bentuk kurva maka pendekatan nonparametrik akan memberikan hasil yang lebih baik. Hasil dari pendekatan parametrik sangat spesifik dan memberikan informasi kuantitatif tentang data, sedangkan pendekatan nonparametrik memberikan informasi kualitatif (Eubank, 1988). Dalam model regresi nonparametrik, kurva regresi diasumsikan bentuknya tidak diketahui dan hanya diasumsikan mulus yang berarti kontinu dan *differensiabile*. Permasalahan dalam analisis regresi nonparametrik adalah menentukan penduga kurva regresi. Ada beberapa teknik penduga dalam regresi nonparametrik, di antaranya teknik pemulus Kernel dan analisis wavelet.

2.2 Teknik Pemulus Kernel

Teknik pemulus Kernel mengasumsikan kurva sebagai kombinasi linier terbobot dari pengamatan y_1, y_2, \dots, y_n dengan koefisien bobot fungsi Kernel (Hardle, 1989). Suatu fungsi $K(\cdot)$ disebut fungsi Kernel jika K adalah fungsi yang kontinu, berharga riil, simetris, terbatas dan $\int_{-\infty}^{\infty} K(y)dy = 1$. Kelebihan teknik pemulus Kernel adalah bentuknya lebih fleksibel dan bentuk matematisnya mudah disesuaikan (Hardle, 1990). Menurut Silverman (1986), fungsi $K(\cdot)$ mempunyai sifat sebagai berikut :

1. $\int_{-\infty}^{\infty} xK(x)dx = 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} x^r K(x)dx \neq 0$ atau ∞ , maka K disebut Kernel orde r .

Bandwidth merupakan derajat kehalusan yang berperan untuk mengontrol penyebaran atau lebar dari fungsi regresi. Teknik pemulus Kernel dengan fungsi Kernel, $K(\cdot)$ dan *bandwidth*, h dirumuskan dengan:

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h} K\left(\frac{x-X_i}{h}\right) \quad (2.2)$$

di mana :

- n : banyaknya data
- $K(\cdot)$: fungsi Kernel
- h : *bandwidth* atau parameter pemulus.

Menurut Odgen (1997) dan Hardle (1990), tingkat kemulusan \hat{f}_h tergantung dari fungsi Kernel dan pemilihan *bandwidth*. Salah satu fungsi Kernel adalah fungsi Gaussian yang mempunyai fungsi $K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, untuk $|x| < \infty$ (Odgen, 1997). Pemilihan fungsi Kernel tidak

sedominan pemilihan *bandwidth*. Nilai *bandwidth* yang kecil akan menghasilkan kurva yang kurang mulus sedangkan nilai *bandwidth* yang besar menghasilkan kurva yang sangat mulus.

Menurut Silverman (1986), permasalahan utama di dalam teknik pemulus Kernel adalah pemilihan *bandwidth*. Nilai *bandwidth* yang kecil akan menghasilkan penduga yang mempunyai bias yang kecil dan ragam yang besar, sedangkan nilai *bandwidth* yang besar akan menghasilkan penduga yang mempunyai bias yang besar dan ragam yang kecil. Oleh karena itu, perlu dipilih nilai *bandwidth* optimal untuk mendapatkan grafik optimal. Ada beberapa cara dalam memilih *bandwidth* yang optimal, salah satunya adalah GCV (*Generalized Cross Validation*). Langkah pertama yang dilakukan dalam metode GCV adalah menentukan beberapa nilai *bandwidth*, di mana *bandwidth* yang akan digunakan ditentukan dengan cara subyektif (Silverman, 1986). Selanjutnya, mencari nilai GCV yang terkecil. Metode GCV didefinisikan sebagai berikut :

$$GCV(h) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K(y_i - \hat{y}_h)^2}{1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{K_h(x - x_i)}{K_h\left(\frac{x - x_i}{h}\right)} \right)^2} \quad (2.3)$$

dengan

$$K_h(x) = \frac{1}{h} K\left(\frac{x}{h}\right) \text{ dan}$$

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

di mana :

- $K(\cdot)$: fungsi Kernel Gaussian
- h : *bandwidth*
- x_i : peubah prediktor
- y_i : peubah respon
- \hat{y}_h : penduga y_i
- n : banyaknya data

Bandwidth optimal diperoleh dari *bandwidth* yang menghasilkan *GCV* yang terkecil dan dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$h_{opt} = \min GCV(h) \quad (2.4)$$

di mana h_{opt} merupakan nilai *bandwidth* yang optimal.

2.3 Penduga Nadaraya-Watson

Ada beberapa macam teknik pemulus Kernel. Salah satunya adalah penduga Nadaraya-Watson. Penduga ini diusulkan oleh Nadaraya dan Watson menggunakan fungsi densitas bersama, yaitu variabel X dan Y di dalam penduga Kernel (Hardle, 1989). Fungsi densitas bersama variabel random X dan Y diperoleh dengan Kernel multiplikatif, yaitu

$$\hat{f}_{h_1 h_2}(x, y) = n^{-1} \sum_{i=1}^n K_{h_1}(x - x_i) K_{h_2}(y - y_i) \quad (2.5)$$

Dari Persamaan (2.5), maka

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} y \hat{f}_{h_1 h_2}(x, y) dy &= n^{-1} \sum_{i=1}^n K_{h_1}(x - x_i) \int_{-\infty}^{\infty} y K_{h_2}(y - y_i) dy \\ &= n^{-1} \sum_{i=1}^n K_{h_1}(x - x_i) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{h_2} K\left(\frac{y - y_i}{h_2}\right) dy ; u = \frac{y - y_i}{h_2} \\ &= n^{-1} \sum_{i=1}^n K_{h_1}(x - x_i) \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{y_i}{h_2} + u\right) K(u) h_2 du ; dy = h_2 du \\ &= n^{-1} \sum_{i=1}^n K_{h_1}(x - x_i) \int_{-\infty}^{\infty} (y_i + u h_2) K(u) du \\ &= n^{-1} \sum_{i=1}^n K_{h_1}(x - x_i) \left(\int_{-\infty}^{\infty} (y_i K(u) du + \int_{-\infty}^{\infty} u h_2 K(u) du \right) \\ &= n^{-1} \sum_{i=1}^n K_{h_1}(x - x_i) (y_i + h_2 E(u)) \\ &= n^{-1} \sum_{i=1}^n K_{h_1}(x - x_i) y_i \end{aligned} \quad (2.6)$$

di mana $\int_{-\infty}^{\infty} K(u) du = 1$ dan $E(u) = \int_{-\infty}^{\infty} u K(u) du = 0$

Selanjutnya penduga Kernel untuk model regresi nonparametrik pada Persamaan (2.1) dikonstruksi sebagai berikut:

$$\text{Kurva regresi: } g(x) = E(Y/X = x) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y f(x,y) dy}{f(x)} \quad (2.7)$$

Penduga untuk $g(x)$ adalah mengganti pembilang dan penyebut pada Persamaan (2.7) dengan Persamaan (2.6) dan Persamaan (2.2) dengan mengambil *bandwidth* yang sama, yaitu h , maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \hat{y}_h &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y \hat{f}_{h_1, h_2}(x, y) dy}{\hat{f}_h(x)} \\ &= \frac{n^{-1} \sum_{i=1}^n K_h(x - x_i) y_i}{n^{-1} \sum_{i=1}^n K_h(x - x_i)} \\ &= n^{-1} \sum_{i=1}^n W_{hi}(x) y_i \end{aligned} \quad (2.8)$$

di mana :

- $K(\cdot)$: fungsi Kernel Gaussian
- h : *bandwidth*
- x, x_i : peubah prediktor
- y_i : peubah respon
- n : banyaknya data

Penduga (2.8) yang diusulkan oleh Nadaraya dan Watson disebut

“Penduga Nadaraya–Watson” dengan $W_{hi}(x) = \frac{K_h(x - x_i)}{n^{-1} \sum_{i=1}^n K_h(x - x_i)}$.

2.4. Analisis Wavelet

Analisis wavelet merupakan salah satu analisis yang dapat digunakan untuk menduga suatu kurva dalam regresi. Analisis wavelet

berhubungan dengan perluasan fungsi yang berkaitan dengan satuan fungsi dasar, yaitu fungsi sinus dan fungsi cosinus (Lee dan Yamamoto, 1994). Analisis wavelet memperluas fungsi tidak hanya dalam bentuk polinom trigonometri tetapi dalam bentuk wavelet, di mana bentuk ini merupakan generasi dari bentuk translasi (pergeseran) dan dilatasi (skala) fungsi tetap yang dinamakan wavelet ibu. Wavelet ini memungkinkan pendekatan hubungan antara fungsi yang sedang diwakili dengan koefisien-koefisien wavelet.

Wavelet merupakan fungsi yang dapat membagi data dalam komponen-komponen frekuensi yang berbeda dan dijadikan sebagai salah satu pendekatan untuk menduga fungsi dalam regresi. Menurut Yasin (2009), fungsi wavelet adalah suatu fungsi dengan sifat-sifat tertentu. Salah satunya adalah berosilasi di sekitar nol (seperti fungsi sinus dan cosinus). Keunggulan wavelet adalah kemampuannya untuk merepresentasikan fungsi yang memiliki diskontinuitas dan puncak gelombang yang tajam (Loing dkk, 2008). Wavelet mampu merepresentasikan fungsi-fungsi yang bersifat tidak mulus (Walker, 1997). Pada bagian fungsi yang tidak mulus, wavelet akan menggunakan panjang interval yang sempit sedangkan pada bagian fungsi yang mulus, wavelet akan menggunakan interval yang lebih lebar. Oleh karena itu, fungsi wavelet mempunyai panjang interval yang bersifat adaptif secara lokal.

Menurut Odgen (1997), fungsi wavelet pertama kali dikenalkan oleh Haar tahun 1910. Bentuk wavelet digunakan untuk menunjukkan suatu fungsi dasar tertentu yang dihasilkan oleh dilatasi dan translasi yang didukung oleh wavelet ayah (fungsi skala), $\phi(x)$, dan wavelet ibu (fungsi wavelet), $\psi(x)$, yang keduanya menghasilkan seluruh keluarga wavelet yang mempunyai sifat:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1 \quad \text{dan} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0 \quad (2.9)$$

di mana :

- $\phi(x)$: wavelet ayah (fungsi skala)
- $\psi(x)$: wavelet ibu (fungsi wavelet)

Dengan dilatasi dan translasi, wavelet ayah dan wavelet ibu menghasilkan keluarga wavelet yaitu :

$$\phi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \phi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad \text{dan}$$

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad (2.10)$$

Untuk $a = 2^j$ dan $b = k2^j$, di mana $j, k \in \mathbb{Z}$ diperoleh wavelet ayah dan wavelet ibu seperti pada Persamaan (2.11).

$$\begin{aligned} \phi_{j,k}(x) &= 2^{j/2} \phi(2^j x - k) && \text{dan} \\ \psi_{j,k}(x) &= 2^{j/2} \psi(2^j x - k) \end{aligned} \quad (2.11)$$

di mana:

- j : parameter dilatasi, $j = 0, 1, \dots, J$
- k : parameter translasi, $k = 0, 1, \dots, 2^{j-1} - 1$

Wavelet yang paling sederhana adalah wavelet Haar. Salah satu bentuk fungsi dari wavelet Haar adalah sebagai berikut :

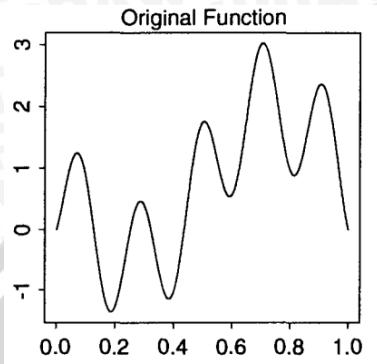
$$\psi(2^j x - k) = \begin{cases} 1, & 0 \leq (2^j x - k) < 1/2 \\ -1, & 1/2 \leq (2^j x - k) < 1 \\ 0, & x \text{ yang lain} \end{cases}$$

dan

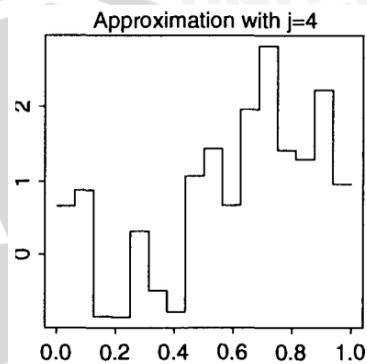
$$\phi(2^j x - k) = \begin{cases} 1, & 0 \leq (2^j x - k) \leq 1 \\ 0, & (2^j x - k) \text{ yang lain} \end{cases} \quad (2.12)$$

(Odgen, 1997).

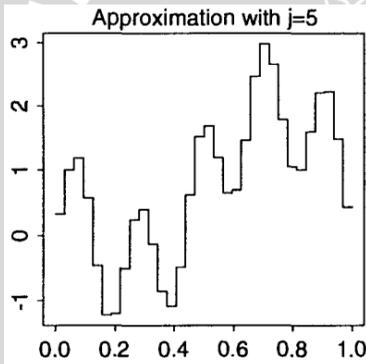
Menurut Morris dkk (2003), ada tiga langkah dasar yang dilakukan dalam pendugaan fungsi menggunakan wavelet, yaitu mengubah data ke bentuk wavelet menggunakan transformasi wavelet diskrit, pendugaan koefisien wavelet dengan *thresholding*, dan mengubah kembali koefisien wavelet menjadi data asal dengan invers transformasi wavelet diskrit. Gambar (2.1) merupakan contoh dari pendekatan fungsi menggunakan wavelet Haar pada level yang berbeda. Gambar (a) menunjukkan kurva dari data asli sedangkan Gambar (b), (c), dan Gambar (d) adalah gambar dari hasil pendekatan kurva dengan menggunakan wavelet Haar pada level 4, 5, dan 6. Dari Gambar (2.1) dapat diketahui bahwa semakin besar level dekomposisi, j , maka kurva yang terbentuk semakin mendekati kurva yang sebenarnya.



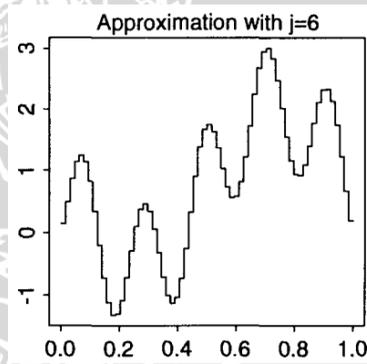
a. Data asli



b. Pendekatan kurva pada level $j = 4$



c. Pendekatan kurva pada level $j = 5$

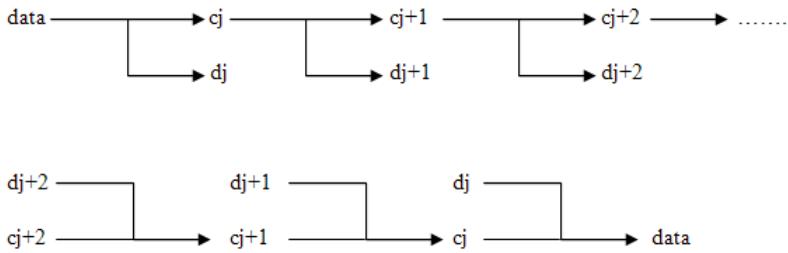


d. Pendekatan kurva pada level $j = 6$

Gambar 2.1. Contoh pendekatan fungsi dengan wavelet Haar

2.4.1 Transformasi Wavelet Diskrit

Transformasi wavelet merupakan fungsi matematis yang digunakan untuk merepresentasikan data. Transformasi wavelet digunakan untuk mengubah inputan data menjadi barisan bilangan real yang dikenal sebagai koefisien wavelet. Analisis data pada transformasi wavelet dilakukan dengan mendekomposisikan suatu data ke dalam komponen-komponen frekuensi yang berbeda-beda dan selanjutnya masing-masing komponen frekuensi tersebut dapat dianalisis sesuai dengan skala resolusi atau level dekomposisinya.



Gambar 2.2. Dekomposisi dan rekonstruksi wavelet pada level J

Gambar (2.2) merupakan ilustrasi dari dekomposisi transformasi wavelet, di mana inputan data akan ditransformasi menjadi dua komponen yang berbeda yang dinamakan dengan koefisien skala (c) dan koefisien wavelet (d), di mana j adalah level dekomposisi. Transformasi ini hanya akan menghasilkan komponen-komponen pembentuk fungsi pada masing-masing tingkat resolusinya. Namun pendekatan fungsi asal yang dinyatakan dalam koefisien-koefisien wavelet tertentu belum diperoleh. Hal ini dapat dicari dengan transformasi inversnya melalui rekonstruksi atau invers transformasi wavelet.

Transformasi wavelet diskrit merupakan salah satu cara yang dapat digunakan untuk menghitung koefisien skala dan koefisien wavelet yang akan digunakan untuk pendekatan fungsi asal. Menurut Odgen (1997), transformasi wavelet diskrit dapat digunakan untuk data yang berukuran 2^J , apabila data tidak berukuran 2^J , maka data tidak dapat ditransformasi. Hal ini dikarenakan transformasi wavelet diskrit mengubah data awal menjadi koefisien wavelet sebanyak setengah dari data awal dan koefisien skala sebanyak setengah dari data awal. Dengan kata lain, koefisien wavelet dan koefisien skala yang terbentuk masing-masing berjumlah 2^{J-1} pada level 1, 2^{J-2} pada level 2, 2^{J-3} pada level 3, dan seterusnya sampai pada level J .

Pada Persamaan (2.1), $g(x)$ merupakan suatu fungsi yang akan diduga menggunakan analisis wavelet. Dalam fungsi tersebut, $g(x)$ berupa suatu fungsi yang terdiri atas n buah pengamatan yang memuat $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Dalam hal ini, ukuran dari n adalah 2^J untuk suatu bilangan bulat positif J , di mana J adalah level maksimal dari dekomposisi (Odgen, 1997). W adalah matriks ortogonal yang berhubungan dengan basis wavelet. Menurut Vidacovic (1999),

transformasi wavelet diskrit pada level J merupakan suatu transformasi orthogonal dari y ke vektor koefisien \mathbf{D} yang dinyatakan dengan :

$$\mathbf{D} = \mathbf{W}_j \mathbf{Y} \quad (2.13)$$

di mana :

- $\mathbf{D}_{(nx1)}$: vektor koefisien yang memuat koefisien skala (c) dan koefisien wavelet (d)
- $\mathbf{W}_{j(nxn)}$: matriks orthogonal yang berhubungan dengan basis wavelet yang dipilih
- $\mathbf{Y}_{(nx1)}$: matriks dari nilai fungsi $g(x)$

Misalnya untuk $n = 8$ dengan $j = 3$, matriks \mathbf{W} untuk wavelet Haar adalah

$$\mathbf{W}_{(8x8)} = \begin{bmatrix} \phi_{-3,0}(x) & \phi_{-3,0}(x) \\ \psi_{-3,0}(x) & \psi_{-3,0}(x) \\ \psi_{-2,0}(x) & \psi_{-2,0}(x) \\ \psi_{-2,1}(x) & \psi_{-2,1}(x) \\ \psi_{-1,0}(x) & \psi_{-1,0}(x) \\ \psi_{-1,1}(x) & \psi_{-1,1}(x) \\ \psi_{-1,2}(x) & \psi_{-1,2}(x) \\ \psi_{-1,3}(x) & \psi_{-1,3}(x) \end{bmatrix}$$

di mana $\phi_{j,k}(x)$ dan $\psi_{j,k}(x)$ diperoleh dari Persamaan (2.11) dan Persamaan (2.12).

2.4.2 Transformasi Wavelet Diskrit Invers (TWDI)

Transformasi wavelet diskrit hanya akan menghasilkan komponen-komponen pembentuk fungsi pada masing-masing tingkat resolusi atau level dekomposisi. Namun pendekatan fungsi asal yang dinyatakan dalam koefisien-koefisien wavelet tertentu belum diperoleh. Hal ini dapat dicari dengan menggunakan transformasi inversnya melalui Transformasi Wavelet Diskrit Invers (TWDI), yaitu:

$$\mathbf{Y}_{(nx1)} = \mathbf{W}_{(nxn)}^T \mathbf{D}_{(nx1)} \quad (2.14)$$

di mana :

- $\mathbf{D}_{(nx1)}$: vektor koefisien yang memuat koefisien skala (c) dan koefisien wavelet (d)
- $\mathbf{W}_{(nxn)}$: matriks orthogonal
- $\mathbf{Y}_{(nx1)}$: matriks dari nilai fungsi $g(x)$

Dari Persamaan (2.14), diperoleh penduga wavelet linier dengan persamaan :

$$\hat{y}_j = \sum_k^{2^{j-1}-1} \hat{c}_{j,o,k} \phi_{j,o,k}(x) + \sum_{j \geq j_0}^J \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} \hat{d}_{j,k} \psi_{j,k}(x) \quad (2.15)$$

di mana :

$\hat{c}_{j,o,k}$: koefisien skala dengan indeks dilatasi atau level dekomposisi j dan indeks translasi k

$\hat{d}_{j,k}$: koefisien wavelet dengan indeks dilatasi atau level dekomposisi j dan indeks translasi k

$\psi(x)$: wavelet ibu

$\phi(x)$: fungsi skala (wavelet ayah)

2.4.3 Penduga Wavelet *Thresholding*

Metode paling akurat dalam penduga fungsi regresi dengan wavelet adalah metode wavelet *shrinkage* atau metode wavelet *thresholding* (Suparti, 2006). Penduga wavelet dapat direkonstruksi dengan menggunakan sejumlah koefisien terbesar, yaitu hanya koefisien yang lebih besar dari suatu nilai tertentu yang diambil, sedangkan koefisien selebihnya diabaikan, karena dianggap nol. Nilai tertentu tersebut dinamakan nilai *threshold* (nilai ambang) dan penduganya dinyatakan dengan :

$$\hat{y}_\lambda = \sum_k^{2^{j-1}-1} \hat{c}_{j,o,k} \phi_{j,o,k}(x) + \sum_{j \geq j_0}^J \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \partial_\lambda \left(\frac{\sqrt{nd} \hat{d}_{j,k}}{\hat{\sigma}} \right) \psi_{j,k}(x) \quad (2.16)$$

di mana :

\hat{y}_λ : penduga wavelet *shrinkage*

$\hat{c}_{j,o,k}$: penduga koefisien $c_{j,o,k}$

$\hat{d}_{j,k}$: penduga koefisien $d_{j,k}$

λ : parameter nilai *threshold*

∂_λ : fungsi *threshold*

$\phi_{j,o,k}$: fungsi skala (wavelet ayah)

$\psi_{j,k}$: wavelet ibu

Penduga (2.16) dinamakan penduga wavelet *shrinkage* atau penduga wavelet *thresholding*. *Thresholding* dirancang untuk

membedakan antara koefisien wavelet yang masuk dan yang keluar dari rekonstruksi wavelet. Ada dua faktor yang mempengaruhi ketepatan penduga, yaitu ukuran sampel n dan tingkat *noise* $\hat{\sigma}^2$. Setiap koefisien merupakan calon kuat masuk di dalam rekonstruksi wavelet jika ukuran sampel besar atau tingkat *noise* kecil.

Pada penduga fungsi dengan metode wavelet *thresholding*, tingkat kemulusan penduga ditentukan oleh level resolusi J , fungsi *thresholding* ∂_λ dan parameter *threshold* λ . Namun pemilihan J dan ∂_λ tidak sedominan λ . Nilai λ yang terlalu kecil memberikan penduga fungsi yang sangat tidak mulus (*under smooth*) sedangkan nilai λ yang terlalu besar memberikan penduga yang sangat mulus (*over smooth*). Oleh karena itu, parameter *threshold* yang dipilih harus optimal untuk mendapatkan fungsi yang optimal. Ada beberapa langkah dalam melakukan *thresholding*, yaitu sebagai berikut :

1. Memilih fungsi *thresholding*

Ada dua jenis fungsi *thresholding* ∂_λ , yaitu:

a. *Hard Thresholding*,

$$\partial_\lambda^H(d) = \begin{cases} d, & |d| > \lambda \\ 0, & \text{d yang lain} \end{cases} \quad (2.17)$$

b. *Soft Thresholding*,

$$\partial_\lambda^S(d) = \begin{cases} d - \lambda, & d > \lambda \\ 0, & d \leq \lambda \\ d + \lambda, & d < -\lambda \end{cases} \quad (2.18)$$

dengan λ merupakan parameter *threshold*. Fungsi *Hard thresholding* lebih dikenal karena terdapat ketidakkontinuan dalam fungsi *thresholding* pada $d = \pm \lambda$. Sebaliknya, fungsi *soft thresholding* kontinu yaitu sejak nilai x berada di atas *threshold*, λ .

2. Menduga σ

Dalam merekonstruksi fungsi wavelet biasanya nilai σ tidak diketahui. Oleh karena itu, σ harus diduga dari data. Menurut Mallat (1989), penduga σ dihitung dengan menggunakan fungsi *Median Absolute Deviation* (MAD), yaitu:

$$\hat{\sigma} = \frac{\text{median} \left(\left| \hat{d}_{j-1,k} - \text{median} \left(\hat{d}_{j-1,k} \right) \right| \right)}{0.6745} \quad (2.19)$$

di mana :

- d : koefisien wavelet
- j : indeks dilatasi
- k : indeks translasi

3. Pemilihan Parameter *Threshold*

Tingkat kemulusan penduga wavelet *shrinkage* ditentukan oleh nilai *threshold* λ . Nilai λ kecil memberikan penduga fungsi yang tidak mulus dan nilai λ besar memberikan penduga fungsi yang sangat mulus. Oleh karena itu perlu dipilih nilai λ yang optimal. Ada beberapa cara pemilihan nilai *threshold* yang optimal yaitu :

1. *Threshold Universal*

Menurut Odgen (1997), *threshold universal* ditentukan dengan memilih satu nilai *threshold* λ untuk seluruh level resolusi j , dan didefinisikan dengan persamaan :

$$\lambda_j = \sqrt{(2 \log n)} \quad (2.20)$$

dengan n adalah banyaknya observasi.

2. *Threshold wp*

Threshold wp ditentukan dengan memilih satu nilai *threshold* λ untuk seluruh level resolusi j , dan didefinisikan dengan persamaan :

$$\lambda_j = \sqrt{2 \log(n^2 \log n)} \quad (2.21)$$

dengan n adalah banyaknya observasi.

3. *Threshold Minimax*

Nilai-nilai *threshold minimax* ditentukan berdasarkan ukuran sampel. Tabel 2.1 menunjukkan nilai-nilai *threshold minimax* untuk sampel yang berbeda.

Tabel 2.1 Nilai-Nilai *Threshold Minimax* Untuk Ukuran Sampel Yang Berbeda

Ukuran Sampel	λ
8	0
16	1.200
32	1.270
64	1.474
128	1.669
256	1.860
512	2.074
1024	2.232
2048	2.414
4096	2.594
8192	2.773
16384	2.952
32768	3.131

(Ogden, 1997)

2.5 Kriteria Pemilihan Metode Terbaik

2.5.1 MSE (*Mean Square Error*)

MSE (*Mean Square Error*) adalah rasio antara jumlah kuadrat error dan periode pengamatan. Menurut Ogden (1997) dan Silverman (1986), MSE pada penduga Kernel (\hat{y}_h) pada Persamaan (2.8) dan analisis wavelet (\hat{y}_λ) pada Persamaan (2.16) didefinisikan sebagai :

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (2.22)$$

di mana :

- y_i : nilai pengamatan ke- i , $i = 1, \dots, n$
- \hat{y}_i : penduga dari y_i
- n : banyaknya data

MSE menunjukkan suatu nilai yang dapat digunakan untuk mengetahui kebaikan dari suatu penduga. Semakin kecil nilai MSE, semakin kecil kesalahan pendugaan atau *error* dan sebaliknya.

2.5.2 MAPE (*Mean Absolute Percentage Error*)

MAPE (*Mean Absolute Percentage Error*) adalah jumlah kuadrat dari rasio error terhadap data yang sebenarnya. MAPE pada penduga Kernel (\hat{y}_h) pada Persamaan (2.8) dan analisis wavelet (\hat{y}_λ) pada Persamaan (2.16) didefinisikan sebagai :

$$\text{MAPE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right)^2 \quad (2.23)$$

di mana :

- y_i : nilai pengamatan ke- i , $i = 1, \dots, n$
- \hat{y}_i : penduga dari y_i
- n : banyaknya data

(en.wikipedia.org)



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB III METODE PENELITIAN

3.1. Data Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder. Data dapat dilihat di Tabel 3.1.

Tabel 3.1 Data Sekunder Yang Digunakan Dalam Penelitian

No	Obyek Kajian	Ukuran Data atau Sampel	Peubah Respon	Peubah Prediktor	Sumber
1	Bibit suren di persemaian	8	Pertambahan tinggi (cm)	Umur semai (minggu)	http://www.dephut.go.id
2	Lama berlayar	32	Biaya bahan bakar (ratusan dolar)	Lama berlayar (hari)	http://lib.stat.cmu.edu/DASL
3	Pertumbuhan burung Mutton	64	Berat (gram)	Umur (hari)	http://www.statsci.com

Data selengkapnya dapat dilihat pada Lampiran 1. Perhitungan analisis data menggunakan bantuan *software* R 2.9.2 dan Matlab 6.1.

3.2. Metode

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Mengurutkan data, di mana data yang diurutkan adalah data yang berukuran 2^j .
2. Menduga kurva menggunakan penduga Kernel.

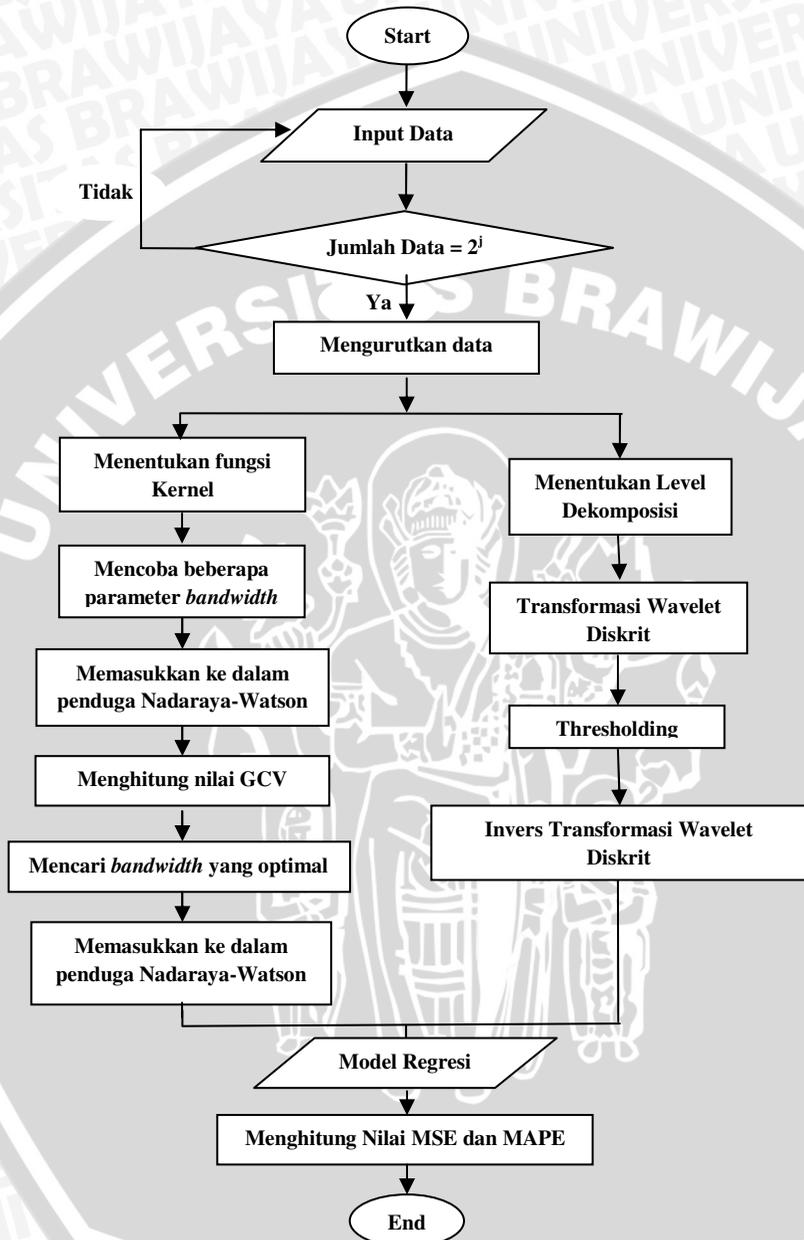
Langkah-langkah yang dilakukan dalam penduga Kernel sebagai berikut:

1. Menentukan fungsi Kernel, di mana fungsi yang dipilih adalah fungsi Kernel Gaussian.
2. Mencoba beberapa parameter *bandwidth* dengan $h = 0.01, 0.02, \dots, 10$ untuk Data 1, 2 dan 3

3. Memasukkan nilai *bandwidth* ke dalam penduga Nadaraya-Watson menggunakan fungsi Kernel Gaussian seperti pada Persamaan (2.8).
 4. Menghitung nilai GCV seperti pada Persamaan (2.3).
 5. Mencari *bandwidth* yang optimal yang memiliki nilai GCV terkecil.
 6. Membentuk model dari penduga Nadaraya-Watson menggunakan fungsi Kernel Gaussian seperti pada Persamaan (2.8).
 7. Menghitung nilai MSE seperti pada Persamaan (2.22) dan nilai MAPE seperti pada Persamaan (2.23).
3. Menduga kurva menggunakan analisis wavelet.
- Langkah-langkah dalam analisis wavelet sebagai berikut:
1. Menentukan level dekomposisi, J , di mana level yang dipilih adalah level maksimal.
 2. Melakukan transformasi wavelet diskrit pada level J seperti pada Persamaan (2.13). Adapun langkah-langkah dalam transformasi wavelet diskrit adalah sebagai berikut :
 4. Membentuk matriks \mathbf{W} dengan memasukkan peubah prediktor ke dalam fungsi wavelet ayah dan wavelet ibu yang ada di dalam matriks \mathbf{W} .
 5. Membentuk matriks \mathbf{Y} yang berisi nilai-nilai dari peubah respon.
 6. Menghitung matriks \mathbf{D} yang berisi koefisien wavelet dan koefisien skala.
 3. Melakukan *thresholding* yaitu menyusutkan koefisien wavelet pada skala terbaik j untuk mendapatkan koefisien wavelet baru. Adapun langkah-langkah dalam menduga wavelet *thresholding* adalah sebagai berikut :
 1. Memilih fungsi *thresholding*
Fungsi *thresholding* yang digunakan dalam penelitian ini adalah *soft thresholding* seperti pada Persamaan (2.18).

2. Menduga σ
Penduga σ berdasarkan koefisien wavelet pada level tertinggi menggunakan fungsi *Median Deviasi Absolut* (MAD) pada Persamaan (2.19).
3. Pemilihan Parameter *Threshold*
Pemilihan nilai *threshold* yang digunakan adalah *Threshold Universal* seperti pada Persamaan (2.20).
4. Melakukan transformasi wavelet invers pada koefisien wavelet yang baru untuk mendapatkan penduga wavelet *shrinkage* seperti pada Persamaan (2.14).
5. Membuat model regresi menggunakan koefisien wavelet baru dalam bentuk Persamaan (2.16).
6. Menghitung nilai MSE seperti pada Persamaan (2.22) dan nilai MAPE seperti pada Persamaan (2.23).
4. Membandingkan MSE dan nilai MAPE hasil pendugaan menggunakan penduga Kernel dan analisis wavelet.
Diagram alir metode penelitian dapat dilihat pada Gambar (3.1).





Gambar 3.1. Diagram Alir Metode Penelitian

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Teknik Pemulus Kernel

4.1.1 Penduga Kernel Data 1 atau Data Pertambahan Tinggi Tanaman Suren

Pada teknik pemulus Kernel, diperlukan pemilihan *bandwidth* yang optimal untuk memperoleh kurva yang optimal. *Bandwidth* yang optimal adalah *bandwidth* yang memiliki nilai GCV terkecil. Nilai *bandwidth* yang digunakan untuk Data 1 adalah 0.01 sampai dengan 10. Nilai GCV untuk beberapa parameter *bandwidth* pada Data 1 ditunjukkan pada Tabel 4.1.

Tabel 4.1. Nilai GCV untuk Data 1

<i>Bandwidth</i>	Nilai GCV	<i>Bandwidth</i>	Nilai GCV
0.01	1.161E-01	0.60	1.142E-01
0.02	1.161E-01	0.70	1.136E-01
0.03	1.161E-01	0.80	1.129E-01
0.04	1.161E-01	0.90	1.124E-01
0.05	1.161E-01	1.00	1.118E-01
0.06	1.161E-01	2.00	1.103E-01
0.07	1.161E-01	3.00	1.120E-01
0.08	1.161E-01	4.00	1.133E-01
0.09	1.161E-01	5.00	1.141E-01
0.10	1.161E-01	6.00	1.147E-01
0.20	1.161E-01	7.00	1.150E-01
0.30	1.161E-01	8.00	1.153E-01
0.40	1.157E-01	9.00	1.154E-01
0.50	1.149E-01	10.00	1.156E-01

Dari Tabel 4.1 dapat diketahui bahwa pada saat *bandwidth* bernilai 0.01 sampai 0.10 mempunyai nilai GCV yang sama karena perbedaan *bandwidth* yang sangat kecil tidak akan mempengaruhi nilai dari GCV. Nilai GCV berhubungan dengan *error*. Oleh karena itu, jika

perbedaan antara *bandwidth* yang satu dengan yang lain sangat kecil maka akan menghasilkan nilai GCV yang hampir sama. Selain itu, dari Tabel 4.1 dapat diketahui bahwa *bandwidth* optimal untuk Data 1 adalah 2 karena memiliki nilai GCV paling kecil, yaitu 1.103E-01. Berdasarkan hasil pemilihan *bandwidth* yang optimal diperoleh model dengan fungsi Kernel Gaussian sebagai berikut:

$$\hat{y}_h = \frac{\frac{1}{8} \left\{ \sum_{i=1}^8 \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x - x_i}{2} \right)^2 \right) \right] y_i \right\}}{\frac{1}{8} \left\{ \sum_{i=1}^8 \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x - x_i}{2} \right)^2 \right) \right] \right\}}$$

Di mana nilai x_i dan y_i selengkapnya dapat dilihat pada Lampiran 1.

4.1.2 Penduga Kernel Data 2 atau Data Biaya Bahan Bakar

Data 2 menggunakan nilai *bandwidth* sebesar 0.01 sampai 10. Nilai GCV untuk beberapa parameter *bandwidth* pada Data 2 ditunjukkan pada Tabel 4.2.

Tabel 4.2. Nilai GCV Untuk Data 2

<i>Bandwidth</i>	Nilai GCV	<i>Bandwidth</i>	Nilai GCV
0.01	5.760E-02	0.60	5.760E-02
0.02	5.760E-02	0.70	5.760E-02
0.03	5.760E-02	0.80	5.760E-02
0.04	5.760E-02	0.90	5.760E-02
0.05	5.760E-02	1.00	5.653E-02
0.06	5.760E-02	2.00	5.653E-02
0.07	5.760E-02	3.00	5.653E-02
0.08	5.760E-02	4.00	5.653E-02
0.09	5.760E-02	5.00	5.651E-02
0.10	5.760E-02	6.00	5.763E-02
0.20	5.760E-02	7.00	5.765E-02
0.30	5.760E-02	8.00	5.781E-02
0.40	5.760E-02	9.00	5.780E-02
0.50	5.760E-02	10.00	5.780E-02

Dari Tabel 4.2 dapat diketahui bahwa nilai GCV untuk beberapa *bandwidth* menunjukkan nilai yang hampir sama. Selain itu, nilai GCV pada Data 2 mengalami penurunan pada saat *bandwidth* bernilai 1 dan mulai mengalami kenaikan saat *bandwidth* bernilai 6. *Bandwidth* optimal untuk Data 2 adalah 5 karena memiliki nilai GCV yang paling kecil, yaitu 5.651E-02. Berdasarkan hasil pemilihan *bandwidth* yang optimal diperoleh model dengan fungsi Kernel Gaussian sebagai berikut :

$$\hat{y}_h = \frac{\frac{1}{32} \left\{ \sum_{i=1}^{32} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x - x_i}{5} \right)^2 \right) \right] y_i \right\}}{\frac{1}{32} \left\{ \sum_{i=1}^{32} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x - x_i}{5} \right)^2 \right) \right] \right\}}$$

Di mana nilai x_i dan y_i selengkapnya dapat dilihat pada Lampiran 1.

4.1.3 Penduga Kernel Data 3 atau Data Pertumbuhan Burung Mutton

Untuk Data 3, nilai *bandwidth* maksimum yang digunakan adalah 10. Nilai GCV untuk beberapa parameter *bandwidth* pada Data 3 ditunjukkan pada Tabel 4.3.

Tabel 4.3. Nilai GCV untuk Data 3

<i>Bandwidth</i>	Nilai GCV	<i>Bandwidth</i>	Nilai GCV
0.01	4.87E-38	0.60	4.57E-46
0.02	4.87E-38	0.70	2.06E-48
0.03	4.87E-38	0.80	1.84E-50
0.04	4.87E-38	0.90	2.32E-52
0.05	4.87E-38	1.00	3.60E-54
0.06	4.87E-38	2.00	2.21E-59
0.07	4.87E-38	3.00	1.52E-48
0.08	4.87E-38	4.00	8.85E-40
0.09	4.87E-38	5.00	1.65E-32
0.10	4.87E-38	6.00	1.17E-26
0.20	4.86E-38	7.00	3.57E-22
0.30	3.15E-38	8.00	6.46E-19
0.40	5.14E-40	9.00	1.06E-16
0.50	3.52E-43	10.00	2.47E-15

Dari Tabel 4.3 dapat diketahui bahwa *bandwidth* optimal untuk data pertumbuhan burung mutton adalah 2 karena memiliki nilai GCV paling kecil, yaitu 2.21E-59. Berdasarkan hasil pemilihan *bandwidth* yang optimal diperoleh model dengan fungsi Kernel Gaussian sebagai berikut :

$$\hat{y}_h = \frac{\frac{1}{64} \left\{ \sum_{i=1}^{64} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x - x_i}{2} \right)^2 \right) y_i \right] \right\}}{\frac{1}{64} \left\{ \sum_{i=1}^{64} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x - x_i}{2} \right)^2 \right) \right] \right\}}$$

Di mana nilai x_i dan y_i selengkapnya dapat dilihat pada Lampiran 1.

4.2 Analisis Wavelet

4.2.1 Analisis Wavelet Untuk Data 1 atau Data Pertambahan Tinggi Tanaman Suren

4.2.1.1 Transformasi Wavelet Diskrit Data 1

Banyaknya level dekomposisi didasarkan pada jumlah data, yaitu $n = 2^j$. Untuk Data 1 dilakukan transformasi menggunakan transformasi wavelet diskrit tipe Haar dengan dekomposisi sebanyak 3 level, karena jumlah data adalah 8. Penentuan level dekomposisi wavelet didasarkan pada level maksimal. Hal ini dikarenakan level maksimal akan menghasilkan penduga kurva yang lebih mendekati kurva yang sebenarnya dibandingkan dengan level lainnya. Untuk pendekomposisian data selengkapnya dapat dilihat pada Lampiran 4.

4.2.1.2 Thresholding Data 1

Dari hasil analisis dapat diketahui bahwa parameter *threshold* menghasilkan nilai optimal jika fungsi yang digunakan adalah fungsi *soft thresholding* pada level 3. Berdasarkan Persamaan (2.19) dan (2.20) diperoleh nilai $\hat{\sigma} = 1.2194$ dan $\lambda_j = 1.3439$. Berdasarkan Persamaan (2.16) dan (2.18), dari nilai *threshold* dapat diketahui bahwa jika koefisien $\left(\frac{\hat{d}\sqrt{8}}{1.2194}\right)$ bernilai kurang dari 1.3439 maka koefisien tersebut tidak digunakan dalam rekonstruksi wavelet atau tidak digunakan dalam menduga kurva regresi karena dianggap nol. Akan tetapi, jika nilai koefisien $\left(\frac{\hat{d}\sqrt{8}}{1.2194}\right)$ bernilai lebih besar dari 1.3439 atau kurang dari -1.3439 maka koefisien tersebut digunakan dalam rekonstruksi wavelet atau digunakan dalam menduga kurva regresi. Data hasil *thresholding* dapat dilihat di Lampiran 5.

4.2.1.3 Invers Transformasi Wavelet Diskrit Data 1

Invers transformasi wavelet diskrit dilakukan untuk mengembalikan data yang berupa koefisien wavelet dan koefisien skala yang merupakan hasil dari transformasi wavelet diskrit ke bentuk data awal. Berdasarkan Persamaan (2.14), maka matriks \mathbf{Y} dapat diperoleh dengan cara sebagai berikut :

$$\hat{Y}_{(8,x1)} = W^T_{(8 \times 8)} D_{(8,x1)}$$

Dengan

$$W_{(8 \times 8)} = \begin{bmatrix} \phi_{-3,0}(x) & \psi_{-3,0}(x) & \psi_{-2,0}(x) & \psi_{-2,1}(x) & \psi_{-1,0}(x) & \psi_{-1,1}(x) & \psi_{-1,2}(x) & \psi_{-1,3}(x) \\ \phi_{-3,0}(x) & \psi_{-3,0}(x) & \psi_{-2,0}(x) & \psi_{-2,1}(x) & \psi_{-1,0}(x) & \psi_{-1,1}(x) & \psi_{-1,2}(x) & \psi_{-1,3}(x) \\ \phi_{-3,0}(x) & \psi_{-3,0}(x) & \psi_{-2,0}(x) & \psi_{-2,1}(x) & \psi_{-1,0}(x) & \psi_{-1,1}(x) & \psi_{-1,2}(x) & \psi_{-1,3}(x) \\ \phi_{-3,0}(x) & \psi_{-3,0}(x) & \psi_{-2,0}(x) & \psi_{-2,1}(x) & \psi_{-1,0}(x) & \psi_{-1,1}(x) & \psi_{-1,2}(x) & \psi_{-1,3}(x) \\ \vdots & & & & & & & \\ \phi_{-3,0}(x) & \psi_{-3,0}(x) & \psi_{-2,0}(x) & \psi_{-2,1}(x) & \psi_{-1,0}(x) & \psi_{-1,1}(x) & \psi_{-1,2}(x) & \psi_{-1,3}(x) \\ \phi_{-3,0}(x) & \psi_{-3,0}(x) & \psi_{-2,0}(x) & \psi_{-2,1}(x) & \psi_{-1,0}(x) & \psi_{-1,1}(x) & \psi_{-1,2}(x) & \psi_{-1,3}(x) \end{bmatrix}$$

dan $D^T = [27.934 \ 0.382 \ 1.431 \ \dots \ -0.147]$. Koefisien wavelet hasil thresholding selengkapnya dapat dilihat pada Lampiran 5. Berdasarkan Persamaan (2.14) diperoleh model sebagai berikut :

$$\hat{y}_\lambda = 27.934\phi_{-3,0}(x) + 0.382\psi_{-3,0}(x) + 1.431\psi_{-2,0}(x) + \dots - 0.147\psi_{-1,3}(x)$$

Data hasil invers transformasi wavelet diskrit dapat dilihat pada Lampiran 6.

4.2.2 Analisis Wavelet Untuk Data 2 atau Data Biaya Bahan Bakar Untuk Berlayar

4.2.2.1 Transformasi Wavelet Diskrit Data 2

Penentuan level dekomposisi wavelet didasarkan pada jumlah data, yaitu $n = 2^j$. Data 2 dilakukan transformasi wavelet diskrit menggunakan tipe Haar dengan dekomposisi sebanyak 5 level. Untuk pendekomposisian data selengkapnya dapat dilihat pada Lampiran 4.

4.2.2.2 Thresholding Data 2

Fungsi dan level dekomposisi yang digunakan di dalam *thresholding* untuk Data 2 adalah fungsi *soft thresholding* dan level 5. Berdasarkan Persamaan (2.19) dan (2.20) diperoleh nilai $\hat{\sigma} = 3.7064$ dan $\lambda_j = 1.7350$. Berdasarkan Persamaan (2.16) dan (2.18), dari nilai *threshold* dapat diketahui bahwa jika koefisien $\left(\frac{\hat{d}\sqrt{32}}{3.7064}\right)$ bernilai kurang dari 1.7350, maka koefisien tersebut tidak digunakan dalam rekonstruksi wavelet atau tidak digunakan dalam menduga kurva regresi karena

dianggap nol. Akan tetapi, jika nilai koefisien $\left(\frac{\hat{d}\sqrt{32}}{3.7064}\right)$ bernilai lebih besar dari 1.7350 atau kurang dari -1.7350, maka koefisien tersebut digunakan dalam rekonstruksi wavelet atau digunakan dalam menduga kurva regresi. Data hasil *thresholding* dapat dilihat di Lampiran 5.

4.2.2.3 Invers Transformasi Wavelet Diskrit Data 2

Invers transformasi wavelet diskrit digunakan untuk mendapatkan nilai penduga hasil dari analisis wavelet. Berdasarkan Persamaan (2.14), maka matriks **Y** dapat diperoleh dengan cara sebagai berikut :

$$\hat{Y}_{(32 \times 1)} = W^T_{(32 \times 32)} D_{(32 \times 1)}$$

Dengan

$$W_{(32 \times 32)} = \begin{bmatrix} \phi_{-5,0}(x) & \psi_{-5,0}(x) & \psi_{-4,0}(x) & \psi_{-4,1}(x) & \psi_{-3,0}(x) & \psi_{-3,1}(x) & \psi_{-3,2}(x) & \psi_{-3,3}(x) & \dots & \psi_{-1,15}(x) \\ \phi_{-5,0}(x) & \psi_{-5,0}(x) & \psi_{-4,0}(x) & \psi_{-4,1}(x) & \psi_{-3,0}(x) & \psi_{-3,1}(x) & \psi_{-3,2}(x) & \psi_{-3,3}(x) & \dots & \psi_{-1,15}(x) \\ \phi_{-5,0}(x) & \psi_{-5,0}(x) & \psi_{-4,0}(x) & \psi_{-4,1}(x) & \psi_{-3,0}(x) & \psi_{-3,1}(x) & \psi_{-3,2}(x) & \psi_{-3,3}(x) & \dots & \psi_{-1,15}(x) \\ \phi_{-5,0}(x) & \psi_{-5,0}(x) & \psi_{-4,0}(x) & \psi_{-4,1}(x) & \psi_{-3,0}(x) & \psi_{-3,1}(x) & \psi_{-3,2}(x) & \psi_{-3,3}(x) & \dots & \psi_{-1,15}(x) \\ \vdots & & & & & & & & & \vdots \\ \phi_{-5,0}(x) & \psi_{-5,0}(x) & \psi_{-4,0}(x) & \psi_{-4,1}(x) & \psi_{-3,0}(x) & \psi_{-3,1}(x) & \psi_{-3,2}(x) & \psi_{-3,3}(x) & \dots & \psi_{-1,15}(x) \\ \phi_{-5,0}(x) & \psi_{-5,0}(x) & \psi_{-4,0}(x) & \psi_{-4,1}(x) & \psi_{-3,0}(x) & \psi_{-3,1}(x) & \psi_{-3,2}(x) & \psi_{-3,3}(x) & \dots & \psi_{-1,15}(x) \end{bmatrix}$$

dan $D^T = [59.927 \quad 6.853 \quad 3.083 \quad \dots \quad 0.385]$. Koefisien wavelet hasil *thresholding* selengkapnya dapat dilihat pada Lampiran 5. Berdasarkan Persamaan (2.14) diperoleh model sebagai berikut :

$$\hat{y}_\lambda = 59.927\phi_{-5,0}(x) + 6.853\psi_{-5,0}(x) + 3.083\psi_{-5,1}(x) + \dots + 0.385\psi_{-1,15}(x)$$

Data hasil invers transformasi wavelet diskrit dapat dilihat pada Lampiran 6.

4.2.3 Analisis Wavelet Untuk Data 3 atau Data Pertumbuhan Burung Mutton

4.2.3.1 Transformasi Wavelet Diskrit Data 3

Banyaknya level dekomposisi untuk Data 3 adalah 6 level. Transformasi wavelet yang digunakan adalah transformasi wavelet diskrit tipe Haar. Untuk pendekomposisian data selengkapnya dapat dilihat pada Lampiran 4.

4.2.3.2 Thresholding Data 3

Dari hasil analisis dapat diketahui bahwa parameter *threshold* menghasilkan nilai optimal jika fungsi yang digunakan adalah fungsi *soft thresholding* pada level 7. Berdasarkan Persamaan (2.19) dan (2.20) diperoleh nilai $\hat{\sigma} = 2.0967$ dan $\lambda_j = 1.9006$. Berdasarkan Persamaan (2.16) dan (2.18), dari nilai *threshold* dapat diketahui bahwa jika koefisien $\left(\frac{\hat{d}\sqrt{64}}{2.0967}\right)$ bernilai kurang dari 1.9006, maka koefisien tersebut tidak digunakan dalam rekonstruksi wavelet atau tidak digunakan dalam menduga kurva regresi karena dianggap nol. Akan tetapi, jika nilai koefisien $\left(\frac{\hat{d}\sqrt{64}}{2.0967}\right)$ bernilai lebih besar dari 1.9006 atau kurang dari -1.9006, maka koefisien tersebut digunakan dalam rekonstruksi wavelet atau digunakan dalam menduga kurva regresi. Data hasil *thresholding* dapat dilihat di Lampiran 5.

4.2.3.3 Invers Transformasi Wavelet Diskrit Data 3

Invers transformasi wavelet diskrit digunakan untuk mendapatkan model dari kurva regresi. Berdasarkan Persamaan (2.14), maka matriks **Y** dapat diperoleh dengan cara sebagai berikut :

$$\hat{Y}_{(64 \times 1)} = W^T_{(64 \times 64)} D_{(64 \times 1)}$$

Dengan

$$W_{(64 \times 64)} = \begin{bmatrix} \phi_{-6,0}(x) & \psi_{-6,0}(x) & \psi_{-5,0}(x) & \psi_{-5,1}(x) & \psi_{-4,0}(x) & \psi_{-4,1}(x) & \psi_{-4,2}(x) & \psi_{-4,3}(x) & \dots & \psi_{-1,31}(x) \\ \phi_{-6,0}(x) & \psi_{-6,0}(x) & \psi_{-5,0}(x) & \psi_{-5,1}(x) & \psi_{-4,0}(x) & \psi_{-4,1}(x) & \psi_{-4,2}(x) & \psi_{-4,3}(x) & \dots & \psi_{-1,31}(x) \\ \phi_{-6,0}(x) & \psi_{-6,0}(x) & \psi_{-5,0}(x) & \psi_{-5,1}(x) & \psi_{-4,0}(x) & \psi_{-4,1}(x) & \psi_{-4,2}(x) & \psi_{-4,3}(x) & \dots & \psi_{-1,31}(x) \\ \phi_{-6,0}(x) & \psi_{-6,0}(x) & \psi_{-5,0}(x) & \psi_{-5,1}(x) & \psi_{-4,0}(x) & \psi_{-4,1}(x) & \psi_{-4,2}(x) & \psi_{-4,3}(x) & \dots & \psi_{-1,31}(x) \\ \vdots & & & & & & & & & \vdots \\ \phi_{-6,0}(x) & \psi_{-6,0}(x) & \psi_{-5,0}(x) & \psi_{-5,1}(x) & \psi_{-4,0}(x) & \psi_{-4,1}(x) & \psi_{-4,2}(x) & \psi_{-4,3}(x) & \dots & \psi_{-1,31}(x) \\ \phi_{-6,0}(x) & \psi_{-6,0}(x) & \psi_{-5,0}(x) & \psi_{-5,1}(x) & \psi_{-4,0}(x) & \psi_{-4,1}(x) & \psi_{-4,2}(x) & \psi_{-4,3}(x) & \dots & \psi_{-1,31}(x) \end{bmatrix}$$

dan $D^T = [3880.325 \quad 1573.500 \quad 677.780 \quad \dots \quad -25.233]$. Koefisien wavelet hasil *thresholding* selengkapnya dapat dilihat pada Lampiran 5. Berdasarkan Persamaan (2.14) diperoleh model sebagai berikut :

$$\hat{y}_2 = 3880.325 \phi_{-6,0}(x) + 1573.500 \psi_{-6,0}(x) + 677.780 \psi_{-6,1}(x) + \dots - 25.233 \psi_{-1,63}(x)$$

Data hasil invers transformasi wavelet diskrit dapat dilihat pada Lampiran 6.

4.3 Perbandingan Hasil Pendugaan Kurva

MSE dan MAPE merupakan tolak ukur yang dapat digunakan untuk mengetahui seberapa baik hasil pendugaan yang diperoleh. Semakin kecil nilai MSE dan MAPE semakin baik hasil pendugaan yang diperoleh. Tabel (4.4) menunjukkan nilai MSE dan MAPE dari hasil pendugaan untuk masing-masing metode.

Tabel 4.4 Nilai MSE dan MAPE

Data	MSE		MAPE	
	Teknik Pemulus Kernel	Analisis Wavelet	Teknik Pemulus Kernel	Analisis Wavelet
1	0.462	0.308	0.058	0.039
2	1.299	1.168	0.091	0.079
3	1699.851	915.944	0.086	0.075

Dari Tabel (4.4) dapat diketahui bahwa nilai MSE dan MAPE untuk semua data, baik menggunakan teknik pemulus kernel maupun analisis wavelet memiliki nilai yang berbeda-beda. Selain itu, dari Tabel (4.4) dapat diketahui bahwa nilai MSE dan MAPE untuk analisis wavelet mempunyai nilai yang lebih kecil dibandingkan dengan teknik pemulus Kernel. Oleh karena itu, dapat diambil kesimpulan bahwa analisis wavelet lebih baik dibandingkan dengan teknik pemulus Kernel.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian, dapat diambil kesimpulan bahwa :

1. Untuk mendapatkan kurva yang optimal menggunakan teknik pemulus Kernel pada Data 1, 2 dan 3 digunakan *bandwidth* sebesar 2, 5 dan 2.
2. Untuk mendapatkan kurva yang optimal menggunakan analisis wavelet pada Data 1, 2 dan 3 digunakan nilai *threshold* sebesar 1.3439, 1.7350 dan 1.9006.
3. Terdapat perbedaan hasil pendugaan kurva antara teknik pemulus Kernel dan analisis wavelet. Hal ini ditunjukkan dengan nilai MSE dan MAPE yang berbeda-beda. Dari nilai MSE dan MAPE dapat diketahui bahwa analisis wavelet memiliki nilai MSE dan MAPE yang lebih kecil dibandingkan dengan teknik pemulus Kernel. Oleh karena itu, dapat diambil kesimpulan bahwa analisis wavelet lebih baik dibandingkan dengan teknik pemulus Kernel.

5.2 Saran

Analisis wavelet merupakan analisis yang baik digunakan untuk menduga kurva regresi. Akan tetapi, transformasi wavelet diskrit mempunyai kelemahan, yaitu data harus berukuran 2^j . Oleh karena itu, untuk penelitian selanjutnya diharapkan menggunakan MODWT yang dapat digunakan untuk semua ukuran data. Selain itu, diharapkan untuk penelitian selanjutnya menggunakan tipe wavelet yang lain seperti Daubechies wavelet, Coiflet wavelet, dan Meyer wavelet dalam menduga kurva regresi.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR PUSTAKA

- Daniel, Wayne. W. 1989. **Statistika Nonparametrik Terapan**. Alih Bahasa : Alex Tri Kantjono W. Penerbit PT Gramedia. Jakarta
- Eubank, R. L. 1988. **Spline Smoothing and Nonparametric Regression**. Marcel Dekker. New York
- Halim, S dan Bisono, I. 2006. **Fungsi-Fungsi Kernel Pada Metode Regresi Nonparametrik Dan Aplikasinya Pada Priest River Experimental Forest's Data**. http://www.petra.ac.id/puslit/journals/dir.php?Department_ID=IND. Tanggal Akses 26 November 2010
- Hardle, W. 1989. **Applied Nonparametric Regression**. Cambridge University Press
- Hardle, W. 1990. **Smoothing Techniques With Implementation in S**. Springer-Verlag. New York
- http://en.wikipedia.org/wiki/Mean_absolute_percentage_error. Tanggal Akses: 16 Januari 2010
- http://www.dephut.go.id/files/agus_suren.pdf. Tanggal Akses: 16 Januari 2010
- <http://www.statsi.com> Tanggal Akses: 8 November 2010
- <http://lib.stat.cmu.edu/DASL> Tanggal Akses: 15 November 2010
- Lee, Daniel T, L dan Yamamoto, Akio. 1994. **Wavelet Analysis: Teory and Applications**. Hewlett-Packard Journal
- Loing, Mayo. A. K. Usman, Koredianto. dan Magdalena, Rita. 2008. **Desain Dan Implementasi Sistem Peningkatan Kualitas Perekaman Audio Dengan Wavelet Noise Reduction Dan Automatic Gain Adjustment**. <http://yudiagusta.files.wordpress.com/2009/11/50-55-knsi08-010-desain-dan-implementasi-sistem->

[peningkatan-kualitas-perekaman-video-dengan-wavelet-noise-reduction-dan-automatic-gain-adjustment.pdf](#). Tanggal Akses 9 April 2010

Mallat, Stephane. 1989. **A Wavelet Tour of Signal Processing, 2nd Edition**. San Diego: Academic Press.

Morris, Jeffrey S, dkk. 2003. **Wavelet-Based Nonparametric Modeling of Hierarchical Functions in Colon Carcinogenesis**. Journal of the American Statistical Association. Hewlett-Packard Journal

Odgen, R. T. 1997. **Essential Wavelets for Statistical Applications and Data Analysis**. Birkhauser. Boston

Silverman, B, W. 1986. **Density Estimation for Statistics and Data Analysis**. Chapman and Hall

Suparti. 2005. **Perbandingan Estimator Regresi Nonparametrik Menggunakan Metode Fourier Dan Metode Wavelet**. Jurnal Matematika. Vol 8. No 3. pp88-94. Tanggal Akses 19 April 2010

Suparti. 2006. **Pemilihan Threshold Optimal Pada Estimator Regresi Wavelet Shrinkage**. Prosiding SPMIPA. pp.170-176. Tanggal Akses 19 April 2010

Suparti dan Sudargo. 2006. **Estimasi Densitas Mulus dengan Metode Kernel (Kernel Method in Smooth Density Estimation)**. LONTAR. Vol. 20 No.1. ISSN 0853-0041. http://eprints.undip.ac.id/3451/1/BU_Part_2.pdf. Tanggal akses 26 November 2010

Yasin, Hasbi. 2009. **Estimasi Regresi Non Parametrik Dengan Metode Wavelet Shrinkage Neural Network Pada Model Rancangan Tetap**. Media Statistika. Vol. 2, No. 1. pp1-10. http://eprints.undip.ac.id/1219/1/Vol_2_no_1_artikel_1.pdf. Tanggal Akses 19 April 2010

Vidacovic, B. 1999. **Statistical Modeling by Wavelets**. John Wiley & Sons, Inc., New York

Walker, James. S. 1997. **Fourier Analysis and Wavelet Analysis**.
Vol.44, No.6

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



Lampiran 1. Data Penelitian

Data 1. Data Pertambahan Tinggi Tanaman Surem

Umur Semai (minggu)	Pertambahan Tinggi (cm)
1	9.17
2	9.08
3	9.26
4	10.91
5	11.47
6	9.51
7	9.78
8	9.83



Lampiran 1. (lanjutan)

Data 2. Biaya Yang Dikeluarkan Untuk Berlayar

Lama Berlayar (hari)	Biaya Bahan Bakar (ratusan dollar)
1	7.9
2	9.7
3	8.1
4	8.6
5	8.2
6	7.4
7	9.5
8	8.2
9	7.9
10	9.0
11	9.9
12	11.0
13	10.6
14	10.4
.	.
.	.
.	.
.	.
.	.
.	.
.	.
28	10.6
29	11.7
30	13.8
31	13.9
32	15.1

Lampiran 1. (lanjutan)

Data 3. Data Pertumbuhan Burung Mutton (gram)

Time	Berat (gram)
1	64.7
2	89.3
3	105.2
4	119.6
5	107.9
6	102.6
7	97.3
8	172.0
9	167.5
10	202.8
11	226.0
12	268.5
13	228.3
14	205.3
.	.
.	.
.	.
.	.
.	.
.	.
.	.
60	795.0
61	766.0
62	742.0
63	724.0
64	702.0

Lampiran 2. Program Matlab Untuk Menghitung Nilai GCV dan Contoh Output dari Matlab

```
function [input,output] = gcv2 (x,y,h)
m=[];
m=length(x);
m1=diag(x);
m2=diag(y);
%ybar=sum(y)/m;
m3=(ones(size(m1))*m1);
m4=(ones(size(m3))*m2);
n=length (h);
m5=m3'-m3;
for I=1:n;
    a=h(I);
    m6=m5/a;
    %m7=(ones(size(m1)));
    d=(m6.^2);
    m8=(d/-2);
    for j=1:m
        for k=1:m
            e(j,k)=m8(j,k);
            f=exp(e(j,k));
            c=f/(sqrt(2*pi));
            d(j,k)=c ;
        end
    end
    %nadaraya bawah
    e=sum(d) ;

    %nadaraya atas
    g=d'*y;
    %gi=sum(g);

    %penduga nadaraya
    m11=g/e;

    %mencari GCV atas
    m12=y-(ones(size(y))*m11);
```

```

m13=m12.^2;
for j=1:m
    %for k=1:m
    ei(j)=m13(j);
    fi=exp(m13(j)/-2) ;
    ci=fi/(sqrt(2*pi));
    di(j)=ci;
    %end
    ei=di.^2;
    %fprintf('B=%4.5f',ei(j));
end
fi=sum(ei);
hi=fi/m;

```

```

% Mencari GCV bawah ( $K((x-x_1)/h_2)$ )

```

```

% bagian bawah

```

```

m161=m5/h(I);

```

```

m171=m161/h(I);

```

```

m172=m171.^2;

```

```

m17=m172/-2;

```

```

for j=1:m

```

```

    for k=1:m

```

```

        m18=exp(m17(j,k));

```

```

        m19=m18/(sqrt(2*pi));

```

```

        m20(j,k)=m19 ;

```

```

        % k(h)/k(h2)

```

```

        m21=c/m19;

```

```

        m22=m21.^2;

```

```

        m23=1-(sum(sum(m22))/m);

```

```

    end

```

```

end

```

```

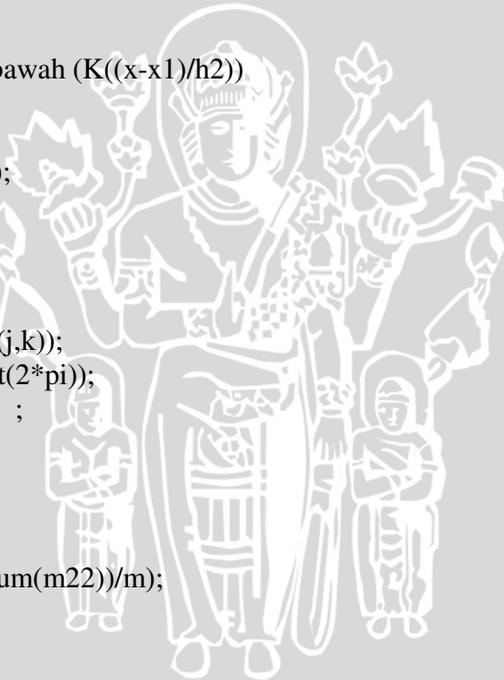
gcv=hi/m23

```

```

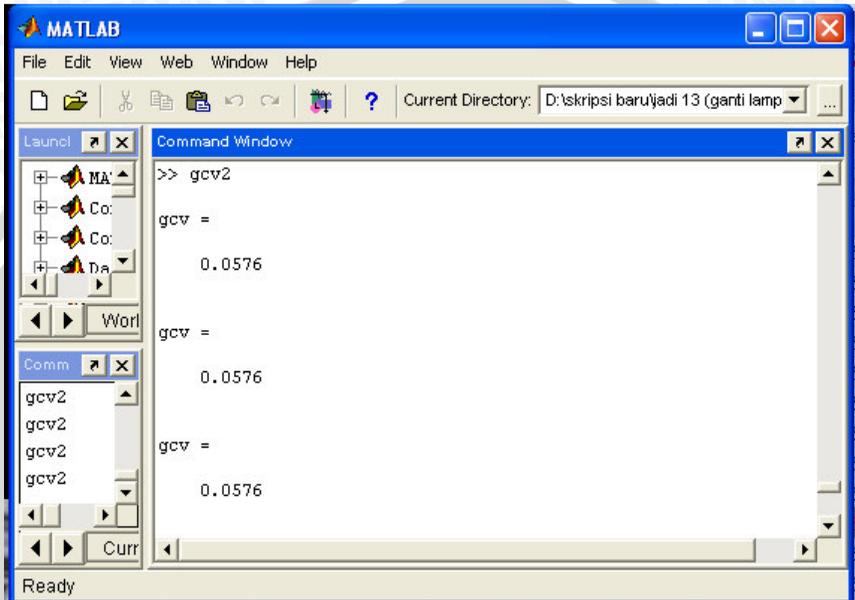
end

```



Lampiran 2. (lanjutan)

Contoh Output Matlab Untuk Hasil Perhitungan GCV



The screenshot shows the MATLAB Command Window with the following content:

```
>> gcv2  
gcv =  
    0.0576  
  
gcv =  
    0.0576  
  
gcv =  
    0.0576
```

The Command Window also shows the current directory as 'D:\skripsi baru\jadi 13 (ganti lamp)'. The status bar at the bottom indicates 'Ready'.

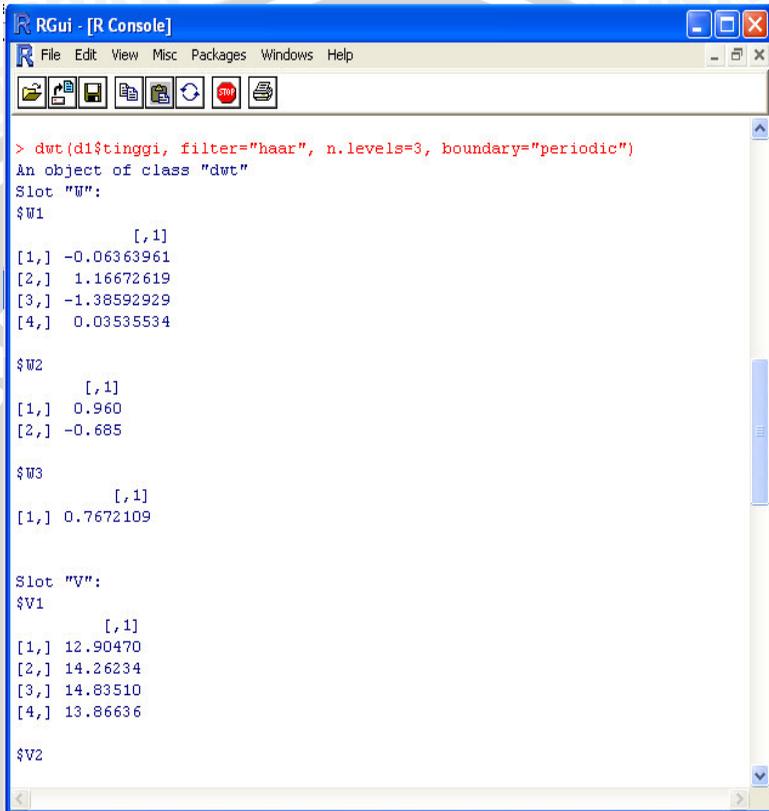
Lampiran 3. Coding R Packages

1. Transformasi Wavelet Diskrit
`dw1<-dwt(d1$tinggi, filter = "haar", n.level = 3, boundary = "periodic")`
2. *Thresholding*
`T1<-threshold(dw1, levels=3, type = "soft",policy ="universal", by.level = TRUE, value = 0, dev = var, boundary = FALSE, verbose = getOption("verbose"), return.threshold = FALSE)`
3. Invers Transformasi Wavelet Diskrit
`Invers<-wr(T1, start.level = 3, verbose = getOption("verbose"), return.object = FALSE, filter.number = 2, family="DaubExPhase")`



Lampiran 4. Hasil Transformasi Wavelet Diskrit

1. Transformasi Wavelet Diskrit Data 1



```
RGui - [R Console]
File Edit View Misc Packages Windows Help
> dwt(d1$tinggi, filter="haar", n.levels=3, boundary="periodic")
An object of class "dwt"
Slot "w":
$W1
      [,1]
[1,] -0.06363961
[2,]  1.16672619
[3,] -1.38592929
[4,]  0.03535534

$W2
      [,1]
[1,]  0.960
[2,] -0.685

$W3
      [,1]
[1,]  0.7672109

Slot "v":
$V1
      [,1]
[1,] 12.90470
[2,] 14.26234
[3,] 14.83510
[4,] 13.86636

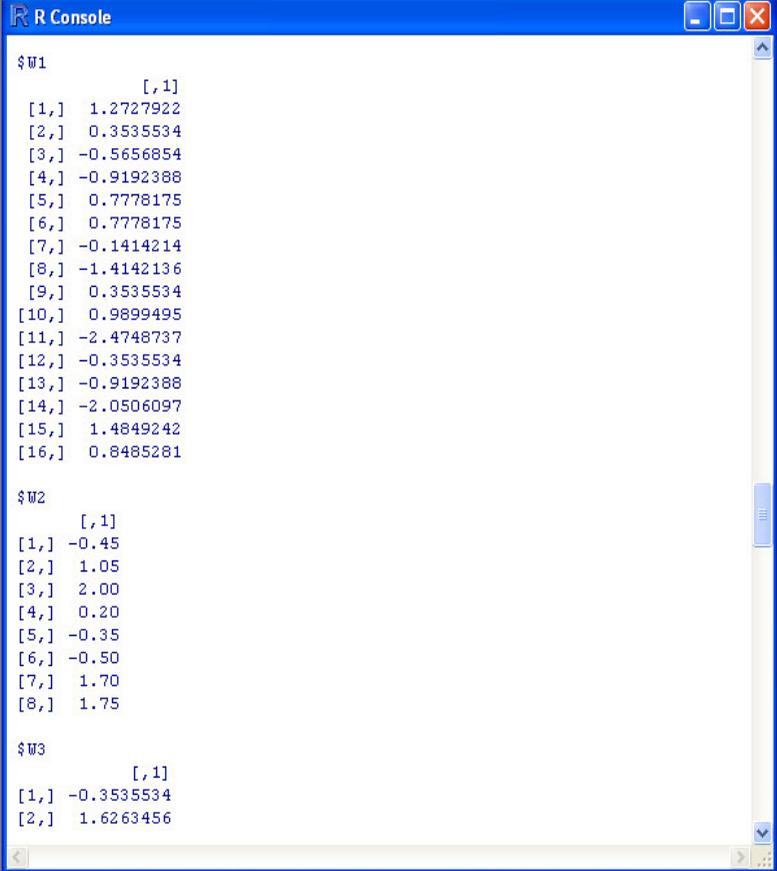
$V2
```

Keterangan :

- \$W1 : koefisien wavelet hasil transformasi wavelet diskrit pada level 1.
- \$W2 : koefisien wavelet hasil transformasi wavelet diskrit pada level 2.
- \$W3 : koefisien wavelet hasil transformasi wavelet diskrit pada level 3, dan seterusnya.
- \$V1 : koefisien skala hasil transformasi wavelet diskrit pada level 1, dan seterusnya.

Lampiran 4. (lanjutan)

2. Transformasi Wavelet Diskrit Data 2



```
R Console

$W1
      [,1]
 [1,] 1.2727922
 [2,] 0.3535534
 [3,] -0.5656854
 [4,] -0.9192388
 [5,] 0.7778175
 [6,] 0.7778175
 [7,] -0.1414214
 [8,] -1.4142136
 [9,] 0.3535534
[10,] 0.9899495
[11,] -2.4748737
[12,] -0.3535534
[13,] -0.9192388
[14,] -2.0506097
[15,] 1.4849242
[16,] 0.8485281

$W2
      [,1]
 [1,] -0.45
 [2,] 1.05
 [3,] 2.00
 [4,] 0.20
 [5,] -0.35
 [6,] -0.50
 [7,] 1.70
 [8,] 1.75

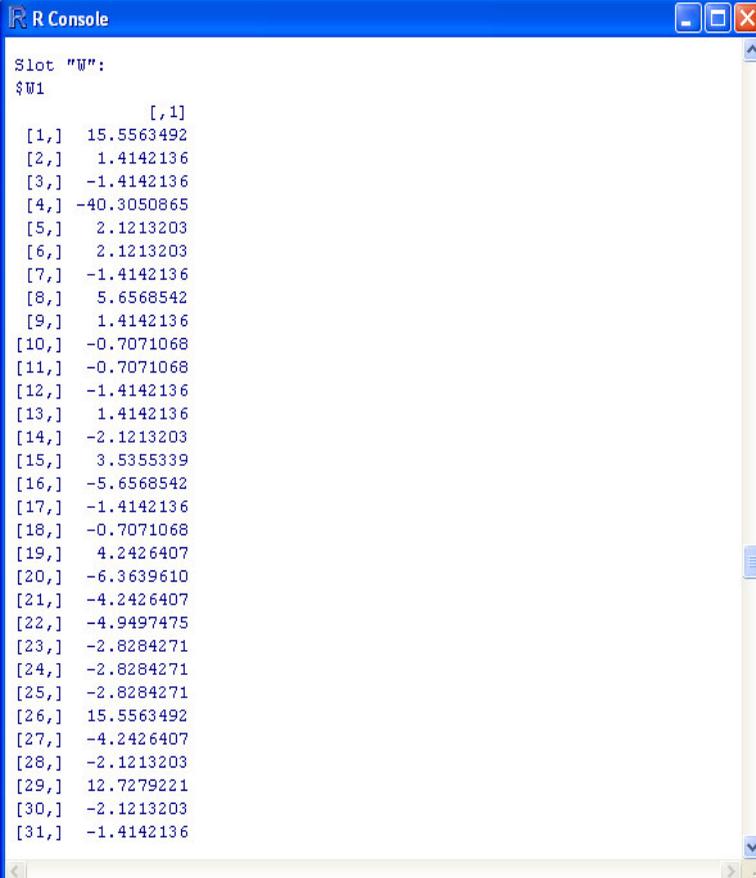
$W3
      [,1]
 [1,] -0.3535534
 [2,] 1.6263456
```

Keterangan :

- \$W1 : koefisien wavelet hasil transformasi wavelet diskrit pada level 1.
- \$W2 : koefisien wavelet hasil transformasi wavelet diskrit pada level 2.
- \$W3 : koefisien wavelet hasil transformasi wavelet diskrit pada level 3, dan seterusnya.

Lampiran 4. (lanjutan)

3. Transformasi Wavelet Diskrit Data 3



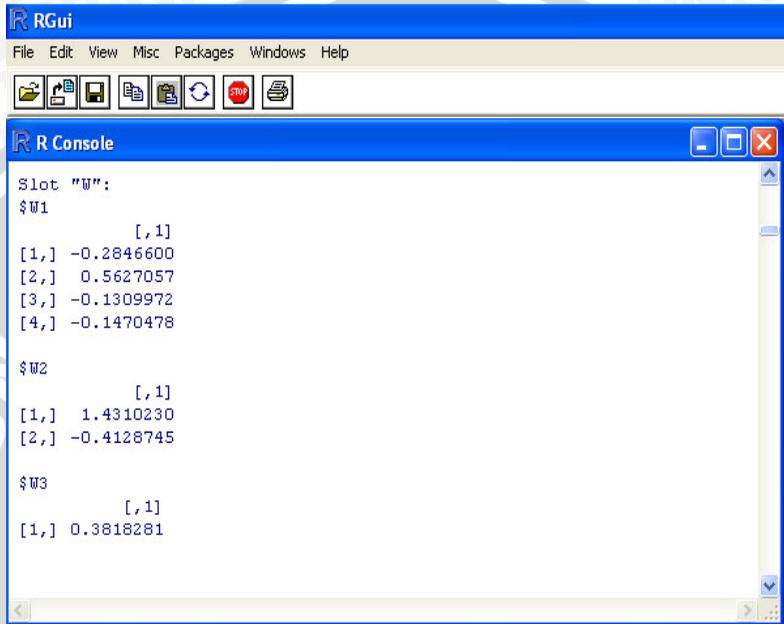
```
R Console
Slot "W":
$W1
      [,1]
[1,] 15.5563492
[2,]  1.4142136
[3,] -1.4142136
[4,] -40.3050865
[5,]  2.1213203
[6,]  2.1213203
[7,] -1.4142136
[8,]  5.6568542
[9,]  1.4142136
[10,] -0.7071068
[11,] -0.7071068
[12,] -1.4142136
[13,]  1.4142136
[14,] -2.1213203
[15,]  3.5355339
[16,] -5.6568542
[17,] -1.4142136
[18,] -0.7071068
[19,]  4.2426407
[20,] -6.3639610
[21,] -4.2426407
[22,] -4.9497475
[23,] -2.8284271
[24,] -2.8284271
[25,] -2.8284271
[26,] 15.5563492
[27,] -4.2426407
[28,] -2.1213203
[29,] 12.7279221
[30,] -2.1213203
[31,] -1.4142136
```

Keterangan :

\$W1 : koefisien wavelet hasil transformasi wavelet diskrit pada level 1, dan seterusnya.

Lampiran 5. Data Hasil *Thresholding*

1. Hasil *Thresholding* Data 1



The screenshot shows the RGui interface with the R Console window open. The console displays the results of wavelet coefficient thresholding for three levels (W1, W2, and W3). Each level shows a vector of four coefficients.

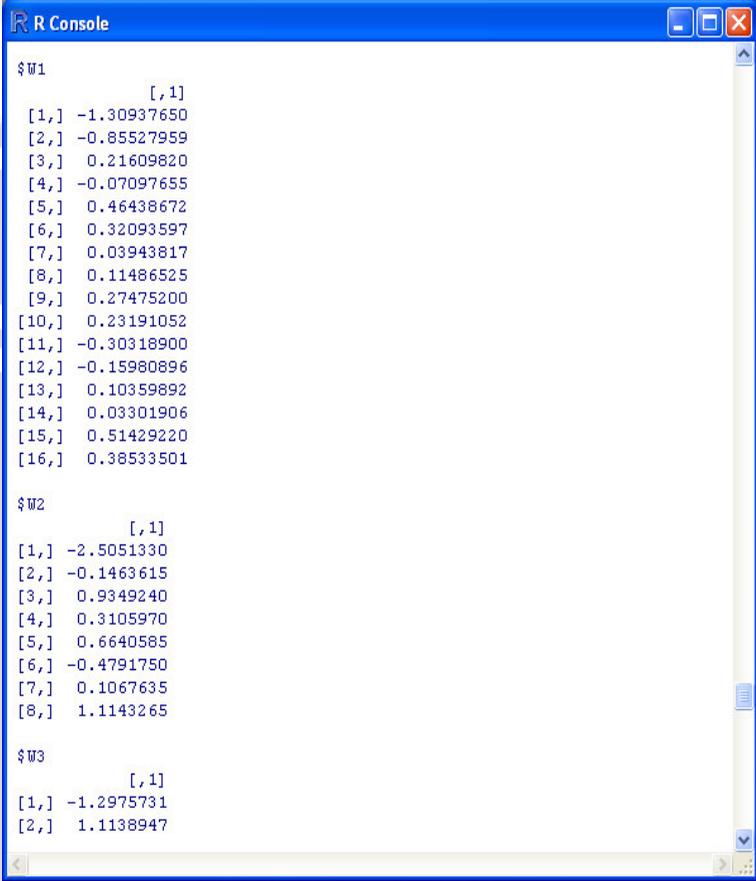
```
Slot "w":  
$W1  
      [,1]  
[1,] -0.2846600  
[2,]  0.5627057  
[3,] -0.1309972  
[4,] -0.1470478  
  
$W2  
      [,1]  
[1,]  1.4310230  
[2,] -0.4128745  
  
$W3  
      [,1]  
[1,]  0.3818281
```

Keterangan :

- \$W1 : koefisien wavelet hasil *thresholding* pada level 1.
- \$W2 : koefisien wavelet hasil *thresholding* pada level 2.
- \$W3 : koefisien wavelet hasil *thresholding* pada level 3.

Lampiran 5. (lanjutan)

2. Hasil *Thresholding* Data 2



```
R Console

$W1
      [,1]
[1,] -1.30937650
[2,] -0.85527959
[3,]  0.21609820
[4,] -0.07097655
[5,]  0.46438672
[6,]  0.32093597
[7,]  0.03943817
[8,]  0.11486525
[9,]  0.27475200
[10,] 0.23191052
[11,] -0.30318900
[12,] -0.15980896
[13,]  0.10359892
[14,]  0.03301906
[15,]  0.51429220
[16,]  0.38533501

$W2
      [,1]
[1,] -2.5051330
[2,] -0.1463615
[3,]  0.9349240
[4,]  0.3105970
[5,]  0.6640585
[6,] -0.4791750
[7,]  0.1067635
[8,]  1.1143265

$W3
      [,1]
[1,] -1.2975731
[2,]  1.1138947
```

Keterangan :

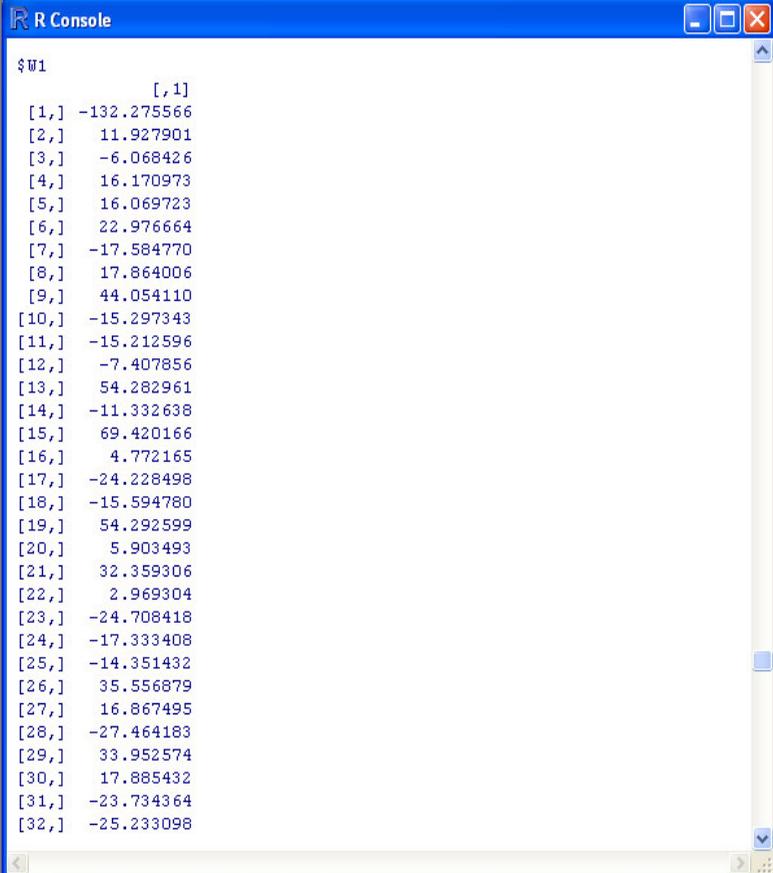
\$W1 : koefisien wavelet hasil *thresholding* pada level 1.

\$W2 : koefisien wavelet hasil *thresholding* pada level 2.

\$W3 : koefisien wavelet hasil *thresholding* pada level 3, dan seterusnya.

Lampiran 5. (lanjutan)

3. Hasil *Thresholding* Data 3



```
R Console
$W1
      [,1]
[1,] -132.275566
[2,]  11.927901
[3,]  -6.068426
[4,]  16.170973
[5,]  16.069723
[6,]  22.976664
[7,] -17.584770
[8,]  17.864006
[9,]  44.054110
[10,] -15.297343
[11,] -15.212596
[12,]  -7.407856
[13,]  54.282961
[14,] -11.332638
[15,]  69.420166
[16,]   4.772165
[17,] -24.228498
[18,] -15.594780
[19,]  54.292599
[20,]   5.903493
[21,]  32.359306
[22,]   2.969304
[23,] -24.708418
[24,] -17.333408
[25,] -14.351432
[26,]  35.556879
[27,]  16.867495
[28,] -27.464183
[29,]  33.952574
[30,]  17.885432
[31,] -23.734364
[32,] -25.233098
```

Keterangan :

\$W1 : koefisien wavelet hasil *thresholding* pada level 1, dan seterusnya.

Lampiran 6. Data Hasil Invers Transformasi Wavelet Diskrit

1. Invers Transformasi Wavelet Diskrit Data 1

Umur semai (minggu)	Pertambahan Tinggi (cm)	invers
1	9.17	9.23
2	9.08	8.82
3	9.26	10.06
4	10.91	10.85
5	11.47	10.31
6	9.51	10.13
7	9.78	9.91
8	9.83	9.70



Lampiran 6. (lanjutan)

2. Invers Transformasi Wavelet Diskrit Data 2

Lama berlayar	Biaya bahan bakar	Invers
1	7.90	11.25
2	9.70	9.40
3	8.10	8.42
4	8.60	7.21
5	8.20	8.07
6	7.40	8.39
7	9.50	8.13
8	8.20	8.03
9	7.90	8.96
10	9.00	9.62
11	9.90	9.99
12	11.00	10.45
13	10.60	10.36
14	10.40	10.42
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
28	10.60	11.25
29	11.70	12.23
30	13.80	12.95
31	13.90	13.43
32	15.10	13.98

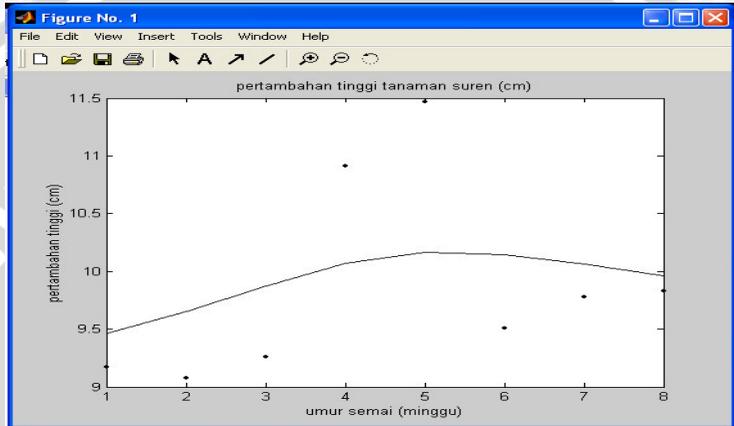
Lampiran 6. (lanjutan)

3. Invers Transformasi Wavelet Diskrit Data 3

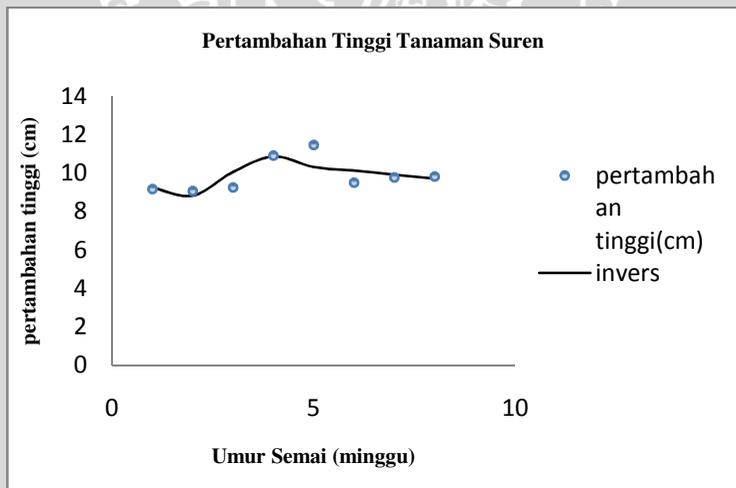
Time	Berat (gram)	Invers
1	64.700	199.24
2	89.30	12.17
3	105.20	103.69
4	119.60	120.56
5	107.90	102.66
6	102.60	94.08
7	97.30	128.46
8	172.00	151.33
9	167.50	174.00
10	202.80	196.73
11	226.00	232.79
12	268.50	265.29
13	228.30	219.43
14	205.30	194.56
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
60	795.00	827.39
61	766.00	772.28
62	742.00	738.72
63	724.00	702.26
64	702.00	666.57

Lampiran 7. Kurva Hasil Analisis Menggunakan Teknik Pemulus Kernel dan Analisis Wavelet

1. Penduga Kernel Data 1

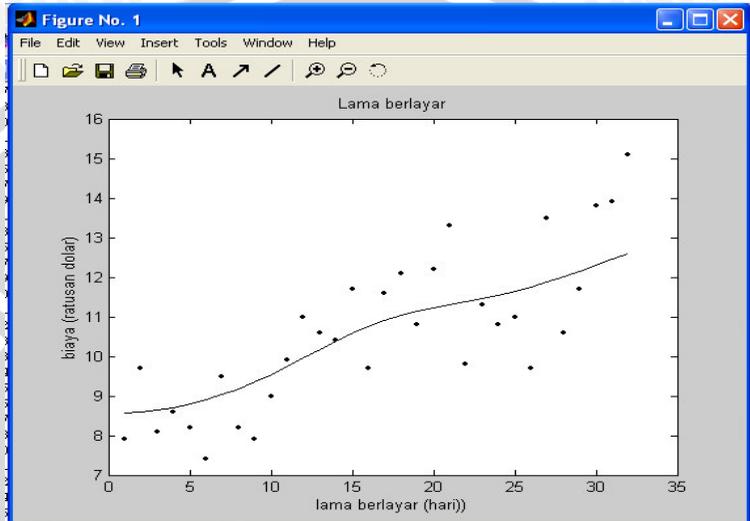


Analisis Wavelet Data 1

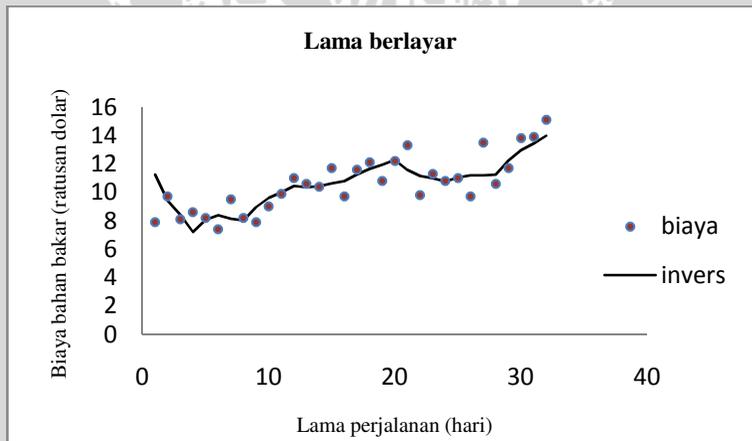


Lampiran 7. (lanjutan)

2. Penduga Kernel Data 2

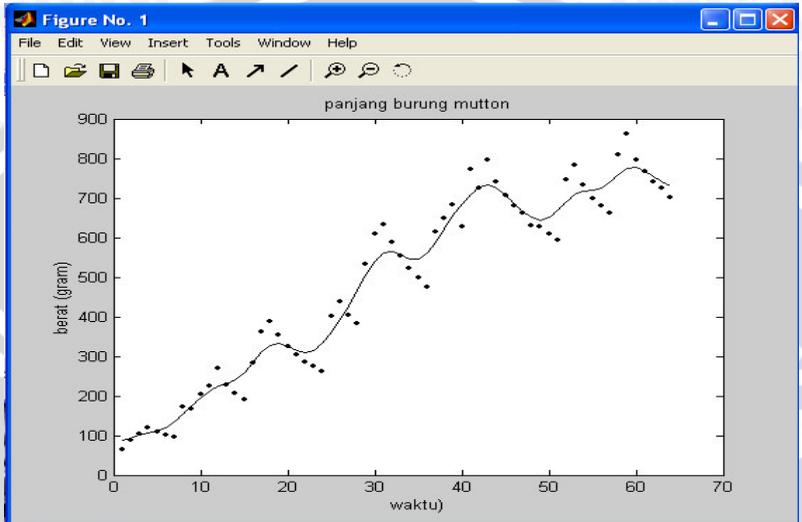


Analisis Wavelet Data 2



Lampiran 7. (lanjutan)

3. Penduga Kernel Data 3



Analisis Wavelet Data 3

