# SUBGRUP SUBNORMAL
# DAN SUBGRUP KOMPOSISI

## SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh :
**FARHANAH**
**0510940014-94**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**
**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS BRAWIJAYA**
**MALANG**
**2011**

**LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI**

***SUBGRUP SUBNORMAL***
***DAN SUBGRUP KOMPOSISI***

Oleh :
**FARHANAH**
**0510940014-94**

**Setelah dipertahankan di depan majelis penguji**
**pada tanggal 13 Januari 2011**
**dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar**
**Sarjana Sains dalam Bidang Matematika**

| Pembimbing I | Pembimbing II |
| --- | --- |
| **Drs. Bambang Sugandi, M.Si** | **Dra. Ari Andari, M.S** |
| **NIP. 195905151992031002** | **NIP. 196105161987012001** |

**Mengetahui,**
**Ketua Jurusan Matematika**
**Fakultas MIPA Universitas Brawijaya**

**Dr. Agus Suryanto, M. Sc**
**NIP. 196908071994121001**

## LEMBAR PERNYATAAN

**Saya yang bertanda tangan di bawah ini :**

| | |
|---|---|
| **Nama** | **: FARHANAH** |
| **NIM** | **: 0510940014-94** |
| **Jurusan** | **: Matematika** |
| **Penulis Skripsi berjudul** | **: Subgrup Subnormal dan Subgrup Komposisi** |

**Dengan ini menyatakan bahwa :**

1. **isi skripsi yang saya buat benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka skripsi ini,**
2. **apabila di kemudian hari ternyata skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.**

**Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.**

**Malang, 13 Januari 2011**
**Yang menyatakan,**

**(Farhanah)**
**NIM. 0510940014-94**

**SUBGRUP SUBNORMAL**
**DAN SUBGRUP KOMPOSISI**

## ABSTRAK

Salah satu bentuk pengembangan dari subgrup adalah subgrup subnormal dan subgrup komposisi. Pada skripsi ini dibahas definisi-definisi dan teorema-teorema yang berhubungan dengan subgrup subnormal dan subgrup komposisi. Suatu subgrup disebut subgrup komposisi jika terdapat barisan normal dari grup $G$ sedemikian sehingga grup faktornya adalah grup *simple* dan bukan grup trivial. Dapat diperlihatkan setiap subgrup komposisi adalah subgrup subnormal.

**Kata kunci**: barisan normal, grup *simple*, grup faktor, grup trivial, subgrup subnormal, subgrup komposisi.

**SUBNORMAL SUBGROUP**
**AND COMPOSITION SUBGROUP**

## ABSTRACT

One of developed forms of subgroup is subnormal subgroup and composition subgroup. This final project concerns with definitions and theorems related to subnormal subgroup dan composition subgroup. A subgroup is called a composition subgroup if there is a normal sequence of group $G$ such that its quotient group is simple and is not a trivial group. It can be shown that every composition subgroup is subnormal subgroup.

**Keywords**: normal sequence, simple group, quotient group, trivial group, subnormal subgroup, composition subgroup.

# KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan bimbingan dan petunjuk-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul ”Subgrup Subnormal dan Subgrup Komposisi” ini dengan baik. Shalawat dan salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW sebagai suri tauladan bagi penulis.

Penulis menyadari selama penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari bantuan, bimbingan serta motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada:

1. Drs. Bambang Sugandi, M.Si, selaku pembimbing I atas segala bimbingan, motivasi serta kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini.
2. Dra. Ari Andari, M.S, selaku pembimbing II atas segala bimbingan, motivasi serta kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini.
3. Syaiful Anam, S.Si, M.T, Dr. Abdul Rouf A., M.Sc, Dr. Wuryansari Muharini K., M.Si, selaku dosen penguji atas segala saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
4. Dr. Agus Suryanto, M.Sc, selaku dosen pembimbing akademik sekaligus Ketua Jurusan Matematika atas segala bimbingan dan motivasi yang telah diberikan.
5. Seluruh Bapak/Ibu dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
6. Kedua orang tuaku tercinta, saudara-saudaraku tersayang atas doa, kasih sayang dan dukungan yang telah diberikan.
7. *Dek* Faqih, *Dek* Miftah, Bunga, Astin, dan teman-teman Matematika 2005 tercinta atas bantuan dan dukungan yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini.
8. Serta semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat kekurangan. Untuk itu penulis sangat mengharapkan kritik dan saran melalui email penulis a.far_away@yahoo.co.id. Akhir kata, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak.

Malang, 13 Januari 2011

Penulis

# DAFTAR ISI

# DAFTAR SIMBOL

| Notasi | Keterangan |
|---|---|
| $\in$ | Elemen dari |
| $\neq$ | Tidak sama dengan |
| $\subseteq, \subset$ | Himpunan bagian, himpunan bagian sejati |
| $\forall$ | Untuk setiap |
| $\exists$ | Terdapat |
| $\Rightarrow$ | Jika … maka … (implikasi) |
| $\cong$ | *Isomorfik* |
| $H < G$ | $H$ subgrup sejati dari $G$ |
| $H \leq K$ | $H$ subgrup dari $G$ |
| $H \triangleleft G$ | $H$ subgrup normal $G$ |
| $H \triangleleft\triangleleft G$ | $H$ subgrup subnormal $G$ |
| $G^*$ | Grup komutator |
| $G/H$ | Grup factor |
| Z | Himpunan bilangan bulat |
| $\Re$ | Himpunan bilangan riil |
| $E$ | Grup trivial |
| $Ker$ | *Kernel* |
| □ | Akhir suatu bukti |

# BAB I
# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi yang sangat pesat dewasa ini merupakan suatu rangkaian panjang yang berpangkal dari berkembangnya ilmu-ilmu dasar (*basic sciences*) di antaranya aljabar yang merupakan cabang matematika.

Aljabar (*Algebra*) adalah cabang matematika yang mempelajari struktur, hubungan, dan kuantitas. Salah satu jenis aljabar adalah aljabar abstrak, yaitu jenis aljabar yang mempelajari tentang struktur aljabar (Alexander, 2009).

Struktur aljabar adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu atau lebih operasi biner yang berlaku pada himpunan tersebut. Struktur aljabar yang dilengkapi dengan sebuah operasi biner dan memenuhi aksioma tertutup, assosiatif, terdapat elemen identitas dan setiap elemen memiliki invers disebut grup. Himpunan bagian tak kosong dari suatu grup yang membentuk grup atas operasi biner yang sama dengan grup disebut subgrup. Banyak hal dalam subgrup yang dapat dikembangkan, di antaranya adalah subgrup subnormal dan subgrup komposisi.

Pada skripsi ini dibahas definisi-definisi dan teorema-teorema yang berhubungan dengan subgrup subnormal dan subgrup komposisi serta hubungan antara subgrup komposisi dan subgrup subnormal. Misalkan $G$ adalah grup. Suatu subgrup dari $G$ disebut subgrup komposisi jika terdapat barisan subgrup dari grup $G$ (*barisan normal*) sedemikian sehingga grup faktornya adalah grup *simple* dan bukan grup trivial.

## 1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, pokok permasalahan yang dibahas dalam skripsi ini adalah bagaimana teorema-teorema yang berhubungan dengan subgrup subnormal dan subgrup komposisi serta bagaimana hubungan subgrup komposisi dan subgrup subnormal.

## 1.3 Batasan masalah

Pembahasan dalam skripsi ini dibatasi untuk grup yang berhingga.

## 1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah untuk memahami definisi-definisi dan membuktikan teorema-teorema yang berlaku dalam subnormal dan subgrup komposisi serta mengetahui hubungan subgrup komposisi dan subgrup subnormal.

# BAB II
# TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan definisi-definisi, teorema-teorema serta lema yang akan digunakan sebagai acuan maupun pembanding dalam pembahasan.

## 2.1 Fungsi

**Definisi 2.1.1** (Arifin, 2000) Misalkan $S$ dan $T$ adalah himpunan tak kosong. Pemetaan $f$ dari $S$ ke $T$, ditulis $f : S \to T$ adalah suatu cara yang mengaitkan setiap $x \in S$ dengan tepat satu $y \in T$. Pemetaan $f : S \to T$ dikatakan satu-satu (*injektif*) jika untuk setiap $x_1, x_2 \in S$ yang dipetakan terhadap elemen yang sama oleh $f$ yaitu $f(x_1) = f(x_2)$, maka $x_1 = x_2$. Pemetaan $f : S \to T$ dikatakan *onto* (*surjektif*) jika untuk setiap $y \in T$ terdapat $x \in S$ sedemikian sehingga $f(x) = y$. Suatu pemetaan yang bersifat *injektif* dan *surjektif* disebut *bijektif* .

**Definisi 2.1.2** (Scott, 1964) Pemetaan $f : A \to B$ dikatakan *into* atau ke dalam jika darerah hasil fungsi $f$ merupakan himpunan bagian dari $B$.

**Definisi 2.1.3** (Scott, 1964) Permutasi dari himpunan $S$ adalah suatu fungsi satu-satu dari $S$ *onto* $S$.

**Definisi 2.1.4** (Leithold, 1972) Suatu fungsi $f(x)$ dikatakan naik di titik $x = x_0$, jika dapat ditunjukkan bilangan positif kecil $h$ sedemikian sehingga untuk setiap titik tertentu $x_1 < x_2$ yang terletak dalam interval $(x_0 - h, x_0 + h)$ berlaku : $f(x_1) < f(x_2)$..

**Definisi 2.1.5** (Bhattacharya, 1986) Sebuah pemetaan $*: S \times S \to S$ disebut operasi biner pada himpunan $S$.

**Definisi 2.1.6** (Bhattacharya, 1986) Misalkan $S$ adalah himpunan tak kosong yang dillengkapi dengan operasi biner $*$. Operasi biner $*$ pada himpunan $S$ dikatakan ,

i. Komutatif jika
$x * y = y * x$ untuk setiap $x, y \in S$ ,

ii. Assosiatif jika
$x * (y * z) = (x * y) * z$ untuk setiap $x, y, z \in S$ .

## 2.2 Grup

**Definisi 2.2.1** (Keedy, 1963) Grup didefinisikan sebagai himpunan dari elemen-elemen $G$ bersama dengan operasi biner " $\circ$" yang memenuhi aksioma-aksioma:

i. $G$ tertutup di bawah operasi $\circ$, yaitu untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a \circ b \in G$,
ii. Untuk setiap $a, b, c \in G, a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ ,
iii. Terdapat $e \in G$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in G$ , $e \circ x = x \circ e = x$,
iv. Untuk setiap $x \in G$ terdapat $x^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$.

**Teorema 2.2.2** (Scott, 1964) Setiap elemen grup mempunyai invers yang tunggal.

**Bukti**:

Misalkan $(S,*)$ adalah grup dan $a \in S$. Karena $(S,*)$ adalah grup maka ada $b \in S$ sedemikian sehingga $b*a = a*b = e$. Misalkan $c \in S$ juga invers dari $a$ , maka $c*a = a*c = e$. Karena $a*b = e$ , maka

$$c*(a*b) = c*e$$
$$c*(a*b) = c.$$

Di sisi lain,

$$c*(a*b) = (c*a)*b \qquad \text{(Hukum assosiatif)}$$
$$c*e = e*b$$
$$c = e*b = b.$$

Jadi, $b = c$ □

**Definisi 2.2.3** (Dummit, 2002) Sebuah grup $H$ dengan operasi biner $*$ adalah siklik jika $H$ dapat dibangun oleh satu elemen, yaitu terdapat $x \in H$ sedemikian sehingga $H = \{x^n \mid n \in Z\}$, dengan $x^n = x * x * x * \ldots * x$.

**Contoh 2.2.4** (Scott, 1964) $G = Z_3$ adalah grup terhadap penjumlahan. $G = Z_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$. $G = Z_3$ hanya dibangun oleh satu elemen saja, yaitu $(1)$. Jadi, $G = Z_3$ adalah grup siklik.

**Definisi 2.2.5** (Dummit, 2002) Grup $(G,*)$ disebut grup Abel atau komutatif jika $a * b = b * a$ untuk setiap $a, b \in G$.

**Contoh 2.2.6** (Herstein, 1975) Setiap grup siklik $G$ adalah grup komutatif karena jika $x, y \in G$, maka $xy = a^m a^n = a^{m+n} = a^n a^m = yx$.

**Definisi 2.2.7** (Scott, 1964) Grup trivial adalah grup yang hanya mempunyai satu elemen, yaitu elemen identitas. Grup trivial sering dinotasikan dengan $1, \{1\}$, atau $\{e\}$.

## 2.3 Subgrup

**Definisi 2.3.1** (Scott, 1964) Misalkan $G$ adalah grup. $H$ himpunan bagian tak kosong dari $G$. $H$ disebut subgrup dari $G$ jika $H$ membentuk grup atas operasi biner yang sama dengan $G$ dan diberi notasi $H \leq G$.

**Teorema 2.3.2** (Bhattacharya, 1986) Misalkan $(G,*)$ adalah grup. $H$ himpunan bagian tak kosong dari $G$ adalah subgrup dari $G$ jika dan hanya jika memenuhi dua aksioma berikut:

i. Untuk setiap $a, b \in H$, $a * b \in H$, dan $a^{-1} \in H$,

ii. Untuk setiap $a, b \in H$, $a * b^{-1} \in H$.

**Bukti**:
$(\Rightarrow)$ Diketahui $H$ subgrup maka i. dan ii. jelas terpenuhi.
$(\Leftarrow)$ Misalkan $H$ memenuhi aksioma i, maka untuk suatu $a \in H$, $a^{-1} \in H$, $a * a^{-1} = e \in H$. Jadi $H$ memiliki elemen identitas artinya $H$ tak kosong. Misalkan $H$ memenuhi aksioma ii. Ambil sebarang $a, b \in H$,

$$e = b * b^{-1} \in H$$
$$b^{-1} * e = b^{-1} * b * b^{-1} \in H$$
$$b^{-1} = e * b^{-1} \in H$$
$$b^{-1} \in H.$$

Jadi, $ab = a(b^{-1})^{-1} \in H$ artinya $H$ memenuhi hukum ketertutupan. $H$ himpunan bagian dari $G$, maka untuk setiap $a, b, c \in H$ juga berlaku $a * (b * c) = (a * b) * c$. Jadi, hukum assosiatif terpenuhi. Oleh karena itu, terbukti bahwa $H$ subgrup dari $G$. □

**Definisi 2.3.3** (Scott, 1964) Sebuah subgroup $H$ disebut subgrup sejati dari grup $G$ jika $H \neq G$. $H$ merupakan subgrup sejati dari $G$ ditulis $H < G$.

**Definisi 2.3.4** (Scott, 1964) Sebuah subgrup $H$ disebut nontrivial jika dan hanya jika $H \neq G$ dan $H \neq \{e\}$.

**Contoh 2.3.5** (Scott, 1964) Misalkan $Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$adalah grup terhadap penjumlahan maka subgrup $H = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$ adalah subgrup sejati nontrivial dari $Z$.

**Definisi 2.3.6** (Scott, 1964) Misalkan $A$ dan $B$ adalah grup. $AB = \{a * b \mid a \in A, \ b \in B\}$.

**Teorema 2.3.7** (Scott, 1964) Jika $H$ dan $K$ adalah subgrup dari grup $G$. $HK$ adalah subgrup jika dan hanya jika $HK = KH$.

**Bukti**:

$(\Rightarrow)$ Diketahui $HK \leq G$. Akan dibuktikan $HK = KH$, maka harus ditunjukkan $KH \subseteq HK$ dan $HK \subseteq KH$.

a. Ambil sebarang $x = k * h \in KH$ untuk suatu $k \in K$ dan $h \in H$. Akan ditunjukkan bahwa $x \in HK$.

$$x = k * h$$

$$x = (h^{-1} * k^{-1})^{-1}.$$

$x = (h^{-1} * k^{-1})^{-1}$ merupakan invers dari elemen pada $HK$. Jadi, $x \in HK$. Berarti bahwa

$$KH \subseteq HK \quad (2.1)$$

b. Ambil sebarang $x = h * k \in HK$ untuk suatu $h \in H$ dan $k \in K$. Karena $HK$ subgrup, maka $x^{-1} = h' * k' \in HK$ untuk suatu $h' \in H$ dan $k' \in K$,

$$x^{-1} = h' * k' \in HK$$

$$(x^{-1})^{-1} = (h' * k')^{-1} \in HK$$

$$x = k'^{-1} * h'^{-1} \in KH.$$

Jadi,

$$HK \subseteq KH \quad (2.2)$$

Dari (2.1) dan (2.2) dapat disimpulkan bahwa $HK = KH$.

$(\Leftarrow)$ Diketahui $HK = KH$. Menurut Teorema 2.3.2 $HK$ adalah subgrup jika memenuhi 2 aksioma, yaitu:

i. Ambil sebarang $x, y \in HK$, di mana $x = h_1 * k_1$ dan $y = h_2 * k_2$. Akan dibuktikan $x * y \in HK$

$$x * y = (h_1 * k_1) * (h_2 * k_2)$$

karena $HK = KH$, maka

$$x * y = h_1 * k_1 * k_2 * h_2$$

$$x * y = h_1 * k_3 * h_2 \quad \text{untuk suatu } k_3 = k_1 * k_2 \in K$$

$$x * y = h_1 * h_2 * k_3$$

$$x * y = h_3 * k_3$$

untuk suatu $h_3 = h_1 * h_2 \in H$. Jadi, $x * y \in HK$.

Ambil sebarang $x \in HK$, di mana $x = h_1 * k_1$ akan dibuktikan $x^{-1} \in HK$

$$x = h_1 * k_1$$
$$(x)^{-1} = (h_1 * k_1)^{-1}$$
$$x^{-1} = h_1^{-1} * k_1^{-1},$$

di mana $h_1^{-1} \in H$ (karena $H$ subgrup) dan $k_1^{-1} \in K$ (karena $K$ subgrup). Jadi $x^{-1} \in HK$.

ii. Ambil sebarang $x, y \in HK$, di mana $x = h_1 * k_1$ dan $y = h_2 * k_2$. Akan dibuktikan $x * y^{-1} \in HK$,

$$\begin{aligned} x * y^{-1} &= (h_1 * k_1) * (h_2 * k_2)^{-1} \\ &= h_1 * (k_1 * k_2^{-1} * h_2^{-1}) \\ &= h_1 * (k_3 * h_3), \end{aligned}$$

untuk suatu $h_3 = h_2^{-1} \in H$ dan $k_3 = k_1 * k_2^{-1} \in K$. Karena $HK = KH$, maka $x * y^{-1} = h_1 * (k_3 * h_3) = h_1 * (h_3 * k_3) = h_1 * h_3 * k_3 = h_4 * k_4$ untuk suatu $h_4 = h_1 * h_3 \in H$ dan $k_4 = k_3 \in K$. Jadi, $x * y^{-1} = h_4 * k_4 \in HK$.

Dari i. dan ii. dapat disimpulkan bahwa $HK$ adalah subgrup dari $G$. □

**Definisi 2.3.8** (Harshbarger, 1985) Jika $H$ subgrup dari $G$ maka $\forall a \in G$, himpunan $a * H = \{a * h \mid h \in H\}$ disebut koset kiri dari $H$ dalam $G$. Himpunan $H * a = \{h * a \mid h \in H\}$ disebut koset kanan dari $H$ dalam $G$.

**Definisi 2.3.9** (Bhattacharya, 1986) Misalkan $G$ grup. $N$ subgrup dari $G$. $N$ disebut subgrup normal dari $G$, ditulis $N \lhd G$ jika $xNx^{-1} \subset N$ untuk setiap $x \in G$.

**Teorema 2.3.10** (Bhattacharya, 1986) Misalkan $N$ subgrup dari $G$, maka pernyataan di bawah ini ekivalen :

i. $N \lhd G$,

ii. $xNx^{-1} = N$ untuk setiap $x \in G$,

iii. $Nx = xN$ untuk setiap $x \in G$,

iv. $(xN)(yN) = (xy)N$ untuk setiap $x, y \in G$.

**Bukti**:

(i $\Rightarrow$ ii) Diketahui $N \lhd G$. Misalkan $x \in G$ maka berdasarkan Definisi 2.3.9,

$$xNx^{-1} \subset N \tag{2.3}$$

Jika $x \in G$, maka $x^{-1} \in G$ sehingga

$$\begin{aligned} x^{-1}N(x^{-1})^{-1} &\subset N \\ x^{-1}Nx &\subset N \\ x^{-1}Nxx^{-1} &\subset Nx^{-1} \\ x^{-1}Ne &\subset Nx^{-1} \\ xx^{-1}N &\subset xNx^{-1} \\ eN &\subset xNx^{-1} \\ N &\subset xNx^{-1}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Dari (2.3) dan (2.4) dapat disimpulkan bahwa $xNx^{-1} = N$. Jadi, tebukti bahwa jika $N \lhd G$, maka $xNx^{-1} = N$.

(ii $\Rightarrow$ iii) Karena $xNx^{-1} = N$, maka

$$\begin{aligned} Nx &= (xNx^{-1})x \\ Nx &= xNx^{-1}x \\ Nx &= xNe \\ Nx &= xN. \end{aligned}$$

(iii $\Rightarrow$ iv) $(xN)(yN) = x(N\,y)N$. Menurut iii. $Nx = xN$ untuk setiap $x \in G$, maka

$$\begin{aligned} (xN)(yN) &= x(yN)N \\ &= (xy)NN. \end{aligned} \qquad \text{(hukum assosiatif)}$$

$NN \subset N$ karena $N$ tertutup. Pada sisi lain, $N = eN \subset NN$ maka $NN = N$. Oleh karena itu, $(xN)(yN) = (xy)N$.

(iv$\Rightarrow$i) Karena $N$ subgrup, maka $\{e\} \subset N$

$$xNx^{-1}\{e\} \subset xNx^{-1}N$$

$$xNx^{-1} \subset xNx^{-1}N, \qquad (2.5)$$

berdasarkan (iv) $(xN)(yN) = (xy)N$ untuk setiap $x, y \in G$, maka persamaan (2.5) menjadi

$$xNx^{-1} \subset xx^{-1}N$$

$$xNx^{-1} \subset eN$$

$$xNx^{-1} \subset N.$$

Karena $xNx^{-1} \subset N$, maka berdasarkan Definisi 2.3.9 $N \lhd G$. □

**Contoh 2.3.11** (Herstein, 1975)

i. $\{e\}$ dan $G$ selalu merupakan subgrup normal dari $G$,

ii. Setiap subgrup $N$ dari grup komutatif $G$ adalah normal karena $gN = Ng, \ \forall g \in G$.

**Definisi 2.3.12** (Herstein, 1975) Misalkan $G$ grup dan $N$ subgrup normal dari $G$. Grup *quotient* dari $N$ dalam $G$ ditulis $G/N$ dan dibaca ”$G$ modulo $N$” adalah himpunan koset-koset dari $N$ dalam $G$. Grup *quotient* disebut juga grup faktor. $G/N = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, ...\}$, di mana $\bar{a} = a * N$ ( jika $G/N$ adalah grup terhadap perkalian) dan $\bar{a} = a + N$ ( jika $G/N$ adalah grup terhadap penjumlahan).

**Teorema 2.3.13** (Bhattacharya, 1986) Misal $N$ adalah subgrup normal dari grup $G$. Maka $G/N$ adalah grup.

**Bukti**:

Ambil sebarang $a, b \in G/N$, di mana $a = xN$ dan $b = yN$ untuk setiap $x, y \in G$. Akan dibuktikan $ab \in G$,

$$ab = (xN)(yN).$$

Menurut Teorema 2.3.10 iv. $(xN)(yN) = (xy)N$ untuk setiap $x, y \in G$ berarti $ab \in G/N$. Jadi, $G/N$ tertutup.

Ambil sebarang $a,b,c \in G/N$, di mana $a = xN$, $b = yN$, dan $c = zN$ untuk setiap $x, y, z \in G$. Akan dibuktikan $a(bc) = (ab)c$.

$$
\begin{aligned}
a(bc) &= xN(yN\,zN) \\
&= xN(y\,z)N && \text{(menurut Teorema 2.3.10 iv.)} \\
&= xN(yz)N \\
&= x(yz)N && \text{(karena } G \text{ assosiatif)} \\
&= (xy)zN \\
&= (xy)N\,zN && \text{(menurut Teorema 2.3.10 iv.)} \\
&= (xN\,yN)zN \\
&= (ab)c\,.
\end{aligned}
$$

Karena $a(bc) = (ab)c$ untuk setiap $a,b,c \in G/N$, maka $G/N$ memenuhi hukum assosiatif. Koset $eN$ adalah identitas dalam $G/N$ karena $eN = N$. Terdapat $x^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $(xN)(x^{-1}N) = (xx^{-1}N) = eN = N$. Terbukti bahwa $G/N$ adalah grup. □

## 2.4 Grup *simple*

**Definisi 2.4.1.** (Scott, 1064) Suatu grup adalah grup *simple* jika tidak memiliki subgrup normal nontrivial artinya subgrup normal yang dimiliki hanya grup trivial dan dirinya sendiri.

**Contoh 2.4.2** (Scott, 1964)

i. Grup siklik $G = Z_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ terhadap penjumlahan merupakan grup *simple* karena hanya memiliki 2 subgrup normal yaitu $\{e\} = \{\overline{0}\}$ dan dirinya sendiri. $\{e\} = \{\overline{0}\}$ merupakan subgrup normal dari $G = Z_3$ karena untuk setiap $x \in G$, $x\{e\}x^{-1} \subset \{e\}$.

ii. $Z = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ adalah grup terhadap penjumlahan bukan grup *simple* karena memiliki subgrup normal lain selain $\{e\}$ dan dirinya sendiri, yaitu: $H = \{\ldots,-4,-2,0,2,4,\ldots\}$.

iii. $G = Z_5 = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$ adalah grup *simple* karena tidak memiliki subgrup normal lain selain $\{e\}$ dan dirinya sendiri.

## 2.5 Homomorfismas grup

**Definisi 2.5.1** (Scott, 1964) Homomorfisma grup $(G,\circ)$ *into* grup $(H,*)$ adalah sebuah fungsi $T$ dari $G$ *into* $H$ sedemikian sehingga jika $x, y \in G$, maka $T(x \circ y) = T(x) * T(y)$. Endomorfisma dari $G$ adalah homomorfisma dari $G$ *into* $G$. Isomorfisma adalah homomorfisma yang *bijektif*. Automorfisma dari $G$ adalah isomorfisma dari $G$ *onto* $G$.

**Contoh 2.5.2** (Scott, 1964)

i. $\alpha : (R,+) \to (R-\{0\},\cdot)$

$$n \mapsto 2^n$$

merupakan homomorfisma karena jika diambil sebarang $x, y \in R$ maka $\alpha(x+y) = 2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y = \alpha(x)\cdot\alpha(y)$.

ii. $\beta : (Z,+) \to (Z,+)$

$$n \mapsto -n$$

merupakan homomorfisma karena jika diambil sebarang $x, y \in Z$ maka $\beta(x+y) = -(x+y) = (-x)+(-y) = \beta(x)+\beta(y)$.

**Definisi 2.5.3** (Scott, 1964) Grup $G$ isomorfik dengan grup $H$, ditulis $G \cong H$, jika dan hanya jika ada isomorfisma dari $G$ *onto* $H$.

**Teorema 2.5.4** (Scott, 1964) Misalkan $(G,*)$ dan $(H,\circ)$ adalah grup dan $T: G \to H$ homomorfisma, maka

i. $T(e_G) = e_H$,

ii. $T(a^{-1}) = [T(a)]^{-1}$.

**Bukti**:

i. Ambil sebarang $a, e_G \in G$, maka $a * e_G \in G$. Karena $T$ homomorfisma, maka

$$T(a * e_G) = T(a) \circ T(e_G)$$
$$T(a) = T(a) \circ T(e_G),$$
$$T(a) \circ [T(a)]^{-1} = T(a) \circ [T(a)]^{-1} \circ T(e_G)$$
$$e_H = e_H \circ T(e_G)$$
$$e_H = T(e_G)$$
$$T(e_G) = e_H .$$

ii. Ambil sebarang $a \in G$. Karena $G$ grup, maka $a^{-1} \in G$. Menurut i. $T(e_G) = e_H$, jadi

$$T(e_G) = e_H$$
$$T(a * a^{-1}) = e_H$$
$$T(a) \circ T(a^{-1}) = e_H \quad \text{(karena } T \text{ homomorfisma)}$$
$$T(a)]^{-1} \circ T(a) \circ T(a^{-1}) = [T(a)]^{-1} \circ e_H$$
$$e_H \circ T(a^{-1}) = [T(a)]^{-1}$$
$$T(a^{-1}) = [T(a)]^{-1} . \square$$

**Definisi 2.5.5** (Scott, 1964) Ruang nol atau kernel dari $T$, ditulis $Ker(T)$ adalah hirnpunan elemen dari 0 yang petanya adalah elemen identitas $e'$ dari $G$. $Ker(T) = \{a \in G \mid T(a) = e'\}$.

**Teorema 2.5.6** (Scott, 1964) Misalkan $G$ adalah grup dan $T : G \to G$ homomorfisma. $T : G \to G$ isomorfisma jika dan hanya jika $Ker(T) = \{e\}$.

**Bukti**:

$(\Rightarrow)$ Diketahui $T$ adalah isomorfisma, maka $T$ satu-satu dan *onto*. Ambil sebarang $x \in Ker(T)$ berarti $T(x) = e'$. Menurut Teorema 2.5.4 i., $T(e) = e'$, maka $x = e$. Karena $e \in Ker(T)$, maka $Ker(T) = \{e\}$ .

$(\Leftarrow)$ Diketahui $Ker(T)=\{e\}$. Akan dibuktikan $T$ adalah isomorfisma, maka harus ditunjukkan $T$ adalah pemetaan, homomorfisma, *injektif*, dan *onto*.

i. Jelas $T$ adalah pemetaan karena diketahui $T$ homomorfisma.
ii. Jelas $T$ homomorfisma karena sudah diketahui.
iii. Diketahui $Ker(T)=\{e\}$. Misalkan $T(x)=T(y)$, akan dibuktikan bahwa $x=y$. Karena $T$ homomorfisma, maka

$$T(y^{-1}x)=T(y^{-1})T(x)$$
$$T(y^{-1}x)=T(y^{-1})T(y)$$
$$T(y^{-1}x)=T(y^{-1}y)$$
$$T(y^{-1}x)=T(e)=e'.$$

Karena $Ker(T)=\{e\}$, maka

$$y^{-1}x=e$$
$$y^{-1}yx=ey$$
$$ex=ey$$
$$x=y.$$

Karena $T(x)=T(y)$, maka $x=y$. Jadi $T$ *injektif*.

iv. Diketahui $Ker(T)=\{e\}$. Untuk setiap $x\in Ker(T)$, $T(x)=e'$. Jadi jelas bahwa $T$ *onto*.

Karena $T$ adalah pemetaan, homomorfisma, *injektif*, dan *onto*, maka $T$ adalah isomorfisma. □

**Teorema 2.5.7** (Scott, 1964) Misalkan $G$ dan $H$ adalah grup. $R:G\to H$ adalah relasi dan memenuhi:

i. Jika $(x,a)\in R$ dan $(y,b)\in R$ di mana $x,y\in G$ dan $a,b\in H$, maka $(xy,ab)\in R$
ii. Jika $(e_G,a)\in R$, maka $a=e_H$

maka $R:G\to H$ *homomorfisma*.

**Bukti**:

a. Akan dibuktikan bahwa $R$ adalah pemetaan. Misalkan $(x,a)\in R, \exists b\in H$ sedemikian sehingga $(x^{-1},b)\in R$, menurut i. , maka

$$(xx^{-1}, ab)\in R$$
$$(e, ab)\in R$$

menurut ii. berarti $ab = e_H$

$$(ab)b^{-1} = e_H b^{-1}$$
$$a(bb^{-1}) = e_H b^{-1}$$
$$ae = b^{-1}$$
$$a = b^{-1}$$

Misalkan $(x,a')\in R, \exists b\in H$ sedemikian sehingga $(x^{-1},b)\in R$, menurut i., maka

$$(xx^{-1}, a'b)\in R$$
$$(e, a'b)\in R$$

menurut ii. berarti $a'b = e_H$

$$a'bb^{-1} = e_H b^{-1}$$
$$a'e = b^{-1}$$
$$a' = b^{-1}$$

Karena $a = b^{-1}$ dan $a' = b^{-1}$, maka $a' = a$. Oleh karena itu, $R$ adalah pemetaan.

b. Menurut i. $(x,a)\in R$ dan $(y,b)\in R$, maka $(xy, ab)\in R$ berarti bahwa

$$R(x)R(y) = ab$$
$$R(xy) = ab\,.$$

Karena $R$ adalah pemetaan dan $R$ memenuhi i. maka $R$ adalah homomorfisma.

**2.5.8 Teorema isomorfisma** (Scott, 1964) Jika $G$ adalah grup, $H \le G$, $K \lhd G$, dan $T = \{(hK, h(H\cap K)) \mid h\in H\}$, maka $T$ adalah isomorfisma dari $HK/K$ *onto* $H/H\cap K$ . Jadi,

$$\frac{HK}{K} \cong \frac{H}{H \cap K}$$

**Bukti**:
Grup faktor $HK/K$ terdefinisi karena $K \triangleleft HK$ dan $H/H \cap K$ terdefinisi karena $H \cap K \triangleleft K$. Misal $(h_i K, h_i (H \cap K)) \in T$ , $i = 1,2$
maka

$$((h_1 K)(h_2 K), h_1 (H \cap K) h_2 (H \cap K)) \in T$$
$$(h_1 h_2 K, h_1 h_2 (H \cap K)) \in T$$
$$(h_3 K, h_3 (H \cap K)) \in T \text{ di mana } h_1 h_2 = h_3 .$$

Jika $hK = K$ di mana $h \in H$, maka $h(H \cap K) = H \cap K$ di mana $h \in H \cap K$. Jadi, menurut Teorema 2.5.7 $T$ adalah *homomorfisma* dari $HK/K$ *into* $H/H \cap K$. Jadi, jelas $T$ *onto*. Jika $hK \in Ker(T)$, maka $h \in H \cap K$. Oleh karena itu, $hK = K$. Jadi, menurut Teorema 2.5.6 $T$ adalah isomorfisma. □

## 2.6 *S*-grup, *S*-subgrup, dan *S*-homomorfisma

**Definisi 2.6.1** (Scot, 1964) Misalkan $S$ adalah himpunan tak kosong, $G$ adalah grup, dan $*: G \times S \rightarrow G$. *S*-grup adalah pasangan $(G,*)$ sedemikian sehingga jika $a,b \in G$ dan $s \in S$, maka $(ab)*s = (a*s)(b*s)$.

**Contoh 2.6.2** $G = M_{2\times 2}(R)$ terhadap penjumlahan dan $S = R$. $G$ adalah *S*-Grup karena jika diambil sebarang $x, y \in G$ dan $s \in S$ maka berlaku $(x+y)*s = (x*s)+(y*s)$.

**Definisi 2.6.3** (Scott, 1964) *S*-subgrup $H$ dari *S*-grup $G$ adalah sebuah subgrup $H$ dari $G$ sedemikian sehingga $Hs \subset H$ untuk setiap $s \in S$.

**Definisi 2.6.4** (Scott, 1964) Sebuah *S*-homomorfisma dari *S*-grup $G$ into *S*-grup $H$ adalah sebuah fungsi $T$ dari *S*-grup $G$ *into* *S*-grup $H$ sedemikian sehingga jika $g \in G$ dan $s \in S$, maka $T(gs) = (T(g))s$. *S*-endomorfisma dari $G$ adalah *S*-homomorfisma dari

$G$ into $G$. *S*-isomorfisma adalah *S*-homomorfisma yang *bijektif*. *S*-automorfisma dari $G$ adalah isomorfisma dari $G$ *onto* $G$.

**Lema 2.7** (Scott, 1964) **(lema *Zassenhaus*/ lema *butterfly*)**
Jika $G$ adalah *S*-grup $A, B, C$ dan $D$ adalah *S*-subgrup dari $G$, $A \lhd B$, dan $C \lhd D$, maka relasi

$$T = \{(x(A(B \cap C)), x(C(D \cap A))) \mid x \in B \cap D\}$$

adalah *S*-isomorfisma dari $A(B \cap D)/A(B \cap C)$ *onto* $C(D \cap B)/C(D \cap A)$.

**Bukti**:
Fakta bahwa $A(B \cap D)$, $A(B \cap C)$, $C(D \cap B)$, dan $C(D \cap A)$ merupakan *S*-subgrup dari $G$. $A(B \cap C)$ normal dalam $A(B \cap D)$ dan $C(D \cap A)$ normal dalam $C(D \cap B)$.

Ada elemen dari $A(B \cap D)/A(B \cap C)$ yang berbentuk $axA(B \cap C)$ di mana $a \in A$ dan $x \in B \cap D$. Karena $A \lhd B$, maka $ax = x(x^{-1}ax) = xa'$ di mana $a' = x^{-1}ax \in A$. Jadi,

$$axA(B \cap C) = xa'A(B \cap C).$$

Karena $a'A = A$, maka $xa'A(B \cap C) = xA(B \cap C)$. Dengan cara yang sama, ada elemen dari $C(D \cap B)/C(D \cap A)$ yang berbentuk $cx'C(D \cap A)$ di mana $c \in C$ dan $x' \in D \cap B$. Karena $C \lhd D$, maka $cx' = x'(x'^{-1}cx') = x'c'$ di mana $c' = x^{-1}cx \in C$. Jadi,

$$cx'C(D \cap A) = x'c'C(D \cap A).$$

Karena $c'C = C$, maka $x'c'C(D \cap A) = x'C(D \cap A)$.

Jika $u \in A(B \cap C) \cap B \cap D = A(B \cap C) \cap D$, maka $u = ac$ di mana $a \in A$ dan $c \in (B \cap C)$. Karena $A \lhd B$, maka $u = ac$ $u = ac = c(c^{-1}ac) = ca'$, di mana $c^{-1}ac = a'$. Jadi, $u = ac = ca'$. Jika $u = ca' \in D$, maka $a' \in D$. Karena $a' \in A$ dan $a' \in D$, maka $a' \in A \cap D$ dan $u \in C(D \cap A) \cap B \cap D$. Dengan cara yang sama, $u \in A(B \cap C) \cap B \cap D$ jika dan hanya jika $u \in C(D \cap A) \cap B \cap D$ berdasarkan bahwa jika $x \in B \cap D$ dan $y \in B \cap D$, maka

$xA(B \cap C) = yA(B \cap C)$ jika dan hanya jika $xC(D \cap A) = yC(D \cap A)$. Oleh karena itu, $T$ adalah fungsi *injektif* dari $A(B \cap D)/A(B \cap C)$ *onto* $C(D \cap B)/C(D \cap A)$. Jika $s \in S$ dan $x \in B \cap D$, maka

$$\begin{aligned} T(xA(B \cap C)s) &= T((xs)A(B \cap C)) = (xs)C(D \cap A) \\ &= (xC(D \cap A))s = T(xA(B \cap C))s. \end{aligned}$$

Maka $T$ adalah $S$-isomorfisma. □

# BAB III
# HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas tentang definisi-definisi, lema, dan teorema-teorema yang berhubungan dengan subnormal dan subgrup komposisi.

## 3.1 Barisan Subnormal, Barisan Normal, dan Barisan Komposisi

**Definisi 3.1.1 Barisan subnormal dan barisan normal** (Hungerford,1991) Barisan subnormal dari subgrup-subgrup $G$ adalah barisan $G_0 = \{e\}, G_1, G_2, ..., G_n = G$ sedemikian sehingga $G_{i-1} \triangleleft G_i$ untuk $i = 0,1,2,\ldots,n$.

Barisan normal adalah barisan subnormal sedemikian sehingga untuk setiap $G_i$ adalah subgrup normal dari $G$.

**Contoh 3.1.2**

i. Contoh barisan subnormal: Misal $G = Z_8$ grup. Barisan $\{\overline{0}\} \triangleleft \{\overline{0}, \overline{4}\} \triangleleft \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\} \triangleleft \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, ..., \overline{7}\}$ adalah barisan subnormal dari $G = Z_8$.

ii. Misal $G = Z_{18}$ adalah grup tehadap penjumlahan maka $\{\overline{0}\} \triangleleft \{\overline{0}, \overline{9}\} \triangleleft \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{12}, \overline{15}\} \triangleleft \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{17}\} = Z_{18}$ adalah barisan normal untuk $Z_{18}$.

**Definisi 3.1.3** (Sharipov, 2009) Barisan subnormal *ascending* dinotasikan dengan:

$$\{e\} = A_0 \triangleleft A_1 \triangleleft A_2 \triangleleft ... \triangleleft A_n = G$$

sedangkan *descending* dinotasikan dengan:

$$G = B_0 \triangleright B_1 \triangleright B_2 \triangleright ... \triangleright B_n = \{e\}$$

**Definisi 3.1.4** (Hungerford, 1965) Dua barisan subnormal adalah ekuivalen jika mempunyai panjang yang sama (yaitu, jumlah sama pada faktor nontrivial) dan ada permutasi $\pi \in S_n$ sedemikian sehingga grup $G_i / G_{i-1}$ isomorfik dengan $G_{\pi(i)} / G_{\pi(i)-1}$ untuk semua $i = 0,1,2,\ldots,n$.

**Definisi 3.1.5** (Sharipov, 2009) Sebuah *refinement* (peghalusan) dari barisan subnormal $\{e\} = G_0, G_1,..., G_n = G$ (di mana $G_{i-1} \triangleleft G_i$) adalah barisan subnormal $\{e\} = G'_0, G'_1,..., G'_m = G$ (di mana $G'_{i+1} \triangleleft G'_i$) sedemikian sehingga ada fungsi naik $f : \{1,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,m\}$ dan berlaku $G_i \triangleleft G'_{f(i)}$ untuk setiap *i*.

**Teorema 3.1.6** Terdapat dua barisan subnormal dari grup $G$ yang memiliki *refinement* ekuivalen.

**Bukti**:
Misalkan $G = G_0, G_1, G_2, G_3,..., G_n = \{e\}$ (di mana $G_{i+1} \triangleleft G_i$) dan $G = H_0, H_1, H_2, H_3,..., H_m = \{e\}$ (di mana $H_{i+1} \triangleleft H_i$) adalah dua barisan subnormal dari $G$. Misalkan $G_{i,j} = G_{i+1} \cup (G_i \cap H_j)$, $0 \leq j \leq m$. Jadi,

$$G_{i,j} = G_{i+1} \cup (G_i \cap H_j) \triangleright G_{i+1} \cup (G_i \cap H_{j+1}) = G_{i,j+1}.$$

Karena $H_0 = G$, maka $G_{i,0} = G_i$ dan karena $H_m = \{e\}$, maka $G_{i,m} = G_{i+1}$. Misalkan $A = G_{i+1}$, $B = G_i$, $C = H_{j+1}$, $D = H_j$ dalam Lema 2.7 *Zassenhaus*, maka terlihat bahwa $G_{i,j+1} \triangleleft G_{i,j}$. Jadi, grup $G_{i,j}$ membentuk barisan subnormal yang merupakan penghalusan dari barisan pertama dan mempuyai $(m+1)(n+1)$ suku. Dengan cara yang sama, pada barisan ke-2, yaitu himpunan $H_{i,j} = H_{j+1} \cup (H_j \cap G_i)$, $0 \leq i \leq n$. Maka $H_{i+1,j} \triangleleft H_{i,j}$ dan $H_{i,j}$ membentuk barisan subnormal yang merupakan penghalusan dari barisan ke-2 yang mempunyai $(m+1)(n+1)$ suku. Misalkan pemetaan $\sigma : G_{i,j} / G_{i,j+1} \to H_{i,j} / H_{i+1,j}$ adalah pemetaan *injektif*. Maka didapatkan korespondensi 1-1 dari faktor-faktor komposisi, di mana hubungan antara faktor-faktor tersebut isomorfik.Menurut Lema 2.7

$$\frac{G_{i,j}}{G_{i,j+1}} = \frac{G_{i+1} \cup (G_i \cap H_j)}{G_{i,j+1}} \cong \frac{H_{j+1} \cup (G_i \cap H_j)}{H_{j+1} \cup (G_{i+1} \cap H_j)} = \frac{H_{i,j}}{H_{i+1,j}}$$

Jadi, terdapat dua barisan subnormal yang mempunyai *refinement* (penghalusan) ekuivalen. □

**Definisi 3.1.7 Barisan komposisi** (Bhattacharya, 1986)

Barisan komposisi dari grup $G$ adalah sebuah barisan normal $(G_0, ..., G_n)$ di mana grup faktor $G_i / G_{i-1}$ merupakan grup *simple*. Grup faktor $G_i / G_{i-1}$ disebut faktor komposisi dari $G$ .

**Contoh 3.1.8**

a. Misalkan $(G,\circ)$ adalah grup *simple*. Maka $(e) \lhd G$ adalah barisan komposisi dari $G$ , dengan $G$ dan $\{e\}$ adalah faktor komposisinya.

b. Misalkan $G = Z_6$ adalah grup siklik. Maka diperoleh dua barisan komposisi, yaitu:

   $\{\bar{0}\} = \langle \bar{6} \rangle \lhd \langle \bar{2} \rangle \lhd \langle \bar{1} \rangle = G$ dan $\{\bar{0}\} = \langle \bar{6} \rangle \lhd \langle \bar{3} \rangle \lhd \langle \bar{1} \rangle = G \cdot$

   Untuk barisan komposisi pertama, faktor–faktor komposisinya adalah $\langle \bar{1} \rangle / \langle \bar{2} \rangle$ dan $\langle \bar{2} \rangle / \langle \bar{6} \rangle$, sedangkan untuk barisan ke-2, faktor-faktor komposisinya adalah $\langle \bar{1} \rangle / \langle \bar{3} \rangle$ dan $\langle \bar{3} \rangle / \langle \bar{6} \rangle$.

c. Misalkan $G = Z_{18}$ adalah grup tehadap penjumlahan maka

   $$\{\bar{0}\} \lhd \{\bar{0}, \bar{9}\} \lhd \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}, \overline{15}\} \lhd \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{17}\} = Z_{18}$$

   adalah barisan normal untuk $Z_{18}$ di mana,

   $\{e\} = \{\bar{0}\}$, $G_1 = \{\bar{0}, \bar{9}\}$, $G_2 = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}, \overline{15}\}$ , dan $G_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{17}\}$.

   Akan ditunjukkan bahwa $G_i / G_{i-1}$ *simple* $\forall i$ yaitu hanya memiliki 2 subgrup normal yaitu $\{e\} = \{0\}$ dan dirinya sendiri.

   i. $G_1 / G_0 = \{0,9\}$ , $G_1 / G_0$ *simple* karena hanya mempunyai 2 subgrup normal yaitu $\{0\}$ dan dirinya sendiri,

   ii. $G_2 / G_1 = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}, \overline{15}\}$ , $G_2 / G_1$ *simple* karena hanya mempunyai 2 subgrup normal yaitu $\{0\}$ dan dirinya sendiri,

iii. $G_3/G_2 = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\ldots,\overline{17}\} = Z_{18}$ , $G_3/G_2$ *simple* karena hanya mempunyai 2 subgrup normal yaitu $\{0\}$ dan dirinya sendiri.

Karena $G_i/G_{i-1}$ *simple* $\forall i$ , maka

$$\{\bar{0}\} \lhd \{\bar{0},\bar{9}\} \lhd \{\bar{0},\bar{3},\bar{6},\bar{9},\overline{12},\overline{15}\} \lhd \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\ldots,\overline{17}\} = Z_{18}$$

merupakan barisan komposisi.

**Definisi 3.1.9** (Scott, 1964) $H$ subgrup sejati dari grup $G$ disebut subgrup normal maksimal jika dan hanya jika memenuhi aksioma berikut:

i. $H$ normal dalam $G$ dan ada subgrup normal $K$ dari grup $G$ sedemikian sehingga $K \geq H$ , $K = H$ atau $K = G$ ,

ii. $H$ normal dalam $G$ dan $G/H$ adalah grup *simple*.

**Lema 3.1.10** (Bhattacharya, 1986) Setiap grup berhingga mempunyai barisan komposisi.

**Bukti**:

Jika $|G| = 1$ atau jika $G$ adalah *simple*, maka $G$ adalah grup trivial (Jika $|G| = 1$, maka $G$ adalah barisan komposisi tanpa faktor-faktor). Misalkan $G$ bukan *simple*, berarti ada subgrup normal lain selain $\{e\}$ dan $G$ . Misalkan $H$ adalah subgrup normal maksimal dari $G$, maka $H$ mempunyai barisan komposisi $\{e\} \lhd H_1 \lhd \ldots \lhd H_n = H$ . Oleh karena itu, $G$ mempunyai barisan komposisi $\{e\} \lhd H_1 \lhd \ldots \lhd H_n = H \lhd G$ . □

## 3.2 Subgrup Subnormal dan Subgrup Komposisi

**Definisi 3.2.1 Subgrup subnormal** (Scott,1964)

Sebuah subgrup $H$ dari grup $G$ adalah subnormal dalam $G$ , dinotasikan $H \lhd\lhd G$ , jika ada barisan subgrup dari grup $G$ , yaitu $H = H_0, H_1, \ldots, H_n = G$ sedemikian sehingga $H_i \lhd H_{i+1}$ untuk setiap $i$ .

**Contoh 3.2.2** Misalkan $G = Z_{18}$ adalah grup tehadap penjumlahan. $H = H_0 = \{\overline{0},\overline{9}\}$, $H_1 = \{\overline{0},\overline{3},\overline{6},\overline{9},\overline{12},\overline{15}\}$, dan $H_2 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},...,\overline{17}\}$.

Terdapat barisan normal yaitu

$$\{\overline{0},\overline{9}\} \lhd \{\overline{0},\overline{3},\overline{6},\overline{9},\overline{12},\overline{15}\} \lhd \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\dots,\overline{17}\} = Z_{18}.$$

Karena terdapat barisan $H = H_0, H_1, H_2 = G$ sedemikian sehingga $H_i \lhd H_{i+1}$ untuk setiap $i$, maka $H \lhd\lhd G$.

**Teorema 3.2.3** Jika $H$ adalah subgrup subnormal dari $G$ dan $K \leq G$, maka $H \cap K$ adalah subgrup *k*-subnormal (yaitu, ukuran subnormal adalah *k* ) dalam $K$.

**Bukti**:

Karena $H$ adalah subgrup *k*-subnormal dari $G$, maka terdapat barisan subnormal, yaitu:

$$H = H_0, H_1, H_2, ..., H_k = G.$$

Jelas bahwa barisan subnormal dari $H \cap K$ dalam $K$, yaitu:

$H \cap K = H_0 \cap K \lhd H_1 \cap K \lhd H_2 \cap K \lhd ... \lhd H_k \cap K = K$. Akan ditunjukkan bahwa setiap $H_i \cap K$ normal dalam $H_{i+1} \cap K$. Fakta/kenyataannya berlaku bahwa $H_i \cap K = H_i \cap (H_{i+1} \cap K)$. Karena $H_i$ normal dalam $H_{i+1}$, maka $H_i \cap K = H_i \cap (H_{i+1} \cap K)$ normal dalam $H_{i+1} \cap K$ untuk setiap *i*. Jadi, terbukti bahwa $H \cap K$ adalah subgrup *k*-subnormal dalam $K$. □

**Teorema 3.2.4** Misalkan $A \leq B \leq G$. Jika $A$ adalah subgrup $\alpha$-subnormal dari $B$ dan $B$ adalah subgrup $\beta$-subnormal dari $G$, maka $A$ adalah subgrup $(\alpha + \beta)$-subnormal dari $G$.

**Bukti**:

Karena $A$ adalah subgrup $\alpha$-subnormal dari $B$, maka terdapat barisan subgrup dari grup $B$, yaitu:

$$A = A_0, A_1, A_2, ..., A_\alpha = B \qquad (3.1)$$

sedemikian sehingga $A_i \lhd A_{i+1}$ untuk setiap *i*. Karena $B$ adalah subgrup $\beta$-subnormal dari $G$, maka terdapat barisan subgrup dari grup $G$, yaitu:

$$B = B_0, B_1, B_2, ..., B_\beta = G \tag{3.2}$$

Sedemikian sehingga $B_i \lhd B_{i+1}$ untuk setiap *i*. Dari persamaan (3.1) dan (3.2) maka diperoleh $A_\alpha = B_0$ sehingga terdapat barisan baru, yaitu:

$$A = A_0, A_1, A_2, ..., A_\alpha = B_0, B_1, B_2, ..., B_\beta = G \tag{3.3}$$

di mana untuk setiap *i*, suku ke- $i$ normal dalam suku ke- $i+1$. Dari persamaan (3.3) jelas bahwa $A$ adalah subgrup $(\alpha+\beta)$-subnormal dari $G$. □

**Teorema 3.2.5** Jika $A$ dan $B$ adalah subgrup subnormal dari grup $G$, maka $A \cap B$ adalah subgrup subnormal dari $G$.

**Bukti**:
Diketahui $A$ subgrup subnormal dari grup $G$, maka terdapat barisan subgrup dari $G$, yaitu:

$$A = A_0, A_1, ..., A_n = G \tag{3.4}$$

sedemikian sehingga $A_i \lhd A_{i+1}$. $B$ subgrup subnormal dari grup $G$, maka terdapat barisan subgrup dari $G$, yaitu:

$$B = B_0, B_1, ..., B_m = G \tag{3.5}$$

sedemikian sehingga $B_i \lhd B_{i+1}$. Menurut Teorema 3.1.4, dari persamaan (3.4) dan (3.5) dapat dibentuk barisan baru, yaitu:

$$A_{ij} = A_i \cup (A_{i+1} \cap B_j), 0 \le j \le m \text{ dan } B_{ij} = B_j \cup (B_{j+1} \cap A_i), 0 \le i \le n.$$

Akan dibuktikan $A \cap B$ adalah subgrup

a. Ambil sebarang $a \in A \cap B$ dan $b \in A \cap B$ akan dibuktikan $a * b \in A \cap B$ dan $a^{-1} \in A \cap B$

   i. $a \in A \cap B$ berarti $a \in A$ dan $a \in B$. $b \in A \cap B$ berarti $b \in A$ dan $b \in B$. Karena $A$ dan $B$ adalah subgrup, maka $a * b \in A$ dan $a * b \in B$. Jadi, $a * b \in A \cap B$.

ii. $a \in A \cap B$ berarti $a \in A$ dan $a \in B$. Karena $A$ dan $B$ adalah subgrup, maka $a^{-1} \in A$ dan $a^{-1} \in B$. Jadi, $a^{-1} \in A \cap B$.

b. Ambil sebarang $a \in A \cap B$ dan $b^{-1} \in A \cap B$ akan dibuktikan $a * b^{-1} \in A \cap B$,
$a \in A \cap B$ berarti $a \in A$ dan $a \in B$. $b^{-1} \in A \cap B$ berarti $b^{-1} \in A$ dan $b^{-1} \in B$. Karena $A$ dan $B$ adalah subgrup, maka $a * b^{-1} \in A$ dan $a * b^{-1} \in B$. Jadi, $a * b^{-1} \in A \cap B$.

Karena a dan b dipenuhi, maka menurut Teorema 2.3.2 $A \cap B$ subgrup.
Menurut Teorema 3.1.4 $A_{i,j} = A_i \cup (A_{i+1} \cap B_j) \lhd A_1 \cup (A_{i+1} \cap B_{j+1}) = A_{i,j+1}$ dan $B_{ij} = B_j \cup (B_{j+1} \cap A_i) \lhd B_j \cup (B_{j+1} \cap A_{i+1}) = B_{i+1,j}$. Karena $A \cap B$ adalah subgrup dan terdapat barisan $A_{ij} = A_i(A_{i+1} \cap B_j),\ 0 \le j \le m$ dan $B_{ij} = B_j(B_{j+1} \cap A_i),\ 0 \le i \le n$ di mana $A_{i,j} = A_i(A_{i+1} \cap B_j) \lhd A_1(A_{i+1} \cap B_{j+1}) = A_{i,j+1}$ dan $B_{ij} = B_j(B_{j+1} \cap A_i) \lhd B_j(B_{j+1} \cap A_{i+1}) = B_{i+1,j}$, maka terbukti bahwa $A \cap B$ adalah subgrup subnormal dari $G$. □

**Definisi 3.2.6 Subgrup komposisi** (Scott,1964)
Sebuah subgrup $H$ dari grup $G$ adalah subgrup komposisi pada tipe $n$ jika ada barisan subgrup dari grup $G$, yaitu $G = H_0, H_1, ..., H_n = H$ sedemikian sehingga $H_i / H_{i+1}$ *simple* dan tidak sama dengan $\{e\}$ ($G$ disebut subgrup komposisi tipe 0 karena $G = H_0$ dan $H$ disebut subgrup komposisi tipe $n$ karena $H_n = H$ ).

**Contoh 3.2.7**
a. Misal $G = Z_{18}$ adalah grup tehadap penjumlahan. $G = H_0 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, ..., \overline{17}\}$, $H_1 = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}, \overline{15}\}$, $H = H_2 = \{\bar{0}, \bar{9}\}$ .Jika barisan normal pada Contoh 3.2 ditulis secara *descending* yaitu

$$Z_{18} = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\ldots,\overline{17}\} \rhd \{\bar{0},\bar{3},\bar{6},\bar{9},\overline{12},\overline{15}\} \rhd \{\bar{0},\bar{9}\},$$

maka $H_i / H_{i+1}$ terdefinisi untuk setiap $i$. Menurut Contoh 3.1.8 c. $H_i / H_{i+1}$ *simple*. Jadi, $H$ adalah subgrup komposisi dari $G$ pada tipe $2$.

b. Misal $G = Z_6$ adalah grup siklik. Maka diperoleh barisan komposisi, yaitu:

$$G = \langle \bar{1} \rangle \rhd \langle \bar{2} \rangle \rhd \langle \bar{6} \rangle = \{\bar{0}\}$$

di mana $G = H_0 = \langle \bar{1} \rangle$, $H_1 = \langle \bar{2} \rangle$, dan $H = H_2 = \langle \bar{6} \rangle$. Faktor–faktor komposisinya adalah $\langle \bar{1} \rangle / \langle \bar{2} \rangle$ dan $\langle \bar{2} \rangle / \langle \bar{6} \rangle$ merupakan grup *simple*. Jadi, $H = H_2 = \langle \bar{6} \rangle$ adalah subgrup komposisi dari $G$ pada tipe $2$.

**Teorema 3.2.8** Jika $H$ adalah subgrup komposisi dari grup $G$ pada tipe $n$, $K \lhd\lhd G$ dan $H < K < G$, maka

i. $K$ adalah subgrup komposisi dari $G$ pada tipe $m < n$

ii. $H$ adalah subgrup komposisi dari $K$ pada $l$, di mana $l < n$.

**Bukti**:

Diketahui $H$ subgrup komposisi dari $G$, maka terdapat barisan subgrup dari grup $G$, yaitu:

$$G = H_0, H_1, ..., H_n = H \qquad (3.6)$$

sedemikian sehingga $H_i / H_{i+1} \neq \{e\}$ dan $H_i / H_{i+1}$ *simple.*

$K$ adalah subgrup subnormal dari $G$, maka terdapat barisan subgrup dari grup $G$, yaitu:

$$K = K_0, K_1, ..., K_m = G \qquad (3.7)$$

sedemikian sehingga $K_i \lhd K_{i+1}$.

Persamaan (3.6) adalah barisan turun dan persamaan (3.7) adalah barisan naik. Jika barisan dari dua persamaan tersebut digabungkan, maka diperoleh barisan baru, yaitu:

$$G = K_0, ..., K_m = K, H_1 \cap K, ..., H_n \cap K = H \qquad (3.8)$$

adalah barisan normal yang memuat $H$ dan $K$. Menurut Teorema 3.1.4 ada *refinement* (penghalusan) ekuivalen antara (3.6) dan (3.8). Jadi,

$K$ adalah subgrup komposisi dari $G$ pada tipe $m < n$ dan $H$ adalah subgrup komposisi dari $K$ pada tipe $l < n$.

**Teorema 3.2.9** Jika $H$ dan $K$ adalah subgrup komposisi dari $G$ pada tipe $m$ dan $n$, maka $H \cap K$ adalah subgrup komposisi dari $G$ pada tipe $\leq m+n$.

**Bukti**:
Diketahui $H$ subgrup komposisi dari $G$, maka terdapat barisan subgrup dari grup $G$, yaitu:

$$G = H_0, H_1, ..., H_m = H \tag{3.9}$$

sedemikian sehingga $H_i / H_{i+1}$ *simple.*
$K$ subgrup komposisi dari $G$, maka terdapat barisan subgrup dari grup $G$, yaitu:

$$G = K_0, K_1, ..., K_n = K \tag{3.10}$$

sedemikian sehingga $K_i / K_{i+1}$ *simple.* Teorema tersebut jelas jika $m = 0$ atau $n = 0$. Jika $m = n = 1$, maka salah satu $(G, H, H \cap K)$ atau $(G, H \cap K)$ mempunyai faktor-faktor *simple*. Oleh karena itu, $H \cap K$ adalah subgrup komposisi pada tipe $1$ atau $2$. Jadi, Tanpa menghilangkan sifat kegeneralisian $m > 1$.

Jika $m = 1$ dan $n = n$, maka $H_1 \cap K$ adalah subgrup komposisi dari $G$ pada tipe $\leq n+1$. Berdasarkan Teorema 3.2.8 $H_1 \cap K$ adalah subgrup komposisi dari $H_1$ pada tipe $\leq n$. fakta bahwa $H \cap K = H \cap (H_1 \cap K)$. $H \cap K = H \cap (H_1 \cap K)$ adalah subgrup dari $H_1$ pada tipe $\leq (m-1)+n+1$. Oleh karena itu, $H \cap K$ adalah subgrup komposisi dari $G$ pada tipe $\leq m+n$. □

**Teorema 3.2.10** Jika grup $G$ mempunyai barisan komposisi, maka ada subgrup subnormal $A$ yang merupakan subgrup komposisi.

**Bukti**:
Diketahui $G$ mempuyai barisan komposisi, yaitu:

$$\{e\} = A_0, A_1, A_2, ..., A_{r-1}, A_r = G \tag{3.11}$$

sedemikian sehingga $G_i / G_{i-1}$ *simple* untuk setiap *i*. $G_i / G_{i-1}$ terdefinisi karena $G_{i-1} \triangleleft G_i$. Karena terdapat barisan normal

$$A = A_0, A_1, A_2, ..., A_{r-1}, A_r = G \tag{3.12}$$

sedemikian sehingga $A_{i-1} \triangleleft A_i$, maka menurut Definisi 3.2.1 suatu subgrup $A$ dari grup $G$ adalah subgrup subnormal. Jika barisan pada persamaan (3.12) ditulis secara *descending* yaitu $G = A_r, A_{r-1}, A_{r-2}, ..., A_1, A_0 = A$, maka $A_i / A_{i+1}$ *simple*. Oleh karena itu, menurut Definisi 3.2.6 subgrup subnormal $A$ adalah subgrup komposisi. □

**Teorema 3.2.11** Setiap subgrup komposisi selalu subnormal.

**Bukti**:
Misalkan $H$ adalah subgrup komposisi dari grup $G$ maka terdapat barisan normal

$$G = H_0, H_1, ..., H_n = H \tag{3.13}$$

di mana $H_i / H_{i+1}$ *simple* dan $H_i / H_{i+1} \neq E$.

$H_i / H_{i+1}$ terdefinisi karena $H_{i+1} \triangleleft H_i$

Jika persamaan (3.13) ditulis secara *asscending* yaitu $H = H_n, H_{n-1} ..., H_1, H_0 = G$, maka terdapat barisan normal $H_n \triangleleft H_{n-1} \triangleleft, ..., H_1 \triangleleft H_0$ dan berlaku $H_i \triangleleft H_{i+1}$ untuk setiap *i*. Oleh karena itu, menurut Definisi 3.2.1 $H$ adalah subgrup subnormal dari $G$. □

# BAB IV
# KESIMPULAN

Dari pembahasan skripsi ini dapat disimpulkan hal-hal sebagai berikut:

1. Jika $H$ subgrup *k*-subnormal dari $G$ dan $K \leq G$, maka $H \cap K$ adalah subgrup *k*-subnormal dari $K$.
2. Misal $A \leq B \leq G$. Jika $A$ adalah subgrup α-subnormal dari $B$ dan $B$ adalah subgrup β-subnormal dari $G$, maka $A$ adalah subgrup (α+β)-subnormal dari $G$.
3. Jika $A$ dan $B$ adalah subgrup subnormal dari $G$, maka $A \cap B$ adalah subgrup subnormal dari $G$.
4. Jika grup $G$ mempunyai barisan komposisi, maka terdapat subgrup subnormal $A$ yang merupakan subgrup komposisi.
5. Setiap subgrup komposisi adalah subgrup subnormal.

# DAFTAR PUSTAKA


Alexander. 2009. *Aljabar*. Metris. Jakarta.

Arifin, A. 2000. *Aljabar*. ITB. Bandung.

Aschbacher, M. 2000. *Finite Group Theory*. 2nd ed. Chambridge University Perss. England.

Bhattacharya, P.B. 1986. *Basic Abstract Algebra*. Chambridge University Perss. New york.

Dummit, D.S. 2002. *Abstract Algebra*. second Edition. John Willey and Sons Inc. New york.

Harshbarger, R.J. 1985. *Mathematical Applications.* Second eddition. D.C. Heath and Company. USA.

Herstein, I.N. 1975. *Topics in* Algebra. 2nd ed. Springer-Verlag. New york.

Hungerford, T. W. 1991. *Algebra*. Springer-Verlag. New york.

Keedy, M. L. 1963. *A Modern Introduction to Basic Mathematics*. Addison-Wesley Publishing Company Inc. USA.

Leithold, L. 1972. *The Calculus with Analitic Geometry.* Harper International Edition, Harper and Row, Publishers. New York.

Sharipov, R.A. 2009. *Transfinite normal and composition series of groups*. arXiv:0908.2257 [math.GR].

Scott, W.R. 1964. *Group Theory*. Prentice-Hall, Inc. USA.