### Solusi Steady-State Model Difusi Populasi Ikan pada Marine Protected Areas (MPAs)

### **SKRIPSI**

Oleh: TRIYANA MARIZAFIAH 0610940060-94

BRAWINAL



PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2010

### Solusi Steady-State Model Difusi Populasi Ikan pada Marine Protected Areas (MPAs)

### **SKRIPSI**

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang Matematika

> Oleh: TRIYANA MARIZAFIAH 0610940060-94



PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2010

# BRAWIJAYA

### LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

Solusi Steady-State Model Difusi Populasi Ikan pada Marine Protected Areas (MPAs)

Oleh:

TRIYANA MARIZAFIAH 0610940060-94

Setelah dipertahankan di depan majelis penguji pada tanggal 18 Agustus 2011 dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dalam Bidang Matematika

**Dosen Pembimbing I** 

**Dosen Pembimbing II** 

Kwardiniya A., SSi., MSi NIP. 197006221998022001 Drs.Imam Nurhadi Purwanto,MT NIP.196203141989031001

Mengetahui, Ketua Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Abdul Rouf Alghofari, MSc NIP. 196709071992031001

### **LEMBAR PERNYATAAN**

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Triyana Marizafiah NIM : 0610940060-94 Jurusan : Matematika

Penulis Skripsi berjudul : Solusi Steady-State Model Difusi

Populasi Ikan pada Marine Protected Areas (MPAs)

### Dengan ini menyatakan bahwa:

- 1. isi skripsi yang saya buat benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka hanya sebagai referensi,
- 2. apabila di kemudian hari ternyata skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 8 Agustus 2011 Yang menyatakan,

(Triyana Marizafiah) NIM. 0610940060-94

### Solusi Steady-State Model Difusi Populasi Ikan pada Marine Protected Areas (MPAs)

### **ABSTRAK**

Pada skripsi ini dibahas konstruksi model difusi populasi ikan pada Marine Protected Areas (MPAs). Konstruksi model dilakukan dengan mengimplementasikan kondisi yang terjadi di dalam dan di sekitar Marine Protected Areas (MPAs) dalam bentuk variabel. Domain model ditinjau pada dua wilayah, yakni di luar Marine Protected Areas (MPAs) atau di kawasan bebas melaut, serta di dalam wilayah Marine Protected Areas (MPAs). Pergerakan ikan digambarkan dalam suatu gerak difusi dengan koefisien difusi sebesar F. Variabel-variabel yang telah didefinisikan lalu diselaraskan dengan keadaan yang sebenarnya sehingga terbentuklah persamaan difusi dimensi satu dalam fungsi kepadatan ikan n(x,t)dengan x menyatakan posisi dan t menyatakan waktu. Selanjutnya akan ditentukan solusi steady-state yang tepat dan memenuhi persamaan difusi dimensi satu tersebut dengan metode variasi parameter. Solusi steady-state beserta koefisien difusi dianalisis secara kualitatif terhadap lingkungan sekitar. Parameter yang digunakan untuk analisis kualitatif adalah Fishing Grounds Abundance  $(A_r)$ , MPAs Abundance  $(A_d)$ , Yield (Y), Total Abundance (A), dan Log Ratio (L). Dari hasil analisis kualitatif, parameter  $A_r$ ,  $A_d$  dan Y berbanding lurus dengan perubahan koefisisen difusi F. Sedangkan parameter A dan L berbanding terbalik dengan perubahan koefisien difusi *F*.

**Kata kunci**: persamaan difusi, *Marine Protected Areas* (MPAs), solusi steady-state, analisis kualitatif.

### Steady-State Solution of Diffusion Model of Fish Populations in Marine Protected Areas (MPAs)

### **ABSTRACT**

This final project concerns with the construction of diffusion models of fish populations in the Marine Protected Areas (MPAs). The model is constructed by implementing the conditions that occur in and around Marine Protected Areas (MPAs). Domain models are divided into two areas, i.e. outside the MPAs called the free zone, and inside MPAs. Fish movement is described as a diffusion motion with diffusion coefficient F. Variables that have been defined are suited with the actual condition in real life, forming a onedimensional-diffusion equation of fish populations on n(x, t) with x as position and t as time. Next, steady-state solution will be determined with the method of variation parameter. Steady-state solution and its diffusion coefficient are qualitatively analyzed on the surrounding environment. The parameters which are used for qualitative analysis i.e. Fishing Grounds Abundance  $(A_r)$ , MPAs Abundance  $(A_d)$ , Yield (Y), The Total Abundance (A), and The Log Ratio (L). From the results of qualitative analysis, the parameters  $A_r$ ,  $A_d$  and Y are directly proportional to the changes of diffusion coefficient F. While the parameters A and L are inversely proportional to the changes of diffusion coefficient F.

**Key words:** diffusion equation, *Marine Protected Areas* (MPAs), steady-state solution, qualitative analysis.



## DAFTAR ISI

	aman
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	iii
LEMBAR PERNYATAAN	V
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	XV
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah	2
1.4 Tujuan Penulisan	2
CITAS BRA.	
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	3
2.1 Pemodelan Matematika	3
2.2 Persamaan Differensial	4
2.3 Persamaan Differensial Biasa	4
2.4 Persamaan Differensial Parsial	4
2.5 Kekontinuan Fungsi	6
2.5 Metode Variasi Parameter	6
2.6 Marine Protected Areas	8
BAB III PEMBAHASAN	9
3.1 Konstruksi Model	9
3.2 Kondisi Stedy-State Model MPAs	11
a. Penentuan Syarat Batas	11
3.3 Solusi stedy-state model MPAs	13
a. Solusi Stedy-State di Dalam MPAs	14
b. Solusi Stedy-State di Luar MPAs	16
3.4 Simulasi grafis ketika kondisi <i>steady-state</i> tercapai	19
3.5 Analisis kualitatif terhadap lingkungan	20
AND	
RARIV KECIMDIH AN DAN CADAN	20

4.1 Kesimpulan		
DAFTAR PUSTAKA	31	
LAMPIRAN	33	



### DAFTAR GAMBAR

	Halam	ıan
Gambar 2.1	Bagan proses pemodelan matematika	3
Gambar 3.1	Visualisasi domain model dalam garis bilangan	12
Gambar 3.2	Grafik solusi steady-state model dengan	
	menggunakan parameter pada tabel 3.1	20



### BAB I PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Bagian terluas dari permukaan bumi tertutup oleh kawasan perairan yang sebagian besar berupa lautan. Oleh karena itu, laut memiliki peranan penting dalam kelangsungan hidup manusia. Manusia dapat memanfaatkan berbagai sumber daya alam yang terkandung di lautan antara lain ikan dan rumput laut. Namun semakin lama pemanfaatan laut melebihi ambang batas kewajaran, sehingga, bukan hal yang tidak mungkin jika suatu saat nanti akan terjadi kepunahan biota laut termasuk ikan. Untuk menghindari kemungkinan buruk dari eksploitasi sumber daya alam laut yang berlebihan, pemerintah membentuk wilayah yang dilindungi secara ketat oleh Angkatan Laut. Wilayah ini disebut sebagai *Marine Protected Areas* (MPAs).

Dalam Marine Protected Areas (MPAs), pergerakan dan kegiatan yang terjadi di dalamnya dipantau oleh pihak berwajib. Secara umum, tujuan pembentukan Marine Protected Areas (MPAs) yakni untuk mencapai kelestarian sumber daya alam laut. Kelestarian sumber daya alam laut dapat dicapai jika kepadatan ikan dan populasi biota laut terkendali. Untuk mencapai tujuan ini, dilakukan berbagai cara untuk meneliti kepadatan biota laut dalam suatu kawasan.

Salah satu cara yang digunakan yakni dengan membentuk model matematika populasi pada  $Marine\ Protected\ Areas\ (MPAs)$ . Pada dasarnya, pemodelan matematika untuk  $Marine\ Protected\ Areas\ (MPAs)$  dapat dikategorikan sebagai model kepadatan populasi dalam suatu kawasan  $Marine\ Protected\ Areas\ (MPAs)$ . Pada skripsi ini dibahas model populasi ikan dalam  $Marine\ Protected\ Areas\ (MPAs)$  serta sekitarnya. Model ini dibentuk dari implementasi variabel-variabel yang berpengaruh pada  $Marine\ Protected\ Areas\ (MPAs)$ . Selanjutnya terbentuk suatu persamaan differensial parsial dan kemudian diamati solusi steady-state-nya. Dari solusi steady-state yang didapat, selanjutnya dilakukan analisis kualitatif pada beberapa parameter antara lain:  $Fishing\ Grounds\ Abundance\ (A_r)$ ,  $MPAs\ Abundance\ (A_d)$ ,  $Yield\ (Y)$ ,  $The\ Total\ Abundance\ (A)$ ,  $dan\ The\ Log\ Ratio\ (L)$ . Parameter-parameter tersebut diamati jika terjadi perubahan koefisien difusi pada  $Marine\ Protected\ Areas\ (MPAs)$ .

### 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah sebagai berikut.

- 1. Bagaimana model matematika untuk menggambarkan kepadatan ikan yang dipengaruhi oleh proses difusi ikan di dalam dan di sekitar Marine Protected Areas (MPAs)?
- 2. Bagaimana bentuk solusi *steady state* dari model yang terbentuk?
- 3. Bagaimana analisis kualitatif terhadap variabel tertentu di sekitar ekosistem Marine Protected Areas (MPAs)?

### 1.3 Batasan Masalah

Skripsi ini difokuskan pada pembahasan dengan beberapa batasan masalah sebagai berikut.

- 1. Keragaman spesies ikan di semua tempat diasumsikan seragam.
- 2. Kematian ikan di dalam Marine Protected Areas (MPAs) hanya disebabkan oleh faktor alamiah.
- 3. Laju kelahiran diasumsikan konstan untuk semua spesies ikan, di dalam MPAs maupun di luar MPAs.

### 1.4 Tujuan

Adapun tujuan penulisan skripsi ini antara lain untuk :

- 1. mengetahui model matematika yang menggambarkan kepadatan ikan dengan pengaruh difusi ikan di dalam dan di sekitar Marine Protected Areas (MPAs),
- 2. mencari solusi steady state dari model yang terbentuk,
- 3. menganalisis parameter di sekitar Marine Protected Areas (MPAs) secara kualitatif.

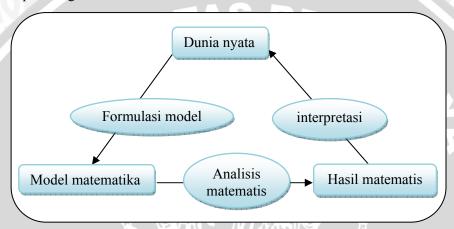


### BAB II TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1 Pemodelan Matematika

Dalam kehidupan sehari-hari banyak hal yang secara tidak langsung dapat digambarkan dalam bentuk matematis, dengan beberapa variabel yang menggambarkan situasi sebenarnya. Proses membentuk persamaan inilah yang biasa dikenal dengan proses pemodelan matematika. Pemodelan matematika adalah proses dimana objek yang akan dimodelkan, direpresentasikan dalam suatu himpunan relasi secara matematis (Humi dan Miller, 1992).

Pemodelan matematika dilakukan dengan beberapa tahap seperti pada bagan berikut :



Gambar 2.1 Bagan proses pemodelan matematika

Metode pemodelan yang digunakan pada skripsi ini yakni dengan merepresentasikan perilaku objek yang diamati dalam bentuk variabel. Salah satu hal yang harus diperhatikan adalah relasi yang terjadi antar variabel pada kehidupan nyata. Relasi antar variabel tersebut membentuk suatu persamaan yang dapat diselesaikan secara matematis.

## BRAWIJAYA

### 2.2 Persamaan Differensial

### **Definisi 2.1 (Persamaan Differensial)**

Persamaan differensial adalah persamaan yang memuat turunan satu atau beberapa fungsi yang tidak diketahui (Finizio dan Ladas,1988).

### 2.3 Persamaan Differensial Biasa

### Definisi 2.2 (Persamaan Differensial Biasa)

Persamaan differensial biasa orde *n* adalah suatu persamaan yang dapat ditulis dalam bentuk

$$y(n) = F(x, y, y', ..., y(n-1))$$
 (2.1)

dimana nilai y, y', ..., y(n) ditentukan oleh x (Finizio dan Ladas, 1988).

### Definisi 2.3 (Persamaan Differensial Biasa Linier)

Persamaan differensial biasa linier adalah suatu persamaan differensial yang bersifat linier dalam arti tidak ada perkalian antara variabel tak bebas dengan variabel bebasnya. Bentuk umum persamaan differensial biasa linier adalah sebagai berikut:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$
 (2.2)

dimana fungsi  $a_i(x)$  untuk i = 0,1,...n, n-1, dan f(x) adalah fungsi yang kontinyu pada selang I (Ross, 1984).

Jika f(x) = 0 maka persamaan (2.2) disebut persamaan differensial biasa linier yang homogen. Sebaliknya, apabila  $f(x) \neq 0$  maka persamaan (2.2) dikatakan persamaan differensial biasa yang tak homogen (Finizio dan Ladas, 1988).

### 2.4 Persamaan Differensial Parsial

### Definisi 2.4 (Persamaan Differensial Parsial)

Bentuk umum persamaan differensial parsial adalah:

$$F(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_2}, \dots, u_{x_1 \dots x_n}) = 0,$$
(2.3)

dengan 
$$u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} \operatorname{dan} u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j}$$
.

Pada persamaan (2.3), variabel  $x = x_1, ..., x_n$  adalah variabel bebas yang berada dalam ruang  $R^n$  (Humi dan Miller, 1992).

### Definisi 2.5 (Orde Persamaan Differensial Parsial)

Orde persamaan differensial parsial (2.3) adalah pangkat tertinggi dari turunan yang terdapat pada persamaan tersebut (Humi dan Miller, 1992).

### Definisi 2.6 (Derajat Persamaan Differensial Parsial)

Derajat persamaan differensial parsial (2.3) adalah pangkat dari turunan yang paling tinggi yang terdapat pada persamaan tersebut (Humi dan Miller, 1992).

### Definisi 2.7 (Persamaan Differensial Parsial Linier)

Persamaan differensial parsial orde-n dikatakan linier jika variabel u dan turunannya pada F membentuk polinomial berderajat satu (Humi dan Miller, 1992).

### Definisi 2.8 (PDP Homogen dan Tak Homogen)

Misal diberikan persamaan differensial parsial linier orde dua

$$a(x_1, \dots, x_n)u + \sum_i b_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{i,j} b_{ij}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j} = f(x_1, \dots, x_n)$$
(2.4)

Persamaan differensial (2.4) di atas disebut persamaan differensial yang homogen jika  $f(x_1, ..., x_n) = 0$ , dan bersifat tidak homogen jika  $f(x_1, ..., x_n) \neq 0$  (Humi dan Miller, 1992).

Salah satu jenis persamaan differensial parsial yang berkaitan dengan kasus yang dibahas dalam skripsi ini adalah persamaan difusi dimensi satu, dengan bentuk umum :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = F \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}.$$
 (2.5)

Pada persamaan di atas, *u* adalah besaran yang mengalami difusi dengan koefisien difusi *F*, dan *x*, *t* secara berturut-urut menyatakan posisi dan waktu (Suryanto, 2008).

Dalam skripsi ini, besran yang mengalami difusi adalah kepadatan ikan. Penyelidikan persamaan differensial parsial terutama

persamaan difusi, difokuskan pada kondisi saat variabel waktu benar-benar tidak berpengaruh pada perilaku persamaan. Kondisi seperti ini dinamakan kondisi tunak atau kondisi *steady-state*. Solusi steady-state dapat diperoleh ketika nilai  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ .

### 2.5 Kekontinuan Fungsi

### Definisi 2.9 (Kekontinuan di Satu Titik)

Fungsi f(x) dikatakan kontinu di sebuah titik c jika beberapa selang terbuka di sekitar c terkandung dalam domain fungsi f dan

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

(Purcell dan Varberg, 1987)

### Definisi 2.10 (Kekontinuan pada Selang)

Fungsi f(x) disebut kontinu pada selang terbuka (a, b) jika f(x) kontinu di setiap titik (a, b). f(x) disebut kontinu pada selang tertutup [a, b] jika f(x) kontinyu pada selang (a, b) dan

$$\lim_{x \to a^{+}} f(x) = f(a), \ \lim_{x \to b^{-}} f(x) = f(b).$$

(Purcell dan Varberg, 1987)

### 2.6 Metode Variasi Parameter untuk Menentukan Solusi Persamaan Differensial Biasa Tak Homogen

Metode ini digunakan untuk mencari solusi suatu persamaan differensial yang tidak homogen. Dalam skripsi ini, persamaan differensial yang menjadi bahasan adalah persamaan differensial biasa tak homogen tingkat dua dengan koefisien konstan dengan bentuk umum:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + By = f(x). \tag{2.6}$$

Penyelesaian umum persamaan tak homogen merupakan jumlah penyelesaian umum dari persamaan homogennya dan suatu penyelesaian partikulir persamaan tak homogennya. Persamaan homogen untuk persamaan (2.6) adalah:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + By = 0 \tag{2.7}$$

Persamaan karakteristik untuk persamaan (2.7) adalah

$$k^2 + Ak + B = 0, (2.8)$$

yang mempunyai akar-akar  $k_1$  dan  $k_2$ . Dari akar-akar ini, dapat ditentukan solusi umum  $(y_c)$  persamaan (2.7). Solusi umum yang terbentuk bergantung pada tiga kasus berikut.

1. Jika  $k_1$  dan  $k_2$  adalah bilangan real yang kembar  $(k_1 = k_2 = k)$ , maka solusi umum persamaan (2.7) berbentuk :

$$y_c = e^{kx}(C_1x + C_2)$$
. (2.9)

2. Jika  $k_1$  dan  $k_2$  adalah bilangan real yang berlainan  $(k_1 \neq k_2)$ , maka solusi umum persamaan (2.7) berbentuk :  $y_c = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$ 

$$y_c = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. (2.10)$$

3. Jika  $k_1$  dan  $k_2$  bilangan kompleks sekawan, yaitu  $k_1 = a +$ bi dan  $k_2 = a - bi$  dengan  $i = \sqrt{-1}$ , maka solusi umum persamaan (2.7) berbentuk:

$$y_c = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx).$$
 (2.11)

(Finizio dan Ladas, 1988)

Untuk memperoleh solusi partikulir digunakan metode variasi parameter. Misalkan solusi umum persamaan (2.7) berbentuk  $y_c = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$  maka solusi partikulirnya akan berbentuk

$$y_p = L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2.$$
 (2.12)

 $L_1(x)$  dan  $L_2(x)$  diperoleh dengan menyelesaikan sistem persamaan

$$\begin{cases}
L'_1 y_1 + L'_2 y_2 = 0 \\
L'_1 y_1' + L'_2 y_2' = f(x)
\end{cases}$$
(2.13)

dengan  $L'_1 = \frac{dL_1}{dx}$  dan  $L'_2 = \frac{dL_2}{dx}$ 

### 2.7 Marine Protected Areas (MPAs)

Secara umum, Marine Protected Areas (MPAs) dapat didefinisikan sebagai wilayah geografis yang terdiri dari beberapa wilayah laut yang mempunyai batas tertentu bagi aktifitas manusia. Pembentukan wilayah khusus ini, ditujukan untuk melindungi sumber daya alam laut dan sumber daya budaya yang tidak diterapkan di wilayah laut yang lain. Daerah geografis yang dapat disebut sebagai MPAs dapat berupa kawasan laut maritim saja atau kawasan *intertidal* saja. Kawasan *intertidal* yakni kawasan daratan yang tertutupi oleh laut, misalkan hutan *mangrove*.

Pembentukan MPAs mempunyai berbagai tujuan antara lain untuk melindungi suatu jenis spesies tertentu, mengurangi kepunahan habitat laut, sebagai lahan perawatan untuk ikan, dan juga untuk melindungi keseluruhan ekosistem yang ada. Selain itu, MPAs juga dapat digunakan sebagai alat untuk menjaga khasanah budaya yang ditinggalkan dari masa sebelumnya misalkan lokasi historis seperti kecelakaan kapal atau bekas-bekas kehidupan budaya manusia pada zaman dahulu. Lingkup kawasan MPAs dapat sangat luas seperti *Greet Barier Reef*, ataupun sangat sempit seperti misalnya *Area Marina Protetta Capo Rizzuto* di Meksiko.

Perlindungan terhadap kawasan MPAs tidak hanya sebatas larangan melaut, namun juga larangan melakukan pengeboran minyak bumi lepas laut, larangan penggunaan alat-alat kelautan tertentu seperti pengeboman dasar laut atau penggunaan racun. Namun, larangan-larangan ini dapat berubah sesuai ketentuan pemerintah yang menaungi kawasan geografis tersebut. Di Jepang misalnya, para nelayan boleh melakukan aktifitas memancing di dalam kawasan MPAs namun dengan syarat ikan yang diambil harus dengan ukuran yang diperbolehkan. Bagi tiap-tiap jenis ikan, pemerintah telah menetapkan ukuran yang boleh diambil oleh para nelayan. Pengawasannya dilakukan tidak hanya di laut saja, namun juga di dermaga untuk mengecek ukuran ikan yang tertangkap. Di Indonesia MPAs terdapat di kepulauan Batam. Di kawasan ini, semua aktifitas kelautan benar-benar terlarang kecuali untuk kepentingan wisata bahari seperti misalnya snorkling dan diving (Langerbrake dkk, 2010).

### BAB III PEMBAHASAN

### 3.1 Konstruksi Model

MPAs (*Marine Protected Areas*) adalah suatu wilayah cagar alam laut yang berada di kawasan laut bebas, sehingga tidak terdapat bangunan khusus yang menjadi batas di antaranya. Batas MPAs dengan kawasan bebas (*fishery zone*) hanyalah berupa perairan. Untuk memudahkan perhitungan batas MPAs dalam pembentukan model, pertama-tama dimisalkan garis pantai dicerminkan pada garis bilangan. Gabungan MPAs dan kawasan bebas akan direntang sepanjang garis pantai yang kemudian dapat dibagi-bagi menjadi beberapa atau tak berhingga bagian yang serupa. Tiap-tiap bagian mengandung wilayah MPAs dan dikelilingi oleh kawasan bebas melaut bagi nelayan.

Konstruksi model matematika dimulai dengan meninjau kondisi yang terjadi dalam wilayah MPAs. Pergerakan ikan yang terjadi digambarkan sebagai suatu proses difusi. Jika tingkat pergerakan difusi ikan dilambangkan dalam F, maka  $F_d$  melambangkan koefisien difusi ikan di dalam MPAs sedangkan  $F_r$  menggambarkan koefisien difusi ikan di luar MPAs. Koefisien difusi ikan di dalam MPAs dan di luar MPAs dibedakan, karena nilai keduanya relatif berbeda yakni nilai  $F_d \leq F_r$ . Perbedaan koefisien difusi ikan di dalam dan di luar MPAs terjadi karena perlindungan di dalam MPAs membuat ikan lebih merasa nyaman berada di dalamnya, sehingga tingkat pergerakannya lebih kecil. Sebaliknya, ikan yang berada di luar MPAs cenderung lebih banyak bergerak, sehingga koefisien difusinya lebih tinggi.

Pergerakan ikan terjadi secara terus menerus dengan arah keluar atau masuk MPAs. Rata-rata pergerakan ikan yang masuk dalam sistem dinotasikan sebagai R, dan rata-rata kematian disimbolkan dengan  $\mu$ . Misalkan  $\mu_d$  adalah rata-rata kematian di dalam MPAs, dan  $\mu_r$  adalah rata-rata kematian di luar MPAs maka berlaku  $\mu_d < \mu_r$ . Rata-rata kematian di dalam MPAs lebih kecil, karena perlindungan yang diterapkan di dalam MPAs menyebabkan tingkat kematian hanya disebabkan faktor alam. Tingkat kematian ikan yang

terjadi di luar MPAs lebih tinggi karena selain faktor alam, kematian juga disebabkan oleh eksplorasi yang dilakukan oleh manusia.

Berdasarkan tinjauan di atas, maka dapat dibentuk suatu model matematika dalam bentuk persamaan difusi dimensi 1 yang menggambarkan tingkat difusi ikan dalam suatu waktu. Kepadatan ikan pada saaat t dalam posisi x misal dinotasikan dalam n(x,t)maka persamaan difusi populasi ikan pada posisi x dapat dinyatakan dalam persamaan differensial parsial

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (F(x) \frac{\partial}{\partial x} n) + R - \mu(x) n, \qquad (3.1)$$

$$F(x) = \begin{cases} F_r & \text{jika } x \in (-1+2k, -h+2k) \cup (h+2k, 1+2k) \\ F_d & \text{jika } x \in (-h+2k, h+2k) \end{cases}$$

dan

$$\mu(x) = \begin{cases} \mu_r & \text{jika } x \in (-1+2k, -h+2k) \cup (h+2k, 1+2k) \\ \mu_d & \text{jika } x \in (-h+2k, h+2k). \end{cases}$$

dalam hal ini,

n = kepadatan ikan

 $F_r$  = koefisien difusi ikan di luar MPAs  $\left(\frac{km^2}{thn}\right)$ ,

 $F_d$  = koefisien difusi ikan di dalam MPAs  $\left(\frac{km^2}{thr}\right)$ 

 $\mu_r$  = rata-rata kematian ikan di luar MPAs  $\left(\frac{1}{thn}\right)$ 

 $\mu_d$  = rata-rata kematian ikan di dalam MPAs  $\left(\frac{1}{thn}\right)$ ,

 $R = \text{Laju kelahiran} \left( \frac{\text{juta ikan}}{\text{thn km}} \right),$ 

h = lebar kawasan MPAs (km).

### 3.2 Kondisi Steady-State Model MPAs

Kondisi *steady-state* yakni kondisi dimana nilai n(x) tidak dipengaruhi oleh perubahan waktu t. Bila dilihat secara seksama, persaman (3.1) termasuk jenis persamaan difusi dimensi satu dengan besaran yang mengalami difusi ialah n. Secara matematis, kondisi *steady-state* model difusi populasi ikan akan tercapai apabila

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} (F(x) \frac{\partial}{\partial x} n) + R - \mu(x) n.$$
 (3.2)

### a. Penentuan Syarat Batas

Untuk menyelesaikan persamaan (3.2), dibutuhkan syarat batas yang harus dipenuhi oleh n(x). Dalam skripsi ini, syarat batas yang digunakan adalah syarat batas Neumann yang mana pada batasbatasnya diberikan suatu nilai  $\frac{\partial u}{\partial n}$ , yakni nilai turunan ke arah normal.

Pertama-tama akan ditinjau kondisi pada batas MPAs, antara lain tentang perubahan kepadatan ikan dan juga tentang tingkat difusi yang terjadi. Perubahan kepadatan ikan di suatu tempat dalam MPAs (n(x)) bersifat kontinyu dan periodik, maka  $F(x)\frac{\partial}{\partial x}n(x)$  bersifat kontinyu juga. Oleh karena sifat periodisitas dan kekontinuan fungsifungsi tersebut, maka dapat disimpulkan

$$n(x+1) = n(x), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

Jika F(x) tidak kontinyu dalam batas MPAs, maka akan mengakibatkan perubahan yang terus menerus dan tak beraturan, sedemikian sehingga  $\frac{\partial}{\partial x}n(x)$  tidak kontinyu. Jadi apabila n(x) kontinyu maka F(x) juga kontinyu. Ukuran lebar lautan pada kenyataannya tak berhingga, maka dalam skripsi ini pencarian nilai steady state dibatasi pada titik yang simetris dengan nilai x=0 yakni dalam interval [0,1] dengan n(x) periodik dan memenuhi

$$n(x) = n(-x), \forall x \text{ di luar MPAs.}$$
 (3.4)

Untuk menjamin kekontinuan nilai n(x) dan F(x) n'(x) juga kontinyu, syarat yang harus dipenuhi adalah limit kanan dan limit kiri fungsi pada batas antara MPAs dan kawasan bebas, nilainya haruslah sama.

BRAWIJAYA

Kekontinuan n(x) dan  $F(x)\frac{\partial}{\partial x}n(x)$  pada batas kiri MPAs dan kawasan bebas tercapai bila

$$\lim_{x \to (-h+2k)^{-}} n(x) = \lim_{x \to (-h+2k)^{+}} n(x),$$
dan (3.5a)

$$\lim_{x \to (-h+2k)^{-}} F_d(x) n'(x) = \lim_{x \to (-h+2k)^{+}} F_r(x) n'(x).$$

Kekontinuan n(x) dan  $F(x)\frac{\partial}{\partial x}n(x)$  pada batas kanan MPAs dan kawasan bebas tercapai jika

$$\lim_{x \to (h+2k)^{-}} n(x) = \lim_{x \to (h+2k)^{+}} n(x) ,$$

dan (3.5b)

$$\lim_{x \to (h+2k)^{-}} F_d(x) n'(x) = \lim_{x \to (h+2k)^{+}} F_r(x) n'(x).$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa persamaan differensial (3.2) dapat diselesaikan dalam batas [0,1]. Misalkan lebar kawasan MPAs disimbolkan dalam h, maka jika digambarkan dalam garis bilangan lebih kurang sebagai berikut.

$$\begin{array}{cccc}
& & & & \downarrow \\
& & & \downarrow \\
0 & h & & 1
\end{array}$$

Gambar 3.1 Visualisasi domain model dalam garis bilangan

Pada Gambar 3.1, wilayah yang diarsir menggambarkan wilayah MPAs. Dengan menggunakan ketentuan pada (3.5a) dan (3.5b) serta meninjau periodisitas persamaan pada interval [0,1], maka dapat diperoleh syarat batas Neumann sebagai berikut,

$$\frac{dn}{dx}(0) = \frac{dn}{dx}(1) \tag{3.6a}$$

dan,

$$n(0) = n(1).$$
 (3.6b)

Dengan terbentuknya syarat batas di atas, maka dapat ditemukan suatu fungsi tak negatif n(x) yang memenuhi persamaan :

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} (F(x) \frac{\partial}{\partial x} n) + R - \mu(x) n , x \in [0,1].$$
 (3.7)

Hal ini menandakan bahwa persamaan (3.7) kontinyu dalam interval [0,1] dan terdiferensialkan dalam [0,1] kecuali mungkin di h. Persamaan (3.7) tersebut juga memenuhi kondisi pada batas MPAs sebagai berikut :

$$\lim_{x \to (h)^{-}} n(x) = \lim_{x \to (h)^{+}} n(x)$$

yang artinya  $n_d(h) = n_r(h)$  (3.8a)

dan,

$$\lim_{x \to (h)^{-}} F_{d} \frac{\partial}{\partial x} n(x) = \lim_{x \to (h)^{+}} F_{r} \frac{\partial}{\partial x} n(x)$$

yang artinya  $F_d n'(h) = F_r n'(h)$ .

### 3.3 Solusi steady-state Model MPAs

### Teorema 3.1

Persamaan (3.7) beserta syarat batas (3.6a-b) dan (3.8a-b) mempunyai solusi tunggal n(x) yang non-negative, yang mana solusi tersebut kontinyu di titik [0,1] serta terdifferensialkan secara kontinyu dalam interval [0,1]  $\setminus \{h\}$ .

### Bukti:

Pertama akan disederhanakan bentuk persamaan (3.7) sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial x}(F(x)\frac{\partial}{\partial x}n) + R - \mu(x)n = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x)\frac{\partial}{\partial x}n + F(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}n + R - \mu(x)n = 0$$
(3.9)

Selanjutnya dari persamaan (3.9) di atas akan ditinjau pada wilayah di dalam MPAs dan juga di luar MPAs dalam interval yang dibagi dua pada h. Untuk wilayah di dalam MPAs, interval x yang dipergunakan berada pada [0,h) sedangkan wilayah di luar MPAs

berada pada (h,1]. Interval yang digunakan yakni antara 0 sampai dengan 1. Solusi steady state persamaan (3.7) dinotasikan dalam  $(x) = \begin{cases} n_d(x), x \in [0,h) \\ n_r(x), x \in (h,1] \end{cases}$ .

### 3.3.1 Solusi Steady-State di Dalam Wilayah MPAs

Suatu wilayah lautan dikategorikan berada dalam wilayah MPAs jika wilayah tersebut tercakup dalam interval [0,h). Koefisien-koefisien yang digunakan pada persamaan (3.11) antara lain  $F_d$ dan juga  $\mu_d$ , maka didapat persamaan sebagai berikut :

$$\frac{\partial}{\partial x}F_d\frac{\partial}{\partial x}n + F_d\frac{\partial^2}{\partial x^2}n + R - \mu(x)n = 0. \tag{3.10}$$

Koefisien difusi ikan di dalam MPAs ( $F_d$ ) adalah suatu konstanta, maka persamaan (3.10) menjadi :

$$F_d \frac{\partial^2}{\partial x^2} n + R - \mu_d n = 0. {(3.11)}$$

Selanjutnya, persamaan (3.11) dapat disederhanakan sebagai berikut,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} n - \frac{\mu_d}{F_d} n = -\frac{R}{F_d}.$$
 (3.12)

Persamaan (3.12) adalah persamaan differensial biasa yang tidak homogen dengan persamaan karakteristik bagian homogennya adalah:

$$k^2 - \frac{\mu_d}{F_d} = 0 \ .$$

Dari persamaan di atas, diperoleh akar-akar karakteristik

$$k = \pm \sqrt{\frac{\mu_d}{F_d}},$$

sehingga 
$$Y_c = C_1 e^{-\left(\sqrt{\frac{\mu_d}{F_d}}\right)x} + C_2 e^{\left(\sqrt{\frac{\mu_d}{F_d}}\right)x}$$
.

Misalkan 
$$\sqrt{\frac{\mu_d}{F_d}} = \alpha_d$$
, (3.13)

maka diperoleh solusi umum sebagai berikut:

$$Y_c = C_1 e^{-\alpha_d x} + C_2 e^{\alpha_d x} . \tag{3.14}$$

Solusi partikulir diperoleh dengan menggunakan metode variasi parameter sebagai berikut :

$$Y_p = L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2 (3.15)$$

Dari persamaan (3.14) diperoleh nilai  $y_1 = e^{-\alpha_d x}$  dan  $y_2 = e^{\alpha_d x}$ , sedangkan nilai  $L_1$  dan  $L_2$  diperoleh dari :

$$\begin{array}{c} L_1'y_1 + L_2'y_2 = 0 \\ L_1'y_1' + L_2'y_2' = f(x) \end{array} \quad \rangle \ L_1' = \frac{dL_1}{dx} \quad ; \quad L_2' = \frac{dL_2}{dx} \end{array}$$

maka

$$L'_1 e^{-\alpha_d x} + L'_2 e^{\alpha_d x} = 0$$
  
$$-\alpha_d L'_1 e^{-\alpha_d x} + \alpha_d L'_2 e^{\alpha_d x} = -\frac{R}{F_d}$$

Dengan menggunakan metode substitusi dan eliminasi, nilai  $L_1$  dan  $L_2$  dapat diperoleh sebagai berikut;

$$L'_1 = \frac{1}{2}e^{\alpha_d x} \frac{R}{F_d \alpha_d} \qquad \rightarrow \quad L_1 = \int \frac{1}{2}e^{\alpha_d x} \frac{R}{F_d \alpha_d} dx \tag{3.16}$$

$$L'_{2} = -\frac{1}{2}e^{-\alpha_{d}x}\frac{R}{F_{d}\alpha_{d}} \rightarrow L_{2} = \int -\frac{1}{2}e^{-\alpha_{d}x}\frac{R}{F_{d}\alpha_{d}} dx$$
. (3.17)

Akan diselesaikan persamaan (3.16),

$$L_1 = \int \frac{1}{2} e^{\alpha_d x} \frac{R}{F_d \alpha_d} dx = \frac{1}{2} \frac{R}{F_d \alpha_d} \frac{1}{\alpha_d} e^{\alpha_d x}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{R}{F_d \left(\frac{\mu_d}{F_d}\right)} e^{\alpha_d x}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{R}{\mu_d} e^{\alpha_d x} . \tag{3.18}$$

Dengan cara yang sama, persamaan (3.18) menghasilkan  $L_2$  yakni:

$$L_2 = \frac{1}{2} \frac{R}{F_d(\frac{\mu_d}{F_d})} e^{-\alpha_d x} \rightarrow L_2 = \frac{1}{2} \frac{R}{\mu_d} e^{-\alpha_d x}$$
 (3.19)

Substitusikan persamaan  $L_1$  dan  $L_2$  ke dalam persamaan (3.15) sedemikian sehingga solusi partikulir didapatkan, yakni

$$Y_p = \frac{1}{2} \frac{R}{\mu_d} e^{\alpha_d x} e^{-\alpha_d x} + \frac{1}{2} \frac{R}{\mu_d} e^{-\alpha_d x} e^{\alpha_d x} = \frac{R}{\mu_d}$$

Selanjutnya, diperoleh solusi umum:

$$n_d(x) = Y_c + Y_p$$

$$n_d(x) = C_1 e^{-\alpha_d x} + C_2 e^{\alpha_d x} + \frac{R}{\mu_d}.$$
(3.20)

### 3.3.2 Solusi Steady State di Luar MPAs

Sama halnya dengan penjabaran untuk memperoleh solusi  $n_d(x)$  pada persamaan (3.20), solusi  $n_r(x)$  menggambarkan solusi n(x) untuk wilayah di luar MPAs. Hanya saja, untuk wilayah di luar MPAs interval yang digunakan adalah (h,1]. Koefisien-koefisien yang digunakan adalah  $F_r$  dan  $\mu_r$ , maka didapat persamaan sebagai berikut :

$$\frac{\partial}{\partial x}F_r\frac{\partial}{\partial x}n + F_r\frac{\partial^2}{\partial x^2}n + R - \mu(x)n = 0.$$
 (3.21)

Koefisien difusi ikan di luar MPAs  $(F_r)$  adalah suatu konstanta, maka persamaan (3.21) menjadi :

$$F_r \frac{\partial^2}{\partial x^2} n + R - \mu(x) n = 0.$$
 (3.22)

Selanjutnya, persamaan (3.22) dapat ditulis sebagai

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} n - \frac{\mu_r}{F_r} n = -\frac{R}{F_r}.$$
 (3.23)

Persamaan (3.23) di atas, memiliki persamaan karakteristik bagian homogen yakni

$$k^2 - \frac{\mu_r}{F_r} = 0.$$

Dari persamaan di atas diperoleh akar-akar karakteristik

$$k^2 = \frac{\mu_d}{F_d} \to k = \pm \sqrt{\frac{\mu_r}{F_r}},$$

sehingga 
$$Y_c = C_3 e^{-\left(\sqrt{\frac{\mu_r}{F_r}}\right)x} + C_4 e^{\left(\sqrt{\frac{\mu_r}{F_r}}\right)x}$$
.

Misalkan  $\sqrt{\frac{\mu_r}{F_r}} = \alpha_r$ , (3.24)

Maka diperoleh solusi umum sebagai berikut :

$$Y_c = C_3 e^{-\alpha_r x} + C_4 e^{\alpha_r x} \,. \tag{3.25}$$

$$Y_p = L_3(x)y_3 + L_4(x)y_4 (3.26)$$

Dari persamaan (3.25) diperoleh nilai  $y_3 = e^{-\alpha_r x}$  dan  $y_4 = e^{\alpha_r x}$ , sedangkan nilai  $L_3$  dan  $L_4$  diperoleh dari :

$$\begin{array}{c} L_3'y_3 + L_4'y_4 = 0 \\ L_3'y_3' + L_4'y_4' = f(x) \end{array} \quad \rangle \ L_3' = \frac{dL_3}{dx} \quad ; \quad L_2' = \frac{dL_4}{dx} \end{array}$$

maka.

$$L_3'e^{-\alpha_r x} + L_4'e^{\alpha_r x} = 0$$
$$-\alpha_r L_3'e^{-\alpha_r x} + \alpha_r L_4'e^{\alpha_r x} = -\frac{R}{F_r}$$

Dengan menggunakan metode substitusi dan eliminasi, nilai  $L_3$  dan  $L_4$  dapat diperoleh sebagai berikut;

$$L_3' = \frac{1}{2}e^{\alpha_r x} \frac{R}{F_r \alpha_r} \longrightarrow L_3 = \int \frac{1}{2}e^{\alpha_r x} \frac{R}{F_r \alpha_r} dx$$
 (3.27)

$$L'_{4} = -\frac{1}{2}e^{-\alpha_{r}x}\frac{R}{F_{r}\alpha_{r}} \rightarrow L_{4} = \int -\frac{1}{2}e^{-\alpha_{r}x}\frac{R}{F_{r}\alpha_{r}}dx$$
 (3.28)

akan diselesaikan persamaan (3.27),

$$L_{3} = \int \frac{1}{2} e^{\alpha_{r}x} \frac{R}{F_{r}\alpha_{r}} dx = \frac{1}{2} \frac{R}{F_{r}\alpha_{r}} \frac{1}{\alpha_{r}} e^{\alpha_{r}x}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{R}{F_{r}(\alpha_{r})^{2}} e^{\alpha_{r}x}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{R}{F_{r}(\frac{\mu_{r}}{F_{r}})} e^{\alpha_{r}x}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{R}{\mu_{r}} e^{\alpha_{r}x}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{R}{\mu_{r}} e^{\alpha_{r}x}$$
(3.29)

Dengan cara yang sama, persamaan (3.28) menghasilkan  $L_4$  yakni:

$$L_4 = \frac{1}{2} \frac{R}{F_r(\frac{\mu_r}{F_r})} e^{-\alpha_r x} = \frac{1}{2} \frac{R}{\mu_r} e^{-\alpha_r x}$$
(3.30)

Substitusikan persamaan  $L_3$  dan  $L_4$  ke dalam persamaan (3.25) sedemikian sehingga diperoleh solusi partikulir sebagai berikut :

$$Y_p = \frac{1}{2} \frac{R}{\mu_r} e^{\alpha_r x} e^{-\alpha_r x} + \frac{1}{2} \frac{R}{\mu_r} e^{-\alpha_r x} e^{\alpha_r x} = \frac{R}{\mu_r}$$

Selanjutnya, solusi umum didapatkan yakni

$$n_r(x) = Y_c + Y_p$$
  
 $n_r(x) = C_3 e^{-\alpha_r x} + C_4 e^{\alpha_r x} + \frac{R}{\mu_r}$ . (3.31)

Penjabaran pada subbab 3.3.1 dan 3.3.2 menghasilkan solusi umum persamaan (3.9) dalam bentuk

$$n(x) = \begin{cases} n_d(x) = C_1 e^{-\alpha_d x} + C_2 e^{\alpha_d x} + \frac{R}{\mu_d}, & \forall x \in [0, h) \\ n_r(x) = C_3 e^{-\alpha_r x} + C_4 e^{\alpha_r x} + \frac{R}{\mu_r}, & \forall x \in [h, 1]. \end{cases}$$
(3.32)

Syarat batas pada persamaan (3.6a-b) dan (3.8a-b) digunakan untuk menentukan konstanta  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  dan  $C_4$ . Nilai konstantakonstanta ini dipaparkan dalam lampiran skripsi ini. Bila keempat konstanta tersebut disubstitusikan dalam persamaan (3.32) akan menghasilkan solusi steady-state yang tunggal. Maka terbukti bahwa persamaan (3.7) beserta syarat batas (3.6a-b) dan (3.8a-b) mempunyai solusi tunggal n(x) yang mana solusi tersebut kontinyu di titik [0,1] serta terdifferensialkan secara kontinyu dalam interval  $[0,1] \setminus \{h\}. \bullet$ 



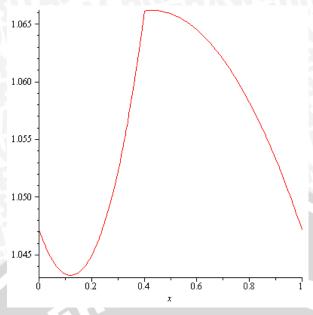
### 3.4 Simulasi Grafis Ketika Kondisi Steady-State Tercapai

Untuk melakukan simulasi grafis kondisi steady-state model difusi populasi ikan, dibutuhkan nilai-nilai parameter pada persamaan (3.7). Nilai parameter yang digunakan dalam pembentukan simulasi ini diperoleh dari Langerbrake,2010, sebagai berikut.

**TABEL 3.1** Nilai Parameter

Parameter	Nilai
h	0.4 km
R	$0.5 \frac{\text{ribu ikan}}{(\text{tahun })(\text{km})}$
$F_r$	2 km² tahun
$F_d$	$0.04 \frac{\mathrm{km}^2}{\mathrm{tahun}}$
$\mu_r$	$0.25 \frac{1}{\text{tahun}}$
$\mu_d$	$0.5\frac{1}{\text{tahun}}$
n(x,0)	1 ribu ikan km

Sebelum menentukan solusi steady-state model, terlebih dahulu harus ditentukan nilai-nilai koefisien  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  dan  $C_4$ . Dengan menggunakan software Maple, nilai-nilai  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  dan  $C_4$ berdasarkan nilai parameter pada Tabel 3.1 di atas diperoleh nilainilai  $C_1=0.03305998114$  ,  $C_2=0.0141246448$  ,  $C_3=$ -0.543630365, dan  $C_4 = -0.401008889$ . Selanjutnya diperoleh grafik kondisi steady-state sebagai berikut:



**Gambar 3.2** Grafik Solusi *Steady-State* Model dengan Menggunakan Parameter pada Tabel 3.1

Dari Gambar 3.1 di atas, nampak bahwa solusi model difusi populasi ikan pada MPAs seperti yang dipaparkan pada persamaan (3.32) adalah grafik yang periodik dan kontinyu serta terdiferensialkan kecuali pada nilai x=h yang mana pada titik tersebut grafik kontinyu namun tidak terdifferensialkan. Gambar 3.1 menunjukkan bahwa kondisi kepadatan ikan paling tinggi berada pada nilai  $x=0.4\ km$ tepat pada batas antara MPAs dan kawasan bebas. Sementara, jika ditinjau nilai x semakin menjauh dari batasbatas MPAs dan kawasan bebas, kepadatan ikan menunjukkan penurunan. Jadi dapat disimpulkan kepadatan ikan memusat pada batas-batas MPAs dan kawasan bebas.

### 3.5 Analisis Kualitatif Terhadap Lingkungan

Keberadaan *Marine Protected Areas* beserta gerak difusi di dalamnya, sedikit banyak membawa dampak pada hal-hal yang berhubungan dengan aktivitas kelautan. Skripsi ini membahas analisis kualitatif pada saat kondisi *steady-state* terhadap parameter berikut ini.

## 1. Fishing Grounds Abundance $(A_r)$

Yakni jumlah ikan yang ada di wilayah melaut para nelayan. Wilayah bebas melaut dalam kondisi *steady-state* berada pada interval (*h*, 1], oleh karena itu jumlah ikan yang berada di wilayah bebas melaut didefinisikan sebagai berikut:

$$A_r = \int_h^1 n(x) dx \tag{3.33}$$

Dengan n(x) adalah solusi steady- state dari model (3.7).

# 2. MPAs Abundance $(A_d)$

Yakni jumlah ikan yang berada di dalam kawasan MPAs. Oleh karena interval yang digunakan pada solusi steady-state adalah [0,1], dan batas MPAs berada pada selang [0,h) maka  $A_d$  dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$A_d = \int_0^h n(x)dx \tag{3.34}$$

# 3. The Total Abundance (A)

Ialah jumlah total kelimpahan ikan di seluruh wilayah laut yang dihitung pada kondisi *steady-state*. Parameter ini dapat dinotasikan dalam bentuk integral-tentu sebagai berikut:

$$A = \int_0^1 n(x) dx \tag{3.35}$$

Secara logika, parameter *The Total Abundance* dapat pula diperoleh dengan menjumlahkan antara ikan yang berada di kawasan bebas dan ikan yang berada di dalam MPAs sebagai berikut:

$$A = \int_0^1 n(x) dx = \int_0^h n(x) dx + \int_h^1 n(x) dx = A_d + A_r.$$

## 4. *Yield* (*Y*)

Secara umum, *yield* dapat diartikan sebagai hasil panen yang diperoleh oleh para nelayan di wilayah bebas melaut per satuan waktu (dalam kondisi *steady-state*). Dengan asumsi kematian ikan di dalam dan di luar MPAs yang disebabkan faktor alam jumlahnya sama dan kematian ikan di dalam MPAs hanya disebabkan faktor alam, maka rata-rata pemancingan yang dilakukan nelayan dinotasikan dalam  $(\mu_r - \mu_d)$ . Sehingga *yield* dapat dinotasikan sebagai :

$$Y = \int_{h}^{1} (\mu_r - \mu_d) n(x) dx. \tag{3.36}$$

$$Y = A_r(\mu_r - \mu_d) .$$

# 5. The Log Ratio (L)

Variabel ini menggambarkan perbandingan antara rata-rata jumlah ikan di dalam MPAs dan di kawasan bebas melaut yang dihitung pada keadaan *steady-state*. Untuk menentukan turunan fungsi yang menyangkut hasil bagi, hasil kali dan pemangkatan dapat digunakan metode pendiferensialan logaritma, yakni dengan menarik logaritma asli fungsi-fungsi tersebut terlebih dahulu. Tujuan pembentukan parameter ini adalah untuk mengetahui bagaimana perubahan parameter terhadap koefisien difusi. Untuk mempermudahpendiferensialan terhadap koefisien difusi, maka *log ratio* digambarkan dalam persamaan berikut:

$$L = ln\left(\frac{\frac{1}{h}\int_0^1 n(x)dx}{\frac{1}{1-h}\int_h^1 n(x)dx}\right). \tag{3.42}$$
diskan dalam

atau dapat pula dituliskan dalam

$$L = ln\left(\frac{\frac{1}{h}\int_0^1 n(x)dx}{\frac{1}{1-h}\int_h^1 n(x)dx}\right) = ln\left(\frac{\frac{1}{h}A_d}{\frac{1}{1-h}A_r}\right) = ln\left(\frac{(1-h)A_d}{hA_r}\right).$$

#### Teorema 3.2

Misakan persamaan (3.44) mengandung suatu konstanta > 0. Jika koefisien difusi F meningkat, maka Fishing Grounds Abundance  $(A_r)$  dan Yield (Y) tidak akan berkurang, sedangkan MPAs Abundance (Ad), Total Abundance (A) serta Log Ratio (L) tidak bertambah.

#### **Bukti:**

Untuk mempermudah pembuktikan Teorema 3.2, misalkan terdapat sembarang konstanta  $\beta$  yakni perbandingan koefisien difusi ikan di dalam MPAs dan di luar MPAs, maka

BRAWIJAYA

$$\beta = \frac{F_d}{F_r}. (3.44)$$

Apabila teorema di atas diartikan secara matematis, kondisi yang harus dipenuhi agar teorema terbukti adalah,  $\frac{dA_r}{dF_d}$ dan  $\frac{dY}{dF_d} \ge 0$ ,  $\frac{dA}{dF_d}$  $\frac{dA_d}{dF_d} \operatorname{dan} \frac{dL}{dF_d} \le 0$ i)  $\frac{dA_d}{dF_d} \le 0$ 

$$i) \frac{dA_d}{dF_d} \le 0$$

$$\begin{split} A_d &= \int_0^h n(x) dx = \int_0^h C_1 e^{-\alpha_d x} + C_2 e^{\alpha_d x} + \frac{R}{\mu_d} dx \\ &= \frac{c_1}{\alpha_d} - \frac{c_1}{\alpha_d} e^{-\alpha_d h} - \frac{c_2}{\alpha_d} + \frac{c_2}{\alpha_d} e^{\alpha_d h} + \frac{Rh}{\mu_d} \\ &= \frac{c_1}{\alpha_d} \left( 1 - e^{-\alpha_d h} \right) + \frac{c_2}{\alpha_d} \left( e^{\alpha_d h} - 1 \right) + \frac{Rh}{\mu_d}. \end{split}$$

Berdasarkan persamaan (3.13), maka:

$$A_{d} = \frac{c_{1}}{\sqrt{\frac{\mu_{d}}{F_{d}}}} \left( 1 - e^{-\sqrt{\frac{\mu_{d}}{F_{d}}}h} \right) + \frac{c_{2}}{\sqrt{\frac{\mu_{d}}{F_{d}}}} \left( e^{\sqrt{\frac{\mu_{d}}{F_{d}}}h} - 1 \right) + \frac{Rh}{\mu_{d}}$$

$$= \frac{c_{1}\sqrt{F_{d}}}{\sqrt{\mu_{d}}} \left( 1 - e^{-\sqrt{\frac{\mu_{d}}{F_{d}}}h} \right) + \frac{c_{2}\sqrt{F_{d}}}{\sqrt{\mu_{d}}} \left( e^{\sqrt{\frac{\mu_{d}}{F_{d}}}h} - 1 \right) + \frac{Rh}{\mu_{d}}. \tag{3.45}$$

Jika didefinisikan  $y = \frac{1}{\sqrt{F_d}}$ ,  $\sigma_d = h\sqrt{\mu_d} > 0$ , maka persamaan (3.45) dapat ditulis sebagai

$$A_{d} = \frac{c_{1}}{y\sqrt{\mu_{d}}} (1 - e^{-y\sigma_{d}}) + \frac{c_{2}}{y\sqrt{\mu_{d}}} (1 + e^{y\sigma_{d}}) + \frac{Rh}{\mu_{d}}.$$

$$\frac{dA_{d}}{dF_{d}} = \frac{dy}{dF_{d}} \frac{dA_{d}}{dy}$$

$$= -\frac{1}{2} \left( F_{d}^{-3/2} \right) \left( \left( \left( -\frac{c_{1}}{y^{2}\sqrt{\mu_{d}}} \right) + \frac{c_{1}}{y^{2}\sqrt{\mu_{d}}} e^{-y\sigma_{d}} + \frac{c_{1}\sigma_{d}}{y\sqrt{\mu_{d}}} e^{-y\sigma_{d}} \right) + \left( \left( -\frac{c_{2}}{y^{2}\sqrt{\mu_{d}}} \right) - \frac{c_{2}}{y^{2}\sqrt{\mu_{d}}} e^{y\sigma_{d}} + \frac{c_{2}\sigma_{d}}{y\sqrt{\mu_{d}}} e^{y\sigma_{d}} \right) \right)$$

$$\frac{dA_{d}}{dF_{d}} = -\frac{y^{3}}{2} \left( \frac{c_{1}}{y^{2}\sqrt{\mu_{d}}} (y\sigma_{d}e^{-y\sigma_{d}} + e^{-y\sigma_{d}} - 1) + \frac{c_{2}}{y^{2}\sqrt{\mu_{d}}} (y\sigma_{d}e^{y\sigma_{d}} - e^{y\sigma_{d}} - 1) \right)$$

$$= -\frac{yc_1}{2\sqrt{\mu_d}} \left( y\sigma_d e^{-y\sigma_d} + e^{-y\sigma_d} - 1 \right) - \frac{yc_2}{2\sqrt{\mu_d}} \left( y\sigma_d e^{y\sigma_d} - e^{y\sigma_d} - 1 \right). \tag{3.47}$$

Misalkan  $\tilde{y} = \frac{y}{2\sqrt{\mu_d}} > 0$ , maka

$$\frac{dA_d}{dF_d} = -\tilde{y}C_1(y\sigma_d e^{-y\sigma_d} - e^{-y\sigma_d} - 1) - \tilde{y}C_2(y\sigma_d e^{y\sigma_d} - e^{y\sigma_d} - 1).$$

$$= -\tilde{y}C_1f_1(y) - \tilde{y}C_2f_2(y)$$
(3.48)

dengan 
$$f_1(y) = (y\sigma_d e^{-y\sigma_d} - e^{-y\sigma_d} - 1)$$
 dan  $f_2(y) = (y\sigma_d e^{y\sigma_d} - e^{y\sigma_d} - 1)$ .

Fungsi  $f_i(y)$  dengan i = 1,2, bernilai  $\leq 0$  jika dipilih nilai y > 0. Jadi, jika nilai  $C_1, C_2$ , dan y > 0 maka persamaan (3.48) bernilai  $\leq 0$ .

ii) 
$$\frac{dA_r}{dF_d} \ge 0$$

Untuk membuktikan pernyataan ini, variabel  $A_r = \int_h^1 n(x) dx$  dijabarkan sedemikian sehingga didapat :

$$A_r = \frac{c_3}{\sqrt{\frac{\mu_r}{F_r}}} \left( e^{-\sqrt{\frac{\mu_r}{F_r}}h} - e^{-\sqrt{\frac{\mu_r}{F_r}}} \right) + \frac{c_4}{\sqrt{\frac{\mu_r}{F_r}}} \left( e^{\sqrt{\frac{\mu_r}{F_r}}} - e^{\sqrt{\frac{\mu_r}{F_r}}h} \right) + \frac{R(1-h)}{\mu_r}$$

$$A_r = \frac{c_3}{\sqrt{\frac{\beta \mu r}{F_d}}} \left( e^{-\sqrt{\frac{\beta \mu r}{F_d}} h} - e^{-\sqrt{\frac{\beta \mu r}{F_d}}} \right) + \frac{c_4}{\sqrt{\frac{\beta \mu r}{F_d}}} \left( e^{\sqrt{\frac{\beta \mu r}{F_d}}} - e^{\sqrt{\frac{\beta \mu r}{F_d}} h} \right)$$

$$=\frac{+\frac{R(1-h)}{\mu_r}}{y\sqrt{\beta\mu_r}}\left(e^{-yh\sqrt{\beta\mu_r}}-e^{-y\sqrt{\beta\mu_r}}\right)+\frac{c_4}{y\sqrt{\beta\mu_r}}\left(e^{y\sqrt{\beta\mu_r}}-e^{yh\sqrt{\beta\mu_r}}\right)$$

$$+\frac{\frac{R(1-h)}{\mu_r}}{\frac{dA_r}{dF_d}} = \frac{\frac{dy}{dF_d}}{\frac{dA_r}{dy}} \frac{\frac{dA_r}{dy}}{\frac{dy}{dy}} \, .$$

$$-\frac{1}{2}\left(F_{d}^{-3/2}\right)\left(\left(-\frac{c_{3}}{y^{2}\sqrt{\beta\mu_{r}}}e^{-yh\sqrt{\beta\mu_{r}}}+\right)\right)+\frac{c_{3}}{y^{2}\sqrt{\beta\mu_{r}}}e^{-y\sqrt{\beta\mu_{r}}}+$$

$$\frac{c_{3}}{y\sqrt{\beta\mu_{r}}}\left(-h\sqrt{\beta\mu_{r}}e^{-yh\sqrt{\beta\mu_{r}}}\right)\right)+\left(-\frac{c_{3}}{y^{2}\sqrt{\beta\mu_{r}}}e^{y\sqrt{\beta\mu_{r}}}+\right)$$

$$\frac{c_{3}}{y\sqrt{\beta\mu_{r}}}\left(\sqrt{\beta\mu_{r}}e^{-y\sqrt{\beta\mu_{r}}}\right)+\left(-\frac{c_{4}}{y^{2}\sqrt{\beta\mu_{r}}}e^{y\sqrt{\beta\mu_{r}}}+\right)$$

$$\frac{c_{4}}{y\sqrt{\beta\mu_{r}}}\left(\sqrt{\beta\mu_{r}}e^{y\sqrt{\beta\mu_{r}}}\right)+\left(\frac{c_{4}}{y^{2}\sqrt{\beta\mu_{r}}}e^{yh\sqrt{\beta\mu_{r}}}-\right)$$

$$\frac{c_{4}}{y\sqrt{\beta\mu_{r}}}\left(h\sqrt{\beta\mu_{r}}e^{yh\sqrt{\beta\mu_{r}}}\right).$$

Misalkan didefinisikan  $\sigma_r = h\sqrt{\beta\mu_r}$ 

$$= -\frac{y^3}{2} \left( -\frac{c_3}{y^2 \sqrt{\beta \mu_r}} \left( e^{-y\sigma_r} + y\sigma_r e^{-y\sigma_r} - e^{-y\sqrt{\beta \mu_r}} - y\sqrt{\beta \mu_r} e^{-y\sigma_r} \right) \right) +$$

$$\left( -\frac{c_4}{y^2 \sqrt{\beta \mu_r}} \left( e^{y\sqrt{\beta \mu_r}} - y\sqrt{\beta \mu_r} e^{y\sqrt{\beta \mu_r}} - e^{yh\sqrt{\beta \mu_r}} + y\sigma_r e^{-y\sigma_r} \right) \right)$$

$$= \frac{yc_3}{2\sqrt{\beta \mu_r}} \left( e^{-y\sigma_r} + y\sigma_r e^{-y\sigma_r} - e^{-y\sqrt{\beta \mu_r}} - y\sqrt{\beta \mu_r} e^{-y\sqrt{\beta \mu_r}} \right) +$$

$$\left( \frac{yc_4}{2\sqrt{\beta \mu_r}} \left( e^{y\sqrt{\beta \mu_r}} + y\sqrt{\beta \mu_r} e^{y\sqrt{\beta \mu_r}} + e^{y\sigma_r} + y\sigma_r e^{y\sigma_r} \right) \right). \text{ Jika}$$

$$\bar{y} = \frac{y}{2\sqrt{\beta \mu_r}} > 0, \text{ maka}$$

$$\frac{dA_r}{dF_d} = \bar{y}C_3 \left( e^{-y\sigma_r} + y\sigma_r e^{-y\sigma_r} + e^{-y\sqrt{\beta \mu_r}} + y\sqrt{\beta \mu_r} e^{-y\sqrt{\beta \mu_r}} \right) +$$

$$\bar{y}C_4 \left( e^{y\sqrt{\beta \mu_r}} + y\sqrt{\beta \mu_r} e^{y\sqrt{\beta \mu_r}} + e^{y\sigma_r} + y\sigma_r e^{y\sigma_r} \right)$$

$$= \bar{y}C_3 f_3(y) + \bar{y}C_4 f_4(y)$$

dengan

$$f_3(y) = e^{-y\sigma_r} + y\sigma_r e^{-y\sigma_r} + e^{-y\sqrt{\beta\mu_r}} + y\sqrt{\beta\mu_r} e^{-y\sqrt{\beta\mu_r}}$$
 dan 
$$f_4 = e^{y\sqrt{\beta\mu_r}} + y\sqrt{\beta\mu_r} e^{y\sqrt{\beta\mu_r}} + e^{y\sigma_r} + y\sigma_r e^{y\sigma_r}.$$

- iii)  $\frac{dY}{dF_d} \ge 0$ Pernyataan ini dapat diterima dengan alasan bahwa,  $\frac{dA_r}{dF_d} \ge 0$  dan  $Y = A_r(\mu_r - \mu_d) \rightarrow \frac{dY}{dF_d} \ge 0$ .
- iv)  $\frac{dA}{dF_d} \le 0$

Pernyataan ini dapat dibuktikan dari  $A = A_d + A_r$ 

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dF_d} &= \frac{dA_d}{dF_d} + \frac{dA_r}{dF_d} \\ &= -\tilde{y}C_1f_1(y) - \tilde{y}C_2f_2(y) + \bar{y}C_3f_3(y) + \bar{y}C_4f_4(y). \end{aligned}$$

Jika nilai  $C_i$ ,  $f_i$ , y > 0 dengan i=1,2 dan asumsi bahwa populasi ikan di dalam MPAs lebih besar daripada di luar MPAs, maka terbukti  $\frac{dA}{dF_d} \le 0$ 

v) 
$$\frac{dL}{dF} \le 0$$
  
 $L = \ln\left[\frac{(1-h)A_d}{hA_r}\right] = \ln\left[\frac{(1-h)}{h}\right] + \ln\left[\frac{A_d}{A_r}\right].$   
dan,  
 $\frac{A_d}{A_r} = \frac{\int_0^h n(x)dx}{\int_h^1 n(x)dx} = \frac{\int_0^1 n(x)dx}{\int_h^1 n(x)dx} - 1 = \frac{A}{Y/(\mu_r - \mu_d)} - 1.$ 

Dengan terpenuhinya persamaan (i)-(v) maka teorema 3.2 terbukti.•

Dari pembuktian teorema 3.2 dapat diambil kesimpulan dari lima pernyataan di atas. Pertama,  $\frac{dA_d}{dF_d} \leq 0$  yang artinya jika tingkat difusi ikan di dalam MPAs naik, maka jumlah ikan di dalam MPAs yang digambarkan dalam parameter  $A_d$  menurun. Kedua,  $\frac{dA_r}{dF_r} \geq 0$  yang artinya jika tingkat difusi ikan di dalam MPAs naik, maka jumlah ikan di luar MPAs meningkat. Kedua pernyataan ini berdampak pada jumlah ikan di wilayah MPAs dan kawasan bebas yang dilambangkan dalam parameter A menurun. Salah satu penyebabnya adalah tingkat difusi yang tinggi cenderung membuat kondisi ikan

**BRAWIJAY** 

menjadi tertekan sehingga muncul dua kemungkinan yakni migrasi ke arah kawasan bebas atau kematian. Migrasi dan kematian yang terjadi membuat jumlah ikan secara keseluruhan akan berkurang. Selanjutnya,  $\frac{dY}{dF_d} \geq 0$  yang artinya jika tingkat difusi ikan di dalam MPAs meningkat, maka hasil tangkapan nelayan pada kawasan bebas ikut meningkat. Tingkat difusi yang tinggi menyebabkan terjadinya migrasi ikan menuju kawasan bebas dimana nelayan bebas melaut, oleh karena itulah perolehan nelayan ikut meningkat. Tingkat difusi yang tinggi juga akan mengakibatkan perbandingan jumlah ikan di dalam MPAs dan di kawasan bebas berubah. Hal ini dapat dilihat dari  $\frac{dL}{dF} \leq 0$  yang artinya, jika perubahan koefisien difusi ikan di dalam MPAs perlahan meningkat, maka perbandingan populasi ikan di kedua tempat berangsur menurun. Hal ini dapat diterima karena semakin besar tingkat difusi maka akan semakin membuat ikan merasa tertekan dan berpindah tempat sehingga nilai parameter  $Log\ Ratio\ (L)$  pun akan berubah.



# BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN

# 4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan skripsi ini dapat disimpulkan beberapa hal berikut :

- 1. Dengan menerjemahkan keadaan yang ada yakni kepadatan ikan, koefisien difusi yang terjadi, tingkat kematian serta kelahiran dalam bentuk variabel kemudian mengaitkan dengan kondisi yang sebenarnya ditambahkan dengan beberapa asumsi, dapat dibentuk suatu model difusi populasi ikan yang terjadi di dalam MPAs(*Marine Protected Areas*). Model dibentuk terhadap dua domain wilayah yakni di dalam MPAs dan di luar MPAs. Dalam hal ini, kondisi variabel pada tiap-tiap domain berbeda.
- 2. Dari model yang terbentuk, selanjutnya diselidiki kondisi *steady-state* dimana variabel kepadatan ikan tidak dipengaruhi oleh perubahan waktu. Solusi *steady-state* diperoleh pada dua domain, yakni di dalam MPAs dan di kawasan bebas melaut.
- 3. Analisis kualitatif terhadap lima parameter yakni Yield, Fishing Grounds Abundance, Total Abundance, MPAs Abundance serta Log Ratio menunjukkan bahwa kenaikan koefisien difusi di dalam MPAs berbanding lurus dengan Yield dan Fishing Grounds Abundance, serta berbanding tebalik dengan MPAs Abundance Total Abundance, dan Log Ratio. Jadi, bila koefisien difusi ikan di dalam MPAs meningkat, akan mengakibatkan ikan bermigrasi keluar wilayah MPAs sehingga menyebabkan hasil perolehan nelayan atau Yield dan jumlah ikan di luar MPAs atau Fishing Grounds Abundance meningkat. Sebaliknya, MPAs Abundance Total Abundance, dan Log Ratio nilainya akan berkurang.

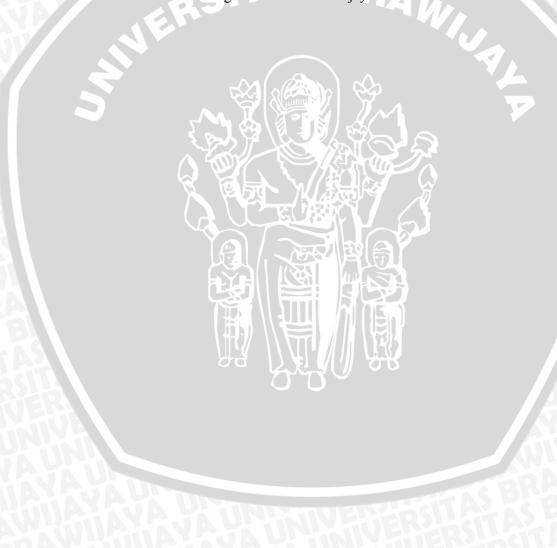
## 4.2 Saran

Pada pembahasan selanjutnya terdapat beberapa hal yang masih dapat dikembangkan dari skripsi ini, seperti :

- 1. Memasukkan tingkat migrasi pada persamaan sebagai suatu variabel.
- 2. Mengasumsikan laju kelahiran bukan sebagai konstanta.

## DAFTAR PUSTAKA

- Finizio, N. dan G., Ladas. 1988. Persamaan differential biasa dengan penerapan modern. Jakarta: Erlangga
- Humi, M. dan W.B. Miller.1992. *Boundary Value Problems and Partial Differential Equations*. Boston: PWS-KENT Publishing Company
- Langebrake J., L. Riotte-Lambert, C. W.Osenberg, dan De Leenheer. 2010. *Differential Movement And Movement Bias Models for Marine Protected Areas*. Journal of Mathematical Modelling. VII:8.
- Purcell., E.J. dan D. Varberg. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis*. Jakarta: Erlangga
- Ross., L. Shepley. 1984. Differential Equations. USA
- Suryanto, A. 2008. Petunjuk Praktikum Persamaan Differensial Numerik. Malang: Universitas Brawijaya.



## **LAMPIRAN**

Listing program untuk menentukan konstanta  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  dan  $C_4$  serta memmbentuk grafik pada saat kondisi *steady-state*.

> restart; with(plots):

> 
$$\mu r := 0.25$$
;  $\mu d := 0.5$ ;  $Fd := 0.04$ ;  $Fr := 2$ ;  $R := 0.5$ ;  $h := 0.1$ ;  $\mu r := 0.25$ 

$$\mu d := 0.5$$

$$Fd := 0.04$$

$$Fr := 2$$

$$R := 0.5$$

$$h := 0.1$$

$$nr := C3 \cdot \exp\left(-\left(\frac{\mu r}{Fr}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \cdot x\right) + C4 \cdot \exp\left(\left(\left(\frac{\mu r}{Fr}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \cdot x\right) + \frac{R}{\mu r}$$

$$nr := C3 e^{-0.3535533906 x} + C4 e^{0.3535533906 x} + 2.0000000000$$

$$nd := C1 \cdot \exp\left(-\left(\left(\frac{\mu d}{Fd}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \cdot x\right) + C2 \cdot \exp\left(\left(\left(\frac{\mu d}{Fd}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \cdot x\right) + \frac{R}{\mu d};$$

> 
$$eq1 := evalf(subs(x = 0, nd) - subs(x = 1, nr));$$
  
 $eq1 := 1. C1 + 1. C2 - 1.000000000 - 0.7021885013C3$   
 $- 1.424119019C4$ 

> 
$$nr1 := diff(nr, x);$$
  
 $nr1 := -0.3535533906C3 e^{-0.3535533906 x}$   
 $+ 0.3535533906C4 e^{0.3535533906 x}$ 

```
\rightarrow nd1 := diff(nd, x);
      nd1 := -3.535533906C1 e^{-3.535533906 x}
                      + 3.535533906C2 e^{3.535533906 x}
 \ge eq2 := evalf(subs(x = 0, nd1) - subs(x = 1, nr1)); 
       eq2 := -3.535533906C1 + 3.535533906C2 + 0.2482611255C3
                       - 0.5035021078C4
 > eq3 := evalf(Fd \cdot subs(x = h, nd1) - Fr \cdot subs(x = h, nr1)); 
       eq3 := -0.09930445016C1 + 0.2014008431C2 + 0.6825435603C3
                       - 0.7325539774C4
 > eq4 := evalf(subs(x = h, nd) - subs(x = h, nr)); 
       eq4 := 0.7021885013CI + 1.424119019C2 - 1.0000000000
                       -0.9652623599C3 - 1.035987770C4
> solve({eq1, eq2, eq3, eq4}, {C1, C2, C3, C4});
       {C1 = 0.2138970067C2 = 0.1983165833C3 = -0.3075970161C4 = 0.1983165833C3 = -0.3075970161C4 = 0.198316583C3 = -0.3075970161C4 = 0.198316583C3 = -0.3075970161C4 = 0.198316583C4 = 0.198316580C4 = 0.198316580C4 = 0.198316580C4 = 0.198316580C4 = 0.198316580C4 = 0.1985160C4 = 0.1
                     -0.2610704003
 C1 := 0.2138970067 C2 := 0.1983165833 C3 := -0.3075970161 C4
                  := -0.2610704003
                                                                                 C1 := 0.213897006'
                                                                                    C2 := 0.198316583.
                                                                                 C3 := -0.307597016
                                                                                 C4 := -0.2610704003
> p1 := plot(nd, x = 0..h):
> p2 := plot(nr, x = h ..1):
\rightarrow display (p1, p2);
```

BRAWIJAYA