

**ANALISIS DINAMIK MODEL INFEKSI BAKTERIOFAGE
PADA BAKTERI LAUT SIANOBAKTERIA**

SKRIPSI

Oleh:

NI PUTU NOVI ANGGARINI
0710940003-94



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2011**

ANALISIS DINAMIK MODEL INFENSI BAKTERIOFAGE PADA BAKTERI LAUT SIANOBAKTERIA

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh:
Ni Putu Novi Anggarini
0710940003-94



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2011**

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

ANALISIS DINAMIK MODEL INFEKSI BAKTERIOFAGE PADA BAKTERI LAUT SIANOBAKTERIA

oleh:

Ni Putu Novi Anggarini

0710940003-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Pengaji
pada tanggal 16 Agustus 2011
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Dosen Pembimbing I

Dosen Pembimbing II

Dr. Agus Suryanto, M.Sc.
NIP. 196908071994121001

Dr. Abdul Rouf A., M.Sc.
NIP. 196709071992031001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc.
NIP. 196709071992031001

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Ni Putu Novi Anggarini
NIM : 0710940003-94
Jurusan : Matematika
Penulis Skripsi berjudul : Analisis Dinamik Model Infeksi Bakteriofage pada Bakteri Laut Sianobakteria

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. isi skripsi yang saya buat benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka skripsi ini,
2. apabila di kemudian hari ternyata skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 16 Agustus 2011

Yang menyatakan,

(Ni Putu Novi Anggarini)
NIM. 0710940003

ANALISIS DINAMIK MODEL INFEKSI BAKTERIOFAGE PADA BAKTERI LAUT SIANOBAKTERIA

ABSTRAK

Bakteriofage merupakan virus yang menyerang bakteri. Infeksi bakteriofage dapat mengakibatkan kematian bakteri akibat terjadinya lisis sel. Pada skripsi ini dibahas konstruksi dan analisis kestabilan model infeksi bakteriofage pada sianobakteria. Infeksi bakteriofage pada sianobakteria dimodelkan sebagai sistem persamaan differensial biasa nonlinier dengan tiga variabel, yaitu jumlah bakteri yang rentan, jumlah bakteri yang terinfeksi dan jumlah bakteriofage. Berdasarkan hasil analisis, diperoleh tiga titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan nol, titik kesetimbangan bebas penyakit, dan titik kesetimbangan endemik. Faktor replikasi virus (b) dipilih sebagai parameter utama yang mempengaruhi dinamika infeksi. Dari analisis kestabilan diperoleh bahwa keadaan punah tidak pernah terjadi, populasi berada pada keadaan bebas penyakit jika faktor replikasi virus lebih kecil dari nilai batas b^* dan berada dalam keadaan endemik jika faktor replikasi virus lebih besar dari nilai batas b^* . Bifurkasi Hopf terjadi pada saat populasi berada dalam keadaan endemik dengan nilai bifurkasi b_0 .

Kata kunci: faktor replikasi virus, model infeksi bakteriofage, titik kesetimbangan, kestabilan.

DYNAMICAL ANALYSIS OF BACTERIOPHAGE INFECTION IN MARINE BACTERIA CYANOBACTERIA

ABSTRACT

Bacteriophage is a virus that attacks bacteria. Bacteriophage infection can result mortality due to bacterial cell lysis. This final project discusses the construction and analysis of the stability of bacteriophage infection model in cyanobacteria. Bacteriophage infection in cyanobacteria is modelled as nonlinier ordinary differential equation system with three variables, namely susceptible, infected, and bacteriophage. According to the analysis, the model has three equilibrium points, namely vanishing, free disease and endemic equilibrium point. Virus replication factor (b) is chosen as the main parameter. This parameter affects infection dynamic. Stability analysis shows that vanishing condition never happen, population become in disease free condition if virus replication factor smallest than threshold value b^* and becomes in endemic condition if virus replication factor more than threshold value b^* . Hopf bifurcation appears when population in endemic condition with bifurcation value b_0 .

Keyword: virus replication faktor, bacteriophage infection model, equilibrium point, stability.

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa yang telah memberikan bimbingan dan petunjuk-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "*Analisis Dinamik Model Infeksi Bakteriofage pada Bakteri Laut Sianobakteria*" dengan baik dan lancar.

Dalam penyelesaian skripsi ini penulis banyak mendapat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak, karena itu pada kesempatan kali ini penulis ingin mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Dr. Agus Suryanto, M.Sc., selaku pembimbing I atas segala bimbingan, nasihat, motivasi serta kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini.
2. Dr. Abdul Rouf A., M.Sc., selaku pembimbing II atas segala bimbingan, nasihat, motivasi serta kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini.
3. Dr. Wuryansari Muharini K., M.Si., Kwardiniya A., S.Si., M.Si., Drs. M. Muslih, M.Si., selaku dosen pengujii pada ujian skripsi atas segala saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
4. Seluruh bapak/ibu dosen Matematika yang telah memberikan bekal dan ilmu pengetahuan kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
5. Papa, mama, kakak, adik dan seluruh keluarga besar penulis yang senantiasa tanpa henti memberikan semangat dan dorongan serta doanya agar penulis dapat menyelesaikan skripsinya.
6. Keluarga besar Matematika 2007 dan semua pihak yang telah membantu proses penulisan skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu. Terimakasih.

Penulis menyadari bahwa dalam skripsi ini masih banyak kekurangan, untuk itu penulis sangat mengharapkan kritik dan saran melalui email penulis putu.novi@gmail.com.

Akhirnya semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca, khususnya mahasiswa Matematika Universitas Brawijaya.

Malang, 16 Agustus 2011
Penulis.

DAFTAR ISI

Halaman

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	iii
LEMBAR PERNYATAAN	v
ABSTRAK.....	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR.....	xi
DAFTAR ISI.....	xiii
DAFTAR TABEL.....	xv
DAFTAR GAMBAR.....	xvii
DAFTAR LAMPIRAN	xix
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Rumusan Masalah.....	2
1.3. Batasan Masalah.....	2
1.4. Tujuan Penulisan.....	2
BAB II TINJAUAN PUSTAKA.....	3
2.1. Sistem Dinamik	3
2.2. Sistem Otonomus Linier.....	4
2.3. Sistem Otonomus Nonlinier	5
2.4. Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz	8
2.5. Bifurkasi	9
2.6. Pengetahuan Lebih Lanjut Mengenai Sianobakteria, Bakteriofage dan Interaksinya dengan Bakteri.....	14
2.6.1 Sianobakteria	14
2.6.2 Bakteriofage dan Interaksinya dengan Bakteri...	14
BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN	17
3.1. Konstruksi Model.....	17
3.1.1. Laju Perubahan Bakteri yang Rentan.....	17
3.1.2. Laju Perubahan Bakteri yang Terinfeksi.....	18
3.1.3. Laju Perubahan Bakteriofage	19
3.2. Penyederhanaan Model	20
3.3 Titik Kesetimbangan	22

3.3.1. Titik Kesetimbangan E_0	22
3.3.2. Titik Kesetimbangan E_f	23
3.3.3. Titik Kesetimbangan E_+	24
3.4. Kestabilan Titik Kesetimbangan	27
3.4.1. Kestabilan Titik Kesetimbangan E_0	27
3.4.2. Kestabilan Titik Kesetimbangan E_f	27
3.4.1. Kestabilan Titik Kesetimbangan E_+	29
3.5. Simulasi Numerik.....	35
3.5.1. Simulasi Numerik untuk $b = 15$	38
3.5.1.1. Simulasi Numerik untuk $b = 80$	39
3.5.1.2. Simulasi Numerik untuk $b = 95$	41
BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN	45
4.1 Kesimpulan	45
4.2 Saran	45
DAFTAR PUSTAKA	47
LAMPIRAN	49

DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 3.1 Syarat eksistensi dan kestabilan sistem (3.9)	35
Tabel 3.2 Nilai parameter persamaan (3.5)	36
Tabel 3.3 Nilai parameter persamaan (3.9)	36



DAFTAR GAMBAR

	Halaman	
Gambar 2.1	Hasil analisis $\mu = -1$	11
Gambar 2.2	Hasil analisis $\mu = 0$	11
Gambar 2.3	Hasil analisis $\mu = 0,5$	12
Gambar 2.4	Sianobakteria	15
Gambar 2.5	Daur perkembangbiakan bakteriofage	16
Gambar 3.1	Diagram kompartemen infeksi bakteriofage pada bakteri	17
Gambar 3.2	Solusi numerik untuk nilai $b=15$	38
Gambar 3.3	Solusi numerik untuk nilai $b=80$	39
Gambar 3.4	Solusi numerik untuk nilai $b=80$ dengan (a) populasi yang rentan dan terinfeksi..... (b) populasi bakteriofage	40
Gambar 3.5	Plot 3D $b=80$	41
Gambar 3.6	Solusi numerik untuk nilai $b=95$	42
Gambar 3.7	Solusi numerik untuk nilai $b=95$ dengan dua nilai awal (a) populasi yang rentan..... (b) populasi yang terinfeksi	42
Gambar 3.8	(c) populasi virus	43
	Plot 3D untuk dua nilai awal.....	44

DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

- Lampiran 1 *Listing Program* untuk Simulasi Numerik Titik Kesetimbangan pada Model Infeksi Bakteriofage dengan Dua Nilai Awal. 49



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Bakteriofage merupakan virus yang menyerang bakteri dan serangan ini dapat menyebabkan kematian akibat proses lisis sel bakteri. Bakteriofage diperkirakan menjadi entitas yang paling beragam di biosfer dan diperkirakan terdapat sekitar 10^{30} bakteriofage hidup di biosfer. Jenis virus ini dapat ditemukan di setiap wilayah hidup bakteri, akan tetapi jenis virus ini lebih banyak ditemukan di daerah perairan baik tawar maupun asin.

Sianobakteria atau algae biru-hijau merupakan jenis organisme prokariotik. Bakteri ini berperan dalam fiksasi karbon dioksida dan nitrogen dalam ekosistem di mana sianobakteria merupakan satu-satunya kelompok organisme yang mampu mereduksi nitrogen dan karbon dalam kondisi *aerob* maupun *anaerob*, oleh karenanya bakteri ini berperan penting bagi tumbuhan dan dalam penyediaan nitrogen secara global. Beberapa spesies sianobakteria merupakan sumber protein bagi organisme lain sehingga kelangsungan hidup bakteri ini memegang peranan penting dalam ekosistem.

Proctor dan Fuhrman (1990) dalam penelitiannya menyatakan bahwa 70% dari bakteri laut dapat terinfeksi oleh bakteriofage, sehingga infeksi bakteriofage diusulkan sebagai mekanisme utama penyebab kematian bakteri di samping protozoa. Infeksi bakteriofage pada bakteri sianobakteria mengakibatkan sel bakteri mengalami lisis, pada saat sel lisis dihasilkan unsur pokok yang dapat berpengaruh dalam daur ulang hara. Unsur pokok yang dihasilkan secara langsung berhubungan dengan isu-isu seperti pemanasan global dan siklus geokimia. Infeksi virus ini juga berdampak langsung terhadap perubahan genetik bakteri di perairan laut. Infeksi bakteriofage memegang peran dalam lingkungan hidup baik kontrol mereka terhadap populasi bakteri, dampaknya terhadap siklus hara dan energi dan bahkan sebagai agen transfer gen (Ashelford, 1999). Oleh karena itu model infeksi bakteriofage terhadap bakteri laut penting untuk dianalisis.

Dalam skripsi ini dibahas model dinamik infeksi bakteriofage pada populasi bakteri laut sianobakteria. Fenomena infeksi

bakteriofage dikonstruksi ke dalam model kompartemen dan kemudian ditentukan titik kesetimbangan beserta analisis kestabilannya. Selanjutnya dilakukan simulasi numerik untuk solusi sistem tersebut.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka pokok permasalahan yang dibahas dalam skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana model infeksi bakteriofage pada populasi bakteri laut sianobacteria?
2. Bagaimana kestabilan titik kesetimbangan model?
3. Bagaimana hasil simulasi numerik dan interpretasinya?

1.3 Batasan Masalah

Skripsi ini difokuskan pada pembahasan dengan beberapa batasan masalah sebagai berikut.

1. Selang waktu antara terinfeksi dan lisis relatif singkat, sehingga bakteri yang terinfeksi lebih dulu mengalami lisis sebelum sempat berkembang biak ataupun mengalami kematian alami.
2. Hanya bakteri yang rentan terinfeksi yang dapat berkembang biak mengikuti hukum logistik.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah untuk

1. mengkonstruksi model infeksi bakteriofage pada populasi bakteri laut sianobakteria,
2. menentukan titik kesetimbangan model dan menganalisa kestabilannya,
3. mensimulasikan solusi model infeksi bakteriofage pada populasi bakteri laut sianobakteria dengan menggunakan nilai parameter yang terdapat pada literatur.

BAB II

DASAR TEORI

2.1 Sistem Dinamik

Definisi 2.1 (Sistem Dinamik)

Sistem dinamik merupakan suatu sistem yang dapat diketahui nilainya di masa yang akan datang jika diberikan suatu kondisi awal pada masa sekarang atau di masa yang telah lalu (Nagle dan Saff, 1993).

Definisi 2.2 (Sistem Otonomus)

Sistem autonomous adalah suatu sistem persamaan differensial berbentuk

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, \dots, x_i) \\ \frac{dx_2}{dt} &= F_2(x_1, \dots, x_i) \\ &\vdots \\ \frac{dx_i}{dt} &= F_i(x_1, \dots, x_i)\end{aligned}\tag{2.1}$$

dimana F_i tidak bergantung secara eksplisit terhadap waktu t

(Binegar, 2008).

Definisi 2.3 (Titik Kesetimbangan)

Misalkan diberikan suatu sistem otonomus sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{dx_2}{dt} &= F_2(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{dx_3}{dt} &= F_3(x_1, x_2, x_3)\end{aligned}\tag{2.2}$$

maka titik (x_1^*, x_2^*, x_3^*) dikatakan titik kesetimbangan sistem jika
 $F_1(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = F_2(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = F_3(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = 0$
(Perko,2001).

Definisi 2.4 (Kestabilan Titik Kesetimbangan)

Titik kesetimbangan (x_1^*, x_2^*, x_3^*) disebut

1. stabil jika $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ sedemikian sehingga untuk
 $\|(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) - (x_1^*, x_2^*, x_3^*)\| < \delta$
berlaku $\|(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) - (x_1^*, x_2^*, x_3^*)\| < \varepsilon$, $t > 0$
2. tak stabil apabila titik tersebut tidak memenuhi kriteria 1.
3. stabil asimtotik jika ia stabil dan $\exists \delta_0, 0 < \delta_0 < \delta$, sedemikian
sehingga sebuah solusi $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, $x_3 = x_3(t)$ yang
memenuhi $\|(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) - (x_1^*, x_2^*, x_3^*)\| < \delta_0$
berlaku $\lim_{t \rightarrow \infty} (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$

(Robinson, 2004).

2.2 Sistem Otonomus Linier

Suatu sistem otonomus dikatakan linier jika tidak terdapat perkalian di antara variabel tak bebasnya. Berikut adalah sistem otonomus linier tiga dimensi

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3\end{aligned}\tag{2.3}$$

dimana a_{ij} merupakan konstanta riil, untuk $i, j = 1, 2, 3$. Persamaan (2.3) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} \quad (2.4)$$

dengan $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ dan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Jika $\det(A) \neq 0$, maka titik $(0,0,0)$ merupakan satu-satunya titik kesetimbangan sistem otonomus linier tersebut

(Boyce dan DiPrima, 2001).

Teorema 2.1 (Kestabilan Sistem Otonomus Linier)

Misalkan λ_n , untuk $n = 1, 2, 3$ adalah nilai eigen matriks koefisien A sistem otonomus linier dengan $\det(A) \neq 0$. Titik kesetimbangan $(0,0,0)$ bersifat

1. Stabil asimtotik jika λ_n bernilai riil negatif atau bagian riil λ_n bernilai negatif, $\forall n$.
2. Stabil (tetapi bukan stabil asimtotik) jika bagian riil λ_n adalah nol atau $\lambda_n = \pm\omega i$
3. Tidak stabil jika terdapat λ_n yang memiliki bagian riil yang positif

(Boyce dan DiPrima, 2001).

2.3 Sistem Otonomus Nonlinier

Perhatikan contoh sistem otonomus nonlinier berdimensi tiga berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{dx_2}{dt} &= F_2(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{dx_3}{dt} &= F_3(x_1, x_2, x_3)\end{aligned}\tag{2.5}$$

Asumsikan F_1, F_2, F_3 mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik $\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$. Deret Taylor fungsi F_1, F_2, F_3 di sekitar \bar{x}^* adalah

$$\begin{aligned}F_1(\bar{x}) &= F_1(\bar{x}^*) + \frac{\partial F_1(\bar{x}^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial F_1(\bar{x}^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) \\ &\quad + \frac{\partial F_1(\bar{x}^*)}{\partial x_3}(x_3 - x_3^*) + \eta_1(\bar{x})\end{aligned}\tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}F_2(\bar{x}) &= F_2(\bar{x}^*) + \frac{\partial F_2(\bar{x}^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial F_2(\bar{x}^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) \\ &\quad + \frac{\partial F_2(\bar{x}^*)}{\partial x_3}(x_3 - x_3^*) + \eta_2(\bar{x})\end{aligned}\tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}F_3(\bar{x}) &= F_3(\bar{x}^*) + \frac{\partial F_3(\bar{x}^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial F_3(\bar{x}^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) \\ &\quad + \frac{\partial F_3(\bar{x}^*)}{\partial x_3}(x_3 - x_3^*) + \eta_3(\bar{x})\end{aligned}\tag{2.8}$$

dengan $\eta_1(\bar{x}), \eta_2(\bar{x}), \eta_3(\bar{x})$ adalah suku sisa. Karena $\frac{dx_1}{dt} = \frac{d}{dt}(x_1 - x_1^*), \frac{dx_2}{dt} = \frac{d}{dt}(x_2 - x_2^*), \frac{dx_3}{dt} = \frac{d}{dt}(x_3 - x_3^*)$ maka persamaan (2.6) – (2.8) dapat ditulis dalam bentuk matriks, sebagai

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \\ x_3 - x_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(\bar{x}^*) \\ F_2(\bar{x}^*) \\ F_3(\bar{x}^*) \end{bmatrix} + J(\bar{x}^*) \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \\ x_3 - x_3^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(\bar{x}) \\ \eta_2(\bar{x}) \\ \eta_3(\bar{x}) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

dengan

$$J(\bar{x}^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2} & \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}_{(\bar{x}^*)} \quad (2.10)$$

adalah matriks Jacobi atau *partial derivative matrix (derivative matrix)*.

Jika dimisalkan $\hat{x}_1 = x_1 - x_1^*$, $\hat{x}_2 = x_2 - x_2^*$, $\hat{x}_3 = x_3 - x_3^*$, serta mengingat $F_1(\bar{x}^*) = F_2(\bar{x}^*) = F_3(\bar{x}^*) = 0$, maka persamaan (2.9) dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} \frac{d\hat{x}_1}{dt} \\ \frac{d\hat{x}_2}{dt} \\ \frac{d\hat{x}_3}{dt} \end{bmatrix} = J(\bar{x}^*) \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Bentuk di atas dapat ditulis sebagai

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w} + \vec{\eta}, \quad (2.12)$$

dengan $\vec{w} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ dan $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$. Bila (x_1, x_2, x_3) cukup dekat dengan (x_1^*, x_2^*, x_3^*) , maka $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ bernilai kecil, sehingga $\|\vec{\eta}\| \leq \|\vec{w}\|$. Oleh karena itu, $\vec{\eta}$ dapat diabaikan dan sistem nonlinier (2.5) dapat dihampiri oleh sistem linier

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w}. \quad (2.13)$$

Untuk $x_1 = x_1^*$, $x_2 = x_2^*$, $x_3 = x_3^*$ diperoleh $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = (0, 0, 0)$, sehingga sistem linier (2.13) memiliki titik kesetimbangan $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = (0, 0, 0)$ dan J identik dengan A pada persamaan (2.4) (Robinson, 2004).

Teorema 2.2 (Kestabilan Sistem Otonomus Nonlinier)

1. Titik kesetimbangan sistem otonomus nonlinier (2.5) bersifat stabil asimtotik jika titik kesetimbangan sistem yang dilinierkan stabil asimtotik.
2. Titik kesetimbangan sistem otonomus nonlinier (2.5) bersifat tak stabil jika titik kesetimbangan sistem yang dilinierkan tak stabil (Robinson, 2004).

2.4 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz

Teorema 2.3 (Kriteria Routh-Hurwitz)

Perhatikan sistem otonomus (2.5). Sifat kestabilan titik kesetimbangan ditentukan dengan nilai eigen matriks Jacobi (2.10). Nilai eigen diperoleh dengan menyelesaikan $\det(\lambda I - J(\bar{x}^*)) = 0$, sehingga diperoleh persamaan karakteristik berbentuk

$$\lambda^3 + c_1\lambda^2 + c_2\lambda + c_3 = 0. \quad (2.14)$$

Titik kesetimbangan $\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ bersifat stabil asimtotik jika bagian riil semua akar persamaan (2.14) bernilai negatif. Bagian riil λ_n untuk $n = 1, 2, 3$ bernilai negatif, jika c_1, c_2, c_3 memenuhi kriteria Routh-Hurwitz berikut

$$c_3 > 0, H_1 = |c_1| > 0, \text{ dan } H_2 = \begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ 1 & c_2 \end{vmatrix} > 0$$

(Glass dan Murray, 2001).

2.5 Bifurkasi

Definisi 2.5 (Bifurkasi)

Bifurkasi merupakan perubahan perilaku solusi karena nilai parameter berubah dan melampaui suatu nilai tertentu, yang disebut nilai bifurkasi (Kuznetsov, 1998).

Definisi 2.6 (Bifurkasi Hopf)

Bifurkasi yang terjadi berkaitan dengan adanya pasangan nilai eigen imaginer sekawan yang dihasilkan melalui proses linierisasi pada suatu titik tetap, melewati sumbu imaginer karena perubahan parameter. Pada waktu yang bersamaan muncul suatu orbit periodik dalam persekitarannya (Matsumoto, 1993).

Contoh 2.1

Perhatikan sistem berikut

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + \mu x - xy^2 \\ \dot{y} &= \mu y - x - y^3\end{aligned}$$

- Analisis untuk $\mu < 0$.

Misal dalam kasus ini dipilih $\mu = -1$, diperoleh titik kesetimbangan $(0,0)$. Proses linierisasi menghasilkan matriks Jacobi

$$J = \begin{bmatrix} -1 - y^2 & 1 - 2xy \\ -1 & -1 - 3y^2 \end{bmatrix}$$

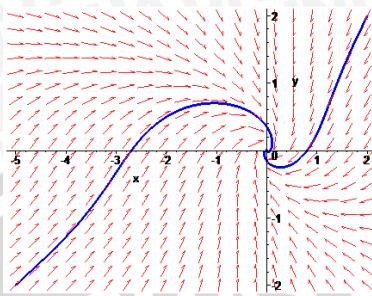
$$J(0,0) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$|J - \lambda I| = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm i.$$

Karena bagian riil kedua nilai eigennya bernilai negatif maka titik kesetimbangan $(0,0)$ stabil untuk $\mu < 0$.



Gambar 2.1 Hasil analisis $\mu = -1$

➤ Analisis $\mu = 0$

Proses linierisasi disekitar titik tetap $(0,0)$ menghasilkan matrik Jacobi

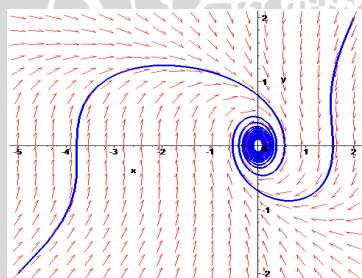
$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$|J - \lambda I| = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i$$

Karena bagian riil nilai eigen yang diperoleh bernilai nol, maka pada $\mu = 0$ terjadi bifurkasi Hopf.



Gambar 2.2 Hasil analisis $\mu = 0$

➤ Analisis untuk $\mu > 0$

Misal dipilih $\mu = 0,5$ dan berdasarkan hasil perhitungan diperoleh titik kesetimbangan $(0,0)$, dengan matriks Jacobi

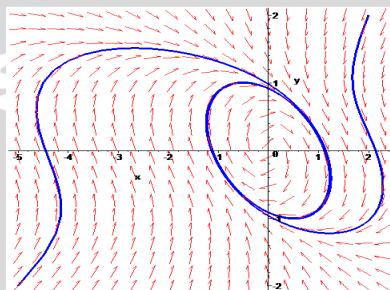
$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 0,5 & 1 \\ -1 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$|J - \lambda I| = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda + 1,25 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 0,5 \pm i$$

Karena bagian riil kedua nilai eigenya bernilai positif maka titik kesetimbangan $(0,0)$ tidak stabil.



Gambar 2.3 Hasil analisis $\mu = 0,5$

Teorema 2.4 (Kriteria Bifurkasi Hopf)

Perhatikan sistem

$$\dot{x} = F_\mu(x), \quad x \in R^n, \mu \in R^1, \quad (2.16)$$

dengan suatu titik kesetimbangan (x_0, μ_0) , dan $f \in C^\infty$. Bifurkasi Hopf akan terjadi apabila kedua kondisi berikut terpenuhi.

- (i). Matriks Jacobi memiliki pasangan nilai eigen imajiner murni dan nilai eigen yang lain memiliki bagian riil negatif.
- (ii). $\frac{d(\operatorname{Re}(\lambda(\mu_0)))}{d\mu} \neq 0$

(Liu, 1994).

Keberadaan bifurkasi Hopf untuk suatu nilai bifurkasi dapat diperiksa menggunakan kriteria Liu. Kriteria ini ekivalen dengan kriteria pada Teorema 2.4, di mana kriteria Liu memungkinkan pemeriksaan tanpa perlu mengetahui nilai eigen.

Teorema 2.5 (Kriteria Liu)

Misal $p(\lambda; \mu)$ merupakan polinomial karakteristik matriks Jacobi $J(\mu)$, sebagai berikut

$$p(\lambda; \mu) = \det(\lambda I - J(\mu)) = p_0(\mu) + p_1(\mu)\lambda + \dots + p_n(\mu)\lambda^n$$

dimana setiap $p_i(\mu)$ merupakan fungsi *smooth* μ .

Misalkan

$$L_n(\mu) = \begin{pmatrix} p_1(\mu) & p_0(\mu) & \cdots & 0 \\ p_3(\mu) & p_2(\mu) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{2n-1}(\mu) & p_{2n-2}(\mu) & \cdots & p_n(\mu) \end{pmatrix}$$

$$D_1(\mu) = \det(L_1(\mu)) = p_1(\mu) > 0,$$

$$D_2(\mu) = \det(L_2(\mu)) = \det \begin{pmatrix} p_1(\mu) & p_0(\mu) \\ p_3(\mu) & p_2(\mu) \end{pmatrix} > 0$$

...

$$D_n(\mu) = \det(L_n(\mu)) > 0.$$

Asumsikan terdapat suatu kurva *smooth* dari titik kesetimbangan $(x(\mu), \mu)$ dengan $x(\mu_0) = x_0$ untuk sistem (2.16). Maka kondisi (i) dan (ii) equivalen dengan kondisi berikut

$$(CH1) \quad p_0(\mu_0) > 0, D_1(\mu_0) > 0, \dots, D_{n-2}(\mu_0) > 0, D_{n-1}(\mu_0) = 0$$

$$(CH2) \quad \frac{dD_{n-1}(\mu_0)}{d\mu} \neq 0$$

(Liu,1994).

Untuk memperjelas penggunaan kriteria Liu dalam memeriksa keberadaan bifurkasi Hopf, diberikan contoh berikut.

Contoh 2.2

Pada Contoh 2.1 akan diperiksa apakah terdapat suatu bifurkasi Hopf untuk nilai $\mu = 0$ dengan menggunakan kriteria Liu.

Proses linierisasi menghasilkan matriks Jacobi

$$J = \begin{bmatrix} \mu - y^2 & 1 - 2xy \\ -1 & \mu - 3y^2 \end{bmatrix},$$

$$\text{dengan } J(0,0) = \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix}$$

Oleh karena itu diperoleh persamaan karakteristik

$$\lambda^2 - 2\mu\lambda + (1 + \mu^2) = 0,$$

dimana

$$a_1 = 1 + \mu^2$$

$$a_2 = -2\mu$$

$$a_3 = 1.$$

Bifurkasi Hopf terjadi pada $\mu = \mu_0 = 0$ bila dua kondisi berikut terpenuhi.

(CH.1) $a_1(\mu_0) > 0$ dan $a_2(\mu_0) = 0$

$$a_1(\mu_0) = 1 + \mu_0^2 = 1 > 0$$

$$a_2(\mu_0) = -2\mu_0 = 0$$

(CH.2) $\frac{da_2(\mu_0)}{d\mu} \neq 0$

$$\frac{da_2(\mu)}{d\mu} = \frac{d(-2\mu)}{d\mu} \Big|_{\mu=0} = -2 \neq 0.$$

Terpenuhinya kedua kondisi tersebut membuktikan bahwa bifurkasi Hopf terjadi pada $\mu = 0$.

2.6 Pengetahuan Lebih Lanjut Mengenai Sianobakteria, Bakteriofage dan Interaksinya dengan Bakteri.

2.6.1 Sianobakteria

Sianobakteria dikenal dengan nama alga hijau-biru, dan digolongkan kedalam kingdom *plantae* karena mampu berfotosintesis. Akan tetapi, Sianobakteria mempunyai struktur sel prokariotik yang sama dengan bakteri. Oleh sebab itu, Sianobakteria digolongkan kedalam kingdom *monera*. Klorofil pada Sianobakteria tidak terletak didalam kloroplas namun klorofilnya tersebar dalam pigmen pigmen lainnya didalam sitoplasma (Munawar,2011).

Sianobakteria memiliki peran sebagai produsen dan penghasil senyawa nitrogen di perairan. Organisme ini mampu menghasilkan senyawa yang bermanfaat bagi mahluk hidup lain, antara lain protein dan senyawa lain untuk obat-obatan (Prihantini,2008).

Sianobakteria berkembang biak secara aseksual, yaitu dengan pembelahan biner, fragmentasi, pertunasan, dan pembelahan ganda.



Gambar 2.4 Sianobakteria

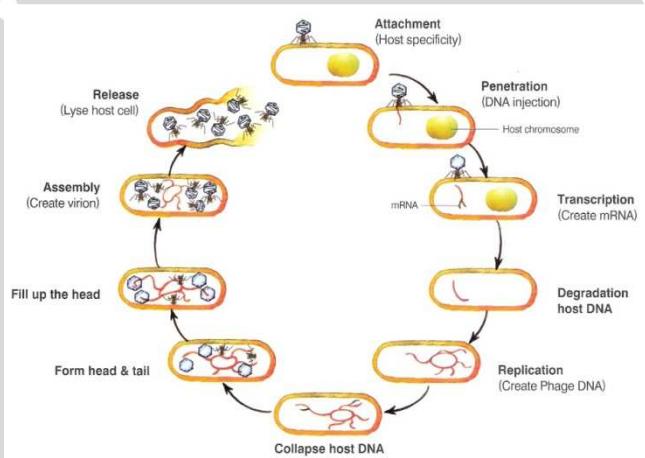
(Munawar,2011).

2.6.2 Bakteriofage dan Interaksinya dengan Bakteri

Bacteriofage merupakan salah satu mikroorganisme yang banyak ditemukan hidup dipermukaan bumi. Bakteriofage merupakan parasit *obligate intracelullar* yang dapat berkembangbiak hanya di dalam sel induk. Kespesifikkan ini menunjukkan bahwa bakteriofage tertentu

hanya dapat menginfeksi bakteri tertentu yang mempunyai reseptor yang cocok dengan bakteriofage tersebut (Pudjiatmoko, 2010).

Bakteriofage merupakan virus yang hanya menyerang bakteri. Proses penginfeksian bakteriofage pada bakteri diawali dari serangan banyak bakteriofage terhadap dinding membran bakteri, dalam proses ini hanya satu bakteriofage yang mampu menempel pada reseptor yang terdapat di permukaan sel bakteri. Bakteriofage yang telah menempel menginjeksikan bahan genetiknya kemudian melakukan proses replikasi dan pembentukan bakteriofage baru di dalam bakteri. Bakteriofage yang telah terbentuk keluar dari sel bakteri dan hal ini mengakibatkan sel bakteri lisis dan mati.

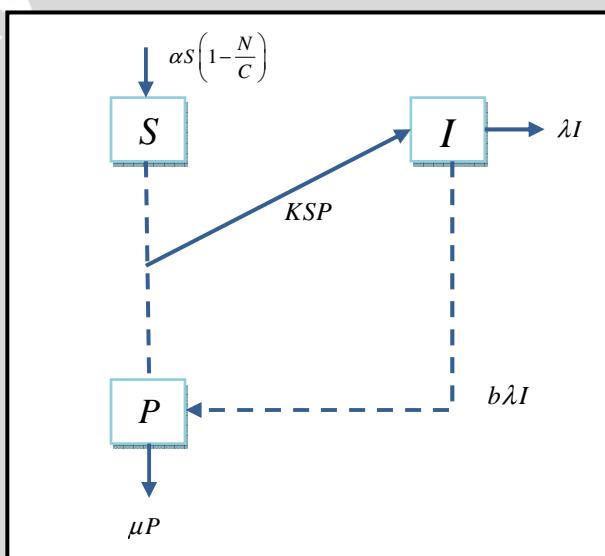


Gambar 2.5 Daur perkembangbiakan bakteriofage
(Pudjiatmoko, 2010).

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Konstruksi Model

Infeksi bakteriofage di perairan laut dapat digambarkan dalam model kompartemen. Misalkan terdapat dua populasi yaitu populasi bakteri yang dinotasikan dengan N dan populasi bakteriofage yang dinotasikan dengan P . Populasi bakteri dibagi menjadi dua kelas populasi yaitu kelas populasi bakteri yang rentan (S) dan kelas populasi bakteri yang terinfeksi (I).



Gambar 3.1 Diagram kompartemen infeksi bakteriofage pada bakteri

3.1.1 Laju Perubahan Bakteri yang Rentan

Pada saat bakteriofage telah menyerang, diasumsikan bahwa total populasi bakteri N terbagi dalam dua kelas yaitu kelas yang

rentan dan kelas yang terinfeksi. Oleh karenanya total populasi bakteri pada suatu waktu t merupakan

$$N(t) = S(t) + I(t). \quad (3.1)$$

Kelas yang rentan terinfeksi diasumsikan dapat mengalami pertumbuhan populasi yang mengikuti hukum logistik dengan laju kelahiran sebesar α .

$$\frac{dS}{dt} = \alpha S \left(1 - \frac{N}{C}\right).$$

Bakteri yang rentan terinfeksi dapat menjadi terinfeksi melalui serangan dari banyak bakteriofage, namun dalam proses penyerangan ini hanya satu bakteriofage yang dapat menginfeksi bakteri. Proses interaksi antara bakteri yang rentan terinfeksi dengan bakteriofage mengakibatkan jumlah populasi yang rentan terinfeksi berkurang sebesar KSP di mana K merupakan keefektifan dari suatu serangan bakteriofage terhadap bakteri yang rentan terinfeksi. Oleh karena itu persamaan untuk laju perubahan populasi bakteri yang rentan menjadi

$$\frac{dS}{dt} = \alpha S \left(1 - \frac{N}{C}\right) - KSP. \quad (3.2)$$

3.1.2 Laju Perubahan Bakteri yang Terinfeksi

Populasi bakteri yang terinfeksi dilambangkan dengan I . Bakteri yang terinfeksi ini muncul akibat adanya interaksi antara bakteriofage dan bakteri dengan laju keefektifan K , sehingga populasi yang terinfeksi akan bertambah sebesar KSP

$$\frac{dI}{dt} = KSP$$

Dalam model ini diasumsikan I tidak dapat melakukan perkembangbiakan dikarenakan bakteri I akan lebih dulu mengalami kematian akibat proses lisis sebelum sempat bereproduksi. Proses lisis ini mengakibatkan populasi bakteri yang terinfeksi mengalami pengurangan

$$\frac{dI}{dt} = KSP - \lambda I \quad (3.3)$$

di mana λ merupakan laju kematian lisis.

3.1.3 Laju Perubahan Bakteriofage

P merupakan populasi bakteriofage bebas. Bakteriofage berkembang biak melalui proses replikasi di dalam bakteri. Proses replikasi ini terjadi setelah bakteriofage berhasil menginfeksi bakteri S , di mana bakteriofage menginjeksikan *nucleic acid*-nya ke dalam bakteri yang terinfeksi dan mengambil kendali dari metabolisme bakteri, menghambat replikasi bakteri dan mengarahkan bakteri untuk mensintesis lebih banyak *nucleic acid* bakteriofage dan material lain yang dibutuhkan bakteriofage untuk melakukan replikasi. Dalam waktu yang singkat, bakteriofage yang telah terbentuk dibebaskan melalui pecahnya dinding sel secara tiba-tiba (lisis) dan partikel bakteriofage keluar dan bebas menginfeksi bakteri S yang lain. Lisis dari satu bakteri yang terinfeksi menghasilkan b kopi partikel bakteriofage. Proses ini mengakibatkan bertambahnya jumlah populasi bakteriofage bebas

$$\frac{dP}{dt} = b\lambda I$$

b merupakan faktor replikasi dari bakteriofage.

Dalam proses menginfeksi, banyak bakteriofage yang menyerang bakteri, namun hanya satu bakteriofage yang dapat menginfeksi satu bakteri, sedangkan bakteriofage-bakteriofage yang menyerang namun tidak berhasil menginfeksi akan kembali ke solusi. Keberhasilan dari suatu bakteriofage menginfeksi bakteri mengakibatkan berkurangnya populasi bakteriofage bebas

$$\frac{dP}{dt} = b\lambda I - KSP$$

Bakteriofage dapat mengalami kematian alami yang diakibatkan oleh beberapa faktor diantaranya , serangan enzim, pH, perubahan suhu, radiasi uv, dan lain sebagainya. Terjadinya proses kematian ini mengakibatkan populasi bakteriofage bebas mengalami pengurangan sebesar μP , di mana μ merupakan laju kematian bakteriofage. Persamaan untuk laju perubahan populasi bakteriofage bebas menjadi

$$\frac{dP}{dt} = -KSP - \mu P + b\lambda I \quad (3.4)$$

Berdasarkan uraian sebelumnya, diperoleh model dinamik infeksi bakteriofage terhadap bakteri laut yang merupakan sistem persamaan diferensial biasa nonlinier.

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \alpha S \left(1 - \frac{N}{C}\right) - KSP \\ \frac{dI}{dt} &= KSP - \lambda I \\ \frac{dP}{dt} &= -KSP - \mu P + b\lambda I\end{aligned}\quad (3.5)$$

di mana

α : laju kelahiran bakteri

K : laju keefektifan kontak antara bakteri dan bakteriofage

C : *carrying capacity*

λ : laju kematian akibat lisis

μ : laju kematian alami bakteriofage

b : faktor replikasi bakteriofage

S : populasi bakteri yang rentan

I : populasi bakteri yang terinfeksi

P : populasi bakteriofage bebas

3.2 Penyederhanaan Model

Sistem persamaan dapat disederhanakan dengan menskalakan variabel S, I, P dengan nilai *carrying capacity* C ,

$$s = \frac{S}{C}, \quad i = \frac{I}{C}, \quad p = \frac{P}{C}$$

dan menggunakan pengurangan dimensi waktu $\tau = KCt$.

Dengan menggunakan aturan rantai persamaan (3.5) diskalakan mengikuti proses berikut.

1. Persamaan $\frac{dS}{dt}$ menjadi

$$\frac{ds}{d\tau} = \frac{ds}{dS} \frac{dS}{dt} \frac{dt}{d\tau}$$

$$\begin{aligned}\frac{ds}{d\tau} &= \frac{1}{C} \left(\alpha S \left(1 - \frac{N}{C} \right) - KSP \right) \frac{1}{KC} \\ \frac{ds}{d\tau} &= \frac{\alpha}{KC} \frac{S}{C} \left(1 - \frac{(I+S)}{C} \right) - \frac{S}{C} \frac{P}{C} \\ \frac{ds}{d\tau} &= as \left(1 - (i+s) \right) - sp\end{aligned}\tag{3.6}$$

2. Persamaan $\frac{di}{dt}$ menjadi

$$\begin{aligned}\frac{di}{d\tau} &= \frac{ds}{dS} \frac{dI}{dt} \frac{dt}{d\tau} \\ \frac{di}{d\tau} &= \frac{1}{C} (KSP - \lambda I) \frac{1}{KC} \\ \frac{di}{d\tau} &= \left(\frac{S}{C} \frac{P}{C} \right) - \left(\frac{\lambda}{KC} \frac{I}{C} \right) \\ \frac{di}{d\tau} &= sp - li\end{aligned}\tag{3.7}$$

3. Persamaan $\frac{dP}{dt}$ menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dp}{d\tau} &= \frac{ds}{dS} \frac{dP}{dt} \frac{dt}{d\tau} \\ \frac{dp}{d\tau} &= \frac{1}{C} (-KSP - \mu P + b\lambda I) \frac{1}{KC} \\ \frac{dp}{d\tau} &= - \left(\frac{S}{C} \frac{P}{C} \right) - \left(\frac{\mu}{KC} \frac{P}{C} \right) + b \left(\frac{\lambda}{KC} \frac{I}{C} \right) \\ \frac{dp}{d\tau} &= -sp - mp + bli\end{aligned}\tag{3.8}$$

Dengan demikian, sistem (3.5) berubah menjadi

$$\begin{aligned}\frac{ds}{d\tau} &= as(1 - (i + s)) - sp \\ \frac{di}{d\tau} &= sp - li \\ \frac{dp}{d\tau} &= -sp - mp + bli\end{aligned}\tag{3.9}$$

di mana

$$a = \frac{\alpha}{KC}, \quad l = \frac{\lambda}{KC}, \quad m = \frac{\mu}{KC}.$$

Nilai kondisi awal untuk sistem (3.9) dapat berada pada setiap titik pada daerah non-negatif \mathbb{R}_{+0}^3 dari \mathbb{R}^3 , di mana \mathbb{R}_{+0}^3 merupakan

$$\mathbb{R}_{+0}^3 = \{(s, i, p) \in \mathbb{R}^3 : s \geq 0, i \geq 0, p \geq 0\}$$

dan \mathbb{R}_+^3 didefinisikan sebagai interior dari \mathbb{R}_{+0}^3 .

3.3 Titik Kesetimbangan

Dalam model ini terdapat tiga titik kesetimbangan di mana titik-titik kesetimbangan tersebut diperoleh melalui penjabaran berikut. Titik kesetimbangan diperoleh jika

$$\frac{ds}{d\tau} = \frac{di}{d\tau} = \frac{dp}{d\tau} = 0, \text{ yaitu}$$

$$as(1 - (i + s)) - sp = 0 \tag{3.10}$$

$$sp - li = 0 \tag{3.11}$$

$$-sp - mp + bli = 0 \tag{3.12}$$

3.3.1 Titik Kesetimbangan E_0

Berdasarkan persamaan (3.10) terdapat dua nilai yang mungkin yaitu

$$s = 0 \text{ atau } a(1 - (i + s)) - p = 0.$$

Jika $s = 0$, persamaan (3.11) menjadi $li = 0$ sehingga $i = 0$.

Sedangkan persamaan (3.12) menjadi

$$mp + bli = 0$$

$$mp = bli$$

$$p = \frac{bli}{m}. \quad (3.13)$$

Karena untuk $s = 0$ diperoleh $i = 0$ dan $p = 0$ maka didapatkan titik kesetimbangan $E_0 = (0, 0, 0)$.

Titik kesetimbangan ini menunjukkan bahwa tidak terdapat bakteri yang rentan ataupun yang terinfeksi begitupun dengan bakteriofage sehingga titik kesetimbangan ini disebut titik kesetimbangan nol.

3.3.2 Titik kesetimbangan E_f

Titik kesetimbangan E_f diperoleh dengan mengambil nilai $a(1 - (i + s)) - p = 0$ sehingga

$$a(1 - (i + s)) = p. \quad (3.14)$$

Berdasarkan (3.11) diperoleh

$$sp = li$$

atau

$$i = \frac{sp}{l}. \quad (3.15)$$

Substitusikan (3.15) ke persamaan (3.12), diperoleh

$$p(-s - m) + bl\left(\frac{sp}{l}\right) = 0$$

$$p(-s - m) + bps = 0$$

$$p(-s - m + sb) = 0.$$

Terdapat dua nilai yang mungkin yaitu

$$p = 0 \text{ atau } -s - m + sb = 0.$$

Jika $p = 0$ maka persamaan (3.14) menjadi

$$a(1 - (i + s)) = 0$$

$$1 - (i + s) = 0$$

$$s = 1 - i. \quad (3.16)$$

dan persamaan (3.15) menghasilkan $i = 0$.

Karena $i=0$ maka diperoleh $s=1$ dan titik kesetimbangan $E_f = (1,0,0)$.

Titik kesetimbangan ini menjelaskan bahwa hanya terdapat populasi bakteri yang rentan dan tidak terdapat populasi bakteriofage ataupun bakteri yang terinfeksi. Keadaan di mana jumlah bakteri yang terinfeksi sama dengan nol menandakan tidak adanya kontak antara bakteri yang rentan dengan bakteriofage. Oleh karena itu kondisi ini disebut keadaan bebas penyakit.

3.3.3 Titik Kesetimbangan E_+

Jika $-s - m + sb = 0$ maka diperoleh

$$m = sb - s$$

$$m = s(b - 1)$$

$$s = \frac{m}{b - 1} = s^*$$

Berdasarkan (3.11)

$$sp = li$$

$$p = \frac{li}{s}$$

(3.17)

Substitusikan (3.17) ke dalam (3.14)

$$a(1 - (i + s)) = \frac{li}{s}$$

$$as(1 - (i + s)) = li$$

$$as(1 - s) = li + asi$$

$$as(1 - s) = i(l + as)$$

$$i = \frac{as(1 - s)}{l + as}$$

(3.18)

Karena $s = \frac{m}{b - 1} = s^*$ maka

$$i^* = \frac{as^*(1 - s^*)}{l + as^*}$$

(3.19)

substuisikan (3.18) pada (3.17)

$$p = \frac{l \left(\frac{as(1-s)}{l+as} \right)}{s}$$

$$p = \frac{al(1-s)}{l+as}$$

$$p^* = \frac{al(1-s^*)}{l+as^*}. \quad (3.20)$$

Oleh karena itu diperoleh titik kesetimbangan

$$E_+ = (s^*, i^*, p^*) = \left(\frac{m}{b-1}, \frac{as^*(1-s^*)}{l+as^*}, \frac{al(1-s^*)}{l+as^*} \right).$$

Titik kesetimbangan E_+ menjelaskan bahwa pada kondisi ini terdapat bakteri yang terinfeksi dan bakteriofage sebesar $i^* = \frac{as^*(1-s^*)}{l+as^*}$ dan $p^* = \frac{al(1-s^*)}{l+as^*}$. Hal ini menunjukkan terjadinya interaksi antara bakteri yang rentan dengan bakteriofage yang mengakibatkan munculnya bakteri yang terinfeksi. Dengan demikian, titik kesetimbangan E_+ disebut titik kesetimbangan endemik.

Proposisi 3.1. Untuk setiap $b \in (1, b^*]$, dengan $b^* = 1 + \frac{\mu}{(KC)} = 1 + m$,

maka titik kesetimbangan dari persamaan (3.9) adalah E_0 dan E_f . Pada saat $b \in (b^*, +\infty)$, muncul titik kesetimbangan endemik E_+ , di samping titik kesetimbangan E_0 dan E_f . Jika $b \rightarrow b^*$ maka $E_+ \rightarrow E_f$ dan $E_+ = E_f$ ketika $b = b^*$.

Bukti.

$$E_+ = (s^*, i^*, p^*) = \left(\frac{m}{b-1}, \frac{as^*(1-s^*)}{l+as^*}, \frac{al(1-s^*)}{l+as^*} \right)$$

dengan $b > 1$.

Ketika s^* mendekati nilai 1, maka $i^* \rightarrow 0$ dan $p^* \rightarrow 0$ dan E_+ akan mendekati titik kesetimbangan E_f . Titik kesetimbangan E_+ akan menjadi sama dengan E_f ketika $s^* = 1$.

Faktor replikasi bakteriofage dari proses lisis (b) dipilih sebagai parameter biologi yang relevan dengan dinamika model. Tentu saja $b \in (1, +\infty)$ dan $s^* \rightarrow +\infty$ jika $b \rightarrow 1$. Bertambahnya nilai b mengakibatkan s^* menjadi menurun dan mencapai nilai 1 pada saat

$$b^* = 1 + \frac{\mu}{(KC)} = 1 + m$$

Titik kesetimbangan E_+ tidak muncul ketika $b \in (1, b^*]$. Hal ini dikarenakan pada saat $b \in (1, b^*)$ diperoleh nilai $s^* > 1$, keadaan ini mengakibatkan $i^* < 0$ dan $p^* < 0$. Nilai $i^* < 0$ dan $p^* < 0$ mengakibatkan titik kesetimbangan E_+ tidak mungkin terjadi. Untuk kasus $b = b^*$, diperoleh $s^* = 1$ dan $i^* = p^* = 0$ sehingga $E_+ = E_f$. Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa pada saat $b \in (1, b^*]$ titik kesetimbangan E_+ tidak muncul dan titik kesetimbangan yang ada hanya E_f dan E_0 .

Persamaan (3.19) dan (3.20) menunjukkan bahwa E_+ akan muncul apabila $s^* < 1$. Nilai $s^* < 1$ terjadi apabila $b \in (b^*, +\infty)$ dan hal ini mengakibatkan $i^* > 0$ dan $p^* > 0$. Oleh karena $i^* > 0$ dan $p^* > 0$ maka diperoleh titik kesetimbangan E_+ , di samping titik kesetimbangan E_0 dan E_f . ▀

3.4 Kestabilan Titik Kesetimbangan

Analisis kestabilan akan dilakukan dengan terlebih dahulu melakukan proses linierisasi. Proses linierisasi dilakukan dengan melakukan pendekatan di sekitar titik tetap. Proses linierisasi ini memberikan matriks Jacobi.

$$J(s, i, p) = \begin{bmatrix} -as + a(1 - (s + i)) - p & -as & -s \\ p & -l & s \\ -p & bl & -(s + m) \end{bmatrix}$$

3.4.1 Kestabilan E_0

Matriks Jacobi untuk titik kesetimbangan E_0 adalah

$$J(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -l & 0 \\ 0 & bl & -m \end{bmatrix},$$

dengan nilai eigen

$$\lambda_1 = a > 0, \lambda_2 = -l < 0, \lambda_3 = -m < 0.$$

Karena terdapat satu nilai eigen yang bernilai positif maka titik kesetimbangan E_0 bersifat tidak stabil pelana.

3.4.2 Kestabilan E_f

Proposisi 3.2. Titik kesetimbangan E_0 selalu tidak stabil pelana. Titik kesetimbangan E_f stabil asimtotik lokal untuk setiap $b \in (1, b^*)$. Pada saat $b = b^*$, E_f menjadi *critically stable*, dan ketika E_+ muncul untuk $b \in (b^*, +\infty)$, E_f menjadi tidak stabil pelana.

Bukti. Matriks Jacobi untuk E_f adalah

$$J = \begin{bmatrix} -a & -a & -1 \\ 0 & -l & 1 \\ 0 & bl & -1-m \end{bmatrix}$$

dengan persamaan karakteristik

$$|\lambda I - J| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + a & a & 1 \\ 0 & \lambda + l & -1 \\ 0 & -bl & \lambda + (1+m) \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda + a)((\lambda + l)(\lambda + (1+m)) - bl) = 0$$

$$(\lambda + a)(\lambda^2 + \lambda + \lambda m + \lambda l + l + ml - bl) = 0$$

$$(\lambda + a)(\lambda^2 + \lambda(1+m+l) + l(1+m-b)) = 0.$$

Diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1 = -a < 0$$

dan dua nilai akar yang lain diperoleh dari akar-akar persamaan

$$\lambda^2 + \lambda(1+m+l) + l(1+m-b) = 0, \quad (3.21)$$

$$\text{yaitu } \lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \left[-(l+1+m) \pm \sqrt{(l+1+m)^2 - 4l(1+m-b)} \right]$$

Agar titik kesetimbangan E_f stabil maka nilai $\lambda_{2,3}$ harus lebih kecil dari nol, sehingga untuk memperoleh hasil tersebut harus dihasilkan

$$\sqrt{(l+1+m)^2 - 4l(1+m-b)} < (l+1+m).$$

Nilai di atas akan dipenuhi apabila

$$\begin{aligned} 1+m-b &> 0 \\ 1+m &> b \end{aligned}$$

karena $1+m=b^*$ maka $b^* > b$ akan mengakibatkan $\lambda_{2,3} < 0$, hal ini menyatakan bahwa apabila $b \in (1, b^*)$ maka akan diperoleh $\lambda_{2,3} < 0$. Keadaan ketika $b \in (1, b^*)$ mengakibatkan E_f menjadi stabil asimtotik lokal.

Sebaliknya apabila

$$1 + m - b < 0$$

maka diperoleh salah satu nilai eigen dari λ_2 dan λ_3 akan memiliki bagian riil yang positif. Hal ini mengakibatkan E_f menjadi tidak stabil pelana untuk $b \in (b^*, +\infty)$.

Ketika $b = b^*$ maka titik equilibrium E_f akan memiliki satu nilai eigen yang bernilai nol dan dua nilai eigen yang bernilai riil negatif, maka titik kesetimbangan E_f menjadi *critically stable*, di mana nilai eigennya

$$\lambda_1 = -a < 0, \lambda_2 = -2(l + 1 + m) < 0, \lambda_3 = 0$$

3.4.3 Kestabilan E_+

Titik kesetimbangan

$$E_+ = \left(\frac{m}{b-1}, \frac{as^*(1-s^*)}{l+as^*}, \frac{al(1-s^*)}{l+as^*} \right).$$

Ketika nilai b berubah-ubah dalam selang $(b^*, +\infty)$, maka kestabilan dari E_+ bergantung pada nilai s^* , sehingga perlu dinotasikan

$$\xi \triangleq s^*, \xi \in (0,1).$$

Matriks Jacobi untuk E_+ adalah

$$J(s^*, i^*, p^*) = \begin{bmatrix} -as^* & -as^* & -s^* \\ p & -l & s^* \\ -p & bl & -(s^* + m) \end{bmatrix}$$

Berdasarkan J di atas diperoleh persamaan karakteristik

$$\lambda^3 + a_1(\xi)\lambda^2 + a_2(\xi)\lambda + a_3(\xi) = 0, \quad (3.22)$$

yang diperoleh dari

$$|\lambda I - J| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + as^* & as^* & s^* \\ -p^* & \lambda + l & -s^* \\ p^* & -bl & \lambda + (s^* + m) \end{vmatrix} = 0$$

Oleh karena itu nilai dari koefisien-koefisien $a_1(s^*), a_2(s^*), a_3(s^*)$

adalah

$$\lambda^3 + \lambda^2(s^* + m + l + as^*) + \lambda(s^*l + ml - s^*bl + as^{2*} + as^*m + as^*l + as^*p^* - s^*p^*) + (as^{2*}l + as^*ml - as^{2*}bl + as^*mp^* + s^*p^*bl - s^*p^*l) = 0$$

maka diperoleh

$$a) \quad a_1(s^*) = m + l + (1 + a)s^*$$

$$b) \quad a_2(s^*) = s^*l + ml - s^*bl + as^{2*} + as^*m + as^*l + as^*p^* - s^*p^*$$

$$a_2(s^*) = l(s^* + m) + as^*(l + s^* + m) - s^*p^* + as^*p^* - bls^*$$

$$\text{Karena } s^* = \frac{m}{b-1} \text{ maka } s^* + m = bs^* \text{ sehingga}$$

$$a_2(s^*) = bs^*l - bs^*l + as^*(l + s^* + m) + p^*(as^* - s^*)$$

Substitusikan (3.20)

$$\begin{aligned} a_2(s^*) &= \frac{al(1-s^*)}{l+as^*}(as^*-s^*) + as^*(l+s^*+m) \\ &= \frac{al(1-s^*)}{l+as^*}s^*(a-1) + \frac{as^*}{l+as^*}(l+s^*+m)(l+as^*) \\ &= \frac{as^*}{l+as^*}\left(l(1-s^*)(a-1) + (l+s^*+m)(l+as^*)\right) \\ &= \frac{as^*}{l+as^*}\left(l(1-s^*)(a-1) + (l+s^*+m)(l+as^*)\right) \\ &= \frac{as^*}{l+as^*}\left(al - l + 2s^*l + as^{*2} + ml + as^*m + l^2\right) \end{aligned}$$

diperoleh

$$a_2(s^*) = \frac{as^*}{l+as^*}\left(l(l+m+a-1) + (am+2l)s^* + as^{*2}\right)$$

$$\begin{aligned}
c) \quad a_3(s^*) &= as^{*2}l + as^*ml - as^{*2}bl + as^*mp^* + s^*p^*bl - s^*p^*l \\
a_3(s^*) &= as^*l(s^* + m) - as^{*2}p^* + (b-1)ls^*p^* + as^*p^*(s^* + m) - blas^{*2} \\
\text{karena } s^* + m &= bs^* \text{ maka didapatkan} \\
&\quad as^*l(s^* + m) - blas^{*2} = 0
\end{aligned}$$

Sehingga $a_3(s^*)$ menjadi

$$= -as^{*2}p^* + (b-1)ls^*p^* + as^*p^*(s^* + m)$$

$$\text{karena } bs^* = (s^* + m) \rightarrow (b-1)s^* = m$$

$$\begin{aligned}
a_3(s^*) &= -as^{*2}p^* + ((b-1)s^*)lp^* + as^{*2}p^* + as^*p^*m \\
&= -as^{*2}p^* + mlp^* + as^{*2}p^* + as^*p^*m \\
&= p^*(lm + ams^*) \\
&= \frac{al(1-s^*)}{l+as^*} \left(m(l+as^*) \right) \\
a_3(s^*) &= alm(1-s^*)
\end{aligned}$$

Karena $\xi \triangleq s^*$ maka koefisien-koefisien dari persamaan karakteristiknya dapat ditulis menjadi

$$a_1(\xi) = m + l + (1+a)\xi$$

$$a_2(\xi) = \frac{a\xi}{l+a\xi} \left(l(l+m+a-1) + (am+2l)\xi + a\xi^2 \right)$$

$$a_3(\xi) = alm(1-\xi)$$

Terlihat bahwa $a_1(\xi) > 0$ dan $a_3(\xi) > 0$ untuk semua $\xi \in (0,1)$. Untuk $a_2(\xi)$ terdapat dua kasus

- (i). $l + m + a \geq 1$, sehingga $a_2(\xi) > 0$ untuk semua $\xi \in (0,1)$
- (ii). $l + m + a < 1$, dalam kasus ini $a_2(\xi) < 0$ untuk semua $\xi \in (0, \xi_1)$ dan $a_2(\xi) = 0$ pada saat $\xi = \xi_1$, di mana

$$\xi_1 = \frac{1}{2a} \left[-(ma + 2l) + \sqrt{(ma + 2l)^2 + 4al[1 - (l + m + a)]} \right]$$

Proposisi 3.3. Jika $l + m + a \geq 1$, maka bifurkasi Hopf muncul pada suatu nilai unik $\xi_0 \in (0,1)$ sehingga mengakibatkan, E_+ tidak stabil untuk $\xi \in (0, \xi_0)$ dan stabil asimtotik jika $\xi \in (\xi_0, 1)$.

Bukti. Persamaan karakteristik untuk E_+ merupakan persamaan berpangkat tiga, di mana koefisiennya adalah $a_i(\xi)$ untuk $i=1,2,3$. Berdasarkan asumsi (i) semua nilai koefisiennya adalah positif dalam $(0,1)$.

Sekarang perhatikan $\Delta^{(2)}(\xi) = a_1(\xi)a_2(\xi) - a_3(\xi)$, karena $a_2(0) = 0$ dan $a_3(0) = \alpha\mu\lambda > 0$ maka $\Delta^{(2)}(0) < 0$. Selanjutnya $a_1(1)a_2(1) > 0$ dan $a_3(1) = 0$ sehingga mengakibatkan $\Delta^{(2)}(1) > 0$. Karena $\Delta^{(2)}(\xi)$ kontinu pada $(0,1)$, pasti terdapat suatu nilai $\xi_0 \in (0,1)$ yang akan mengakibatkan $a_3(\xi_0) > 0$, $\Delta^{(2)}(\xi_0) = 0$. Nilai ξ_0 adalah unik karena $a_1(\xi)a_2(\xi)$ adalah monoton naik dan $a_3(\xi)$ merupakan monoton turun dalam $[0,1]$.

Selanjutnya akan dicek nilai $\frac{d^2\Delta^{(2)}(\xi)}{d\xi^2}$ di mana

$$\begin{aligned}
 \Delta^{(2)}(\xi) &= a_1(\xi)a_2(\xi) - a_3(\xi) \\
 &= (m+l+(1+a)\xi) \left(\frac{a\xi}{l+a\xi} (l(l+m+a-1) + (am+2l)\xi + a\xi^2) \right) \\
 &= \frac{(a^3 + a^2)}{1+a\xi} \xi^4 + \frac{(a^2l + a^2m + a^3m + 2a^2l + a^2m + 2al)}{1+a\xi} \xi^3 \\
 &\quad + \frac{\xi^2}{1+a\xi} (a^2lm + 2al^2 + a^2m^2 + 2aml + a^2l^2a^2ml + a^3l \\
 &\quad - a^2l + al^2 + alm + a^2l - al + a^2lm) + \frac{\xi}{1+a\xi} (al^3 + aml^2 \\
 &\quad + a^2l^2 - al^2 + aml^2 + am^2l + a^2ml - alm - a^2lm + alm) \\
 &\quad - \frac{alm}{1+a\xi} \\
 &= \xi^4 + \left(\frac{l+m}{a+1} + \frac{ma+2l}{a} \right) \xi^3 + \left(\frac{l+m}{a+1} \frac{ma+2l}{a} + \frac{l(l+m+a-1)}{a} + \frac{lm}{a+1} \right) \xi^2 \\
 &\quad + \left(\frac{l+m}{a+1} \frac{l(l+m+a-1)}{a} + \frac{lm}{a+1} \frac{l-a}{a} \right) \xi - \left(\frac{l}{a} \frac{lm}{(a+1)} \right).
 \end{aligned}$$

Maka nilai

$$\frac{d^2\Delta^{(2)}(\xi)}{d\xi^2} \text{ adalah} \\ = 12\xi^2 + 6\left(\frac{l+m}{a+1} + \frac{ma+2l}{a}\right)\xi + \left(\frac{l+m}{a+1}\frac{ma+2l}{a} + \frac{l(l+m+a-1)}{a} + \frac{lm}{a+1}\right).$$

Terlihat bahwa $\frac{d^2\Delta^{(2)}(\xi)}{d\xi^2} > 0$ untuk semua $\xi_0 \in (0,1)$. Hal ini menyatakan bahwa pada saat $\xi = \xi_0$

$$\frac{d\Delta^{(2)}(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_0} > 0,$$

sehingga $\Delta^{(2)}(\xi) > 0$ untuk $\xi \in (\xi_0, 1)$. Karena $\Delta^{(2)}(\xi) > 0$ maka berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, E_+ stabil asimtotik untuk $\xi \in (\xi_0, 1)$, karena dipenuhinya

$$a_1(\xi) > 0, \Delta^{(2)}(\xi) > 0, \text{ dan } a_3(\xi) > 0 \text{ untuk } \xi \in (\xi_0, 1).$$

Selanjutnya, dengan kriteria Liu dibuktikan bahwa pada saat $\xi = \xi_0$ terdapat suatu bifurkasi Hopf,

(CH.1) $a_1(\xi_0) > 0$ dan $a_3(\xi_0) > 0$ hal ini jelas terpenuhi karena $a_1(\xi) > 0$ dan $a_3(\xi) > 0$ untuk semua $\xi \in (0,1)$. $\Delta^{(2)}(\xi_0) = 0$ terpenuhi karena ξ_0 merupakan akar dari $\Delta^{(2)}(\xi)$.

(CH.2) $\frac{d\Delta^{(2)}(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_0} \neq 0$, hal ini jelas dipenuhi karena diperoleh

bahwa $\frac{d\Delta^{(2)}(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_0} > 0$ untuk semua $\xi_0 \in (0,1)$.

Untuk nilai $\xi \in (0, \xi_0)$ mengakibatkan $\Delta^{(2)}(\xi) < 0$, sehingga mengakibatkan E_+ tidak stabil untuk $\xi \in (0, \xi_0)$. ■

Proposisi 3.4. Jika $l+m+a < 1$ maka terdapat $\xi_1 \in (0,1)$ dan mengakibatkan $a_2(\xi_1) = 0$. Terdapat suatu nilai unik $\xi_0 \in (\xi_1, 1)$ di

mana suatu bifurkasi Hopf muncul untuk nilai ξ_0 dan titik kesetimbangan E_+ menjadi stabil asimtotik jika $\xi \in (\xi_0, 1)$ dan tidak stabil jika $\xi \in (0, \xi_0)$.

Bukti. Perhatikan bahwa $a_2(\xi) < 0$ untuk $\xi \in (0, \xi_1)$ dan $a_3(\xi) > 0$ untuk $\xi \in (0, 1)$ dengan $a_3(1) = 0$. Maka nilai $\Delta^{(2)}(\xi) = a_1(\xi)a_2(\xi) - a_3(\xi) < 0$ untuk $\xi \in [0, \xi_1]$. Pada saat $\xi = 1$ diperoleh $a_1(\xi)a_2(\xi) > 0$ dan $a_3(\xi) = 0$ sehingga $\Delta^{(2)}(\xi) > 0$. Karena $\Delta^{(2)}(\xi)$ kontinu pada $[0, 1]$, maka terdapat suatu nilai unik $\xi_0 \in (\xi_1, 1)$ yang mengakibatkan $\Delta^{(2)}(\xi_0) = 0$. Keunikan ξ_0 dikarenakan $a_1(\xi)a_2(\xi)$ merupakan suatu fungsi monoton naik dan $a_3(\xi)$ merupakan fungsi monoton turun di $[\xi_1, 1]$. Keunikan nilai ξ_0 mengakibatkan $\Delta^{(2)}(\xi) < 0$ untuk $\xi \in (0, \xi_0)$ dan $\Delta^{(2)}(\xi) > 0$ untuk $\xi \in (\xi_0, 1)$. Pada saat $\xi = \xi_0$ terjadi bifurkasi Hopf, hal ini terbukti karena dipenuhinya dua kondisi berikut

$$(CH.1) \quad a_1(\xi_0) > 0, \quad a_3(\xi_0) > 0 \quad \text{dan} \quad \Delta^{(2)}(\xi_0) = 0$$

$$\begin{aligned} (CH.2) \quad & \frac{d\Delta^{(2)}(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_0} \neq 0 \\ &= 4\xi^3 + 3 \left(\frac{l+m}{a+1} + \frac{ma+2l}{a} \right) \xi^2 + 2 \left(\frac{l+m}{a+1} \frac{ma+2l}{a} + \frac{l(l+m+a-1)}{a} + \frac{lm}{a+1} \right) \xi \\ &+ \left(\frac{l+m}{a+1} \frac{l(l+m+a-1)}{a} + \frac{lm}{a+1} \frac{l-a}{a} \right) \neq 0. \end{aligned}$$

Titik kesetimbangan E_+ stabil asimtotik jika $\xi \in (\xi_0, 1)$ dan tidak stabil jika $\xi \in (0, \xi_0)$. Hal ini dikarenakan pada saat $\xi \in (\xi_0, 1)$ diperoleh $\Delta^{(2)}(\xi) > 0$ dan ketika $\xi \in (0, \xi_0)$ diperoleh $\Delta^{(2)}(\xi) < 0$. ▀

Berdasarkan uraian Proposisi 3.1, Proposisi 3.2, Proposisi 3.3 dan Proposisi 3.4 maka syarat eksistensi dan kestabilan dari sistem dapat dirangkum dalam Tabel 3.1.

Tabel 3.1 Syarat eksistensi dan kestabilan dari sistem (3.9)

Titik tetap	Syarat eksistensi	Syarat kestabilan	Jenis kestabilan
E_0	-	-	Tidak stabil pelana
E_f	-	$b \in (1, b^*)$	Stabil asimtotik
	-	$b \in (b^*, +\infty)$	Tidak stabil pelana
E_+	$b \in (b^*, +\infty)$	$b < b_0$	Stabil asimtotik

$$\text{di mana } b_0 = 1 + \frac{m}{\xi_0} \text{ dan } b^* = 1 + m.$$

Dalam model ini terjadi perubahan kestabilan titik tetap, yaitu pada saat nilai b melewati b^* dan b_0 . Pada saat b melewati b^* kestabilan berubah dari kondisi bebas penyakit menjadi endemik, sehingga dapat disimpulkan b^* merupakan suatu nilai yang mengakibatkan terjadinya bifurkasi. Untuk nilai b_0 terjadi bifurkasi Hopf, bifurkasi ini terjadi pada saat titik kesetimbangan endemik muncul untuk $b \in (b^*, +\infty)$.

3.5 Simulasi Numerik

Pada sub bab ini diperlihatkan hasil simulasi numerik dengan menggunakan nilai-nilai parameter dalam model yang telah disederhanakan. Nilai-nilai untuk parameter dalam persamaan (3.9) diperoleh melalui parameter dalam persamaan (3.5). Nilai parameter yang digunakan diperoleh dari jurnal karya Beretta dan Kuang (1998).

Titik kesetimbangan endemik untuk persamaan (3.5) adalah

$$E_+ = (S^*, I^*, P^*) = \left(\frac{\mu}{K(b-1)}, \frac{\alpha S^*}{\lambda} \left(1 - \frac{N^*}{C} \right), \frac{\alpha}{K} \left(1 - \frac{N^*}{C} \right) \right) \quad (3.23)$$

di mana $N^* = S^* + I^*$.

Tabel 3.2 Nilai parameter persamaan (3.5)

Parameter	Nilai
K	$6,7 \times 10^{-8}$ ml/hari
λ	3,3/hari
μ	2/hari
b	37
C	2×10^6
α	1,34/hari
N^*	10^6 /ml
I^*	$0,17 \times 10^6$ /ml
S^*	$0,83 \times 10^6$ /ml
P^*	10^7 /ml

Nilai parameter persamaan (3.5) tersaji dalam Tabel 3.2. Berdasarkan nilai parameter pada Tabel 3.2, maka diperoleh

$$b^* = 1 + \mu / KC = 15,925.$$

Nilai parameter sistem persamaan (3.9), tersaji dalam Tabel 3.3.

Tabel 3.3 Nilai parameter persamaan (3.9)

Parameter	Nilai
a	10
l	24,627
m	14,925

Sistem (3.9) memiliki tiga titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan $E_0 = (0, 0, 0)$, titik kesetimbangan $E_f = (1, 0, 0)$ dan

$$\text{titik kesetimbangan } E_+ = \left(\frac{m}{b-1}, \frac{as^*(1-s^*)}{l+as^*}, \frac{al(1-s^*)}{l+as^*} \right).$$

Karena $\xi \triangleq s^*$ maka titik kesetimbangan E_+ untuk sistem persamaan (3.9) menjadi

$$E_+ = \left(\xi, \frac{a\xi(1-\xi)}{1+a\xi}, a(1-i^*-\xi) \right)$$

di mana $\xi \in (0, 1)$ merupakan parameter bifurkasi. Nilai bifurkasi $\xi_0 \in (0, 1)$ merupakan akar unik dari $\Delta^{(2)}(\xi) = a_1(\xi)a_2(\xi) - a_3(\xi) = 0$. nilai $\Delta^{(2)}(\xi) = 0$ dapat ditulis dalam persamaan berderajat empat sebagai berikut

$$\xi^4 + q_1\xi^3 + q_2\xi^2 + q_3\xi + q_4 = 0 \quad (3.24)$$

di mana uraian lengkapnya dapat dilihat pada pembahasan sebelumnya. Koefisien q_i untuk $i = 1, 2, 3, 4$ adalah

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{l+m}{a+1} + \frac{ma+2l}{a} \\ q_2 &= \frac{l+m}{a+1} \frac{ma+2l}{a} + \frac{l(l+m+a-1)}{a} + \frac{lm}{a+1} \\ q_3 &= \frac{l+m}{a+1} \frac{l(l+m+a-1)}{a} + \frac{lm}{a+1} \frac{l-a}{a} \\ q_4 &= \frac{l}{a(a+1)}. \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai parameter pada Tabel 3.3 maka persamaan (3.24) menjadi

$$\xi^4 + 23,446\xi^3 + 224,358\xi^2 + 478,802\xi - 82,279 = 0. \quad (3.25)$$

Dari persamaan (3.24) akan diperoleh ξ_0 yang merupakan akar unik dari persamaan tersebut, di mana ξ_0 bernilai 0,1597.

Dengan menggunakan teorema Liu akan dicek apakah terjadi bifurkasi Hopf, pada nilai bifurkasi $\xi_0 = 0,1597$.

(CH.1) $a_1(\xi_0) > 0$, $a_3(\xi_0) > 0$ dan $\Delta^{(2)}(\xi_0) = 0$.

$$a_1(\xi_0) = 14,925 + 24,627 + (1+10)0,1597 > 0$$

$$a_3(\xi_0) = (10,24,627,14,925)(1 - 0,1597) > 0$$

$\Delta^{(2)}(\xi_0) = 0$, hal ini jelas tebukti karena ξ_0 merupakan akar dari $\Delta^{(2)}(\xi)$

(CH.2) $\frac{d\Delta^{(2)}(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_0} \neq 0$

$$\frac{d\Delta^{(2)}(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_0} = 4\xi_0^3 + 70,338\xi_0^2 + 448,716\xi_0 + 478,802 > 0$$

Karena kedua syarat terpenuhi maka terdapat suatu bifurkasi Hopf untuk suatu nilai $\xi_0 = 0,1597$, dengan nilai b_0 adalah

$$\xi \triangleq s^* \text{ sehingga } \xi = \frac{m}{b-1}$$

$$\xi_0 = \frac{m}{b_0 - 1}$$

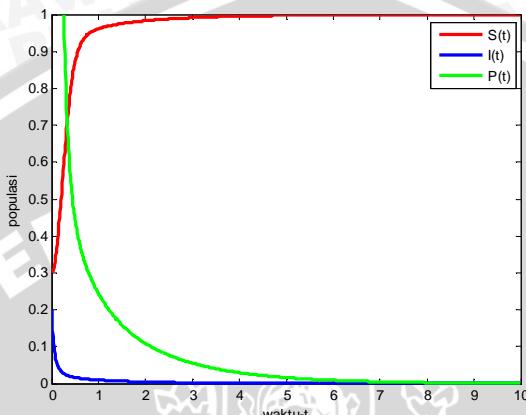
$$b_0 = \frac{m}{\xi_0} + 1 \\ = 94,456$$

3.5.1 Simulasi Numerik untuk $b=15$ ($b < b^*$)

Pada simulasi ini digunakan nilai awal $s = 0,3$, $i = 0,2$ dan $p = 5$ dengan nilai parameter yang digunakan adalah nilai parameter pada Tabel 3.3.

Gambar 3.2 menunjukkan bahwa solusi $s(t)$, $i(t)$, $p(t)$ menuju titik tetap bebas penyakit. Hal ini menyatakan bahwa nilai faktor replikasi $b = 15$ belum mampu mengakibatkan munculnya kondisi endemik. Pada gambar terlihat bahwa bakteri yang terinfeksi mulai mengalami kepunahan pada waktu $t=3$. Punahnya bakteri yang terinfeksi mengakibatkan bakteriofage kehilangan media untuk bereplikasi. Keadaan ini mengakibatkan bakteriofage tidak mampu mempertahankan keberadaannya, keadaan ini lama kelamaan akan menyebabkan bakteriofage mengalami kepunahan. Hal ini juga

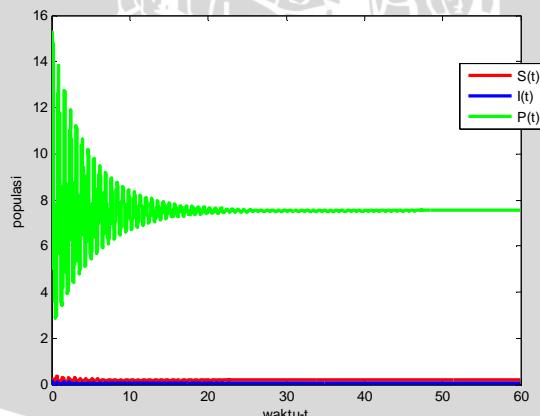
menunjukkan pada kondisi $b < b^* = 15,925$ mengakibatkan solusi selalu menuju keadaan bebas penyakit.



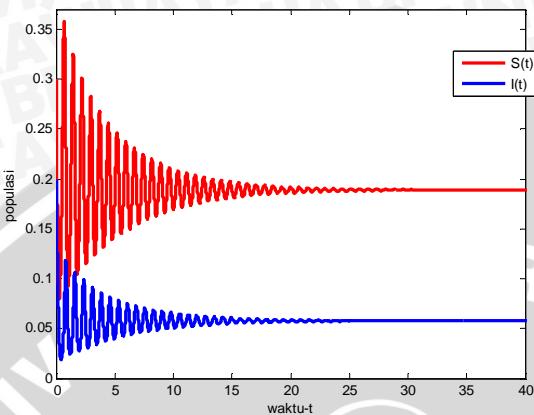
Gambar 3.2. Solusi numerik untuk nilai $b=15$.

3.5.2 Simulasi Numerik untuk $b=80$ ($b > b^*$)

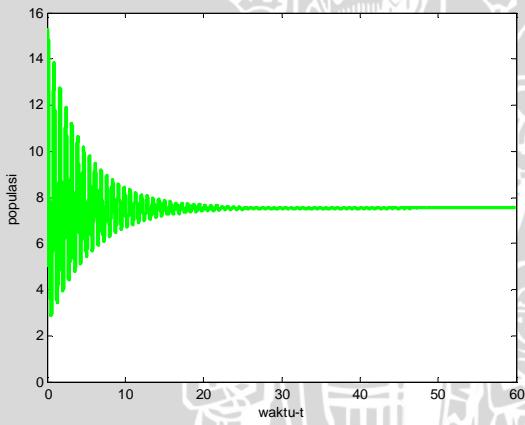
Simulasi berikut dilakukan dengan menggunakan nilai parameter yang ada pada Tabel 3.3 dengan nilai $b = 80$ dan nilai awal $s = 0,3$, $i = 0,2$ dan $p = 5$.



Gambar 3.3. Solusi numerik untuk nilai $b=80$.



(a)



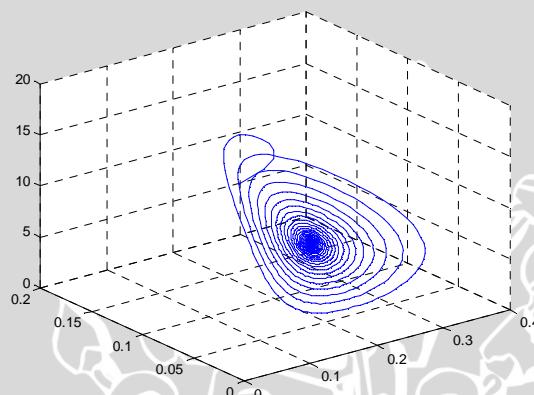
(b)

Gambar 3.4 Solusi numerik untuk $b=80$ dengan
 (a) populasi yang rentan dan terinveksi,
 (b) populasi bakteriofage.

Gambar 3.3 dan Gambar 3.4 menunjukkan bahwa ketika diambil suatu nilai $b=80$, ketiga variabelnya akan mengalami osilasi. Namun osilasi ini akan teredam pada suatu waktu t dan solusi stabil menuju titik kesetimbangan endemik $E_+ = (0.18892, 0.05779, 7.62408)$. Hal ini menunjukkan bahwa nilai faktor replikasi $b=80$

dapat mengakibatkan terjadinya kondisi endemik atau populasi yang terinfeksi selalu ada dalam sistem. Pada gambar terlihat bahwa jumlah populasi bakteriofage dipengaruhi oleh jumlah populasi bakteri yang terinfeksi, yaitu populasi bakteriofage akan selalu ada apabila populasi bakteri yang terinfeksi tetap ada dalam solusi. Stabilnya sistem menuju titik kesetimbangan endemik pada saat $b > b^*$ sesuai dengan hasil analisis pada pembahasan sebelumnya.

Gambar 3.5 merupakan plot 3D dari keadaan pada saat faktor replikasi bernilai 80. Hasil yang ditunjukkan sama dengan Gambar 3.3 dimana solusi akan terlebih dahulu berosilasi sebelum akhirnya tertarik pada keadaan endemik.

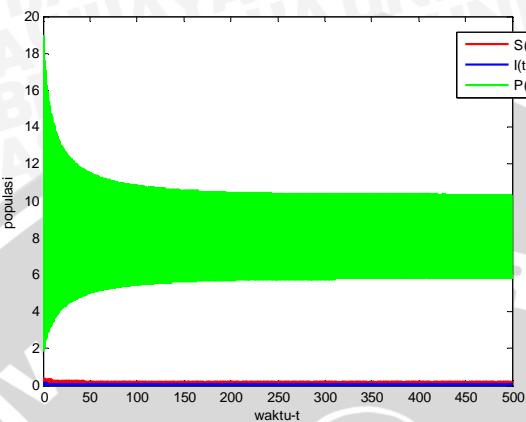


Gambar 3.5 Plot 3D $b = 80$.

3.5.3 Simulasi Numerik untuk $b=95$

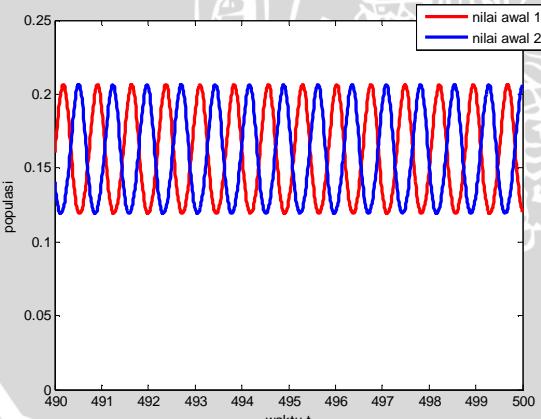
Simulasi yang ditunjukkan pada Gambar 3.6 menggunakan nilai parameter $m = 24.627$, $l = 14,925$, $a = 10$ dengan nilai awal $s = 0,3$, $i = 0,2$, $p = 5$ dan $b = 95$, di mana nilai $b > b_0 = 94,456$.

Hasil simulasi pada Gambar 3.6 menunjukkan bahwa terjadi osilasi untuk semua variabel. Namun osilasi ini akan menjadi periodik atau menuju suatu solusi yang periodik. Kecenderungan solusi menuju solusi yang periodik menunjukkan adanya suatu *limit cycle*. Kondisi ini menggambarkan keadaan di mana siklus penyakit terus berulang dengan periode waktu tertentu.

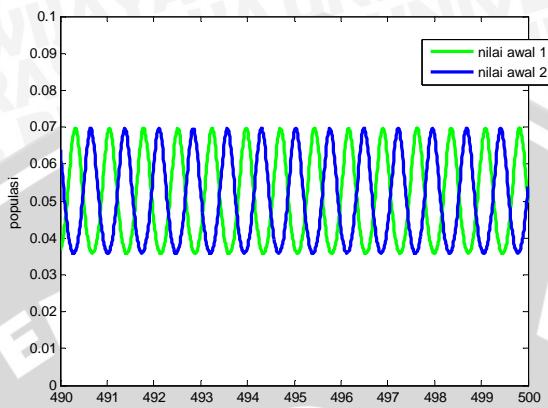


Gambar 3.6 Solusi numerik untuk nilai $b=95$.

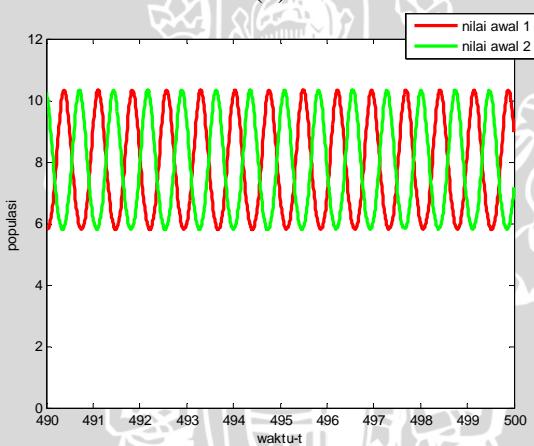
Limit cycle yang menarik solusi akan ditampilkan dalam Gambar 3.7. Simulasi tersebut menggunakan dua nilai awal untuk membuktikan keberadaan *limit cycle*, di mana nilai awal yang pertama merupakan nilai awal yang cukup jauh dari titik tetap dan nilai awal yang ke dua merupakan nilai awal yang cukup dekat dengan titik tetap. Dalam simulasi tersebut hanya akan ditampilkan kondisi untuk waktu 490 sampai dengan waktu 500.



(a)



(b)

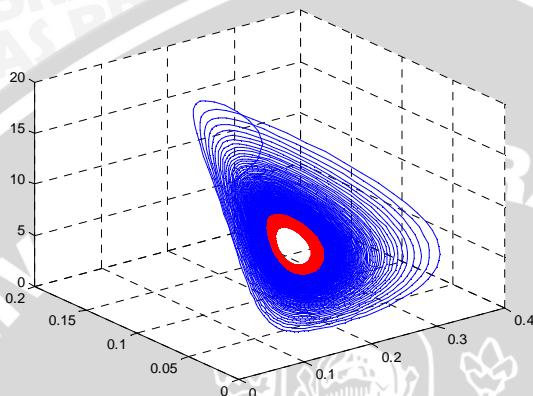


(c)

Gambar 3.7 Solusi numerik untuk nilai $b=95$ dengan dua nilai awal dengan (a) populasi yang rentan, (b) populasi yang terinfeksi, (c) populasi bakteriofage.

Simulasi yang ditunjukkan Gambar 3.7 menggunakan dua nilai awal yaitu nilai awal yang pertama adalah $s = 0,3$, $i = 0,2$, $p = 5$ dan nilai awal yang kedua adalah $s = 0,18$, $i = 0,057$, $p = 9$. Gambar 3.7 menunjukkan bahwa kedua nilai awal akan menghasilkan solusi yang sama yaitu solusi tertarik menuju keadaan periodik. Hal ini

menandakan bahwa terdapat suatu *limit cycle* yang stabil. Untuk memperjelas keberadaan dari *limit cycle* diberikan plot 3D pada Gambar 3.8.



Gambar 3.8 Plot 3D untuk dua nilai awal

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dalam skripsi ini, dapat disimpulkan hal-hal berikut.

1. Dengan menggunakan model kompartemen, diperoleh model infeksi bakteriofage yang merupakan sistem persamaan differensial nonlinier dengan tiga variabel tak bebas yaitu, populasi bakteri yang rentan terinfeksi, populasi bakteri yang terinfeksi, dan populasi bakteriofage.
2. Terdapat tiga titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan nol, titik kesetimbangan bebas penyakit, dan titik kesetimbangan endemik. Berdasarkan hasil analisis, titik kesetimbangan nol selalu bersifat tidak stabil pelana. Titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik pada saat titik kesetimbangan endemik tidak muncul dan titik kesetimbangan endemik akan bersifat stabil asimtotik apabila nilai faktor replikasi bakteriofage lebih besar dari nilai batasnya. Pada keadaan endemik terjadi bifurkasi Hopf.
3. Hasil simulasi menunjukkan kesimpulan yang sama dengan analisis dinamiknya.

4.2 Saran

Pada skripsi ini dibahas model infeksi bakteriofage pada bakteri laut dengan mengabaikan periode laten. Untuk pembahasan berikutnya disarankan meneliti model infeksi dengan adanya tambahan periode laten. Selain itu disarankan meneliti kestabilan global sistem.

DAFTAR PUSTAKA

- Ashelford, K.E. 1999. *Population Dynamics of Bacteriophages Infecting Serratia and Pseudomonas spp. Associated with Sugar Beet*. Proceedings of the 8th International Symposium on Microbial Ecology.
- Beretta, E. dan Y. Kuang. 1998. *Modeling and Analysis of a Marine Bacteriophage Infection*. Mathematical Biosciences. 149: 57-76.
- Binegar, B. 2008. *Lecture 4: Intermediate Differential Equations*. Oklahoma State University. United of America.
- Boyce, W.E. dan R.C. DiPrima. 2001. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. Seventh edition*, John Willey & Sons, Inc. United State of America.
- Glass, L. dan J. D. Murray. 2001. *Mathematical Biology : An Introduction, Third Edition*. Springer-Verlag, New York.
- Kuznetsov, Y. A..1998. *Elements of Applied Bifurcation Theory, Second Edition*. Springer-Verlag, New York.
- Liu, W. M., 1994. *Criterion of Hopf Bifurcations without Using Eigenvalues*. Journal Mathematical Analysis and Applications.182: 250-256.
- Matsumoto, T. 1993. *Bifurcations: Sights, Sounds, and Mathematics*. Springer-Verlag. New York.
- Munawar. 2011. *Cyanobacteria*.<http://munawarsmanti.blogspot.com/2011/01/cyanobacteria-alga-hijau-biru.html>. Diakses pada tanggal 25 Mei 2011.
- Naggle, R.K dan E.B. Saff.1993. *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems*. Addison-Wesley Publishing Company. United State of America.
- Perko, L. 2001. *Differential Equations and Dynamical Systems. Third edition*. Springer-Verlag. New York.

Prihantini, N. B., W. Wardhana. 2008. *Biodiversitas Cyanobacteria dari Beberapa Situ/Danau di Kawasan Jakarta-Depok-Bogor, Indonesia*. Makara Sains. 12: 44-54.

Proctor, L. M. dan J. A. Fuhrman. 1990. *Viral Mortality of Marine Bacteria and Cyanobacteria*. Nature. 343: 60-62.

Robinson, J.C. 2004. *An Introduction to Ordinary Differential Equations*. Cambridge University Press. New York.

Pudjiatmoko, 2010, *Bacteriophage*. <http://atanitokyo.blogspot.com/2010/08/bacteriophage.html>. Diakses pada tanggal 26 Mei 2011.



LAMPIRAN

Lampiran 1. *Listing Program untuk Simulasi Numerik Kesetimbangan pada Model Infeksi Bakteriofage dengan Dua Nilai Awal*

```
function dS=X1(S,Iv,P,t)
a=10;
dS=a*S-a*Iv-a*S^2-S*P;

function dIv=X2(S,Iv,P,t)
l=24.627;
dIv=S*P-l*Iv;

function dP=X3(S,Iv,P,t)
m=14.925;
l=24.627;
b=95;
dP=b*l*Iv-S*P-m*P;

function [S,Iv,P,T]=bacteriofage(s,iv,p,t)
s=0.3 ;
iv=0.2 ;
p=5 ;
t=0;
tmax=500;
S=s;
Iv=iv;
P=p;
T=t;
n=100*tmax;
h=tmax/n;
for j=1:n
    k11=h*X1(s,iv,p,t);
    k12=h*X2(s,iv,p,t);
    k13=h*X3(s,iv,p,t);
    k21=h*X1(s+k11/2,iv+k12/2,p+k13/2,t+h/2);
    k22=h*X2(s+k11/2,iv+k12/2,p+k13/2,t+h/2);
    k23=h*X3(s+k11/2,iv+k12/2,p+k13/2,t+h/2);
    k31=h*X1(s+k21/2,iv+k22/2,p+k23/2,t+h/2);
    k32=h*X2(s+k21/2,iv+k22/2,p+k23/2,t+h/2);
```

```

k33=h*X3(s+k21/2,iv+k22/2,p+k23/2,t+h/2);
k41=h*X1(s+k31,iv+k32,p+k33,t+h);
k42=h*X2(s+k31,iv+k32,p+k33,t+h);
k43=h*X3(s+k31,iv+k32,p+k33,t+h);
s=s+(k11+2*k21+2*k31+k41)/6;
iv=iv+(k12+2*k22+2*k32+k42)/6;
p=p+(k13+2*k23+2*k33+k43)/6;
t=t+h;
S=[S,s];
Iv=[Iv,iv];
P=[P,p];
T=[T,t];
end
figure(1)
fig1=plot(T,P,'r');
set(fig1,'LineWidth',2.5);
axis ([0 tmax 0 20]);
hold on;

s=0.18 ;
iv=0.057 ;
p=9 ;
t=0;
tmax=500;
S=s;
Iv=iv;
P=p;
T=t;
n=100*tmax;
h=tmax/n;
for j=1:n
    k11=h*X1(s,iv,p,t);
    k12=h*X2(s,iv,p,t);
    k13=h*X3(s,iv,p,t);
    k21=h*X1(s+k11/2,iv+k12/2,p+k13/2,t+h/2);
    k22=h*X2(s+k11/2,iv+k12/2,p+k13/2,t+h/2);
    k23=h*X3(s+k11/2,iv+k12/2,p+k13/2,t+h/2);
    k31=h*X1(s+k21/2,iv+k22/2,p+k23/2,t+h/2);
    k32=h*X2(s+k21/2,iv+k22/2,p+k23/2,t+h/2);
    k33=h*X3(s+k21/2,iv+k22/2,p+k23/2,t+h/2);
    k41=h*X1(s+k31,iv+k32,p+k33,t+h);
    k42=h*X2(s+k31,iv+k32,p+k33,t+h);
    k43=h*X3(s+k31,iv+k32,p+k33,t+h);
    s=s+(k11+2*k21+2*k31+k41)/6;

```



```
iv=iv+(k12+2*k22+2*k32+k42)/6;  
p=p+(k13+2*k23+2*k33+k43)/6;
```

```
t=t+h;
```

```
S=[S,s];
```

```
Iv=[Iv,iv];
```

```
P=[P,p];
```

```
T=[T,t];
```

```
end
```

```
figure(1)
```

```
fig1=plot(T,P,'g');
```

```
set(fig1,'LineWidth',2.5);
```

```
axis ([0 tmax 0 20]);
```

```
hold on;
```

```
xlabel('waktu-t');
```

```
ylabel('populasi');
```

```
legend('nilai awal 1', 'nilai awal 2');
```

