

**PENERAPAN MODEL HIDDEN MARKOV PADA
PERPINDAHAN OPERATOR GSM BERDASARKAN
SELERA KONSUMEN**
(Studi Kasus Konsumen GSM Kec. Lowokwaru - Malang)

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh:

EMILIA SAFITRI INDRA

0510940012-94



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2011**

**PENERAPAN MODEL HIDDEN MARKOV PADA
PERPINDAHAN OPERATOR GSM BERDASARKAN
SELERA KONSUMEN**
(Studi Kasus Konsumen GSM Kec. Lowokwaru - Malang)

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh:

EMILIA SAFITRI INDRA

0510940012-94



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2011**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

**PENERAPAN MODEL HIDDEN MARKOV PADA
PERPINDAHAN OPERATOR GSM BERDASARKAN
SELERA KONSUMEN**
(Studi Kasus Konsumen GSM Kec. Lowokwaru - Malang)

Oleh:
EMILIA SAFITRI INDRA
0510940012-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 12 Agustus 2011
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Pembimbing I

Pembimbing II

Dra. Endang Wahyu H., M.Si.
NIP. 19661112 199103 2001

Drs. Imam Nurhadi P., MT
NIP. 19620314 198903 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc.
NIP. 196709071992031001

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Emilia Safitri Indra
Nim : 0510940012-94
Jurusan : Matematika
Penulis Skripsi berjudul : **PENERAPAN MODEL HIDDEN MARKOV PADA PERPINDAHAN OPERATOR GSM BERDASARKAN SELERA KONSUMEN**
(Studi Kasus Konsumen GSM Kec. Lowokwaru - Malang)

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. Skripsi ini adalah benar-benar karya saya sendiri dan bukan hasil plagiat dari karya orang lain. Karya-karya yang tercantum dalam Daftar Pustaka, semata-mata digunakan sebagai acuan/ referensi.
2. Apabila di kemudian hari diketahui bahwa isi Skripsi saya merupakan hasil plagiat, maka saya bersedia menanggung akibat hukum dari keadaan tersebut.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 12 Agustus 2011
Yang menyatakan,

(Emilia Safitri Indra)
NIM 0510940012-94

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



**PENERAPAN MODEL HIDDEN MARKOV PADA
PERPINDAHAN OPERATOR GSM BERDASARKAN
SELERA KONSUMEN**
(Studi Kasus Konsumen GSM Kec. Lowokwaru - Malang)

ABSTRAK

Persaingan yang semakin ketat antar operator kartu GSM (*Group Special Mobile*) dan selera konsumen yang berubah-ubah mendorong konsumen untuk berganti jenis operator. Dengan memperhatikan pola dari selera dan kebutuhan konsumen dalam memilih operator GSM, maka perputaran pelanggan kartu GSM dapat dianalisa menggunakan model Hidden Markov (HMM). HMM merupakan bentuk pengembangan dari Rantai Markov, dimana HMM ini dapat diterapkan pada kasus yang tidak dapat diamati secara langsung. Tiga masalah mendasar dalam *Hidden Markov Model* (HMM) yang harus diselesaikan agar HMM dapat diterapkan. Pertama, pencarian nilai peluang rangkaian observasi, $P(O|\lambda)$, digunakan *Forward Algorithm*. Kedua, pencarian rangkaian *hidden state* X yang optimal berdasarkan rangkaian observasi O , dapat dicari menggunakan dua algoritma *Forward-Backward Algorithm* atau Algoritma Viterbi. Ketiga, menyesuaikan model λ agar $P(O|\lambda)$ maksimum dengan cara memperbaharui model $\lambda = \{A, B, \pi\}$. Dalam penelitian yang dilakukan, diperoleh model HMM untuk kasus GSM di kecamatan Lowokwaru-Malang, nilai peluang rangkaian pengamatan, urutan operator GSM yang memiliki konsumen terbanyak setiap tahunnya, serta program untuk mencari penyelesaian kasus HMM secara lebih efisien.

Kata kunci: GSM, model *Hidden Markov*, *Forward Algorithm*, *Forward-Backward Algorithm*.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



IMPLEMENTATION OF HIDDEN MARKOV MODEL AT TRANSITION OF GSM OPERATORS BASED ON SENSE OF CONSUMERS

(A Case Study On GSM Cosumers In Lowokwaru District - Malang)

ABSTRACT

Tight Competition among GSM (*Group Special Mobile*) operators and the changing sense of consumer encourage customers to switch type of operators. By considering the pattern of tastes and needs of consumers in choosing the GSM operators, the transition of GSM's consumers can be analyzed using Hidden Markov Model (HMM). HMM is a development of Markov Chain, where the HMM can be applied to cases that can not be observed directly. There are three basic problems in the Hidden Markov Model (HMM) that must be resolved in order HMM can be applied. First, compute the probability of the observation sequence $P(O/\lambda)$, used Forward Algorithm. Second, choose a corresponding state sequence X which is optimal based on the observation sequence O , can be searched using two algorithm Forward-Backward algorithm or Viterbi algorithm. Third, adjusting the model λ to maximize $P(O/\lambda)$, by updating the model $\lambda = \{A, B, \pi\}$. Completion of these three basic problems is then applied to the case of GSM consumers. In this research, obtained the Hidden Markov Model for the GSM in Lowokwaru district in Malang city, the probability of a series of observations, the sequence of the GSM operators those have the majority of consumers each year, as well as programs to seek to resolve the case of HMM more efficiently.

Keyword: GSM, Hidden Markov Model, Forward Algorithm, Forward-Backward Algorithm.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



KATA PENGANTAR

Syukur Alhamdulillah penulis panjatkan kepada Allah SWT, karena hanya dengan rahmat dan karunia-Nya semata, penyusunan skripsi ini akhirnya dapat diselesaikan. Skripsi dengan judul **“Penerapan Model Hidden Markov Pada Perpindahan Operator GSM Berdasarkan Selera Konsumen (Studi Kasus Konsumen GSM Kec. Lowokwaru - Malang)”** disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains dalam bidang matematika.

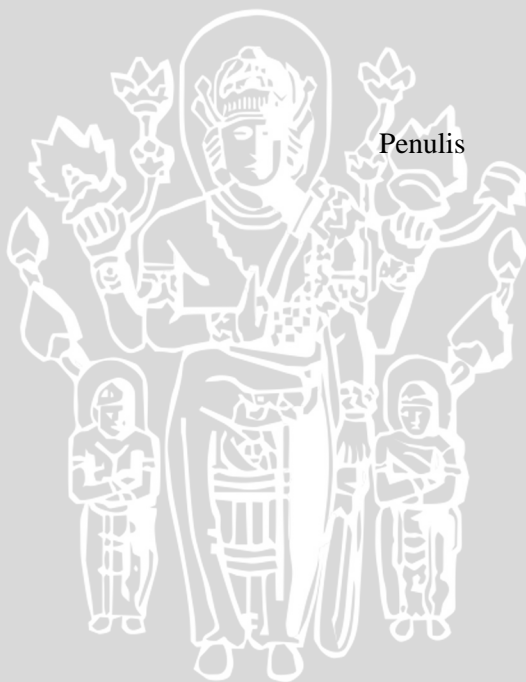
Selama penyusunan skripsi, penulis mendapat tambahan pengetahuan dan wawasan serta pengalaman dari berbagai pihak. Untuk itu, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Dra. Endang Wahyu H, M.Si selaku Dosen Pembimbing I, atas arahan, saran, bimbingan, serta waktu yang telah diberikan kepada penulis.
2. Drs. Imam Nurhadi Purwanto, MT selaku Dosen Pembimbing II, atas arahan, saran, bimbingan, serta waktu yang telah diberikan kepada penulis.
3. Prof. Mrjono, M. Phil, Bapak Marsudi, MS, dan Bapak Ratno Bagus E.W, M.Si, Ph.D selaku dosen penguji, atas saran, arahan, dan waktu yang telah diberikan kepada penulis.
4. Dr. Abdul Rouf Al-Ghofari, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Brawijaya Malang.
5. Dr. H. Agus Suryanto, M.Sc selaku Dosen Penasihat Akademik (PA), atas bimbingan dan perhatian selama penulis menyelesaikan studi S1 Matematika.
6. Seluruh dosen beserta staff Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Brawijaya Malang.
7. Ayah (alm), Ibu, kakak Iin beserta keluarga, atas segala doa dan dukungan yang tak pernah putus.
8. Teman-teman Matematika 2005, 2006, dan 2007, atas dukungan, persahabatan, dan bantuan selama ini.
9. Serta semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

Semoga Allah SWT memberikan anugerah dan karunia-Nya kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini. Penulis menyadari bahwa dalam skripsi ini masih banyak kekurangan, untuk itu penulis sangat mengharapkan kritik dan saran yang dapat dikirimkan melalui email mimi_m05s@yahoo.co.id.

Akhir kata, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca khususnya mahasiswa Matematika Universitas Brawijaya.

Malang, Agustus 2011



Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGESAHAN	iii
HALAMAN PERNYATAAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah.....	2
1.4 Tujuan.....	2
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 Peluang	3
2.1.1 Ruang Sampel	3
2.1.2 Peluang Beberapa Kejadian	4
2.1.2.1 Kejadian Saling Lepas (<i>Mutually Exclusive</i>)	4
2.1.2.2 Kejadian Saling Bebas.....	4
2.1.2.3 Kejadian Tidak Saling Bebas (Irisan).....	4
2.1.2.4 Kejadian Bersyarat.....	5
2.1.2.5 Kejadian Komplementer.....	5
2.1.3 Teorema Bayes.....	5
2.2 Proses Stokastik.....	7
2.3 Rantai Markov	7
2.3.1 Konsep Dasar Rantai Markov	7
2.3.2 Peluang Awal.....	9
2.3.3 Matriks Transisi.....	9
2.4 Pengenalan <i>Hidden Markov Model</i> (HMM).....	12
2.4.1 Notasi HMM.....	13
2.4.2 Elemen HMM.....	13
2.5 GSM	16

BAB III METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian.....	17
3.1.1 Populasi	17
3.1.2 Sampel	17
3.1.3 Kuisisioner	18
3.1.4 Wawancara.....	19
3.2 Analisa Data.....	19
3.2.1 Konstruksi Matriks Peluang Awal.....	19
3.2.2 Konstruksi Matriks Peluang Transisi	19
3.2.3 Konstruksi Matriks Peluang Emisi	20
3.2.4 Konstruksi Program.....	20
3.3 Alur Penyusunan Skripsi.....	20

BAB IV PEMBAHASAN

4.1 <i>Basic Problems</i> dalam HMM.....	23
4.1.1 <i>Basic Problem 1</i>	23
4.1.1.1 Perhitungan $P(O \lambda)$ menggunakan kombinasi.....	23
4.1.1.2 Perhitungan $P(O \lambda)$ menggunakan <i>Forward Algorithm</i> (α - pass).....	24
4.1.2 <i>Basic Problem 2</i>	28
4.2.2.1 <i>Forward-Backward Algorithm</i> (FBA).....	29
4.2.2.2 Algoritma Viterbi.....	36
4.1.3 <i>Basic Problem 3</i>	37
4.2 Implementasi HMM dalam Kasus Konsumen GSM.....	42
4.2.1 Operator GSM yang Dipilih Responden.....	43
4.2.2 Perpindahan dalam memilih Operator GSM.....	43
4.2.3 Matriks Peluang.....	44
4.3.3.1 Matriks Peluang Transisi.....	44
4.3.3.2 Matriks Peluang Emisi.....	45
4.2.4 Implementasi menggunakan <i>software</i> Delphi	48
4.2.4.1 Desain Interface.....	48
4.2.4.1 Output Program	49

BAB V KESIMPULAN	51
-------------------------------	----

DAFTAR PUSTAKA	53
-----------------------------	----

LAMPIRAN	55
-----------------------	----

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Sekatan ruang sampel S	5
Gambar 2.2 Kejadian B dalam Partisi Ruang Sampel S	6
Gambar 2.3 Contoh Rantai Markov	8
Gambar 2.4 Model Markov pada Contoh Kasus Cuaca.....	11
Gambar 2.5 Kejadian dalam HMM.....	12
Gambar 2.6 Skema Hidden Markov untuk Contoh 2.4.....	15
Gambar 3.1 Diagram Analisa Data	21
Gambar 3.2 Diagram Alir Penyusunan Skripsi	22
Gambar 4.1 Ilustrasi Step Induksi pada <i>Forward Algorithm</i>	25
Gambar 4.2 <i>Flowchart</i> Perhitungan $\alpha_t(i)$	27
Gambar 4.3 <i>Flowchart</i> Perhitungan Nilai $P(O \lambda)$	28
Gambar 4.4 Ilustrasi $\beta - pass$	29
Gambar 4.5 <i>Flowchart</i> Perhitungan $\beta_t(i)$	30
Gambar 4.6 Ilustrasi Persamaan $\gamma_t(i)$	31
Gambar 4.7 <i>Flowchart</i> Perhitungan $\gamma_t(i)$	33
Gambar 4.8 <i>Flowchart</i> Mencari Barisan <i>Hidden State</i> X_t	34
Gambar 4.9 <i>Flowchart</i> Re-estimasi π	39
Gambar 4.10 <i>Flowchart</i> Re-estimasi A	40
Gambar 4.11 <i>Flowchart</i> Re-estimasi B	41
Gambar 4.12 Model Rantai Markov Pada Kasus GSM	45
Gambar 4.13 Model <i>Hidden Markov</i> Pada Kasus GSM	47
Gambar 4.14 Desain <i>Interface</i> Program.....	48
Gambar 4.15 <i>Output</i> Program	50

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Peluang untuk Contoh Kasus pada Cuaca.....	10
Tabel 2.2	Peluang $P(O_i X_i)$ membawa payung ($O_i = benar$) berdasarkan cuaca X_i pada hari i	14
Tabel 4.1	<i>Source Code</i> proses perhitungan $\alpha_t(i)$	26
Tabel 4.2	<i>Source Code</i> proses Algoritma <i>Forward-Backward</i>	35
Tabel 4.3	Operator dan Jumlah Pengguna pada Tahun 2010.....	42
Tabel 4.4	Operator dan Jumlah Pengguna pada Tahun 2009.....	42
Tabel 4.5	Nilai Probabilitas Awal π_i untuk Setiap Operator i	42
Tabel 4.6	Perpindahan Pengguna Operator GSM	43
Tabel 4.7	Responden Masing-Masing Operator GSM Berdasarkan Kategori.....	46



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1 Kuisisioner.....	55
Lampiran 1.1 Kuisisioner yang Disebarkan.....	55
Lampiran 1.2 Hasil Kuisisioner.....	56
Lampiran 2 Perhitungan Manual.....	63
Lampiran 2.1 Perhitungan $P(O \lambda)$ menggunakan <i>forward algorithm</i> (FA).....	63
Lampiran 2.2 Mencari $X = \{X_1, X_2, \dots, X_T\}$ menggunakan <i>forward-backward algorithm</i> (FBA).....	65
Lampiran 2.3 Memaksimalkan Nilai $P(O \lambda)$ dengan Memperbaharui $\lambda = \{A, B, \pi\}$	70
Lampiran 3 Listing Program.....	85



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Kemajuan teknologi yang dialami oleh masyarakat saat ini menyebabkan perubahan yang sangat besar dalam berbagai aspek kehidupan. Persaingan yang semakin ketat antar operator GSM (*Group Special Mobile*), berbagai macam promosi yang dimunculkan untuk menarik perhatian konsumen, dan selera konsumen yang berubah-ubah mendorong konsumen untuk berganti jenis operator. Dengan memperhatikan pola dari selera dan kebutuhan konsumen dalam memilih operator GSM, maka perputaran pelanggan kartu GSM dapat dianalisa menggunakan HMM. Data yang digunakan berupa data primer yang diperoleh melalui kuisioner yang disebar di sekitar wilayah kecamatan Lowokwaru, Malang. Data tersebut digunakan untuk membangun model $\lambda = \{A, B, \pi\}$. Pemecahan dari *basic problems* kemudian diterapkan dalam kasus konsumen GSM.

Model probabilistik telah dikembangkan dan dikenal secara luas untuk memprediksi kejadian yang akan datang. Salah satu model probabilistik adalah model Rantai Markov. Rantai Markov merupakan bentuk khusus dari proses stokastik. Konsep Rantai Markov ialah memprediksi perubahan atau pergerakan variabel-variabel di waktu yang akan datang berdasarkan pergerakan variabel di waktu sekarang.

Rantai Markov terlalu terbatas untuk diaplikasikan pada masalah yang lebih beragam. Konsep Rantai Markov kemudian diperluas menjadi *Hidden Markov Model* (HMM). Penerapan HMM mencakup kasus yang tidak dapat diobservasi secara langsung, namun dapat diobservasi melalui sebuah rangkaian observasi. Model *Hidden Markov* telah berhasil diterapkan di berbagai bidang seperti *speech recognition* (pengenalan suara) dan komputasi biologi (kasus DNA).

Tiga masalah mendasar (*basic problems*) dalam HMM yang harus diselesaikan agar HMM dapat diterapkan pada dunia nyata, yaitu pencarian nilai peluang rangkaian observasi, $P(O/\lambda)$, pencarian rangkaian *hidden state* X yang optimal berdasarkan rangkaian observasi O , dan menyesuaikan model $\lambda = \{A, B, \pi\}$ agar $P(O/\lambda)$ maksimum.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang akan diselesaikan dalam penulisan skripsi ini antara lain:

- a. Apa saja masalah mendasar (*basic problems*) yang harus diselesaikan agar HMM dapat diterapkan dalam kasus konsumen GSM di Kec. Lowokwaru?
- b. Bagaimana penerapan model *Hidden Markov* dalam kasus konsumen GSM di Kec. Lowokwaru menggunakan *software*?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam skripsi ini antara lain:

- a. Menggunakan *Discrete Time Markov Chain*.
- b. Rantai Markov yang menjadi dasar HMM berupa Rantai Markov yang semua *statenya* terhubung.
- c. Operator GSM yang diteliti berupa operator GSM terbesar Indonesia yaitu Indosat, Excelkomindo (XL), dan Telkomsel. Operator GSM lain dimasukkan ke dalam *state* "operator lain" / *Other*.

1.4 Tujuan

Tujuan yang ingin dicapai dalam penulisan skripsi ini antara lain:

- a. Mengetahui masalah mendasar (*basic problems*) yang harus diselesaikan agar HMM dapat diterapkan dalam kasus konsumen GSM di Kec. Lowokwaru,
- b. Penerapan model *Hidden Markov* dalam kasus konsumen GSM di Kec. Lowokwaru menggunakan *software* Delphi 7.0.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Peluang

Peluang adalah suatu nilai di antara 0 dan 1 yang menggambarkan besarnya kesempatan akan munculnya suatu kejadian tertentu pada kondisi tertentu. Istilah lain dari peluang adalah probabilitas. Peluang suatu kejadian yang pasti terjadi atau peluang suatu kepastian adalah 1, sedangkan peluang kejadian yang mustahil terjadi atau peluang kemustahilan adalah 0. Secara simbol, $P(\emptyset) = 0$, $P(S) = 1$, dan $0 \leq P(A) \leq 1$, dimana $P(A)$ adalah nilai peluang suatu kejadian A . Terdapat beberapa cara dalam menyatakan peluang, yakni metode klasik atau apriori dan metode frekuensi atau aposteriori (Nugroho, 2008).

a. Metode Klasik atau Apriori

Menurut pendekatan klasik, jika kejadian A dapat muncul dengan $n(A)$ cara dan total seluruh kejadian yang mungkin sejumlah $n(S)$, maka peluang terjadinya kejadian A , $P(A)$, dirumuskan:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

b. Metode Frekuensi atau Aposteriori

Menurut pendekatan frekuensi, jika kejadian A muncul sebanyak m kali dari sejumlah n percobaan maka peluang pengamatan

$$P(A) = \frac{\text{banyaknya } A \text{ muncul}}{\text{total percobaan}} = \frac{m}{n}$$

(Nugroho, 2008)

2.1.1 Ruang Sampel

Himpunan semua hasil yang mungkin dari suatu kejadian disebut ruang sampel, dinotasikan dengan S dimana

$$P(S) = 1.$$

(Lestari, 2009)

2.1.2 Peluang Beberapa Kejadian

2.1.2.1 Kejadian Saling Lepas (*Mutually Exclusive*)

Dua kejadian atau lebih disebut kejadian saling lepas apabila kedua atau lebih kejadian tersebut tidak dapat terjadi pada saat bersamaan. Untuk dua kejadian A dan kejadian B yang saling lepas, peluang terjadinya kejadian tersebut adalah

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$

sedangkan untuk tiga kejadian A , B , C yang saling lepas, maka peluang terjadinya kejadian tersebut adalah

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C),$$

sehingga dapat disimpulkan bahwa untuk k buah kejadian saling lepas, peluang terjadinya kejadian tersebut adalah

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k). \quad (2.1)$$

2.1.2.2 Kejadian Saling Bebas

Dua kejadian atau lebih dikatakan saling bebas apabila terjadinya kejadian yang satu tidak mempengaruhi atau dipengaruhi terjadinya kejadian yang lain. Peluang dua kejadian A dan B yang saling bebas adalah

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$

sedangkan untuk tiga kejadian A , B , dan C yang saling bebas,

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C),$$

sehingga untuk k kejadian saling bebas maka,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_k). \quad (2.2)$$

2.1.2.3 Kejadian Tidak Saling Bebas (*Irisan*)

Dua kejadian atau lebih dikatakan tidak saling bebas apabila terjadinya kejadian yang satu mempengaruhi atau dipengaruhi terjadinya kejadian yang lainnya. Untuk dua kejadian A dan B yang tidak saling bebas, peluang terjadinya kejadian tersebut adalah

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \quad (2.3)$$

(Yakub, 2010).

2.1.2.4 Kejadian Bersyarat

Kejadian bersyarat merupakan suatu kejadian yang akan terjadi dengan syarat kejadian lain telah terjadi. Diberikan A dan B dua kejadian pada ruang sampel, **peluang bersyarat** B jika kejadian A diketahui atau telah terjadi dinotasikan dengan $P(B|A)$. Jadi,

notasi : $P(B|A)$,

dibaca : "Peluang terjadinya B , bila A telah terjadi",
atau

"Peluang B , jika peluang A diketahui",

dimana

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (2.4)$$

dengan $P(A) > 0$ (Walpole, 1995).

2.1.2.5 Kejadian Komplementer

Kejadian komplementer adalah kejadian yang saling melengkapi. Jika kejadian A komplementer terhadap kejadian B , maka peluang kejadian tersebut adalah

$$P(A) + P(B) = 1$$

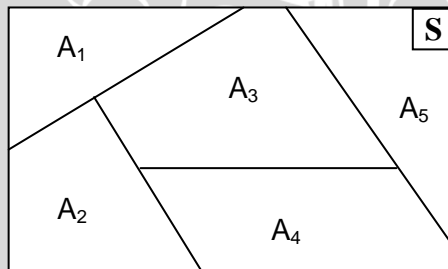
(Yakub, 2010)

2.1.3 Teorema Bayes

Pertimbangkan kejadian A_1, A_2, \dots, A_k merupakan kejadian-kejadian yang *mutually exclusive* dalam ruang sampel S . Jika

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = S,$$

maka kejadian-kejadian tersebut merupakan partisi dari ruang sampel S . Untuk lebih jelasnya, dapat dilihat dalam Gambar 2.1.



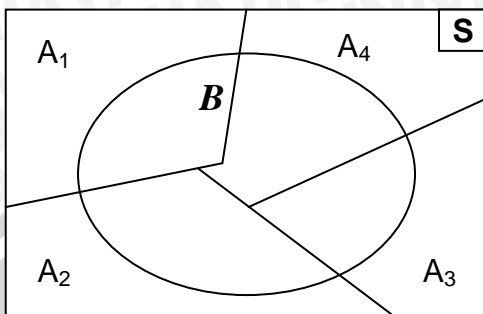
Gambar 2.1 Partisi ruang sampel S

Dipertimbangkan suatu kejadian B dalam suatu S dimana

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_k),$$

sehingga

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_k).$$



Gambar 2.2 Kejadian B dalam partisi ruang sampel S

Berdasarkan Gambar 2.2 dan dengan memanfaatkan prinsip peluang bersyarat, maka dapat dinyatakan teorema 2.1

Teorema 2.1 Peluang Total

Jika A_i , untuk $i = 1, 2, \dots, k$ merupakan partisi dari S dan B adalah kejadian sebarang dalam S , maka **peluang total** untuk B adalah

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) \cdot P(A_2)P(B|A_2) \dots P(A_k)P(B|A_k)$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^k P(A_i)P(B|A_i) \quad (2.5)$$

Bukti :

$$B = B \cap S$$

$$B = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k)$$

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_k)$$

karena *mutually exclusive* maka,

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_k)$$

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \dots + P(A_k)P(B|A_k)$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^k P(A_i)P(B|A_i).$$

Teorema 2.2 Teorema Bayes

Jika A_1, A_2, \dots, A_k merupakan partisi yang menyusun S dan B adalah kejadian dalam S , maka

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{P(B)}$$

$$P(A_j | B) = \frac{P(B | A_j)P(A_j)}{P(B)}. \quad (2.6)$$

(Walpole, 1995)

Bukti :

Untuk setiap i , dimana $1 \leq i \leq k$,

$$P(A_i \cap B) = P(B \cap A_i)$$

$$P(B|A_i)P(A_i) = P(A_i|B)P(B)$$

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)}.$$

2.2 Proses Stokastik

Istilah proses stokastik banyak digunakan untuk kejadian-kejadian yang berkaitan dengan observasi berorientasi waktu. Lebih tepatnya, proses stokastik adalah serangkaian variabel acak X_t atau $X(t)$ $t \in T = \{1, 2, 3, \dots\}$ untuk t diskrit dan $T = [0, \infty)$ untuk t kontinu, t merupakan indeks waktu (Lestari, 2009). Sebagai contoh, pada percobaan pelemparan sebuah mata uang berulang kali. Didefinisikan,

$$X = \begin{cases} 0, & \text{bila muncul sisi muka} \\ 1, & \text{bila muncul sisi belakang} \end{cases}$$

X_1 : variabel acak yang berhubungan dengan pelemparan pertama

X_2 : variabel acak yang berhubungan dengan pelemparan ke dua

⋮

X_n : variabel acak yang berhubungan dengan pelemparan ke- n .

X_1 hingga X_n merupakan serangkaian variabel acak yang dapat juga disebut proses stokastik.

Salah satu proses stokastik adalah model Rantai Markov yang memiliki sifat bahwa perilaku stokastik pada waktu yang akan datang hanya bergantung pada waktu atau keadaan sekarang dan tidak bergantung pada keadaan yang lalu (Lestari, 2009).

2.3 Rantai Markov

2.3.1 Konsep Dasar Rantai Markov

Model Rantai Markov dikembangkan oleh seorang ahli Rusia A.A.Markov pada tahun 1906. Sebagai suatu peralatan riset

operasi alam keputusan manajerial, Rantai Markov telah banyak diterapkan untuk menganalisa tentang perputaran merek dalam pemasaran, perhitungan rekening – rekening, jasa – jasa persewaan mobil, perencanaan penjualan, masalah – masalah persediaan, pemeliharaan mesin, antrian, perubahan harga pasar saham, maupun administrasi rumah sakit.

Rantai Markov adalah proses stokastik yang mempunyai sifat bahwa jika nilai X_t telah diketahui, maka X_s dimana $s > t$, tidak dipengaruhi oleh X_0 dimana $t > 0$. Definisi tersebut memiliki arti bahwa kejadian masa datang hanya dipengaruhi oleh kejadian masa sekarang dan tidak dipengaruhi oleh masa lalu. Secara matematis, Rantai Markov dapat dinyatakan sebagai berikut:

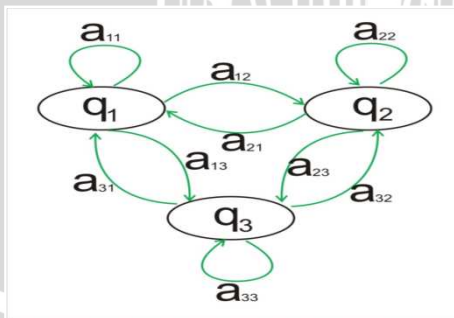
$$P(X_{t+1} = j | X_1, X_2, \dots, X_t = i) = P(X_{t+1} = j | X_t = i),$$

dimana $i, j \in Q$, dan $Q = \{q_1, \dots, q_N\}$ adalah himpunan *state* yang mungkin, dan $t \in T$.

State pada Rantai Markov biasanya dinyatakan dengan bilangan bulat tidak negatif $\{0, 1, 2, \dots\}$. $X_t = i$ artinya Rantai Markov pada waktu t berada pada *state* q_i . Peluang X_{t+1} berada pada *state* q_j jika X_t berada pada *state* q_i dilambangkan dengan $p_{i,j}^{t,t+1}$ atau kadang cukup disimbolkan secara sederhana dengan p_{ij} (simbol yang dipakai dalam setiap literatur berbeda, untuk seterusnya dipakai simbol a_{ij}). Peluang ini dinamakan peluang transisi satu langkah (*one-step transition probability*) dan secara matematis dapat dinyatakan sebagai

$$P(X_{t+1} = j | X_t = i)$$

(Lestari, 2009).



Gambar 2.3 Contoh Rantai Markov

Pada Rantai Markov, setiap busur antar *state* berisi peluang yang mengindikasikan kemungkinan jalur yang akan diambil. Jumlah peluang semua busur yang keluar dari sebuah simpul adalah satu. Gambar 2.3 memperlihatkan contoh Rantai Markov yang memiliki tiga *state*, dimana a_{ij} adalah peluang transisi dari *state* q_i ke *state* q_j .

2.3.2 Peluang Awal

Nilai peluang awal yaitu $P(X_0 = q_i) = \pi_i$, sehingga untuk setiap i , $\pi_i \geq 0$, N adalah banyaknya *state* dan

$$\sum_{i=1}^N \pi_i = 1.$$

Peluang awal biasanya dituangkan dalam matriks satu baris yang disebut vektor peluang karena isi yang ada di dalamnya adalah peluang awal yang disimbolkan π_i , sehingga

$$\boldsymbol{\pi} = [\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3 \ \cdots \ \pi_N] \quad (\text{Hidayanto, 2009})$$

2.3.3 Matriks Transisi

Peluang transisi dituangkan dalam matriks peluang transisi (*transitional probability matrices*) yang berdimensi $n \times n$. Jika suatu Rantai Markov memiliki n *state* yang mungkin, maka peluang sistem itu dalam *state* j pada sebarang pengamatan sesudah sistem itu berada pada *state* i , ditandai dengan a_{ij} . Matriks A yang dibentuk oleh a_{ij} disebut matriks peluang transisi dari Rantai Markov. Bentuk dari matriks peluang transisi A sebagai berikut.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{state baru} \\ \text{state awal} \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \end{matrix}$$

untuk $i = 1, 2, \dots, n$ dan $j = 1, 2, \dots, n$. Sebagai contoh, suatu Rantai Markov dengan tiga *state*, matriks transisinya mempunyai bentuk sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Matriks transisi dan Rantai Markov mempunyai ciri – ciri bahwa *entry* pada baris manapun berjumlah satu. Dengan kata lain karena sistem harus bergerak ke beberapa *state* dari *state* i sebarang maka setiap i berlaku :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 .$$

Jika matriks peluang transisi A dan sebaran peluang awal π diketahui, maka perilaku dari Rantai Markov dapat diketahui. Pernyataan ini akan ditunjukkan dalam penjelasan berikut:

Misal $D = P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_t = i_t)$. Jika diketahui matriks peluang transisi dan $P(X_0 = q_i) = \pi_i, i_t \in Q = \{q_1, \dots, q_N\}$ dan $t \in T$ (waktu), maka D dapat dicari. Berdasarkan definisi peluang bersyarat didapatkan,

$$\begin{aligned} D &= P(X_t = i_t | X_0 = i_0, \dots, X_{t-1} = i_{t-1}) \cdot P(X_0 = i_0, \dots, X_{t-1} = i_{t-1}), \\ &= P(X_t = i_t | X_{t-1} = i_{t-1}) \cdot P(X_0 = i_0, \dots, X_{t-1} = i_{t-1}). \\ &= \pi_{i_0} \cdot a_{0i_1} \cdot \dots \cdot a_{i_{t-1}, i_t} \end{aligned}$$

sehingga

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_t = i_t) = \prod_{k=1}^t P(X_k | X_{k-1})$$

(Sumarminingsih, 2006).

Contoh 2.1 Kasus pada Cuaca (Bagian 1)

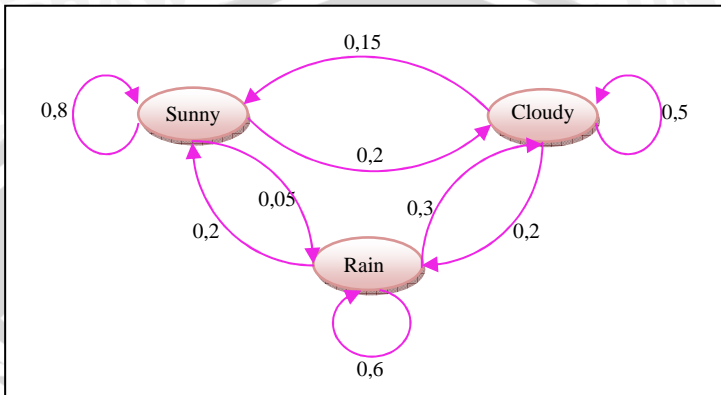
Terdapat 3 tipe cuaca : cerah (*sunny*), hujan (*rainy*), dan berawan (*cloudy*). Diberikan tabel peluang cuaca besok berdasarkan cuaca hari ini, $P(X_{t+1} | X_t)$, sebagai berikut

Tabel 2.1 Peluang untuk Contoh Kasus pada Cuaca

Cuaca hari ini	Cuaca besok		
	<i>Sunny</i>	<i>Rainy</i>	<i>Cloudy</i>
<i>Sunny</i>	0,8	0,05	0,15
<i>Rainy</i>	0,2	0,6	0,2
<i>Cloudy</i>	0,2	0,3	0,5

Diasumsikan cuaca tidak berubah-ubah dalam sehari. Jadi dalam sehari tidak dimungkinkan adanya 2 atau 3 pergantian cuaca, misal hujan dan cerah. Melalui data pada Tabel 2.1, maka dapat dibentuk

sebuah model Rantai Markov. Gambar 2.4 akan menunjukkan model Rantai Markov yang terbentuk dari data pada Tabel 2.1.



Gambar 2.4 Model Rantai Markov pada contoh kasus cuaca

Jika diketahui bahwa cuaca hari ini cerah maka peluang bahwa cuaca besok adalah cerah, dan cuaca besok lusa adalah hujan, dapat dihitung sebagai berikut.

Dinotasikan *sunny* = *s*, *rainy* = *r*, dan *cloudy* = *c*.

$$\begin{aligned}
 P(X_2 = s, X_3 = r | X_1 = s) &= P(X_3 = r | X_2 = s, X_1 = s) \cdot P(X_2 = s | X_1 = s) \\
 &= P(X_3 = r | X_2 = s) \cdot P(X_2 = s | X_1 = s) \\
 &= 0,05 \cdot 0,8 \\
 &= 0,04.
 \end{aligned}$$

Jadi, jika diketahui hari ini cerah maka peluang bahwa cuaca besok adalah cerah, dan cuaca besok lusa adalah hujan sebesar 0,04.

Jika diasumsikan bahwa cuaca kemarin adalah $X_1 = \text{sunny}(s)$, dan hari ini $X_2 = \text{cloudy}(c)$ maka peluang bahwa cuaca besok akan $X_3 = \text{sunny}(s)$, dapat dihitung sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 P(X_3 = s | X_2 = c, X_1 = s) &= P(X_3 = s | X_2 = c) \\
 &= 0,2.
 \end{aligned}$$

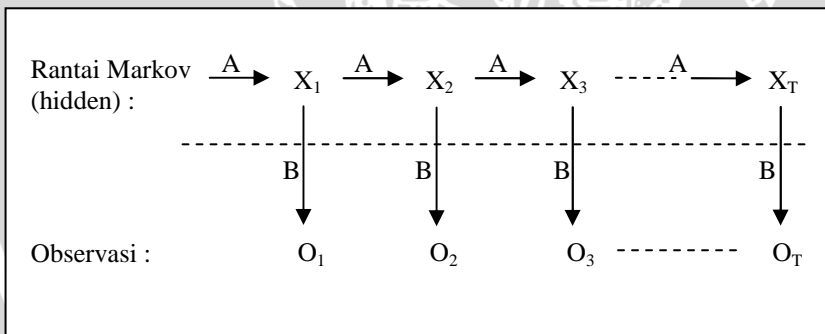
Artinya, jika ingin mengetahui peluang cuaca esok hari, cukup memperhatikan cuaca hari ini. Cuaca kemarin tidak perlu diperhatikan (Resch, 2010).

2.4 Pengenalan *Hidden Markov Model* (HMM)

HMM telah diperkenalkan dan dipelajari sejak akhir tahun 60-an dan awal tahun 70-an Metode statistik HMM semakin populer pada dekade terakhir ini karena model tersebut kaya akan struktur matematika dan mengandung teori dasar yang bisa digunakan untuk beberapa aplikasi penting. Penerapan HMM meliputi pengenalan ucapan (*speech recognition*), *target tracking*, komunikasi digital, teknik biomedik, dan keungan/ekonomi (Hidayanto, 2009).

Rantai Markov bermanfaat untuk menghitung peluang rangkaian kejadian yang dapat diamati. Masalahnya, terkadang ada rangkaian kejadian yang ingin diketahui tetapi tidak dapat diamati secara langsung.

Model *Hidden Markov* merupakan bentuk pengembangan dari Rantai Markov, dimana model *Hidden Markov* ini memiliki keunggulan yaitu dapat diterapkan dalam kasus yang tidak dapat diamati secara langsung. Kejadian yang tersembunyi merupakan Rantai Markov yang dapat diamati melalui kejadian yang berkaitan. Skema kejadian yang mengandung model *Hidden Markov* dapat dilihat pada Gambar 2.5.



Gambar 2.5 Kejadian dalam HMM

Model *Hidden Markov* mengandung dua proses stokastik. Kejadian yang terlihat berupa proses stokastik yang menghasilkan barisan pengamatan O , sedangkan kejadian yang tersembunyi merupakan proses stokastik sekaligus Rantai Markov.

2.4.1 Notasi HMM

Notasi yang digunakan dalam HMM antara lain:

T = jumlah pengamatan/percobaan yang dilakukan, biasanya berkaitan dengan waktu,

N = jumlah *hidden state*,

M = jumlah *observed state*,

Q = $\{q_1, q_2, \dots, q_N\}$ = himpunan *hidden state* (Rantai Markov),

V = $\{v_1, v_2, \dots, v_M\}$ = himpunan *observed state* yang mungkin,

A = matriks peluang transisi,

B = matriks peluang emisi,

π = peluang awal *hidden state*,

O = (O_1, O_2, \dots, O_T) = barisan/urutan observasi,

X = (X_1, X_2, \dots, X_T) = barisan/urutan *hidden state*

(Stamp, 2004).

2.4.2 Elemen HMM

HMM dapat didefinisikan sebagai kumpulan lima elemen (N, M, A, B, π). Jika dianggap $\lambda = \{A, B, \pi\}$, maka HMM mempunyai elemen tertentu N dan M . Adapun penjelasan akan elemen-elemen tersebut adalah sebagai berikut:

1. peluang transisi (A)

$$A = \{a_{ij}\}, \quad a_{ij} = P(X_{t+1} = q_j | X_t = q_i), \quad 1 \leq j, i \leq N,$$

2. peluang emisi (B)

$$B = \{b_i(k)\}, \quad b_i(k) = P(O_t = v_k | X_t = q_i),$$

3. sebaran keadaan awal (π)

$$\pi = \{\pi_i\}, \quad \pi_i = P(X_0 = q_i),$$

4. N , jumlah keadaan model. Dinotasikan himpunan terbatas untuk keadaan yang mungkin adalah $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_N\}$,

5. M , jumlah dari simbol observasi/keadaan simbol observasi berhubungan dengan keluaran fisik dari sistem yang dimodelkan (dapat diamati), dinotasikan himpunan terbatas untuk observasi yang mungkin adalah $V = \{v_1, v_2, \dots, v_M\}$

(Rabiner, 1989).

Contoh 2.2 Kasus pada Cuaca (Bagian 2)

Menggunakan data yang telah tersedia pada Contoh 2.1. Misalkan Toni terkurung dalam sebuah ruangan selama beberapa

hari. Toni tidak dapat mengetahui keadaan cuaca di luar. Satu-satunya petunjuk mengenai cuaca adalah pengamatan yang Toni lakukan terhadap seseorang yang memasuki ruangan tersebut, apakah orang tersebut membawa payung atau tidak. Tabel 2.2 berisi peluang membawa payung berdasar pada cuaca di luar pada hari ini.

Tabel 2.2 Peluang $P(O_i | X_t)$ membawa payung ($O_i = benar$) berdasarkan cuaca X_t pada hari t

Cuaca	Peluang Membawa Payung	Peluang Tidak Membawa Payung
Cerah	0,1	0,9
Hujan	0,8	0,2
Berawan	0,3	0,7

Analisa parameter :

(i) Parameter yang tersembunyi (*hidden parameters*)

$Q = \{sunny, rainy, cloudy\}$, dimana Q adalah himpunan *hidden state*.

- a) $Q = \{q_i\}$ dimana $1 \leq i \leq N$.
- b) $q_1 = sunny, q_2 = rainy, q_3 = cloudy$.
- c) $N = 3$, dimana N adalah banyaknya *hidden state*.
- d) $X = \{X_1, X_2, \dots, X_t\}$ adalah himpunan *state* yang mewakili keadaan cuaca hari t . Variabel t mewakili waktu, dimana $t = \{1, 2, \dots, T\}$.
- e) Peluang transisi, disajikan pada Tabel 2.1, dapat dibentuk $a_{ij} = P(X_{t+1} = q_j | X_t = q_i)$. Peluang transisi, a_{ij} , kasus cuaca pada Tabel 2.1 akan ditampilkan dalam matriks peluang transisi A sebagai berikut:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{cuaca hari ke } t+1 \\ \begin{bmatrix} 0,8 & 0,05 & 0,15 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{bmatrix} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{cuaca hari ke } t \end{matrix} & \end{matrix}$$

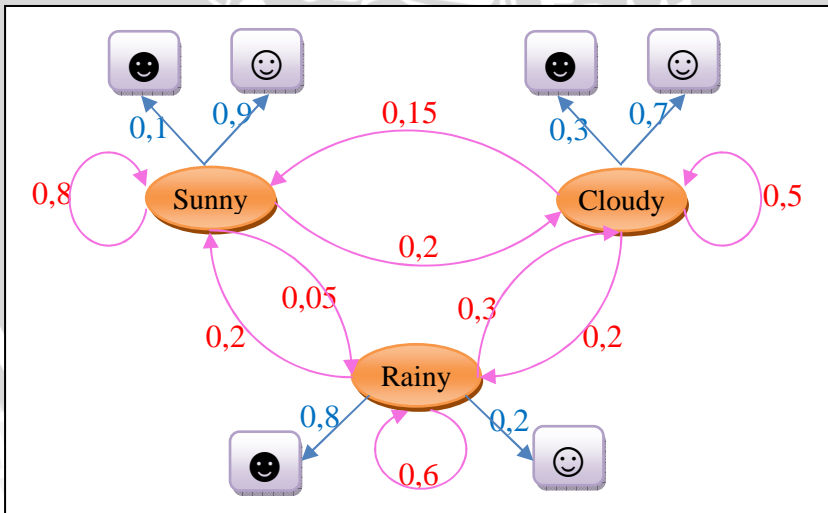
(ii) Parameter yang diamati (*observed parameter*)

$V = \{\text{payung, tanpa payung}\}$, dimana V adalah himpunan *observed state*.

- a) $V = \{v_i\}$, dimana $1 \leq i \leq M$
- b) $v_1 = \text{payung} (\text{☔})$, $v_2 = \text{tanpa payung} (\text{☺})$.
- c) $M = 2$, M adalah banyaknya *observed state*.
- d) $O = \{O_1, O_2, \dots, O_t\}$ adalah himpunan *state* yang berhubungan dengan keadaan yang diamati (membawa payung atau tidak) pada hari t . Variabel t mewakili waktu, dimana $t = \{1, 2, \dots, T\}$.
- e) Peluang emisi, disajikan pada Tabel 2.2, dapat membentuk $b_i(k) = P(O_t = v_k | X_t = q_i)$, dimana $k \in V$. Peluang emisi, $b_i(k)$, pada Tabel 2.2 dapat ditampilkan dalam matriks peluang emisi B sebagai berikut:

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{payung} \\ \text{cuaca} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{matrix} \end{matrix}$$

Contoh 2.2 dapat diselesaikan setelah rangkaian pengamatan diketahui. Rangkaian pengamatan akan disimpan dalam bentuk barisan $O = \{O_t\}$, dimana $t = 1, 2, \dots, T$ dan $O_t \in V$. Gambar 2.6 akan menunjukkan model Rantai Markov yang terbentuk dari Contoh 2.3.



Gambar 2.6 Model Hidden Markov dari Contoh 2.3

2. 5 GSM

GSM (*Global System for Mobile Communication*, atau *Group Special Mobile*) merupakan salah satu teknologi digital yang digunakan oleh telepon seluler yang lebih baik dari sistem analog, memiliki keunggulan dibanding sistem lainnya, seperti :

- a. kualitas dan kejernihan suara yang tinggi,
- b. faktor keamanan yang tinggi karena terdapat sistem pengacakan dan penyandian sehingga sinyal suara pembicaraan yang dipancarkan melalui radio tidak dapat didengar oleh penerima biasa,
- c. dapat digunakan dimana saja dan kapan saja, selama masih ada sinyal,
- d. anti penggandaan dan penyadapan,
- e. investasi yang murah,

(Ongsano, 2006).

Pada tahun 2010, tiga operator GSM terbesar di Indonesia adalah Telkomsel, Indosat, dan Excelcomindo. PT. Indosat didirikan pada tahun 1967 sebagai Perusahaan Modal Asing, dan memulai operasinya pada tahun 1969. Pada tahun 1980 Indosat menjadi Badan Usaha Milik Negara yang seluruh sahamnya dimiliki oleh Pemerintah Indonesia, namun di tahun 2009 65% saham Indosat dimiliki oleh Qatar telecom Q.S.C. (Qtel). Indosat menyediakan layanan seluler, telekomunikasi internasional dan layanan satelit bagi penyelenggara layanan *broadcasting*. Produk GSM yang dikeluarkan Indosat antara lain Matrix, Mentari, dan IM3.

Telkomsel didirikan pada 26 Mei 1995, walaupun lahir lebih lambat dibanding Indosat. Hingga saat ini Telkomsel memegang pangsa pasar terbesar di Indonesia. Produk GSM yang dikeluarkan Telkomsel antara lain KartuHALO, Simpati, dan AS. Setahun kemudian, Excelcomindo mulai beroperasi secara komersial pada 8 oktober 1996 sebagai operator GSM ke tiga di Indonesia. Produk GSM Excelcomindo adalah XL (wikipedia, 2010).

BAB III METODE PENELITIAN

3.1 Pengumpulan Data

Berkaitan dengan sifat data dan cara atau teknik analisis data yang digunakan, jenis penelitian yang digunakan adalah kualitatif (*qualitative research*) maupun kuantitatif (*quantitative research*). Data yang digunakan untuk membangun Matriks Peluang Transisi **A** dan Matriks Peluang Emisi **B** merupakan data kuantitatif, yaitu berupa data numerik yang kemudian diproses secara matematis. Sedangkan untuk membentuk *observed state* dalam kasus ini digunakan data kualitatif, melalui wawancara terhadap responden maupun pengumpulan data melalui media.

Data yang digunakan dalam Penelitian berupa data primer. Data primer mengacu pada informasi yang diperoleh dari tangan pertama oleh peneliti yang berkaitan dengan variabel minat untuk tujuan spesifik studi. Penelitian ini menggunakan data kuisisioner yang diperoleh langsung dari sampel di wilayah Kecamatan Lowokwaru dan sekitarnya.

3.1.1 Populasi

Penelitian tidak lepas dari sasaran penelitian yang biasa disebut populasi. Populasi terdiri atas sekumpulan objek yang menjadi pusat perhatian, yang dari padanya terkandung informasi yang ingin diketahui (Gulo, 2004). Populasi dalam penelitian ini adalah konsumen GSM dalam lingkup wilayah Kecamatan Lowokwaru.

3.1.2 Sampel

Sampel sering juga disebut ‘contoh’, yaitu himpunan bagian (subset) dari suatu populasi. Sebagai bagian dari populasi, sampel memberikan gambaran yang benar tentang populasi. Pengambilan sampel dari suatu populasi disebut penarikan sampel atau sampling (Gulo, 2004).

Rumus yang digunakan dalam menentukan jumlah sampel untuk populasi besar, dirumuskan pada persamaan (3.1).

$$n = \frac{Z^2 \cdot p(1-p)}{E^2}, \quad (3.1)$$

di mana

- n = ukuran sampel,
- Z = mengacu pada nilai z (tingkat kepercayaan). Jika tingkat kepercayaan 95%, maka $Z=1,96$
- $p(1-p)$ = variasi populasi. Variasi populasi ini dinyatakan dalam bentuk proporsi. Proporsi dibagi dalam dua bagian dengan total 100% atau 1,
- E = kesalahan sampel yang dikehendaki (*sampling error*) (Eriyanto, 2007).

Nilai kepercayaan Z yang digunakan adalah 95% dan *sampling error* E diambil 7,5% atau 0,075. Dikarenakan tidak ada penelitian pendahu tentang variansi populasi, diasumsikan populasi hetrogen ($p=50\%$). Data ini diolah menggunakan persamaan (3.1) sehingga

$$n = \frac{Z^2 \cdot p(1-p)}{E^2} = \frac{(1,96)^2 \cdot 0,5(0,5)}{0,075^2} = 170,738$$

Jumlah sampel minimum adalah 170,738. Pada penelitian ini, diambil sampel sebanyak 200 responden. Sampel diambil secara acak dalam lingkup wilayah tertentu, sehingga penarikan sampel secara *cluster random sampling*.

3.1.3 Kuisioner

Data yang digunakan dalam skripsi ini merupakan data primer yang diperoleh melalui kuisioner. Kuisioner adalah daftar pertanyaan tertulis yang telah dirumuskan sebelumnya yang akan responden jawab, biasanya dalam alternatif yang didefinisikan dengan jelas. Kuisioner dapat diberikan secara langsung kepada responden, disuratkan, atau disebarakan secara elektronik.

Kuisioner berisi tiga pertanyaan menyangkut topik GSM yang digunakan responden dan disertai dengan pertanyaan seputar data diri responden. Data diri responden digunakan untuk menunjukkan diversifikasi responden yang cukup merata sedangkan tiga pertanyaan inti digunakan untuk memodelkan kasus yang akan diselesaikan dengan HMM.

Kuisisioner disebarikan secara acak kepada responden di wilayah kecamatan Lowokwaru, Malang. Responden terdiri dari berbagai usia, jenis kelamin, maupun pekerjaan. Penarikan sampel dengan cara ini bertujuan untuk memperoleh sampel yang *representative* dari populasi yang ada. Selang waktu penyebaran kuisisioner antara September 2010 hingga Desember 2010. Data yang diperoleh dari kuisisioner ini akan diolah untuk mendapatkan matriks peluang transisi A dan matriks peluang emisi B .

3.1.4 Wawancara

Selain menggunakan kuisisioner, penulis juga melakukan observasi melalui informasi di media dan wawancara untuk menentukan parameter obsevasi (*observed state*). Wawancara adalah bentuk komunikasi langsung antara peneliti dengan responden (Gulo, 2004). Wawancara dapat dilakukan dengan mengadakan tanya jawab secara tatap muka, melalui telepon, atau *online*. Teknik ini juga diperlukan untuk memandu dalam pengisian kuisisioner untuk mengatasi kekurangan kuisisioner yang tidak kembali atau kesalahan data yang diisikan responden.

3.2 Analisa Data

3.2.1 Konstruksi Matriks Peluang Awal

Data yang telah diperoleh melalui kuisisioner dikelompokkan berdasarkan operator GSM yang dipilih pada tahun 2009. Jumlah responden yang memilih masing-masing operator GSM dibagi dengan total responden sehinggalan didapatkan nilai awal π_i , di mana $i \in \{\text{Indosat, Telkomsel, XL, Other}\}$.

3.2.2 Konstruksi Matriks Peluang Transisi

Data yang telah diperoleh melalui kuisisioner, dibandingkan dengan data tahun 2009, dihitung berapa jumlah perpindahan responden pada tahun 2010 maupun yang tetap menggunakan operator yang sama. Data ini dituangkan dalam bentuk tabel. Masing-masing perpindahan dibagi dengan jumlah responden operator GSM pada tahun 2009, didapatkan peluang transisi yang kemudian dituliskan dalam bentuk matriks A yang berukuran 4×4 . Jika matriks A telah didapatkan maka dapat dibuat skema model rantai markov.

3.2.3 Konstruksi Matriks Peluang Emisi

Data yang telah diperoleh melalui kuisisioner dikelompokkan berdasarkan kategori yang dipilih, kemudian dihitung berapa jumlah responden untuk setiap operator GSM di masing-masing kategori, lalu jumlah tersebut dibagi dengan jumlah responden operator GSM pada tahun 2010, didapatkan peluang emisi yang kemudian dituliskan dalam bentuk matriks B . Jika matriks B telah didapatkan, dibantu dengan data yang terdapat pada matriks peluang transisi A , maka dapat dibuat skema model hidden markov.

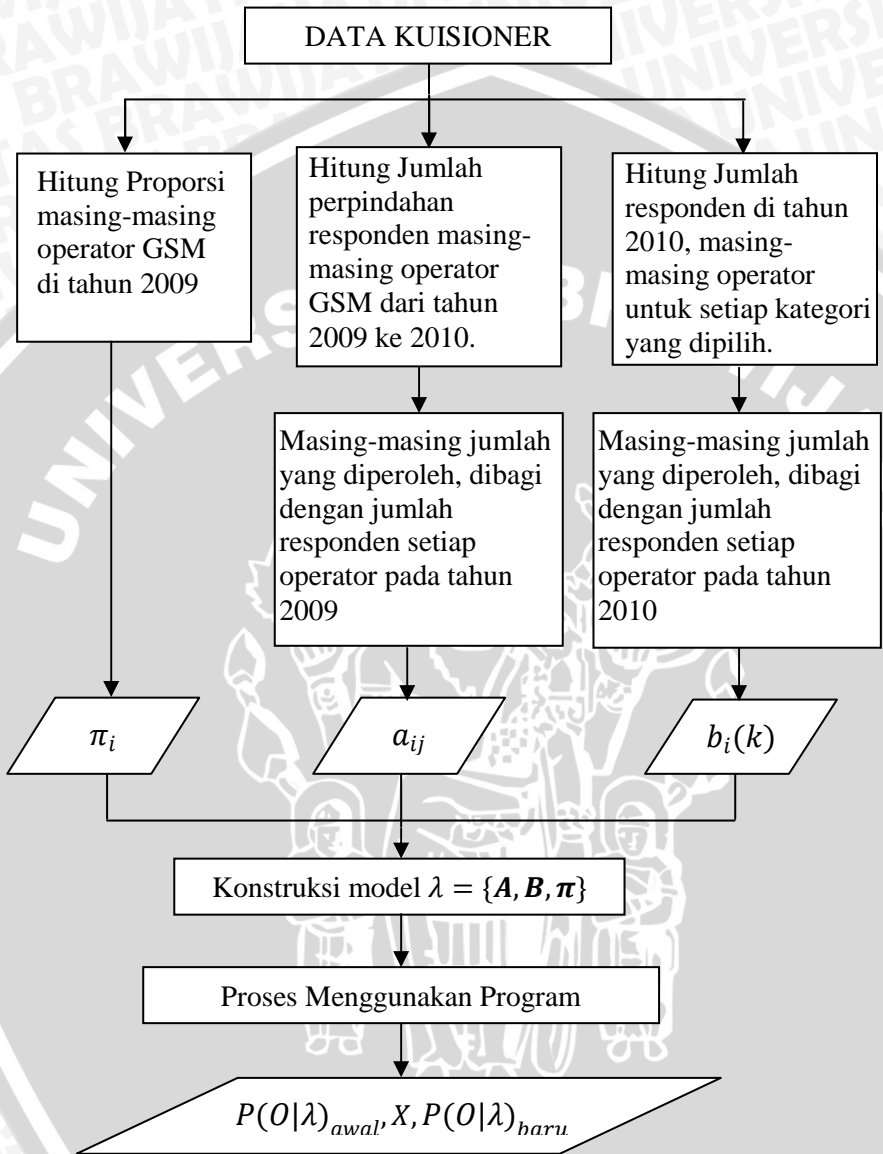
3.2.4 Konstruksi Program

Dari penjabaran tentang 3 masalah mendasar dalam HMM yang perlu diselesaikan agar HMM dapat diterapkan, di bangun sebuah program menggunakan software Delphi 7.0. Program ini ditujukan dalam memudahkan perhitungan, kemudian, data kuisisioner yang telah diperoleh dan diolah, menjadi *input* dalam program, ditambahkan juga data rangkaian observasi O , yang menggunakan data sintesis. Untuk menunjukkan bahwa program telah berjalan dengan benar, dilakukan perhitungan secara manual menggunakan data yang ada sebanyak 1 iterasi, dan dilihat apakah hasil *output* program sama dengan hasil perhitungan manual.

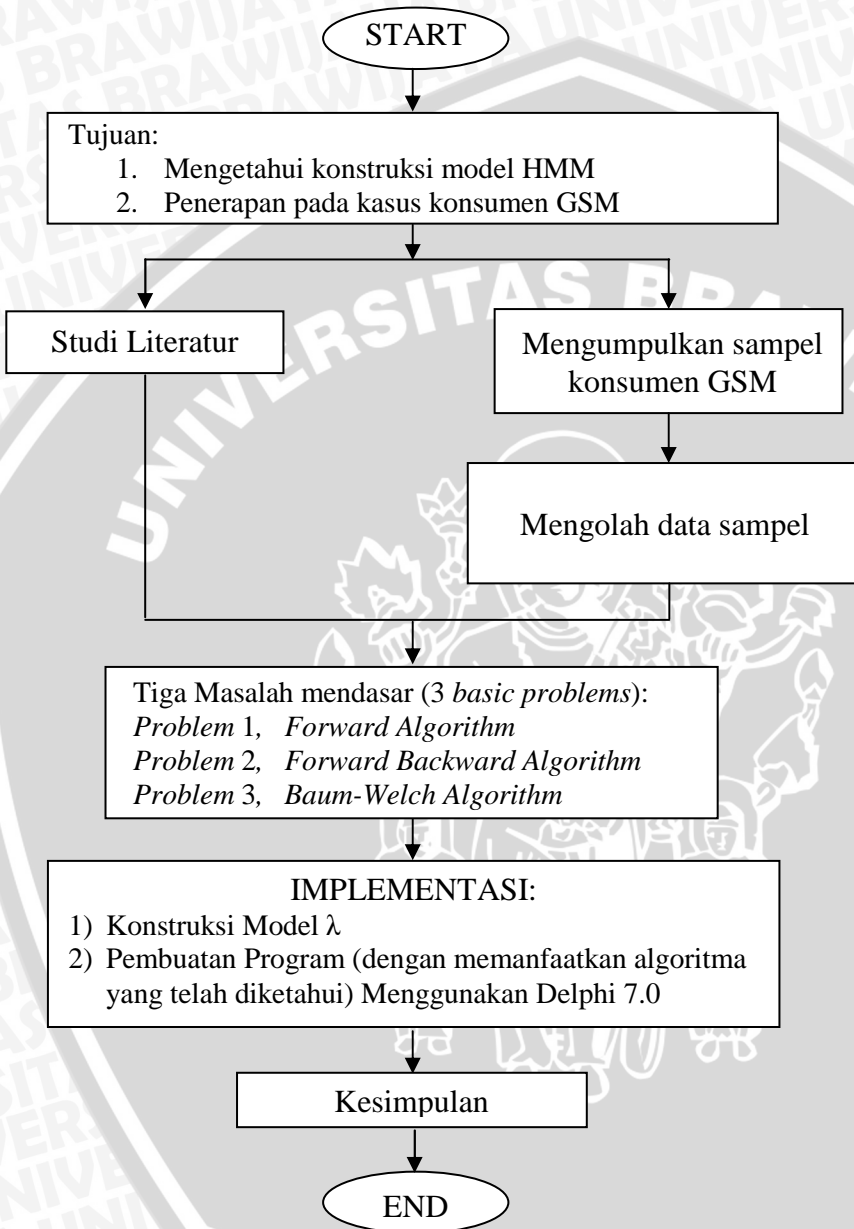
Diagram analisa data dapat dilihat pada Gambar 3.1.

3.3 Alur Penyusunan Skripsi

Dalam penyusunan skripsi ini, terdapat beberapa proses yang dilakukan secara bertahap. Alur penyusunan skripsi ditunjukkan pada Gambar 3.2.



Gambar 3.1 Diagram Analisa Data



Gambar 3.2 Diagram alir penyusunan skripsi

BAB IV PEMBAHASAN

4.1 *Basic Problems* dalam HMM

Terdapat tiga *basic problem* yang harus diselesaikan agar HMM dapat di aplikasikan. *Basic problem* pertama adalah mencari nilai peluang barisan observasi berdasarkan model yang telah tersedia, $P(O/\lambda)$. *Basic problem* ke dua adalah mencari barisan *hidden state* X yang bersesuaian dan paling mungkin dari rangkaian pengamatan O yang telah ada. *Basic problem* ke tiga adalah memperbaharui model λ agar $P(O/\lambda)$ maksimal.

4.1.1 *Basic Problem 1*

Diberikan model $\lambda = (A, B, \pi)$ dan barisan observasi O , kemudian dicari $P(O/\lambda)$. Cara klasik dalam memecahkan *Basic Problem* ini adalah dengan kombinasi, yakni menghitung peluang dari semua barisan X yang mungkin. Terlebih dahulu, diperlukan rumus untuk mencari $P(O/\lambda)$.

4.1.1.1 Perhitungan $P(O/\lambda)$ Menggunakan Kombinasi

Diketahui sebuah barisan *hidden state* $X = \{X_1, X_2, \dots, X_T\}$, peluang terjadinya rangkaian observasi O berdasarkan X adalah

$$\begin{aligned} P(O | X, \lambda) &= P(O_1, O_2, \dots, O_T | X_1, X_2, \dots, X_T, \lambda) \\ &= P(O_1 | X_1) \cdot P(O_2 | X_2) \cdot \dots \cdot P(O_T | X_T). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Berdasarkan definisi peluang emisi, didapatkan

$$\begin{aligned} P(O | X, \lambda) &= b_{x_1}(O_1) \cdot b_{x_2}(O_2) \cdot \dots \cdot b_{x_T}(O_T) \\ &= \prod_{t=1}^T b_{x_t}(O_t) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$P(O | X, \lambda) = \prod_{t=1}^T P(O_t | X_t). \quad (4.3)$$

Peluang barisan *hidden state* X adalah

$$\begin{aligned} P(X | \lambda) &= P(X_1, X_2, \dots, X_T | \lambda) \\ &= \pi_{x_1} \cdot a_{x_1 x_2} \cdot a_{x_2 x_3} \cdot \dots \cdot a_{x_{T-1} x_T}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Kejadian X dan O tidak saling bebas sehingga

$$\begin{aligned}
P(O, X | \lambda) &= \frac{P(O \cap X \cap \lambda)}{P(\lambda)} \\
&= \frac{P(O \cap X \cap \lambda)}{P(X \cap \lambda)} \cdot \frac{P(X \cap \lambda)}{P(\lambda)} \\
&= P(O | X \cap \lambda) \cdot \frac{P(X \cap \lambda)}{P(\lambda)}
\end{aligned}$$

$$P(O, X | \lambda) = P(O | X, \lambda) \cdot P(X | \lambda). \quad (4.5)$$

$P(O|\lambda)$ didapatkan dengan cara menjumlahkan seluruh peluang dari barisan *hidden state* yang mungkin.

$$\begin{aligned}
P(O | \lambda) &= \sum_X P(O, X | \lambda) \\
&= \sum_{x_1, x_2, \dots, x_T} P(O | X, \lambda) \cdot P(X | \lambda) \\
&= \sum_{x_1, x_2, \dots, x_T} \pi_{x_1} b_{x_1}(O_1) \cdot a_{x_1 x_2} b_{x_2}(O_2) \cdot \dots \cdot a_{x_{T-1} x_T} b_{x_T}(O_T). \quad (4.6)
\end{aligned}$$

Proses perhitungan secara kombinasi melibatkan perhitungan sebanyak $2TN^T$ perhitungan, dimana T adalah banyaknya pengamatan, N adalah banyaknya *hidden state*. Hal ini akan menjadi kendala jika HMM diimplementasikan pada kasus dengan jumlah *state* dan pengamatan yang cukup besar. Algoritma yang dapat digunakan untuk mengatasi masalah ini adalah *Forward Algorithm*.

4.1.1.2 Perhitungan $P(O|\lambda)$ Menggunakan *Forward Algorithm* (α - pass)

Didefinisikan variabel $\alpha_t(i)$ sebagai berikut:

$$\alpha_t(i) = P(O_1, O_2, \dots, O_t, X_t = q_i | \lambda), \quad (4.7)$$

dikatakan $\alpha_t(i)$ merupakan peluang dari sebagian barisan observasi $O = O_1, O_2, \dots, O_t$ (hingga waktu ke- t) dan *state* q_i terjadi pada waktu t berdasarkan model λ yang diberikan. Penyelesaian $\alpha_t(i)$ dapat dilihat melalui langkah-langkah berikut:

(i) Inisialisasi (*Intialisation*)

$$\alpha_1(i) = \pi_i \cdot b_i(O_1), \quad i = 1, \dots, N \quad (4.8)$$

(ii) Induksi (*Induction*)

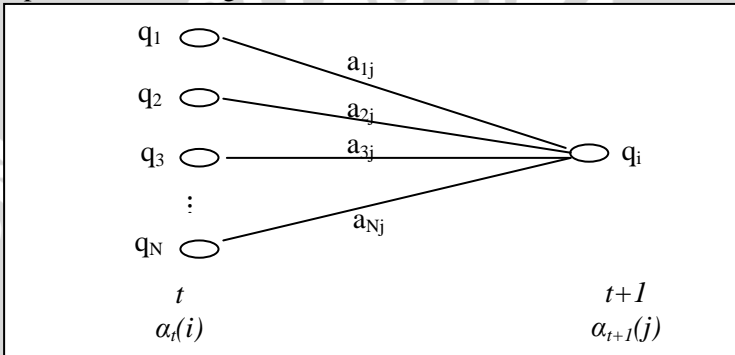
$$\alpha_{t+1}(j) = \left[\sum_{i=1}^N \alpha_t(i) a_{ij} \right] b_j(O_{t+1}), \quad \begin{array}{l} t = 1, \dots, T-1 \\ j = 1, \dots, N \end{array} \quad (4.9)$$

(iii) Terminasi (*Termination*)

$$P(O | \lambda) = \sum_{i=1}^N \alpha_T(i). \quad (4.10)$$

Persamaan (4.8)–(4.10) disebut dengan *Forward Algorithm*.

Persamaan (4.8) menginisialkan peluang awal dari *Forward Algorithm* sebagai hasil perkalian dari peluang awal berada di *state* q_i dengan peluang pengamatan pertama adalah O_1 . Langkah (ii) merupakan inti dari algoritma ini, diilustrasikan dalam Gambar 4.1.



Gambar 4.1 Ilustrasi step induksi pada *forward algorithm*

Gambar 4.1 menunjukkan bagaimana *state* q_j terjadi di waktu $t+1$ dapat dicapai (melewati) sejumlah N *state* asal yang mungkin q_i , $i = 1, 2, \dots, N$ di waktu t . $\alpha_t(i)$ merupakan peluang terjadinya rangkaian pengamatan O dan terjadinya q_i di waktu t , sehingga

$$\alpha_t(i) = P(O_1, O_2, \dots, O_t, X_t = q_i | \lambda),$$

atau secara lebih ringkas juga dapat didefinisikan dengan

$$\alpha_t(i) = P(O_1, O_2, \dots, O_t, X_t = q_i).$$

Jika $\alpha_t(i)$ dikalikan dengan a_{ij} , maka

$$\alpha_t(i) \cdot a_{ij} = P(O_1, O_2, \dots, O_t, X_{t+1} = q_j | X_t = q_i),$$

kemudian dikalikan lagi dengan $b_j(O_{t+1})$ menghasilkan

$$\begin{aligned} \alpha_t(i) \cdot a_{ij} \cdot b_j(O_{t+1}) &= P(O_1, O_2, \dots, O_t, O_{t+1}, X_{t+1} = q_j | X_t = q_i), \\ &= P(O_1, O_2, \dots, O_{t+1}, X_{t+1} = q_j | X_t = q_i). \end{aligned}$$

$X_{t+1} = q_j$ dapat dicapai dari sebanyak N *state* di waktu t sehingga jumlah dari persamaan (4.11) sepanjang $i = 1, 2, \dots, N$ akan menghasilkan

$$\sum_{i=1}^N \alpha_t(i) \cdot a_{ij} \cdot b_j(O_{t+1}) = P(O_1, O_2, \dots, O_{t+1}, X_{t+1} = q_j) = \alpha_{t+1}(j)$$

sehingga

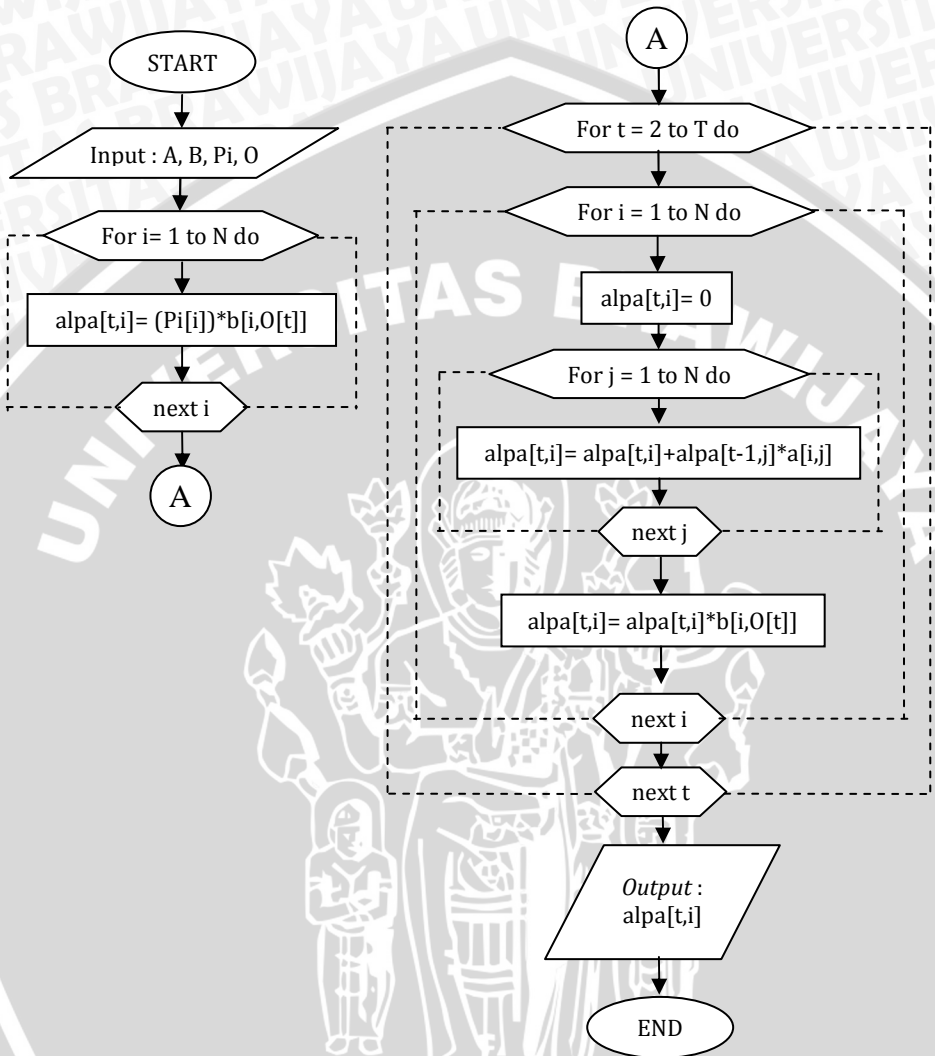
$$\alpha_{t+1}(j) = \left[\sum_{i=1}^N \alpha_t(i) a_{ij} \right] b_j(O_{t+1}).$$

Source code proses perhitungan $\alpha_t(i)$ menggunakan software Delphi v7.0 ditunjukkan pada Tabel 4.1.

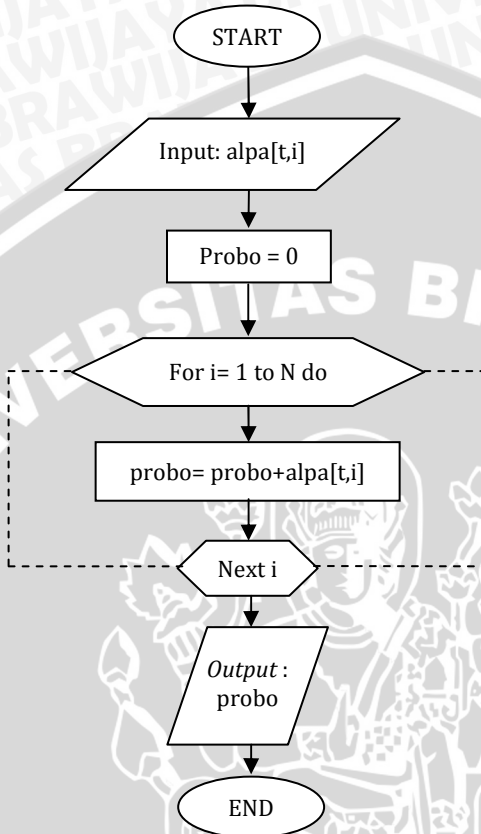
Tabel 4.1 Source code proses perhitungan $\alpha_t(i)$

	Source code proses perhitungan $\alpha_t(i)$
1	for i:= 1 to N do
2	alpha[1,i]:=pi[i]*b[i,o[1]];
3	for t:= 2 to Ta do
4	begin
5	for i:= 1 to N do
6	begin
7	alpha[t,i]:=0;
8	for j:= 1 to N do
9	alpha[t,i]:=alpha[t,i]+alpha[t-1,j]*a[j,i];
	alpha[t,i]:=alpha[t,i]*b[i,o[t]];
10	end;
11	end;

Flowchart yang menunjukkan proses perhitungan $\alpha_t(i)$ dalam proses Induksi (persamaan 4.9) ditunjukkan pada Gambar 4.2, sedangkan flowchart perhitungan nilai $P(O|\lambda)$ dalam proses Terminasi (persamaan 4.10) ditunjukkan pada Gambar 4.3.



Gambar 4.2 Flowchart Perhitungan $\alpha_t(i)$



Gambar 4.3 Flowchart Perhitungan Nilai $P(O|\lambda)$

4.1.2 Basic Problem 2

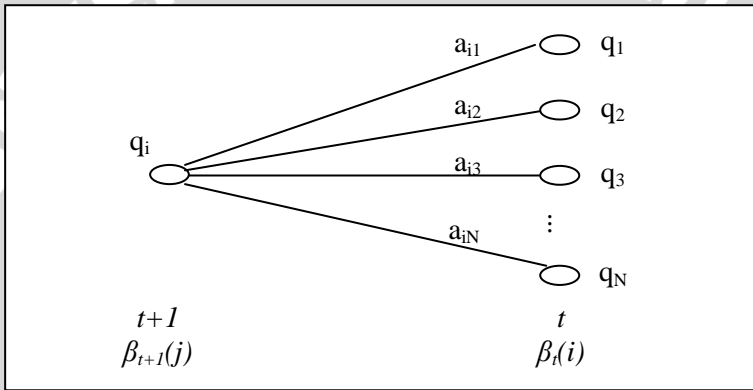
Diberikan model $\lambda = (A, B, \pi)$ dan barisan observasi O , bagaimana memilih rangkaian status tersembunyi yang optimal $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ sesuai dengan model dan barisan observasi yang diberikan. Tidak seperti *Basic problem 1* dimana dihasilkan sebuah hasil yang pasti, *basic problem 2* memungkinkan menghasilkan beberapa jawaban. Salah satu cara dalam menyelesaikan persoalan ini adalah *Forward-Backward Algorithm (FBA)*, yang menggunakan *Forward Algorithm (α - pass)* dan *Backward Algorithm (β - pass)* secara bersamaan.

4.1.2.1 Forward-Backward Algorithm (FBA)

Algoritma β - pass sendiri memiliki konsep yang serupa dengan algoritma α - pass, namun algoritma β - pass dimulai dari akhir observasi kemudian bekerja secara mundur. Didefinisikan,

$$\beta_t(i) = P(O_{t+1}, O_{t+2}, \dots, O_T | X_t = q_i, \lambda), \quad (4.11)$$

artinya $\beta_t(i)$ adalah peluang terjadinya bagian barisan observasi yang dimulai dari $t+1$ hingga akhir, dengan syarat *state* q_i di waktu t , yang diilustrasikan pada Gambar 4.4.

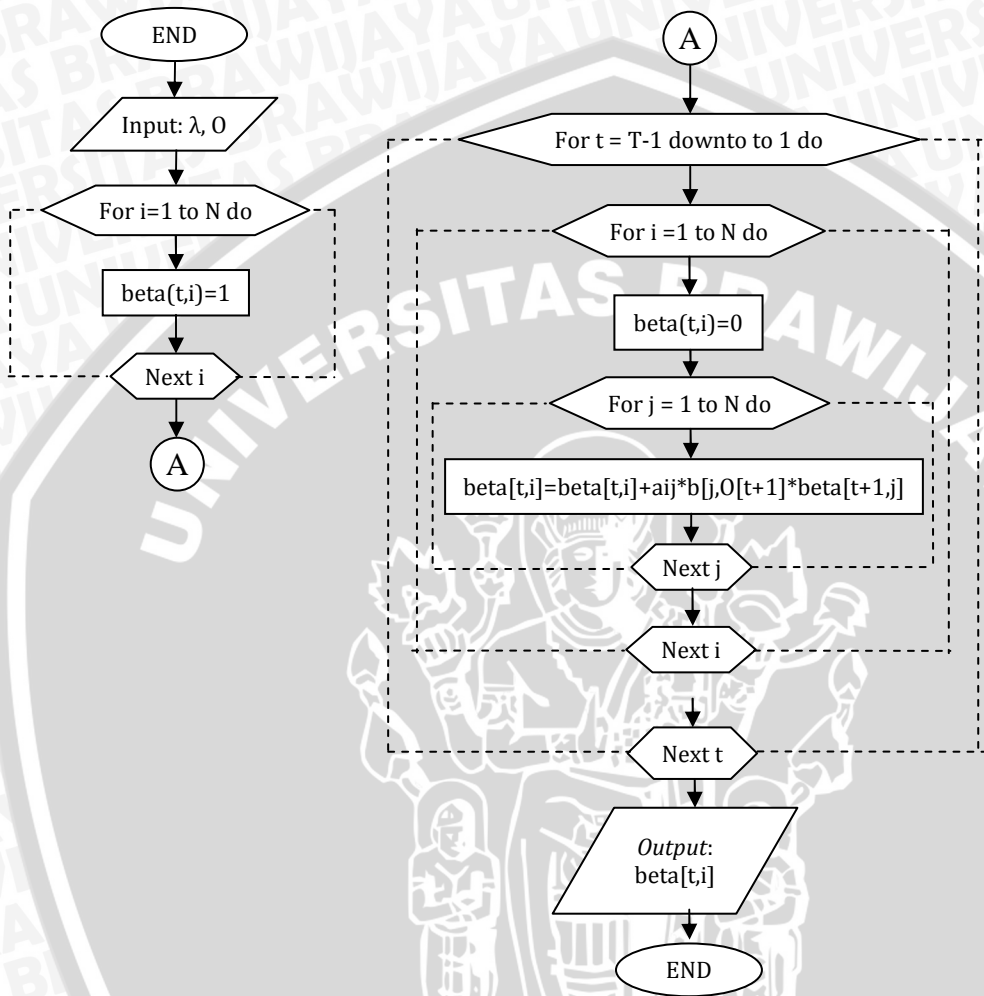


Gambar 4.4 Ilustrasi β - pass

Gambar 4.4 menunjukkan bahwa mencari peluang *state* q_i berada di waktu t harus memperhatikan seluruh *state* q_j yang mungkin terjadi pada waktu $t+1$. Melalui ilustrasi pada Gambar 4.4 didapatkan,

$$\beta_t(i) = \sum_{j=1}^N a_{ij} b_j(O_{t+1}) \beta_{t+1}(j), \quad (4.12)$$

dimana $t=T-1, T-2, \dots, 1, 1 \leq i \leq N$. Flowchart perhitungan $\beta_t(i)$ ditunjukkan pada Gambar 4.5.

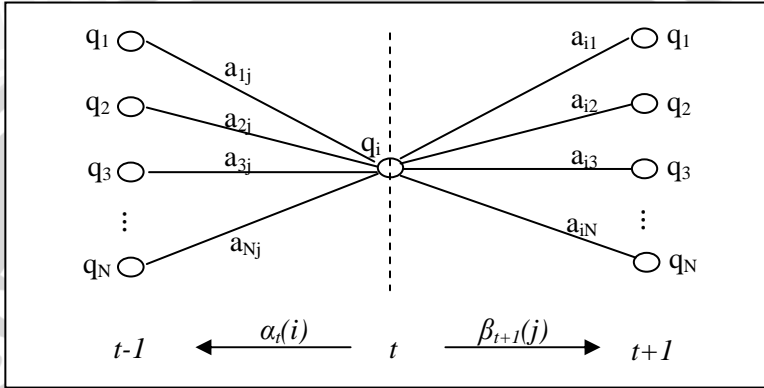


Gambar 4.5 Flowchart Perhitungan $\beta_t(i)$

Kriteria pengoptimalan yang digunakan dalam FBA yaitu memilih q_i yang secara satu persatu paling sesuai dengan barisan observasi yang diberikan. Pengimplementasian FBA ke dalam *basic problem 2* membutuhkan variabel $\gamma_t(i)$. Didefinisikan

$$\gamma_t(i) = P(X_t = q_i | O, \lambda) \tag{4.13}$$

yaitu peluang *state* q_i terjadi di waktu t , berdasarkan rangkaian pengamatan dan model λ yang diberikan. Memanfaatkan α - *pass* dan β - *pass*, persamaan (4.13) dapat ditinjau dari awal ($t=1$) dan akhir pengamatan ($t=T$) seperti terlihat pada Gambar 4.6.



Gambar 4.6 Ilustrasi Persamaan $\gamma_t(i)$

Menurut definisi peluang bersyarat, persamaan (4.13) dapat dijabarkan sebagai berikut,

$$\gamma_t(i) = P(X_t = q_i | O, \lambda),$$

$$\gamma_t(i) = \frac{P(X_t = q_i, O | \lambda)}{P(O | \lambda)}.$$

Diketahui

$$P(X_t = q_i, O | \lambda) = P(O_1, \dots, O_t, \dots, O_T, X_t = q_i | \lambda).$$

Misal

$$\mu_1 = O_1, O_2, \dots, O_t, X_t = q_i,$$

$$\mu_2 = O_{t+1}, \dots, O_T,$$

berdasarkan definisi kejadian tidak saling bebas, maka

$$\begin{aligned} P(\mu_1, \mu_2) &= P(\mu_1) \cdot P(\mu_2 | \mu_1) \\ &= P(O_1, O_2, \dots, O_t, X_t = q_i) \cdot P(\mu_2 | \mu_1) \\ &= \alpha_t(i) \cdot P(\mu_2 | \mu_1) \\ &= \alpha_t(i) \cdot P(O_{t+1}, \dots, O_T | X_t = q_i, O_1, O_2, \dots, O_t) \\ &= \alpha_t(i) \cdot \beta_{t+1}(i), \end{aligned}$$

sehingga

$$P(X_t = q_i, O | \lambda) = \alpha_t(i) \cdot \beta_t(i),$$

dan

$$\gamma_t(i) = \frac{\alpha_t(i) \cdot \beta_t(i)}{P(O | \lambda)}. \quad (4.14)$$

Langkah-langkah dalam algoritma *forward-backward* adalah sebagai berikut:

(i) Inisialisasi (*intialisation*)

$$\beta_T(i) = 1, \quad i = 1, \dots, N,$$

(ii) Induksi (*induction*)

$$\beta_t(i) = \sum_{j=1}^N a_{ij} b_j(O_{t+1}) \beta_{t+1}(i), \quad \begin{matrix} t = T-1, \dots, 1 \\ j = 1, \dots, N \end{matrix},$$

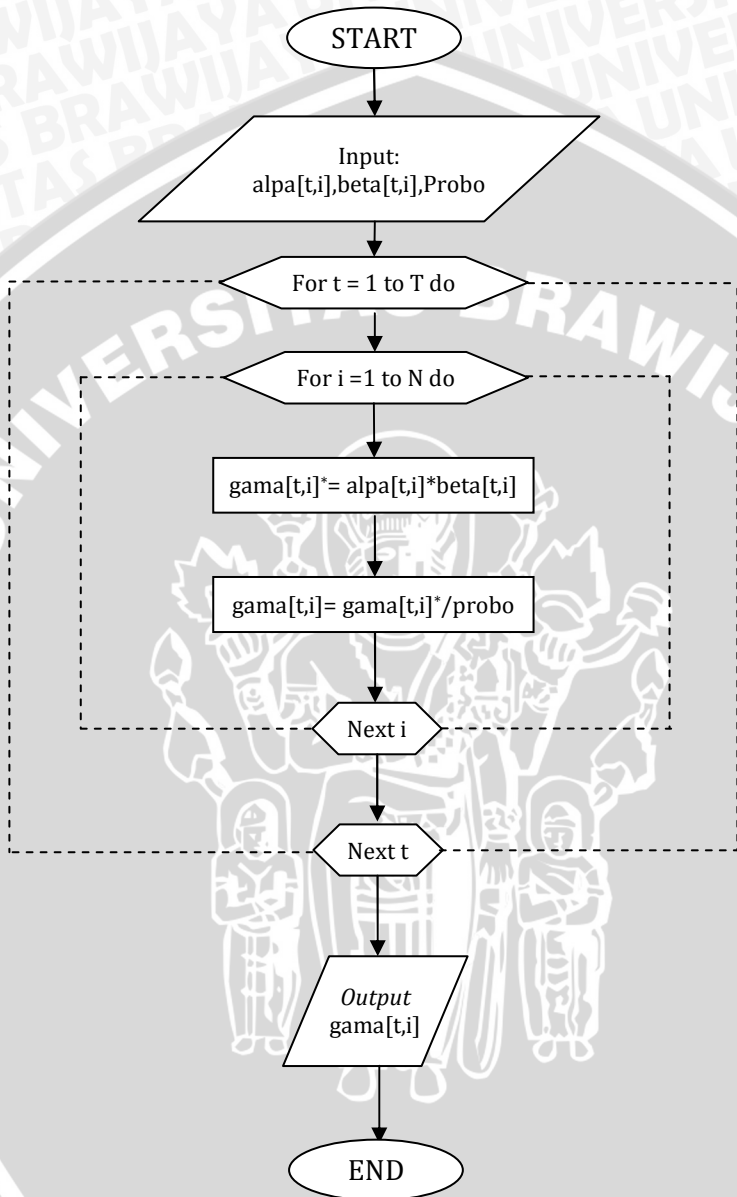
(iii) Rekursif

untuk setiap $t = 1, \dots, T$,

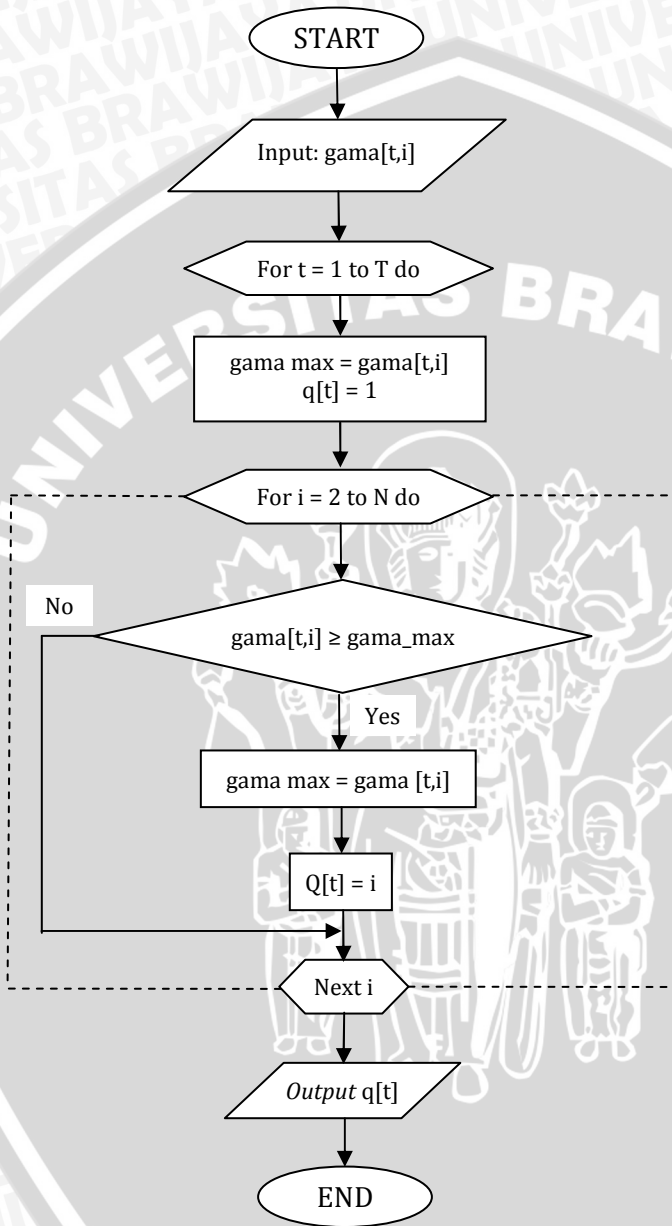
$$\gamma_t(i) = \frac{\alpha_t(i) \cdot \beta_t(i)}{P(O | \lambda)}.$$

$$X_t = \arg \max_{1 \leq i \leq N} [\gamma_t(i)].$$

Output dari FBA adalah $X = \{X_t\}$, untuk setiap $t=1, \dots, T$, dimana X merupakan rangkaian *hidden state* yang paling mungkin terjadi berdasarkan model dan rangkaian pengamatan. *Flowchart* mencari $\gamma_t(i)$ dan X_t masing-masing dapat dilihat pada Gambar 4.7 dan Gambar 4.8. *Source code* untuk algoritma *forward-backward* ditunjukkan pada Tabel 4.2.



Gambar 4.7 Flowchart Perhitungan $\gamma_t(i)$



Gambar 4.8 Flowchart Mencari Rangkaian Hidden State X_t ,

Tabel 4.2 Source code algoritma forward-backward

No	Source code algoritma forward-backward
1	for i:= 1 to N do
	beta[ta,i]:=1;
2	for t:= (Ta-1) downto 1 do
3	begin
4	for i:= 1 to N do
5	begin
6	beta[t,i]:=0;
7	for j:= 1 to N do
8	beta[t,i]:=beta[t,i]+a[i,j]*b[j,o[t+1]]
	*beta[t+1,j];
9	end;
10	end;
11	for t:= 1 to Ta do
12	begin
13	for i:= 1 to N do
14	begin
15	gamax[t,i]:=alpha[t,i]*beta[t,i];
16	gama[t,i]:=gamax[t,i]/prob0;
17	end;
18	end;
19	if iter =1 then
20	begin
21	for t:= 1 to Ta do
22	begin
23	gama_max[t]:=gama[t,1];
24	Q[t]:=1;
25	for i:= 2 to N do
26	begin
27	if (gama[t,i]>= gama_max[t]) then
28	begin
29	gama_max[t]:=gama[t,i];
30	Q[t]:=i;
31	end;
32	end;
33	end;
34	end;

Source code langkah ke 1-10 merupakan proses mencari nilai $\beta(i)$. Langkah 11 -18 menunjukkan proses mencari nilai $\gamma(i)$. Langkah 19-34 merupakan proses mencari rangkaian *hidden state* X.

4.1.2.2 Algoritma Viterbi

Algoritma lain yang dapat digunakan untuk memecahkan *basic problem 2* ialah Algoritma Viterbi. Algoritma Viterbi merupakan algoritma *dynamic programming* untuk menemukan kemungkinan rangkaian status yang tersembunyi (biasa disebut *Viterbi path*) yang dihasilkan pada rangkaian pengamatan kejadian, terutama dalam lingkup HMM.

Untuk menemukan sebuah rangkaian status terbaik, $X = \{X_1, X_2, \dots, X_t\}$ untuk rangkaian observasi $O = \{O_1, O_2, \dots, O_T\}$, perlu dihitung nilai dari:

1. $\delta_t(i)$ adalah rangkaian terbaik, yaitu dengan kemungkinan terbesar, pada waktu t dimana perhitungan untuk pengamatan t pertama dan berakhir pada status q_i .

$$\delta_t(i) = \max_{X_1, X_2, \dots, X_{t-1}} P[X_1, \dots, X_{t-1}, X_t = q_i, O_1, \dots, O_t | \lambda], \quad (4.15)$$

2. dengan menginduksi persamaan (4.15), didapat:

$$\delta_{t+1}(j) = \left[\max_i \delta_t(i) \cdot a_{ij} \right] \cdot b_j(O_{t+1}). \quad (4.16)$$

Untuk mendapatkan kembali rangkaian status, diperlukan penyimpanan hasil untuk memaksimalkan persamaan (4.16) untuk setiap i dan j dengan menggunakan matriks probabilitas transisi A . Prosedur untuk menemukan kumpulan *state* terbaik terangkum dalam Algoritma Viterbi, dirumuskan sebagai:

1. Inisialisasi

$$\delta_1(i) = \pi_i \cdot b_i(O_1), \quad 1 \leq i \leq N, \quad (4.17)$$

$$\psi_1(i) = 0, \quad (4.18)$$

dimana π_i adalah peluang awal terhadap *state* q_i pada waktu $t=1$.

2. Rekursif

$$\delta_t(j) = \max_{1 \leq i \leq N} [\delta_{t-1}(i) \cdot a_{ij}] \cdot b_j(O_t), \quad (4.19)$$

$$\psi_t(j) = \arg \max_{1 \leq i \leq N} [\delta_{t-1}(i) \cdot a_{ij}], \quad (4.20)$$

dimana $2 \leq t \leq T$ dan $1 \leq i, j \leq N$. Notasi i mewakili status pada waktu sebelumnya ($t - 1$), sedangkan j mewakili status saat ini (t).

Langkah optimal saat ini diambil dari langkah optimal sebelumnya. Fokusnya adalah menemukan rangkaian yang

memiliki nilai *likelihood* maksimum. Nilai *likelihood* pada langkah sebelumnya, $\delta_{t-1}(i)$, dikalikan dengan peluang transisi a_{ij} , kemudian dari semua hasil yang di dapat, dicari yang maksimum, lalu dikalikan dengan peluang emisi status j berdasarkan observasi waktu ke- t (O_t). Hasilnya, didapatkan *likelihood* saat ini (*curent likelihood*) dilambangkan $\delta_t(j)$, kemudian langkah yang terbaik (paling memungkinkan) diperoleh melalui induksi dan disimpan dalam variabel $\psi_t(j)$.

3. Terminasi

$$X_T^* = \arg \max_{1 \leq i \leq N} \delta_t(i) \quad (4.21)$$

4. Lintasan Status (*Backtracking*)

$$X^* = \{X_1^*, X_2^*, \dots, X_T^*\},$$

sehingga

$$X_t^* = \psi_{t+1}(X_{t+1}^*), t = T - 1, T - 2, \dots, 1. \quad (4.22)$$

4.1.3 Basic Problem 3

Diberikan model $\lambda = (A, B, \pi)$ dan rangkaian observasi O . Dengan algoritma *Forward-Backward*, diperoleh nilai $P(O/\lambda)$. *Basic problem 3* adalah memaksimalkan nilai $P(O/\lambda)$ dengan cara memperbaharui (re-estimasi) model $\lambda = (A, B, \pi)$. Berikut adalah algoritma dalam menyelesaikan *basic problem 3*.

1. Inisialisasi $\lambda = (A, B, \pi)$
2. Hitung $\alpha_t(i), \beta_t(i), \gamma_t$, dan $\gamma_t(i)$
3. Re-estimasi model $\lambda = (A, B, \pi)$
4. Cek Nilai $P(O/\lambda)$ yang baru
Jika $P(O/\lambda) \geq P(O/\lambda)$ lama
Kembali ke langkah 2 \rightarrow sesuai *stopping criteria*
Else Stop
5. $Output = P(O/\lambda)$.

Basic problem 3 memungkinkan untuk memperbaharui model λ yang telah ada agar menghasilkan nilai $P(O|\lambda)$ yang maksimum. Untuk $t=1,2, \dots,T-1$, dan $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ didefinisikan

$$\gamma_t(i, j) = P(X_t = qi, X_{t-1} = qj | O, \lambda), \quad (4.23)$$

dimana $\gamma_t(i, j)$ merupakan peluang berada di *state* q_i pada waktu t dan kemudian berpindah ke *state* q_j pada waktu $t+1$. $\gamma_t(i, j)$ dapat diubah ke dalam persamaan yang memuat α, β, A dan B , sebagai berikut :

$$\gamma_t(i, j) = \frac{\alpha_t(i) \cdot a_{ij} \cdot b_j(0_{t+1}) \beta_{t+1}(j)}{P(O | \lambda)}$$

$\gamma_t(i)$ dan $\gamma_t(i, j)$ terhubung dengan :

$$\gamma_t(i) = \sum_{j=1}^N \gamma_t(i, j),$$

sehingga,

$$P(O | \lambda) = \sum \frac{\gamma_t(i, j)}{\gamma_t(i)}$$

Algoritma yang digunakan untuk memperbaharui model λ yaitu:

1. untuk $i=1, 2, \dots, N$, diberikan

$$\pi_i = \gamma_1(i), \quad (4.24)$$

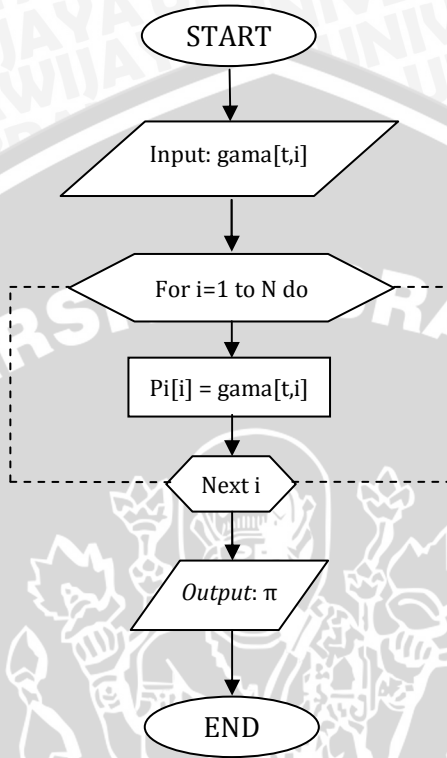
2. untuk $i=1, 2, \dots, N$ dan $j=1, 2, \dots, N$, hitung:

$$a_{i,j} = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \gamma_t(i, j)}{\sum_{t=1}^{T-1} \gamma_t(i)}, \quad (4.25)$$

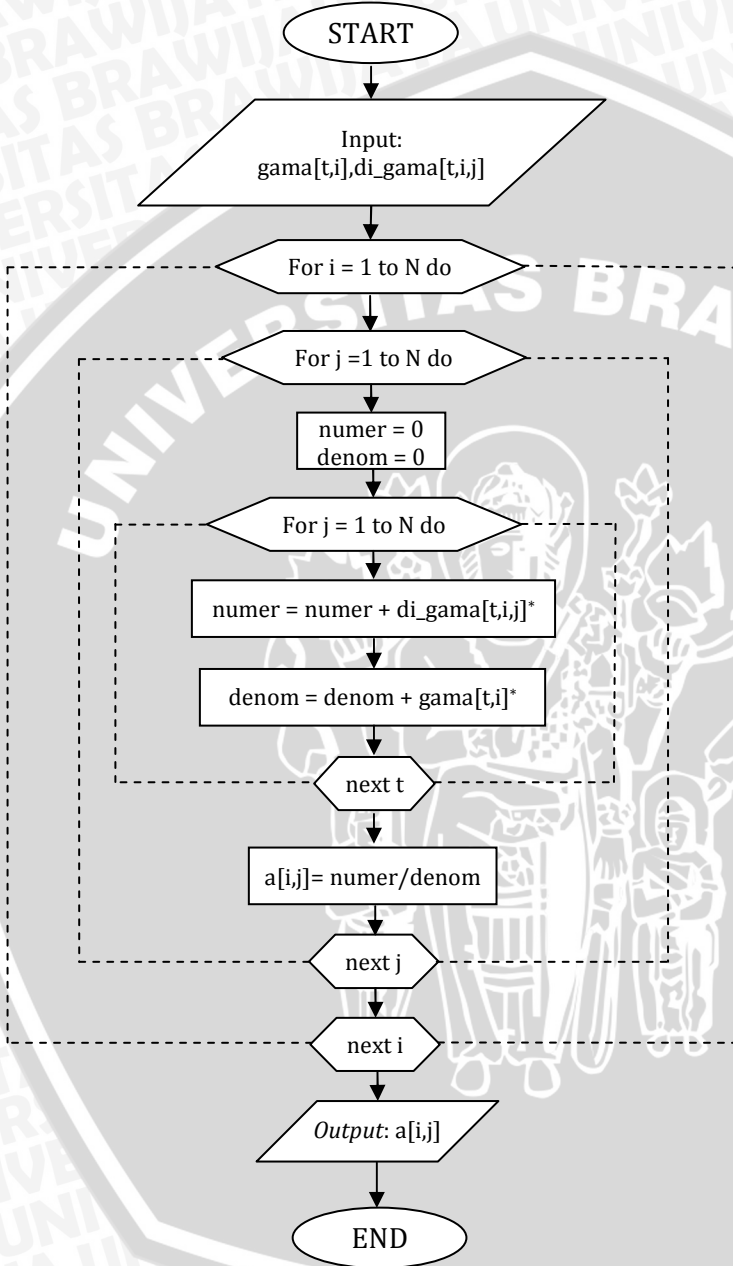
3. untuk $j=1, 2, \dots, N$ dan $k=1, 2, \dots, N$, hitung:

$$b_j(k) = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \gamma_t(j)}{\sum_{t=1}^{T-1} \gamma_t(j)}. \quad (4.26)$$

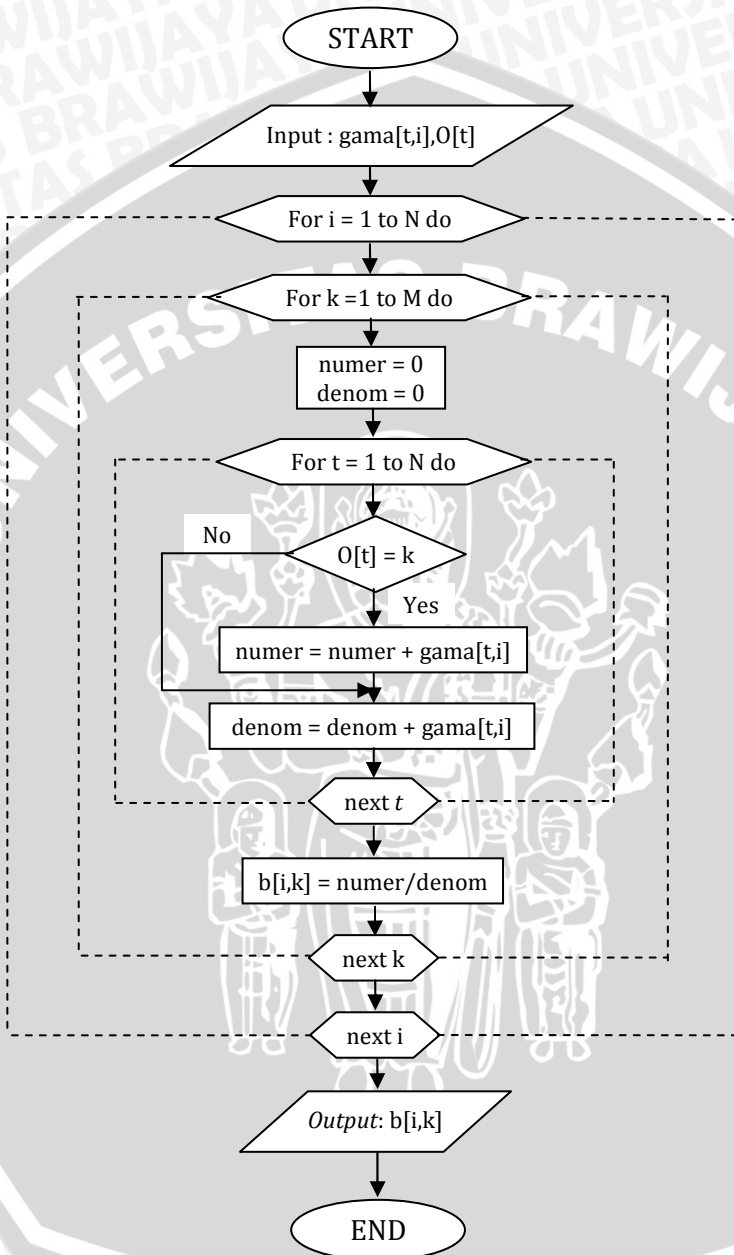
Flowchart yang menunjukkan proses re-estimasi model ditunjukkan pada gambar 4.9 hingga 4.11.



Gambar 4.9 Flowchart Re-estimasi π



Gambar 4.10 Flowchart re-estimasi A



Gambar 4.11 Flowchart re-estimasi *B*

4.2 Implementasi HMM dalam Kasus Konsumen GSM

4.2.1 Operator GSM yang Dipilih Responden

Melalui data yang telah terkumpul melalui kuisioner, diperoleh banyaknya responden yang memakai operator-operator GSM sebagai berikut:

Tabel 4.3 Operator dan jumlah pengguna pada tahun 2010

No	Operator	Responden	Proporsi (%)
1	Telkomsel	74	37
2	Indosat	68	34
3	Excelcomindo	27	13,5
4	<i>Other</i>	31	15,5
	Total	200	100

Tabel 4.4 menampilkan data operator GSM yang dipakai responden pada tahun 2009.

Tabel 4.4 Operator dan jumlah pengguna pada tahun 2009

No	Operator	Responden	Proporsi (%)
1	Telkomsel	82	41
2	Indosat	72	36
3	Excelcomindo	29	14,5
4	<i>Other</i>	17	8,5
	Total	200	100

Data pada Tabel 4.4 dapat digunakan untuk membangun matriks peluang awal $\pi = \{\pi_i\}$. Tabel 4.5 menampilkan nilai π_i yang dihasilkan berdasarkan data yang terdapat pada Tabel 4.4.

Tabel 4.5 Nilai Peluang Awal π_i untuk Setiap Operator i

No	Operator (i)	Peluang Awal (π_i)
1	Indosat	0,36
2	Telkomsel	0,41
3	Excelcomindo	0,145
4	<i>Other</i>	0,085

Matriks π dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\pi = [0,36 \quad 0,41 \quad 0,145 \quad 0,085].$$

Alasan responden memilih operator GSM yang digunakan juga bermacam-macam. Sebelumnya, peneliti berusaha mencari kategori tertentu yang dapat mewakili ciri-ciri setiap operator yang diteliti. Beberapa kriteria tersebut akan menjadi parameter yang dapat diteliti secara langsung. Berdasarkan penelitian yang dilakukan sebelum membuat kuisioner, sifat/karakteristik operator GSM dibagi dalam 4 kelompok, yaitu:

- I : Jangkauan paling luas, jarang *trouble*, terpercaya, walaupun tarif cenderung lebih mahal dibandingkan operator lain.
- II : Tarif cenderung murah, internet mudah dan murah, berjiwa muda (gaul), namun sering *trouble*.
- III : Jaringan stabil, cenderung murah ke sesama operator, kualitas panggilan dan SMS murah jika digunakan terhadap sesama operator, tetapi sistem tarif rumit dan membingungkan.
- IV : Jangkauan masih sangat terbatas, harga perdana murah, memberikan banyak bonus, tampil beda.

4.2.2 Perpindahan dalam memilih Operator GSM

Selera konsumen selalu berubah dalam menggunakan suatu produk. Perpindahan operator GSM adalah gejala umum yang terjadi di kalangan konsumen.

Tabel 4.6 Perpindahan pengguna operator GSM

2009 \ 2010	Indosat	Telkomsel	XL	Other	
Indosat	33	14	8	17	72
Telkomsel	21	46	9	6	82
XL	9	11	7	2	29
Other	5	3	3	6	17
	68	74	27	31	200

Tabel 4.6 menunjukkan jumlah perpindahan konsumen terhadap penggunaan operator GSM tahun 2010 dari tahun 2009. Jumlah responden yang memilih Indosat pada tahun 2010 adalah 68 orang, Telkomsel dipilih oleh 74 orang, XL dipilih oleh 27, dan 'Other' dipilih oleh 31 orang. Sejumlah 33 responden tetap menggunakan Indosat, 14 responden berpindah ke Telkomsel, 8 orang pindah ke XL, dan 17 orang pindah ke operator lain 'Other'.

4.2.3 Matriks Peluang

Beberapa tabel yang telah disajikan sebelumnya dapat digunakan untuk membentuk matriks peluang. Model Rantai Markov biasa hanya memerlukan satu matriks peluang, yaitu matriks peluang transisi, sedangkan model *Hidden Markov* memerlukan dua matriks peluang yaitu matriks peluang transisi dan matriks peluang emisi. Dalam kasus ini, matriks peluang transisi akan menunjukkan peluang perpindahan konsumen dari masing-masing operator GSM dalam jangka waktu satu satuan waktu, sedangkan matriks peluang emisi akan menunjukkan peluang jenis operator yang digunakan melalui parameter yang diteliti.

4.2.3.1 Matriks Peluang Transisi

Matriks Peluang Transisi dapat dibentuk menggunakan data yang disajikan dalam Tabel 4.6. Tabel tersebut menunjukkan jumlah perpindahan responden yang memilih masing-masing operator dalam jangka waktu satu satuan waktu. Berikut cara mendapatkan matriks peluang transisi A menggunakan data pada Tabel 4.6.

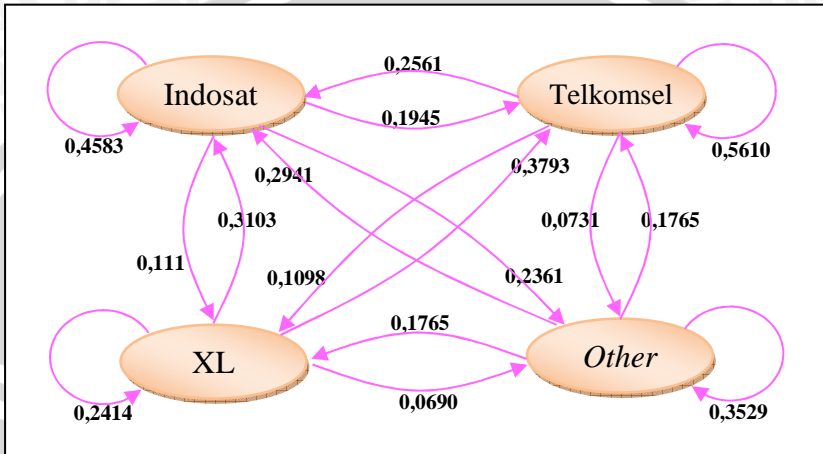
$$A = \begin{bmatrix} \frac{33}{72} & \frac{14}{72} & \frac{8}{72} & \frac{17}{72} \\ \frac{21}{82} & \frac{46}{82} & \frac{9}{82} & \frac{6}{82} \\ \frac{9}{29} & \frac{11}{29} & \frac{7}{29} & \frac{2}{29} \\ \frac{5}{17} & \frac{3}{17} & \frac{3}{17} & \frac{6}{17} \end{bmatrix},$$

operator GSM tahun 2010

$$= \begin{bmatrix} 0,4583 & 0,1945 & 0,1111 & 0,2361 \\ 0,2561 & 0,5610 & 0,1098 & 0,0731 \\ 0,3103 & 0,3793 & 0,2414 & 0,069 \\ 0,2941 & 0,1765 & 0,1765 & 0,3529 \end{bmatrix} \text{operator GSM tahun 2009.}$$

Matriks A merupakan matriks peluang transisi perpindahan konsumen GSM. Sebagai contoh, peluang seorang konsumen GSM mengganti operator yang awalnya Indosat menjadi XL sebesar

0,1111. Secara matematis dapat ditulis $P(XL | Indosat) = 0,1111$. Skema Rantai Markov untuk kasus GSM ini ditunjukkan pada Gambar 4.12.



Gambar 4.12 Model rantai markov pada kasus GSM

Pada Gambar 4.12, Rantai Markov memiliki 4 *state* yaitu Indosat, Telkomsel, XL, dan *Other*. Garis penghubung antar *state* menggambarkan peluang transisi. Masing-masing nilai peluang transisi a_{ij} tercantum di setiap garis penghubung. Sebagai contoh, Indosat terhubung dengan Telkomsel, jika panah menuju Telkomsel, artinya menggambarkan peluang transisi operator GSM yg dipakai pada tahun 2010 adalah Telkomsel dimana tahun 2009 menggunakan Indosat, $P(Telkomsel | Indosat) = 0,1945$.

4.2.3.2 Matriks Peluang Emisi

Matriks Peluang Emisi menunjukkan peluang responden memilih operator GSM tertentu dilihat dari alasan yang mendasari dalam memilih operator tersebut. Dalam penulisan ini, operator GSM yang akan dipilih oleh responden merupakan *hidden state* dinotasikan $Q = \{Indosat, Telkomsel, XL, Other\}$. Sedangkan alasan atau kategori yang menyebabkan responden memilih operator GSM merupakan *observed state* dinotasikan V . Sebelumnya, telah dibuat kategori – dinotasikan I, II, III, dan IV – yang mewakili kelebihan maupun kekurangan masing-masing operator GSM, sehingga $V = \{I, II, III, IV\}$. Matriks peluang emisi dapat ditulis sebagai $P(V | Q)$.

Membentuk matriks peluang emisi membutuhkan informasi yang menggambarkan keterkaitan antara pilihan operator responden saat ini dengan alasan atau kategori yang dipilih. Data tersebut dapat dilihat pada Tabel 4.7.

Tabel 4.7 Responden masing-masing operator GSM berdasarkan kategori

Operator \ Kategori	I	II	III	IV	
Indosat	6	56	6	0	68
Telkomsel	64	7	3	0	74
XL	4	2	18	3	27
Other	1	2	5	23	31
	75	67	32	26	200

Tabel 4.7 menunjukkan jumlah responden yang memilih masing-masing kategori untuk setiap operator GSM. Jumlah responden yang memakai Indosat dengan alasan kategori I sebanyak 6 orang, dengan alasan kategori II sebanyak 56 orang, dengan alasan kategori III sebanyak 6 orang, dan tidak ada yang memilih berdasarkan kategori IV. Jumlah responden yang memakai Telkomsel dengan alasan kategori I sebanyak 64 orang, dengan alasan kategori II sebanyak 7 orang, dengan alasan kategori III sebanyak 3 orang, dan tidak ada yang memilih berdasarkan kategori IV. Jumlah responden yang memakai XL dengan alasan kategori I sebanyak 4 orang, dengan alasan kategori II sebanyak 2 orang, dengan alasan kategori III sebanyak 18 orang, dan 3 orang yang memilih berdasarkan kategori IV. Jumlah responden operator "Other" dengan alasan kategori I sebanyak 1 orang, dengan alasan kategori II sebanyak 2 orang, dengan alasan kategori III sebanyak 5 orang, dan 23 orang yang memilih berdasarkan kategori IV.

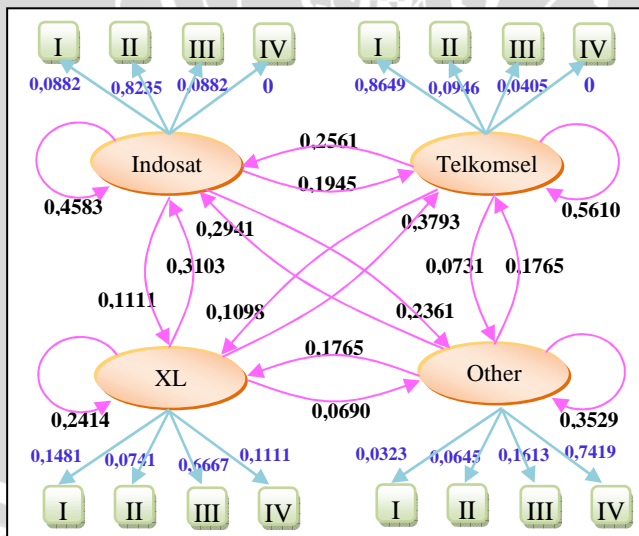
Melalui data yang ada pada Tabel 4.7 dapat dibentuk matriks peluang emisi B . B adalah matriks yang menunjukkan peluang kategori berdasarkan operator GSM yang dipilih. Sebagai contoh, peluang seorang konsumen GSM memilih karakteristik IV dan memakai operator XL sebesar $3/27$ atau $0,1111$. Secara matematis dapat ditulis $P(IV | XL) = 0,1111$. Artinya, jika konsumen memilih karakteristik IV maka peluang konsumen tersebut memakai XL

sebesar 0,1111. Berikut matriks peluang emisi B yang dibentuk berdasarkan data pada Tabel 4.7.

$$B = \begin{bmatrix} \frac{6}{31} & \frac{56}{31} & \frac{6}{31} & 0 \\ \frac{68}{31} & \frac{68}{31} & \frac{68}{31} & 0 \\ \frac{64}{31} & \frac{7}{31} & \frac{3}{31} & 0 \\ \frac{74}{31} & \frac{74}{31} & \frac{74}{31} & 0 \\ 4 & 2 & 18 & 3 \\ \frac{27}{31} & \frac{27}{31} & \frac{27}{31} & \frac{27}{31} \\ 1 & 2 & 5 & 23 \\ \frac{31}{31} & \frac{31}{31} & \frac{31}{31} & \frac{31}{31} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,0882 & 0,8235 & 0,0882 & 0 \\ 0,8649 & 0,0946 & 0,0405 & 0 \\ 0,1481 & 0,0741 & 0,6667 & 0,1111 \\ 0,0323 & 0,0645 & 0,1613 & 0,7419 \end{bmatrix} \text{operator GSM tahun 2009 .}$$

Model *Hidden Markov* untuk kasus ini ditunjukkan pada Gambar 4.13.



Gambar 4.13 Model *Hidden Markov* pada kasus GSM

4.2.4 Perhitungan Menggunakan Program Delphi

4.2.4.1 Desain *Interface*

The screenshot shows a Delphi application window titled "Form1". The interface is organized into two main vertical panels: "INPUT" on the left and "OUTPUT" on the right.

INPUT Panel:

- Four text input fields: "JUMLAH PENGAMATAN", "JUMLAH ITERASI", "BANYAK HIDDEN STATE", and "BANYAK OBSERVED STATE".
- An "OK" button next to the "BANYAK OBSERVED STATE" field.
- Three 5x5 grid boxes labeled "Matriks A", "Matriks B", and "Nilai Awal (phi)".
- Another 5x5 grid box labeled "Nilai Awal (phi)" below the previous one.
- A 5x5 grid box labeled "BARISAN OBSERVASI" below the previous one.
- "CLEAR" and "PROSES" buttons at the bottom.

OUTPUT Panel:

- Three 5x5 grid boxes labeled "Matriks A", "Matriks B", and "Nilai Awal (phi)".
- Two text input fields: "PELUANG 0 SEBELUM UPDATE" and "PELUANG 0 SETELAH UPDATE".
- A 5x5 grid box labeled "TABEL TRELLIS" below the previous one.

Gambar 4.14 Desain *Interface* Program

Gambar 4.14 menunjukkan desain *interface* dari program yang dikonstruksi untuk menyelesaikan ketiga *basic problems* secara simultan. 'JUMLAH PENGAMATAN' diisi dengan banyak observasi T , yang dilakukan. 'JUMLAH ITERASI' diisi dengan banyak maksimum iterasi yang digunakan sebagai salah satu *stopping criteria* dalam menyelesaikan *basic problem* ke tiga. 'BANYAK HIDDEN STATE' diisi dengan N dan 'BANYAK OBSERVED STATE' diisi dengan M . Jika semua label telah diisi,

klik 'OK' untuk memunculkan StringGrid yang digunakan untuk memasukkan nilai matriks A , B , π dan rangkaian observasi O . Jika semua StringGrid telah diisi, maka klik 'PROSES' untuk menjalankan program.

Pada bagian 'OUTPUT' akan ditampilkan hasil dari proses yang telah dijalankan. Penyelesaian dari *basic problem* pertama akan ditampilkan pada 'PELUANG O SEBELUM UPDATE'. Penyelesaian dari *basic problem* ke dua, berupa rangkaian *hidden state* X , yang paling memungkinkan, ditampilkan pada 'TABEL TRELIS'. StringGrid 'MATRIKS A', 'MATRIKS B', 'NILAI AWAL (phi)' akan menampilkan λ yang telah di *update* untuk memaksimalkan nilai $P(O|\lambda)$. $P(O|\lambda)$ yang telah dihitung kembali menggunakan λ yang telah di *update* ditampilkan pada 'PELUANG O SETELAH UPDATE'.

4.2.4.2 Output Program

Gambar 4.15 menampilkan *output* dari program yang telah dijalankan menggunakan data *input* dari kuisoner. Data yang diperoleh dari kuisoner diolah menjadi model λ yang dimasukkan dalam StringGrid 'MATRIKS A', 'MATRIKS B', dan 'NILAI AWAL (phi)', sedangkan rangkaian observasi O menggunakan data sintesis. Pada *output* yang ditampilkan Gambar 4.14, dimasukkan $T=4$, iterasi= 1, dimana $O = \{O_1 = III, O_2 = I, O_3 = I, O_4 = II\}$. Nilai $P(O|\lambda)$ awal yang dihasilkan sebesar 0,00420674724598914. Rangkaian *hidden state* X yang paling sesuai dengan O adalah $X = \{X_1 = XL, X_2 = Indosat, O_3 = Telkomsel, O_4 = Indosat\}$. Hasil update λ setelah satu iterasi yaitu:

$$A^* = \begin{bmatrix} 0,47488864198213 & 0,437612141201597 & 0,0551053173700211 & 0,0323938994462588 \\ 0,618406008859027 & 0,336140179099136 & 0,0311446511797224 & 0,0143091608621148 \\ 0,660595908118322 & 0,249778275614445 & 0,0786550678111774 & 0,0109707484560552 \\ 0,672929874147409 & 0,190074348021564 & 0,0715555871016841 & 0,0654401907293425 \end{bmatrix},$$

$$B^* = \begin{bmatrix} 0,100250055509049 & 0,778705966157668 & 0,121043978333283 & 0 \\ 0,621108844214873 & 0,29549295468276 & 0,0833982011023663 & 0 \\ 0,0906435586163743 & 0,122403954845286 & 0,786952486538340 & 0 \\ 0,180208331745419 & 0,298371542114534 & 0,521420126140047 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\pi^* = [0,237508802476655 \quad 0,0952577843321898 \quad 0,593434755458553 \quad 0,0737986577326022].$$

Nilai $P(O|\lambda^*)$ setelah satu iterasi adalah 0,0642223351820067.
Perhitungan manual untuk proses ini terlampir pada Lampiran 2.

Form1

INPUT

JUMLAH PENGAMATAN :

JUMLAH ITERASI :

BANYAK HIDDEN STATE :

BANYAK OBSERVED STATE :

MATRIKS A

	indosat	telkonsel	%L	Other
indosat	0,4583	0,1945	0,1111	0,2361
telkonsel	0,2561	0,5610	0,1098	0,0731
%L	0,3103	0,3793	0,2414	0,069
Other	0,2941	0,1765	0,1765	0,3529

MATRIKS B

	I	II	III	IV
indosat	0,08825	0,8235	0,08825	0
telkonsel	0,8649	0,0946	0,0405	0
%L	0,1481	0,0741	0,6667	0,1111
Other	0,0323	0,0645	0,1613	0,7419

NILAI AWAL (phi)

indosat	telkonsel	%L	Other
0,36	0,41	0,145	0,085

BARISAN OBSERVASI

	3	2	1	2

OUTPUT

MATRIKS A

	indosat	telkonsel	%L	Other
indosat	0,4748886419	0,4376121412	0,0551053173	0,03239389944
telkonsel	0,6184060088	0,3361401790	0,0311446511	0,0143091608E
%L	0,6605959081	0,249778275E	0,0786550678	0,0109707484E
Other	0,6729298741	0,190074348E	0,0715555871	0,06544019072

MATRIKS B

	I	II	III	IV
indosat	0,1002500556	0,7787059661	0,1210439783	0
telkonsel	0,6211088442	0,295492954E	0,0833982011	0
%L	0,0906435586	0,122403954E	0,7869524865	0
Other	0,1802083317	0,2983715421	0,5214201261	0

NILAI AWAL (phi)

indosat	telkonsel	%L	Other
0,237508802	0,0952577843	0,5934347554	0,0737986577

PELUANG 0 SEBELUM UPDATE :

PELUANG 0 SETELAH UPDATE :

TABEL TRELIS

	3	2	1	2
indosat		====>		====>
telkonsel			====>	
%L	====>			
Other				

Gambar 4.15 Output Program

BAB V KESIMPULAN

Terdapat tiga masalah mendasar (*basic problems*) yang harus diselesaikan agar HMM dapat diterapkan. Pertama, pencarian nilai peluang rangkaian observasi, $P(O|\lambda)$, menggunakan *Forward Algorithm*. Kedua, pencarian rangkaian *hidden state* X yang optimal berdasarkan rangkaian observasi O , menggunakan *Forward-Backward Algorithm*. Ketiga, menyesuaikan model $\lambda = \{A, B, \pi\}$, menggunakan *Baum-Welch Algorithm*, agar $P(O|\lambda)$ maksimum.

Dalam penerapan model *Hidden Markov* pada kasus konsumen GSM, diperlukan λ dan O . λ diperoleh dari data hasil kuesioner. Sedangkan O diambil dari data sintesis. Pada penelitian ini diambil jumlah observasi $T = 4$ dengan barisan observasi O berisi kategori yang muncul pada pengamatan $t=1,2,\dots,T$ yaitu $O = \{\text{kategori III, kategori II, kategori I, kategori II}\}$ sehingga $O = \{O_1 = \text{III}, O_2 = \text{I}, O_3 = \text{I}, O_4 = \text{II}\}$. Matriks A diperoleh dari data perpindahan konsumen GSM pada tahun 2009 dengan 2010. Matriks B diperoleh dari data responden masing – masing operator GSM berdasarkan kategori yang dipilih. Sedangkan π diperoleh dari proporsi responden masing – masing operator GSM di tahun 2009.

Jika dimasukkan jumlah pengamatan $T=4$, iterasi= 1, dimana rangkaian observasi $O=\{\text{III, II, I, II}\}$, maka diperoleh nilai $P(O|\lambda)$ awal yang dihasilkan sebesar 0,00420674724598914. Rangkaian *hidden state* X yang paling sesuai dengan O adalah $X=\{\text{XL, Indosat, Telkomsel, Indosat}\}$. Nilai $P(O|\lambda)$ setelah satu iterasi adalah 0,0642223351820067.

Semakin panjang waktu pengamatan, semakin panjang rangkaian observasi, maka semakin kecil nilai peluang awal $P(O|\lambda)$ yang berarti peluang rangkaian observasi tersebut menjadi semakin kecil. Jika jumlah iterasi diperbanyak, maka nilai $P(O|\lambda^*)$ akan semakin mendekati 1.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR PUSTAKA

- Eriyanto. 2007. *Teknik Sampling, Analisis Opini Publik*. LKIS. Yogyakarta
- Gulo, W. 2004. *Metode Penelitian*. PT. Grasindo, Jakarta.
- Hidayanto, A. 2009. *Teori Umum Rantai Markov*. Jurnal. achmad.blog.undip.ac.id.
- Lestari, Y. D. 2009. *Penerapan Model Hidden Markov pada Peramalan Harga Premium*. Tesis. Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh November, Surabaya.
- Nugroho, S. 2008. *Dasar-dasar Metode Statistika*. PT. Grasindo, Jakarta.
- Ongsano, R. 2006. *Studi Tentang Korelasi Tektikal Kampanye Produk Simcard SIMPATI HOKI Periode 2004-2005 dengan Pencapaian Brand Image Produk Tersebut di Surabaya*. Skripsi. Fakultas Seni dan Desain Universitas Kristen Petra, Surabaya.
- Rabiner, L. R. 1989. *A Tutorial on Hidden Markov Models and Selected Applications in Speech Recognition*. Proceedings of The IEEE, 77 (2), 257-286.
- Resch, B. 2001. *Hidden Markov Models, A Tutorial for The Course Computational Intelligence*. Journal. www.igi.turgaz.at/lehre/CI.
- Stamp, M. 2004. *A Revealing Introduction to Hidden Markov Models*. www.cs.sjsu.edu/faculty/stamp/RUA/HMM.pdf
- Sumarminingsih, E. 2006. *Modul Proses Stokastik*. Jurusan Matematika FMIPA Universitas Brawijaya, Malang.
- Walpole, R. E. 1995. *Pengantar Statistika Edisi Ke-3*. PT Gramedia Pustaka Utama, Jakarta.

Wikipedia. Diakses tanggal 2 Oktober 2010.
http://id.wikipedia.org/wiki/Telekomunikasi_seluler_di_Indonesia

Yakub, R. 2010. *Dinamika pada Rantai Markov dengan Dua Komponen*. Skripsi. Jurusan Matematika Universitas Sumatera Utara, Sumatera Utara.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LAMPIRAN

Lampiran 1

KUISIONER

Lampiran 1.1 Kuisoner yang Disebarkan

-- Profil Responden --

Jenis kelamin : _____

Usia : _____

Pekerjaan : _____

-- Operator GSM yang Digunakan --

Berilah tanda silang (x) pada jawaban yang Anda pilih.

1. Operator GSM yang Anda pakai saat ini :
 - a. Indosat
 - b. Telkomsel
 - c. Excelcomindo (XL)
 - d. Lain-lain (jika pilihan tidak terdapat di atas)
2. Di bawah ini, sifat yang paling mirip dengan kartu GSM yang Anda gunakan saat ini adalah:
 - a. Jangkauan paling luas, jarang *trouble*, terpercaya, walaupun tarif cenderung mahal dibandingkan operator lain.
 - b. Tarif cenderung murah, internet mudah dan murah, berjiwa muda (*gaul*), namun sering *trouble*.
 - c. Area jangkauan kurang merata, cenderung murah ke sesama operator, kualitas panggilan dan sms bagus jika digunakan terhadap sesama operator, tetapi sistem tarif rumit dan memusingkan.
 - d. Jangkauan masih sangat terbatas, harga perdana murah, memberikan banyak bonus, tampil beda.
3. Operator yang Anda pakai 1 tahun lalu (**Jika pernah ganti operator**) :
 - a. Indosat
 - b. Telkomsel
 - c. Excelcomindo (XL)
 - d. Lain-lain (jika pilihan tidak terdapat di atas)

Lampiran 1.2 Hasil Kuisioner

No	Pertanyaan 1				Pertanyaan 2				Pertanyaan 3			
	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
2	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
3	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
4	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
5	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
6	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
7	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
8	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
9	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
10	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
11	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
12	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
13	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
14	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
15	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
16	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
17	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
18	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
19	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
20	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
21	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
22	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
23	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
24	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
25	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
26	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
27	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
28	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0

No	Pertanyaan 1				Pertanyaan 2				Pertanyaan 3			
	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
29	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
30	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
31	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
32	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
33	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
34	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
35	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
36	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
37	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
38	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
39	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
40	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
41	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
42	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
43	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
44	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
45	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
46	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
47	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
48	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
49	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
50	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
51	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
52	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
53	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
54	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
55	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
56	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
57	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
58	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0

No	Pertanyaan 1				Pertanyaan 2				Pertanyaan 3			
	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
59	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
60	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
61	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
62	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
63	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
64	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
65	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
66	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
67	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
68	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
69	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
70	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
71	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
72	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
73	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
74	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
75	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
76	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
77	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
78	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
79	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
80	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
81	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
82	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
83	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
84	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
85	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
86	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
87	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
88	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0

No	Pertanyaan 1				Pertanyaan 2				Pertanyaan 3			
	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
89	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
90	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
91	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
92	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
93	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
94	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
95	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
96	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
97	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
98	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
99	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
100	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
101	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
102	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
103	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
104	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
105	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
106	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
107	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
108	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
109	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
110	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
111	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
112	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
113	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
114	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
115	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
116	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
117	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
118	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0

No	Pertanyaan 1				Pertanyaan 2				Pertanyaan 3			
	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
119	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
120	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
121	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
122	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
123	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
124	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
125	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
126	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
127	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
128	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
129	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
130	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
131	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
132	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
133	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
134	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
135	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
136	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
137	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
138	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
139	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
140	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
141	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
142	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
143	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
144	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
145	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
146	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
147	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
148	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0

No	Pertanyaan 1				Pertanyaan 2				Pertanyaan 3			
	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
149	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
150	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
151	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0
152	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0
153	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0
154	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0
155	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
156	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
157	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
158	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
159	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
160	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
161	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
162	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
163	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
164	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
165	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
166	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
167	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
168	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
169	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
170	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0
171	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
172	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
173	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
174	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
175	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
176	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
177	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
178	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0

No	Pertanyaan 1				Pertanyaan 2				Pertanyaan 3			
	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
179	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
180	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
181	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
182	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
183	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
184	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
185	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
186	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
187	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
188	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
189	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
190	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
191	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
192	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
193	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0
194	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0
195	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
196	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
197	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
198	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
199	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
200	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1

Lampiran 2

PERHITUNGAN MANUAL

Lampiran 2.1 Perhitungan $P(O|\lambda)$ Menggunakan *Forward Algorithm* (FA)

- (i) Inisialisasi : $\alpha_j(i) = \pi_i \cdot b_i(O_j) \rightarrow \alpha_j(i) = \pi_i \cdot b_i(3)$
- $$\alpha_1(1) = \pi_1 \cdot b_1(3) = 0,36 \cdot 0,08825 = 0,03177$$
- $$\alpha_1(2) = \pi_2 \cdot b_2(3) = 0,41 \cdot 0,0405 = 0,016605$$
- $$\alpha_1(3) = \pi_3 \cdot b_3(3) = 0,145 \cdot 0,6667 = 0,0966715$$
- $$\alpha_1(4) = \pi_4 \cdot b_4(3) = 0,085 \cdot 0,1613 = 0,0137105$$

- (ii) Induksi : $\alpha_{t+1}(j) = \left[\sum_{i=1}^N \alpha_t(i) \cdot a_{ij} \right] \cdot b_j(O_{t+1})$

➤ $t = 1$

$$\begin{aligned} \alpha_2(1) &= [\alpha_1(1) \cdot a_{11} + \alpha_1(2) \cdot a_{21} + \alpha_1(3) \cdot a_{31} + \alpha_1(4) \cdot a_{41}] \cdot b_1(2) \\ &= [(0,03177 \cdot 0,4583) + (0,016605 \cdot 0,2561) + \\ &\quad (0,0966715 \cdot 0,3103) + (0,0137105 \cdot 0,2941)] \cdot 0,8235 \\ &= 5,2842156 \cdot 10^{-2} \cdot 0,8235 = 4,3515515466 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_2(2) &= [\alpha_1(1) \cdot a_{12} + \alpha_1(2) \cdot a_{22} + \alpha_1(3) \cdot a_{32} + \alpha_1(4) \cdot a_{42}] \cdot b_2(2) \\ &= [(0,03177 \cdot 0,1945) + (0,016605 \cdot 0,561) + \\ &\quad (0,0966715 \cdot 0,3793) + (0,0137105 \cdot 0,1765)] \cdot 0,0946 \\ &= 5,45820732 \cdot 10^{-2} \cdot 0,0946 = 5,16346412472 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_2(3) &= [\alpha_1(1) \cdot a_{13} + \alpha_1(2) \cdot a_{23} + \alpha_1(3) \cdot a_{33} + \alpha_1(4) \cdot a_{43}] \cdot b_3(2) \\ &= [(0,03177 \cdot 0,1111) + (0,016605 \cdot 0,1098) + \\ &\quad (0,0966715 \cdot 0,2414) + (0,0137105 \cdot 0,1765)] \cdot 0,0741 \\ &= 3,110927935 \cdot 10^{-2} \cdot 0,0741 = 2,305197599835 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_2(4) &= [\alpha_1(1) \cdot a_{14} + \alpha_1(2) \cdot a_{24} + \alpha_1(3) \cdot a_{34} + \alpha_1(4) \cdot a_{44}] \cdot b_4(2) \\ &= [(0,03177 \cdot 0,2361) + (0,016605 \cdot 0,0731) + \\ &\quad (0,0966715 \cdot 0,069) + (0,0137105 \cdot 0,3529)] \cdot 0,0645 \\ &= 2,022349145 \cdot 10^{-2} \cdot 0,0645 = 1,304415198525 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

➤ $t = 2$

$$\begin{aligned} \alpha_3(1) &= [\alpha_2(1) \cdot a_{11} + \alpha_2(2) \cdot a_{21} + \alpha_2(3) \cdot a_{31} + \alpha_2(4) \cdot a_{41}] \cdot b_1(1) \\ &= [(4,3515515466 \cdot 10^{-2} \cdot 0,4583) + (5,16346412472 \cdot 10^{-3} \cdot 0,2561) + \\ &\quad (2,305197599835 \cdot 10^{-3} \cdot 0,3103) + (1,304415198525 \cdot 10^{-3} \cdot 0,2941)] \cdot 0,08825 \\ &= 2,23644552255236 \cdot 10^{-2} \cdot 0,08825 = 1,97366317365246 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_3(2) &= [\alpha_2(1) \cdot a_{12} + \alpha_2(2) \cdot a_{22} + \alpha_2(3) \cdot a_{32} + \alpha_2(4) \cdot a_{42}] \cdot b_2(1) \\ &= [(4,3515515466 \cdot 10^{-2} \cdot 0,1945) + (5,16346412472 \cdot 10^{-3} \cdot 0,561) + \\ &\quad (2,305197599835 \cdot 10^{-3} \cdot 0,3793) + (1,304415198525 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1765)] \cdot 0,8649 \\ &= 1,2465061864262 \cdot 10^{-2} \cdot 0,8649 = 1,07810320064002 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_3(3) &= [\alpha_2(1).a_{13} + \alpha_2(2).a_{23} + \alpha_2(3).a_{33} + \alpha_2(4).a_{43}].b_3(1) \\ &= [(4,3515515466.10^{-2}.0,1111) + (5,16346412472.10^{-3}.0,1098) + \\ &\quad (2,305197599835.10^{-3}.0,2414) + (1,304415198525.10^{-3}.0,1765)]. \\ &\quad 0,1481 \\ &= 6,18822611230669.10^{-3}.0,1481 = 9,1647628723262.10^{-4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_3(4) &= [\alpha_2(1).a_{14} + \alpha_2(2).a_{24} + \alpha_2(3).a_{34} + \alpha_2(4).a_{44}].b_4(1) \\ &= [(4,3515515466.10^{-2}.0,2361) + (5,16346412472.10^{-3}.0,0731) + \\ &\quad (2,305197599835.10^{-3}.0,069) + (1,304415198525.10^{-3}.0,3529)]. \\ &\quad 0,0323 \\ &= 1,12708491869877.10^{-2}.0,0323 = 3,64048428739703.10^{-4}\end{aligned}$$

➤ $t = 3$

$$\begin{aligned}\alpha_4(1) &= [\alpha_3(1).a_{11} + \alpha_3(2).a_{21} + \alpha_3(3).a_{31} + \alpha_3(4).a_{41}].b_1(2) \\ &= [(1,97366317365246.10^{-3}.0,4583) + (1,07810320064002.10^{-2}.0,2561) + \\ &\quad (9,1647628723262.10^{-4}.0,3103) + (3,64048428739703.10^{-4}.0,2941)]. \\ &\quad 0,8235 \\ &= 4,05700136414464.10^{-3}.0,8235 \\ &= 3,34094062337311.10^{-3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_4(2) &= [\alpha_3(1).a_{12} + \alpha_3(2).a_{22} + \alpha_3(3).a_{32} + \alpha_3(4).a_{42}].b_2(2) \\ &= [(1,97366317365246.10^{-3}.0,1945) + (1,07810320064002.10^{-2}.0,561) + \\ &\quad (9,1647628723262.10^{-4}.0,3793) + (3,64048428739703.10^{-4}.0,1765)]. \\ &\quad 0,0946 \\ &= 6,84391044628581.10^{-3}.0,0946 \\ &= 6,47433928218637.10^{-4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_4(3) &= [\alpha_3(1).a_{13} + \alpha_3(2).a_{23} + \alpha_3(3).a_{33} + \alpha_3(4).a_{43}].b_3(2) \\ &= [(1,97366317365246.10^{-3}.0,1111) + (1,07810320064002.10^{-2}.0,1098) + \\ &\quad (9,1647628723262.10^{-4}.0,2414) + (3,64048428739703.10^{-4}.0,1765)]. \\ &\quad 0,0741 \\ &= 1,68852321630604.10^{-3}.0,0741 \\ &= 1,25119570328278.10^{-4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_4(4) &= [\alpha_3(1).a_{14} + \alpha_3(2).a_{24} + \alpha_3(3).a_{34} + \alpha_3(4).a_{44}].b_4(2) \\ &= [(1,97366317365246.10^{-3}.0,2361) + (1,07810320064002.10^{-2}.0,0731) + \\ &\quad (9,1647628723262.10^{-4}.0,069) + (3,64048428739703.10^{-4}.0,3529)]. \\ &\quad 0,0645 \\ &= 1,44578486928849.10^{-3}.0,0645 \\ &= 9,32531240691077.10^{-5}\end{aligned}$$

(iii) Terminasi

$$\begin{aligned}P(O|\lambda) &= \sum_{i=1}^N \alpha_i(i) = \alpha_4(1) + \alpha_4(2) + \alpha_4(3) + \alpha_4(4) \\ &= 3,34094062337311.10^{-3} + 6,47433928218637.10^{-4} + \\ &\quad 1,25119570328278.10^{-4} + 9,32531240691077.10^{-5} \\ &= 4,20674724598914.10^{-3}\end{aligned}$$

Lampiran 2.2 Mencari $X = \{X_1, X_2, \dots, X_T\}$ Menggunakan Forward-Backward Algorithm (FBA)

BACKWARD ALGORITHM

(i) Inisialisasi : $\beta_T = (i) = 1, \forall i = 1, 2, \dots, N$

$$\beta_4(1) = 1$$

$$\beta_4(2) = 1$$

$$\beta_4(3) = 1$$

$$\beta_4(4) = 1$$

(ii) Induksi : $\beta_t(i) = \sum_{j=1}^N a_{ij} \cdot b_j(O_{t+1}) \cdot \beta_{t+1}(j), t = T-1, T-2, \dots, 1$

➤ $t = 3, O_{t+1} = O_4 = 2$

$$\beta_3(i) = \sum_{j=1}^N a_{ij} \cdot b_j(2) \cdot \beta_4(j)$$

$$= (a_{i1} \cdot 0,8235) + (a_{i2} \cdot 0,0946) + (a_{i3} \cdot 0,0741) + (a_{i4} \cdot 0,0645)$$

$$\beta_3(1) = (a_{11} \cdot b_1(2) \cdot \beta_4(1)) + (a_{12} \cdot b_2(2) \cdot \beta_4(2)) + (a_{13} \cdot b_3(2) \cdot \beta_4(3)) + (a_{14} \cdot b_4(2) \cdot \beta_4(4))$$

$$= (0,4583 \cdot 0,8235 \cdot 1) + (0,1945 \cdot 0,0946 \cdot 1) +$$

$$(0,1111 \cdot 0,0741 \cdot 1) + (0,2361 \cdot 0,0645 \cdot 1)$$

$$= 0,41927071$$

$$\beta_3(2) = (a_{21} \cdot b_1(2) \cdot \beta_4(1)) + (a_{22} \cdot b_2(2) \cdot \beta_4(2)) + (a_{23} \cdot b_3(2) \cdot \beta_4(3)) + (a_{24} \cdot b_4(2) \cdot \beta_4(4))$$

$$= (0,2561 \cdot 0,8235 \cdot 1) + (0,561 \cdot 0,0946 \cdot 1) +$$

$$(0,1098 \cdot 0,0741 \cdot 1) + (0,0731 \cdot 0,0645 \cdot 1)$$

$$= 0,27682008$$

$$\beta_3(3) = (a_{31} \cdot b_1(2) \cdot \beta_4(1)) + (a_{32} \cdot b_2(2) \cdot \beta_4(2)) + (a_{33} \cdot b_3(2) \cdot \beta_4(3)) + (a_{34} \cdot b_4(2) \cdot \beta_4(4))$$

$$= (0,3103 \cdot 0,8235 \cdot 1) + (0,3793 \cdot 0,0946 \cdot 1) +$$

$$(0,2414 \cdot 0,0741 \cdot 1) + (0,069 \cdot 0,0645 \cdot 1)$$

$$= 0,31375207$$

$$\beta_3(4) = (a_{41} \cdot b_1(2) \cdot \beta_4(1)) + (a_{42} \cdot b_2(2) \cdot \beta_4(2)) + (a_{43} \cdot b_3(2) \cdot \beta_4(3)) + (a_{44} \cdot b_4(2) \cdot \beta_4(4))$$

$$= (0,2941 \cdot 0,8235 \cdot 1) + (0,1765 \cdot 0,0946 \cdot 1) +$$

$$(0,1765 \cdot 0,0741 \cdot 1) + (0,3529 \cdot 0,0645 \cdot 1)$$

$$= 0,29472895$$

$$\triangleright t = 2, O_{t+1} = O_3 = 1$$

$$\begin{aligned} \beta_2(i) &= \sum_{j=1}^N a_{ij} \cdot b_j(1) \cdot \beta_3(j) \\ &= (a_{i1} \cdot b_1(1) \cdot \beta_3(1)) + (a_{i2} \cdot b_2(1) \cdot \beta_3(2)) + (a_{i3} \cdot b_3(1) \cdot \beta_3(3)) + (a_{i4} \cdot b_4(1) \cdot \beta_3(4)) \\ &= (a_{i1} \cdot 0,08825 \cdot 0,41927071) + (a_{i2} \cdot 0,8649 \cdot 0,27682008) + \\ &\quad (a_{i3} \cdot 0,1481 \cdot 0,31375207) + (a_{i4} \cdot 0,0323 \cdot 0,29472895) \\ &= (a_{i1} \cdot 3,70006401575 \cdot 10^{-2}) + (a_{i2} \cdot 2,39421687192 \cdot 10^{-1}) + \\ &\quad (a_{i3} \cdot 4,64666815670 \cdot 10^{-2}) + (a_{i4} \cdot 9,51974508500 \cdot 10^{-3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_2(1) &= (a_{11} \cdot b_1(1) \cdot \beta_3(1)) + (a_{12} \cdot b_1(1) \cdot \beta_3(2)) + (a_{13} \cdot b_3(1) \cdot \beta_3(3)) + (a_{14} \cdot b_4(1) \cdot \beta_3(4)) \\ &= (0,4583 \cdot 3,70006401575 \cdot 10^{-2}) + (0,1945 \cdot 2,39421687192 \cdot 10^{-1}) + \\ &\quad (0,1111 \cdot 4,64666815670 \cdot 10^{-2}) + (0,2361 \cdot 9,51974508500 \cdot 10^{-3}) \\ &= 7,09349716796885 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_2(2) &= (a_{21} \cdot b_1(1) \cdot \beta_3(1)) + (a_{22} \cdot b_2(1) \cdot \beta_3(2)) + (a_{23} \cdot b_3(1) \cdot \beta_3(3)) + (a_{24} \cdot b_4(1) \cdot \beta_3(4)) \\ &= (0,2561 \cdot 3,70006401575 \cdot 10^{-2}) + (0,561 \cdot 2,39421687192 \cdot 10^{-1}) + \\ &\quad (0,1098 \cdot 4,64666815670 \cdot 10^{-2}) + (0,0731 \cdot 9,51974508500 \cdot 10^{-3}) \\ &= 1,49589365460818 \cdot 10^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_2(3) &= (a_{31} \cdot b_1(1) \cdot \beta_3(1)) + (a_{32} \cdot b_2(1) \cdot \beta_3(1)) + (a_{33} \cdot b_3(1) \cdot \beta_3(3)) + (a_{34} \cdot b_4(1) \cdot \beta_3(4)) \\ &= (0,3103 \cdot 3,70006401575 \cdot 10^{-2}) + (0,3793 \cdot 2,39421687192 \cdot 10^{-1}) + \\ &\quad (0,2414 \cdot 4,64666815670 \cdot 10^{-2}) + (0,069 \cdot 9,51974508500 \cdot 10^{-3}) \\ &= 1,14167863933937 \cdot 10^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_2(4) &= (a_{41} \cdot b_1(1) \cdot \beta_3(1)) + (a_{42} \cdot b_2(1) \cdot \beta_3(1)) + (a_{43} \cdot b_3(1) \cdot \beta_3(1)) + (a_{44} \cdot b_4(1) \cdot \beta_3(4)) \\ &= (0,2941 \cdot 3,70006401575 \cdot 10^{-2}) + (0,1765 \cdot 2,39421687192 \cdot 10^{-1}) + \\ &\quad (0,1765 \cdot 4,64666815670 \cdot 10^{-2}) + (0,3529 \cdot 9,51974508500 \cdot 10^{-3}) \\ &= 6,47007033967807 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

$$\triangleright t = 1, O_{t+1} = O_2 = 2$$

$$\begin{aligned} \beta_1(i) &= \sum_{j=1}^N a_{ij} \cdot b_j(2) \cdot \beta_2(j) \\ &= (a_{i1} \cdot b_1(2) \cdot \beta_2(1)) + (a_{i2} \cdot b_2(2) \cdot \beta_2(2)) + (a_{i3} \cdot b_3(2) \cdot \beta_2(3)) + (a_{i4} \cdot b_4(2) \cdot \beta_2(4)) \\ &= (a_{i1} \cdot 0,8235 \cdot 7,09349716796885 \cdot 10^{-2}) + \\ &\quad (a_{i2} \cdot 0,0946 \cdot 1,49589365460818 \cdot 10^{-1}) + \\ &\quad (a_{i3} \cdot 0,0741 \cdot 1,14167863933937 \cdot 10^{-1}) + \\ &\quad (a_{i4} \cdot 0,0645 \cdot 6,47007033967807 \cdot 10^{-2}) \\ &= (a_{i1} \cdot 5,84149491782234 \cdot 10^{-2}) + (a_{i2} \cdot 1,41511539725934 \cdot 10^{-2}) + \\ &\quad (a_{i3} \cdot 8,45983871750471 \cdot 10^{-3}) + (a_{i4} \cdot 4,17319536909236 \cdot 10^{-3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_1(1) &= (a_{11} \cdot b_1(2) \cdot \beta_2(1)) + (a_{12} \cdot b_2(2) \cdot \beta_2(2)) + (a_{13} \cdot b_3(2) \cdot \beta_2(3)) + (a_{14} \cdot b_4(2) \cdot \beta_2(4)) \\ &= (0,4583 \cdot 5,84149491782234 \cdot 10^{-2}) + (0,1945 \cdot 1,41511539725934 \cdot 10^{-2}) + \\ &\quad (0,1111 \cdot 8,45983871750471 \cdot 10^{-3}) + (0,2361 \cdot 4,17319536909236 \cdot 10^{-3}) \\ &= 3,14491501642067 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_1(2) &= (a_{21}.b_1(2).\beta_2(1))+(a_{22}.b_2(2).\beta_2(2))+(a_{23}.b_3(2).\beta_2(3))+(a_{24}.b_4(2).\beta_2(4)) \\ &= (0,2561.5,84149491782234.10^{-2})+ (0,561.1,41511539725934.10^{-2})+ \\ &\quad (0,1098.8,45983871750471.10^{-3})+ (0,0731.4,17319536909236.10^{-3}) \\ &= 2,41328167358306.10^{-2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_1(3) &= (a_{31}.b_1(2).\beta_2(1))+(a_{32}.b_2(2).\beta_2(2))+(a_{33}.b_3(2).\beta_2(3))+(a_{34}.b_4(2).\beta_2(4)) \\ &= (0,3103.5,84149491782234.10^{-2})+(0,3793.1,41511539725934.10^{-2})+ \\ &\quad (0,2414.8,45983871750471.10^{-3})+(0,069.4,17319536909236.10^{-3}) \\ &= 2,58238469786804.10^{-2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_1(4) &= (a_{41}.b_1(2).\beta_2(1))+(a_{42}.b_2(2).\beta_2(2))+(a_{43}.b_3(2).\beta_2(3))+(a_{44}.b_4(2).\beta_2(4)) \\ &= (0,2941.5,84149491782234.10^{-2})+(0,1765.1,41511539725934.10^{-2})+ \\ &\quad (0,1765.8,45983871750471.10^{-3})+(0,3529.4,17319536909236.10^{-3}) \\ &= 2,26433974088705.10^{-2}\end{aligned}$$

FORWARD – BACKWARD ALGORITHM

$$\gamma_t(i) = \frac{\alpha_t(i) \cdot \beta_t(i)}{P(O|\lambda)} = \frac{\alpha_t(i) \cdot \beta_t(i)}{\sum \alpha_t(i) \cdot \beta_t(i)}$$

➤ t = 1

$$\begin{aligned}\alpha_1(1).\beta_1(1) &= 0,03177 \cdot 3,14491501642067.10^{-2} \\ &= 9,99139500716847.10^{-4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_1(2).\beta_1(2) &= 0,016605 \cdot 2,41328167358306.10^{-2} \\ &= 4,00725421898467.10^{-4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_1(3).\beta_1(3) &= 0,0966715 \cdot 2,58238469786804.10^{-2} \\ &= 2,4964300231995.10^{-3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_1(4).\beta_1(4) &= 0,0137105 \cdot 2,26433974088705.10^{-2} \\ &= 3,10452300174319.10^{-4}\end{aligned}$$

$$\Sigma \alpha_1(i).\beta_1(i) = 4,20674724598914.10^{-3}$$

$$\begin{aligned}\gamma_1(1) &= \frac{\alpha_1(1) \cdot \beta_1(1)}{\sum \alpha_1(i) \cdot \beta_1(i)} = \frac{9,99139500716847.10^{-4}}{4,20674724598914.10^{-3}} \\ &= 2,37508802476655.10^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_1(2) &= \frac{\alpha_1(2) \cdot \beta_1(2)}{\sum \alpha_1(i) \cdot \beta_1(i)} = \frac{4,00725421898467.10^{-4}}{4,20674724598914.10^{-3}} \\ &= 9,52577843321898.10^{-2}\end{aligned}$$

$$\gamma_1(3) = \frac{\alpha_1(3) \cdot \beta_1(3)}{\sum \alpha_1(i) \cdot \beta_1(i)} = \frac{2,4964300231995 \cdot 10^{-3}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}}$$

$$= 5,93434755458553 \cdot 10^{-1}$$

$$\gamma_1(4) = \frac{\alpha_1(4) \cdot \beta_1(4)}{\sum \alpha_1(i) \cdot \beta_1(i)} = \frac{3,10452300174319 \cdot 10^{-4}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}}$$

$$= 7,37986577326022 \cdot 10^{-2}$$

$$\max_i [\gamma_1(i)] = \gamma_1(3), i = 3 \rightarrow X_1 = 3$$

➤ t = 2

$$\alpha_2(1) \cdot \beta_2(1) = 4,3515515466 \cdot 10^{-2} \cdot 7,09349716796885 \cdot 10^{-2}$$

$$= 3,08677185720776 \cdot 10^{-3}$$

$$\alpha_2(2) \cdot \beta_2(2) = 5,16346412472 \cdot 10^{-3} \cdot 1,4958936540818 \cdot 10^{-1}$$

$$= 7,72399321996562 \cdot 10^{-4}$$

$$\alpha_2(3) \cdot \beta_2(3) = 2,305197599835 \cdot 10^{-3} \cdot 1,14167863933937 \cdot 10^{-1}$$

$$= 2,631794859188 \cdot 10^{-4}$$

$$\alpha_2(4) \cdot \beta_2(4) = 1,304415198525 \cdot 10^{-3} \cdot 6,47007033967807 \cdot 10^{-2}$$

$$= 8,43965808660189 \cdot 10^{-5}$$

$$\sum \alpha_2(i) \cdot \beta_2(i) = 4,20674724598914 \cdot 10^{-3}$$

$$\gamma_2(1) = \frac{\alpha_2(1) \cdot \beta_2(1)}{\sum \alpha_2(i) \cdot \beta_2(i)} = \frac{3,08677185720776 \cdot 10^{-3}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}}$$

$$= 7,33766893209663 \cdot 10^{-1}$$

$$\gamma_2(2) = \frac{\alpha_2(2) \cdot \beta_2(2)}{\sum \alpha_2(i) \cdot \beta_2(i)} = \frac{7,72399321996562 \cdot 10^{-4}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}}$$

$$= 1,83609633959586 \cdot 10^{-1}$$

$$\gamma_2(3) = \frac{\alpha_2(3) \cdot \beta_2(3)}{\sum \alpha_2(i) \cdot \beta_2(i)} = \frac{2,631794859188 \cdot 10^{-4}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}}$$

$$= 6,25612784722744 \cdot 10^{-2}$$

$$\gamma_2(4) = \frac{\alpha_2(4) \cdot \beta_2(4)}{\sum \alpha_2(i) \cdot \beta_2(i)} = \frac{8,43965808660189 \cdot 10^{-5}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}}$$

$$= 2,00621943584763 \cdot 10^{-2}$$

$$\max_i [\gamma_2(i)] = \gamma_2(1), i = 1 \rightarrow X_2 = 1$$

➤ $t = 3$

$$\begin{aligned}\alpha_3(1) \cdot \beta_3(1) &= 1,97366317365246 \cdot 10^{-3} \cdot 0,41927071 \\ &= 8,27499160118119 \cdot 10^{-4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_3(2) \cdot \beta_3(2) &= 1,07810320064002 \cdot 10^{-2} \cdot 0,27682008 \\ &= 2,98440614249426 \cdot 10^{-3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_3(3) \cdot \beta_3(3) &= 9,1647628723262 \cdot 10^{-4} \cdot 0,31375207 \\ &= 2,87546332225149 \cdot 10^{-4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_3(4) \cdot \beta_3(4) &= 3,64048428739703 \cdot 10^{-4} \cdot 0,29472895 \\ &= 1,07295611151603 \cdot 10^{-4}\end{aligned}$$

$$\Sigma \alpha_3(i) \cdot \beta_3(i) = 4,20674724598914 \cdot 10^{-3}$$

$$\begin{aligned}\gamma_3(1) &= \frac{\alpha_3(1) \cdot \beta_3(1)}{\Sigma \alpha_3(i) \cdot \beta_3(i)} = \frac{8,27499160118119 \cdot 10^{-4}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\ &= 1,96707601320019 \cdot 10^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_3(2) &= \frac{\alpha_3(2) \cdot \beta_3(2)}{\Sigma \alpha_3(i) \cdot \beta_3(i)} = \frac{2,98440614249426 \cdot 10^{-3}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\ &= 7,09433195764187 \cdot 10^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_3(3) &= \frac{\alpha_3(3) \cdot \beta_3(3)}{\Sigma \alpha_3(i) \cdot \beta_3(i)} = \frac{2,87546332225149 \cdot 10^{-4}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\ &= 6,83536032499471 \cdot 10^{-2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_3(4) &= \frac{\alpha_3(4) \cdot \beta_3(4)}{\Sigma \alpha_3(i) \cdot \beta_3(i)} = \frac{1,07295611151603 \cdot 10^{-4}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\ &= 2,55055996658468 \cdot 10^{-2}\end{aligned}$$

$$\max_i [\gamma_3(i)] = \gamma_3(2), i = 2 \rightarrow X_3 = 2$$

➤ $t = 4$

$$\begin{aligned}\alpha_4(1) \cdot \beta_4(1) &= 3,34094062337311 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \\ &= 3,34094062337311 \cdot 10^{-3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_4(2) \cdot \beta_4(2) &= 6,47433928218637 \cdot 10^{-4} \cdot 1 \\ &= 6,47433928218637 \cdot 10^{-4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_4(3) \cdot \beta_4(3) &= 1,25119570328278 \cdot 10^{-4} \cdot 1 \\ &= 1,25119570328278 \cdot 10^{-4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_4(4) \cdot \beta_4(4) &= 9,32531240691077 \cdot 10^{-5} \cdot 1 \\ &= 9,32531240691077 \cdot 10^{-5}\end{aligned}$$

$$\Sigma \alpha_4(i) \cdot \beta_4(i) = 4,20674724598914 \cdot 10^{-3}$$

$$\begin{aligned}\gamma_4(1) &= \frac{\alpha_4(1) \cdot \beta_4(1)}{\Sigma \alpha_4(i) \cdot \beta_4(i)} = \frac{3,34094062337311 \cdot 10^{-3}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\ &= 7,94186203261555 \cdot 10^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_4(2) &= \frac{\alpha_4(2) \cdot \beta_4(2)}{\Sigma \alpha_4(i) \cdot \beta_4(i)} = \frac{6,47433928218637 \cdot 10^{-4}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\ &= 1,53903690989737 \cdot 10^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_4(3) &= \frac{\alpha_4(3) \cdot \beta_4(3)}{\Sigma \alpha_4(i) \cdot \beta_4(i)} = \frac{1,25119570328278 \cdot 10^{-4}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\ &= 2,9742592794842 \cdot 10^{-2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_4(4) &= \frac{\alpha_4(4) \cdot \beta_4(4)}{\Sigma \alpha_4(i) \cdot \beta_4(i)} = \frac{9,32531240691077 \cdot 10^{-5}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\ &= 2,21675129538668 \cdot 10^{-2}\end{aligned}$$

$$\max_i [\gamma_4(i)] = \gamma_4(1), i = 1 \rightarrow X_4 = 1$$

Jadi $X = \{X_1, X_2, X_3, X_4\} = \{3, 1, 2, 1\}$

Lampiran 2.3 Memaksimumkan Nilai $P(O|\lambda)$ dengan Memperbaharui $\lambda = \{A, B, \pi\}$

Jumlah iterasi = 1

Rangkaian observasi $O = (III, II, I, II) = (3, 2, 1, 2)$

$$P(O|\lambda) = 4,20674724598914 \cdot 10^{-3}$$

1) Menghitung $\gamma_t(i, j)$, $t = 1, 2, \dots, T$, $i, j = 1, 2, \dots, N$

$$\gamma_t(i, j) = \frac{\alpha_t(i) \cdot a_{ij} b_j(O_{t+1}) \cdot \beta_{t+1}(j)}{P(O|\lambda)}$$

a) $t = 1$, $O_1 = III = 3$, $O_2 = II = 2$

$$\gamma_1(1, 1) = \frac{\alpha_1(1) \cdot a_{11} b_1(O_2) \cdot \beta_2(1)}{P(O|\lambda)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{0,03177 \cdot 0,4583 \cdot 0,8235 \cdot 7,09349716796885 \cdot 10^{-2}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\
 &= 2,02183009236211 \cdot 10^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_1(1,2) &= \frac{\alpha_1(1) \cdot a_{12} b_2(O_2) \cdot \beta_2(2)}{P(O|\lambda)} \\
 &= \frac{0,03177 \cdot 0,1945 \cdot 0,0946 \cdot 1,49589365460818 \cdot 10^{-2}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\
 &= 2,07865425087826 \cdot 10^{-2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_1(1,3) &= \frac{\alpha_1(1) \cdot a_{13} b_3(O_2) \cdot \beta_2(3)}{P(O|\lambda)} \\
 &= \frac{0,03177 \cdot 0,1111 \cdot 0,0741 \cdot 1,14167863933937 \cdot 10^{-1}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\
 &= 7,09817885497974 \cdot 10^{-3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_1(1,4) &= \frac{\alpha_1(1) \cdot a_{14} b_4(O_2) \cdot \beta_2(4)}{P(O|\lambda)} \\
 &= \frac{0,03177 \cdot 0,2361 \cdot 0,0645 \cdot 6,47007033967807 \cdot 10^{-2}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\
 &= 7,44107187668189 \cdot 10^{-3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_1(2,1) &= \frac{\alpha_1(2) \cdot a_{21} b_1(O_2) \cdot \beta_2(1)}{P(O|\lambda)} \\
 &= \frac{0,016605 \cdot 0,2561 \cdot 0,8235 \cdot 7,0934716796885 \cdot 10^{-2}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\
 &= 5,90508349230351 \cdot 10^{-2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_1(2,2) &= \frac{\alpha_1(2) \cdot a_{22} b_2(O_2) \cdot \beta_2(2)}{P(O|\lambda)} \\
 &= \frac{0,016605 \cdot 0,561 \cdot 0,0946 \cdot 1,49589365460818 \cdot 10^{-2}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\
 &= 3,13362611927188 \cdot 10^{-2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_1(2,3) &= \frac{\alpha_1(2) \cdot a_{23} b_3(O_2) \cdot \beta_2(3)}{P(O|\lambda)} \\
 &= \frac{0,016605 \cdot 0,1098 \cdot 0,0741 \cdot 1,14167863933937 \cdot 10^{-1}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\
 &= 3,66654385993439 \cdot 10^{-3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_1(2,4) &= \frac{\alpha_1(2) \cdot a_{24} b_4(O_2) \cdot \beta_2(4)}{P(O|\lambda)} \\ &= \frac{0,016605 \cdot 0,0731 \cdot 0,0645 \cdot 6,47007033967807 \cdot 10^{-2}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\ &= 1,20414435650154 \cdot 10^{-3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_1(3,1) &= \frac{\alpha_1(3) \cdot a_{31} b_1(O_2) \cdot \beta_2(1)}{P(O|\lambda)} \\ &= \frac{0,096715 \cdot 0,3103 \cdot 0,8235 \cdot 7,09349716796885 \cdot 10^{-2}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\ &= 4,16541059208667 \cdot 10^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_1(3,2) &= \frac{\alpha_1(3) \cdot a_{32} b_2(O_2) \cdot \beta_2(2)}{P(O|\lambda)} \\ &= \frac{0,096715 \cdot 0,3793 \cdot 0,0946 \cdot 1,49589365460818 \cdot 10^{-2}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\ &= 1,23346473472405 \cdot 10^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_1(3,3) &= \frac{\alpha_1(3) \cdot a_{33} b_3(O_2) \cdot \beta_2(3)}{P(O|\lambda)} \\ &= \frac{0,096715 \cdot 0,2414 \cdot 0,0741 \cdot 1,14167863933937 \cdot 10^{-1}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\ &= 4,69300900512296 \cdot 10^{-2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_1(3,4) &= \frac{\alpha_1(3) \cdot a_{34} b_4(O_2) \cdot \beta_2(4)}{P(O|\lambda)} \\ &= \frac{0,096715 \cdot 0,069 \cdot 0,0645 \cdot 6,47007033967807 \cdot 10^{-2}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\ &= 6,61713272625115 \cdot 10^{-3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_1(4,1) &= \frac{\alpha_1(4) \cdot a_{41} b_1(O_2) \cdot \beta_2(1)}{P(O|\lambda)} \\ &= \frac{0,0137105 \cdot 0,2941 \cdot 0,8235 \cdot 7,09349716796885 \cdot 10^{-2}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\ &= 5,59919898417497 \cdot 10^{-2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_1(4,2) &= \frac{\alpha_1(4) \cdot a_{42} b_2(O_2) \cdot \beta_2(2)}{P(O|\lambda)} \\ &= \frac{0,0137105 \cdot 0,1765 \cdot 0,0946 \cdot 1,49589365460818 \cdot 10^{-2}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\ &= 8,14035678568019 \cdot 10^{-3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_1(4,3) &= \frac{\alpha_1(4) \cdot a_{43} b_3(O_2) \cdot \beta_2(3)}{P(O|\lambda)} \\ &= \frac{0,0137105 \cdot 0,1765 \cdot 0,0741 \cdot 1,14167863933937 \cdot 10^{-1}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\ &= 4,86646570613060 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_1(4,4) &= \frac{\alpha_1(4) \cdot a_{44} b_4(O_2) \cdot \beta_2(4)}{P(O|\lambda)} \\ &= \frac{0,0137105 \cdot 0,3529 \cdot 0,0645 \cdot 6,47007033967807 \cdot 10^{-2}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\ &= 4,7998453990417 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

b) $t=2$, $O_2=H=2$, $O_3=I=1$

$$\begin{aligned} \gamma_2(1,1) &= \frac{\alpha_2(1) \cdot a_{11} b_1(O_3) \cdot \beta_3(1)}{P(O|\lambda)} \\ &= \frac{4,3515515466 \cdot 10^{-2} \cdot 0,4583 \cdot 0,08825 \cdot 4,1927071 \cdot 10^{-1}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\ &= 1,754109933559449 \cdot 10^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_2(1,2) &= \frac{\alpha_2(1) \cdot a_{12} b_2(O_3) \cdot \beta_3(2)}{P(O|\lambda)} \\ &= \frac{4,3515515466 \cdot 10^{-2} \cdot 0,1945 \cdot 0,8649 \cdot 2,7682008 \cdot 10^{-1}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\ &= 4,81704613602936 \cdot 10^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_2(1,3) &= \frac{\alpha_2(1) \cdot a_{13} b_3(O_3) \cdot \beta_3(3)}{P(O|\lambda)} \\ &= \frac{4,3515515466 \cdot 10^{-2} \cdot 0,1111 \cdot 0,1481 \cdot 3,1375207 \cdot 10^{-1}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\ &= 5,34014968493009 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_2(1,4) &= \frac{\alpha_2(1) \cdot a_{14} b_4(O_3) \cdot \beta_3(4)}{P(O|\lambda)} \\ &= \frac{4,3515515466 \cdot 10^{-2} \cdot 0,2361 \cdot 0,0323 \cdot 2,9472895 \cdot 10^{-1}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\ &= 2,32497891979775 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_2(2,1) &= \frac{\alpha_2(2) \cdot a_{21} b_1(O_3) \cdot \beta_3(1)}{P(O|\lambda)} \\ &= \frac{5,16346412472 \cdot 10^{-3} \cdot 0,2561 \cdot 0,08825 \cdot 4,1927071 \cdot 10^{-1}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\ &= 1,16309064144406 \cdot 10^{-2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_2(2,2) &= \frac{\alpha_2(2) \cdot a_{22} b_2(O_3) \cdot \beta_3(2)}{P(O|\lambda)} \\ &= \frac{5,16346412472 \cdot 10^{-3} \cdot 0,561 \cdot 0,8649 \cdot 2,7682008 \cdot 10^{-1}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\ &= 1,64862200777905 \cdot 10^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_2(2,3) &= \frac{\alpha_2(2) \cdot a_{23} b_3(O_3) \cdot \beta_3(3)}{P(O|\lambda)} \\ &= \frac{5,16346412472 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1098 \cdot 0,1481 \cdot 3,1375207 \cdot 10^{-1}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\ &= 6,26237028519446 \cdot 10^{-3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_2(2,4) &= \frac{\alpha_2(2) \cdot a_{24} b_4(O_3) \cdot \beta_3(4)}{P(O|\lambda)} \\ &= \frac{5,16346412472 \cdot 10^{-3} \cdot 0,0731 \cdot 0,0323 \cdot 2,9472895 \cdot 10^{-1}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\ &= 8,54156482046365 \cdot 10^{-4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_2(3,1) &= \frac{\alpha_2(3) \cdot a_{31} b_1(O_3) \cdot \beta_3(1)}{P(O|\lambda)} \\ &= \frac{2,305197599835 \cdot 10^{-3} \cdot 0,3103 \cdot 0,08825 \cdot 4,1927071 \cdot 10^{-1}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\ &= 6,29147902697549 \cdot 10^{-3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_2(3,2) &= \frac{\alpha_2(3) \cdot a_{32} b_2(O_3) \cdot \beta_3(2)}{P(O|\lambda)} \\ &= \frac{2,305197599835 \cdot 10^{-3} \cdot 0,3793 \cdot 0,8649 \cdot 2,7682008 \cdot 10^{-1}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\ &= 4,97631735975195 \cdot 10^{-2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_2(3,3) &= \frac{\alpha_2(3) \cdot a_{33} b_3(O_3) \cdot \beta_3(3)}{P(O|\lambda)} \\ &= \frac{2,305197599835 \cdot 10^{-3} \cdot 0,2414 \cdot 0,1481 \cdot 3,1375207 \cdot 10^{-1}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\ &= 6,14668084409711 \cdot 10^{-3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_2(3,4) &= \frac{\alpha_2(3) \cdot a_{34} b_4(O_3) \cdot \beta_3(4)}{P(O|\lambda)} \\ &= \frac{2,305197599835 \cdot 10^{-3} \cdot 0,069 \cdot 0,0323 \cdot 2,9472895 \cdot 10^{-1}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\ &= 3,59945003682244 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_2(4,1) &= \frac{\alpha_2(4) \cdot a_{41} b_1(O_3) \cdot \beta_3(1)}{P(O|\lambda)} \\ &= \frac{1,304415198525 \cdot 10^{-3} \cdot 0,2941 \cdot 0,08825 \cdot 4,1927071 \cdot 10^{-1}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\ &= 3,3742231915427 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_2(4,2) &= \frac{\alpha_2(4) \cdot a_{42} b_2(O_3) \cdot \beta_3(2)}{P(O|\lambda)} \\ &= \frac{1,304415198525 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1765 \cdot 0,8649 \cdot 2,7682008 \cdot 10^{-1}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\ &= 1,3103207785867 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_2(4,3) &= \frac{\alpha_2(4) \cdot a_{43} b_3(O_3) \cdot \beta_3(3)}{P(O|\lambda)} \\ &= \frac{1,304415198525 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1765 \cdot 0,1481 \cdot 3,1375207 \cdot 10^{-1}}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\ &= 2,54305527135466 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

c) $t = 3$, $O_3 = 1$, $O_4 = 2$, karena $\beta_4(i) = 1$, jadi bisa diabaikan

$$\begin{aligned} \gamma_3(1,1) &= \frac{\alpha_3(1) \cdot a_{11} b_1(O_4) \cdot \beta_4(1)}{P(O|\lambda)} \\ &= \frac{1,97366317365246 \cdot 10^{-3} \cdot 0,4583 \cdot 0,8235 \cdot 1}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\ &= 1,77067998977483 \cdot 10^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_3(1,2) &= \frac{\alpha_3(1) \cdot a_{12} b_2(O_4) \cdot \beta_4(2)}{P(O|\lambda)} \\ &= \frac{1,97366317365246 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1945 \cdot 0,0946 \cdot 1}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\ &= 8,63251537892536 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_3(1,3) &= \frac{\alpha_3(1) \cdot a_{13} b_3(O_4) \cdot \beta_4(3)}{P(O|\lambda)} \\ &= \frac{1,97366317365246 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1111 \cdot 0,0741 \cdot 1}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\ &= 3,86241456013722 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_3(1,4) &= \frac{\alpha_3(1) \cdot a_{14} b_4(O_4) \cdot \beta_4(4)}{P(O|\lambda)} \\ &= \frac{1,97366317365246 \cdot 10^{-3} \cdot 0,2361 \cdot 0,0645 \cdot 1}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\ &= 7,14467240347375 \cdot 10^{-3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_3(2,1) &= \frac{\alpha_3(2) \cdot a_{21} b_1(O_4) \cdot \beta_4(1)}{P(O|\lambda)} \\ &= \frac{1,07810320064002 \cdot 10^{-2} \cdot 0,2561 \cdot 0,8235 \cdot 1}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\ &= 5,40489296953798 \cdot 10^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_3(2,2) &= \frac{\alpha_3(2) \cdot a_{22} b_2(O_4) \cdot \beta_4(2)}{P(O|\lambda)} \\ &= \frac{1,07810320064002 \cdot 10^{-2} \cdot 0,561 \cdot 0,0946 \cdot 1}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\ &= 1,36009083441934 \cdot 10^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_3(2,3) &= \frac{\alpha_3(2) \cdot a_{23} b_3(O_4) \cdot \beta_4(3)}{P(O|\lambda)} \\ &= \frac{1,07810320064002 \cdot 10^{-2} \cdot 0,1098 \cdot 0,0741 \cdot 1}{4,20674724598914 \cdot 10^{-3}} \\ &= 2,08513637403496 \cdot 10^{-2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_3(2,4) &= \frac{\alpha_3(2) \cdot a_{24} b_4(O_4) \cdot \beta_4(4)}{P(O|\lambda)} \\ &= \frac{1,07810320064002 \cdot 10^{-2} \cdot 0,0731 \cdot 0,0645 \cdot 1}{1,20834516281057 \cdot 10^{-2}} \\ &= 1,20834516281057 \cdot 10^{-2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_3(3,1) &= \frac{\alpha_3(3) \cdot a_{31} b_1(O_4) \cdot \beta_4(1)}{P(O|\lambda)} \\ &= \frac{9,1647628723262 \cdot 10^{-4} \cdot 0,3103 \cdot 0,8235 \cdot 1}{1,20834516281057 \cdot 10^{-2}} \\ &= 5,56698681329677 \cdot 10^{-2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_3(3,2) &= \frac{\alpha_3(3) \cdot a_{32} b_2(O_4) \cdot \beta_4(2)}{P(O|\lambda)} \\ &= \frac{9,1647628723262 \cdot 10^{-4} \cdot 0,3793 \cdot 0,0946 \cdot 1}{1,20834516281057 \cdot 10^{-2}}\end{aligned}$$

$$= 7,81715624703891.10^{-3}$$

$$\begin{aligned} \gamma_3(3,3) &= \frac{\alpha_3(3).a_{33}b_3(O_4).\beta_4(3)}{P(O|\lambda)} \\ &= \frac{9,1647628723262.10^{-4}.0,2414.0,0741.1}{1,20834516281057.10^{-2}} \\ &= 3,8969989361288.10^{-4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_3(3,4) &= \frac{\alpha_3(3).a_{34}b_4(O_4).\beta_4(4)}{P(O|\lambda)} \\ &= \frac{9,1647628723262.10^{-4}.0,069.0,0645.1}{1,20834516281057.10^{-2}} \\ &= 9,69579933811719.10^{-4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_3(4,1) &= \frac{\alpha_3(4).a_{41}b_1(O_4).\beta_4(1)}{P(O|\lambda)} \\ &= \frac{3,64048428739703.10^{-4}.0,2941.0,8235.1}{1,20834516281057.10^{-2}} \\ &= 2,09590391973065.10^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_3(4,2) &= \frac{\alpha_3(4).a_{42}b_2(O_4).\beta_4(2)}{P(O|\lambda)} \\ &= \frac{3,64048428739703.10^{-4}.0,1765.0,0946.1}{1,20834516281057.10^{-2}} \\ &= 1,44493592183828.10^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_3(4,3) &= \frac{\alpha_3(4).a_{43}b_3(O_4).\beta_4(3)}{P(O|\lambda)} \\ &= \frac{3,64048428739703.10^{-4}.0,1765.0,0741.1}{1,20834516281057.10^{-2}} \\ &= 1,13181555822639.10^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_3(4,4) &= \frac{\alpha_3(4).a_{44}b_4(O_4).\beta_4(4)}{P(O|\lambda)} \\ &= \frac{3,64048428739703.10^{-4}.0,3529.0,0645.1}{1,20834516281057.10^{-2}} \\ &= 1,96980898847565.10^{-3} \end{aligned}$$

2) Memperbaharui $\lambda = \{\pi, A, B\}$

a) $\pi = \{\pi_i\}$

$$\pi_i = \gamma_1 \{i\}$$

$$\pi_1 = \gamma_1(1) = 2,37508802476655 \cdot 10^{-1}$$

$$\pi_2 = \gamma_1(2) = 9,52577843321898 \cdot 10^{-2}$$

$$\pi_3 = \gamma_1(3) = 5,93434755458553 \cdot 10^{-1}$$

$$\pi_4 = \gamma_1(4) = 7,37986577326022 \cdot 10^{-2}$$

b) $A = \{a_{ij}\}$

$$a_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \gamma_t(i, j)}{\sum_{t=1}^{T-1} \gamma_t(i)}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\gamma_1(1,1) + \gamma_2(1,1) + \gamma_3(1,1)}{\gamma_1(1) + \gamma_2(1) + \gamma_3(1)} \\ &= \frac{2,02183009236211 \cdot 10^{-1} + 1,75410993559449 \cdot 10^{-1} + 1,77067998977483 \cdot 10^{-1}}{2,37508802476655 \cdot 10^{-1} + 7,33766893209663 \cdot 10^{-1} + 1,96707601320019 \cdot 10^{-1}} \\ &= 4,74888641982123 \cdot 10^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{12} &= \frac{\gamma_1(1,2) + \gamma_2(1,2) + \gamma_3(1,2)}{\gamma_1(1) + \gamma_2(1) + \gamma_3(1)} \\ &= \frac{2,07865425087826 \cdot 10^{-2} + 4,81704613602936 \cdot 10^{-1} + 8,63251537892536 \cdot 10^{-1}}{2,37508802476655 \cdot 10^{-1} + 7,33766893209663 \cdot 10^{-1} + 1,96707601320019 \cdot 10^{-1}} \\ &= 4,37612141201597 \cdot 10^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{13} &= \frac{\gamma_1(1,3) + \gamma_2(1,3) + \gamma_3(1,3)}{\gamma_1(1) + \gamma_2(1) + \gamma_3(1)} \\ &= \frac{7,09817885497974 \cdot 10^{-3} + 5,34014968493009 \cdot 10^{-2} + 3,86241456013722 \cdot 10^{-3}}{2,37508802476655 \cdot 10^{-1} + 7,33766893209663 \cdot 10^{-1} + 1,96707601320019 \cdot 10^{-1}} \\ &= 5,51053173700211 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

$$a_{14} = \frac{\gamma_1(1,4) + \gamma_2(1,4) + \gamma_3(1,4)}{\gamma_1(1) + \gamma_2(1) + \gamma_3(1)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{7,44107187668189 \cdot 10^{-3} + 2,32497891979775 \cdot 10^{-2} + 7,14467240347375 \cdot 10^{-3}}{2,37508802476655 \cdot 10^{-1} + 7,33766893209663 \cdot 10^{-1} + 1,96707601320019 \cdot 10^{-1}} \\
&= 3,23938994462588 \cdot 10^{-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{21} &= \frac{\gamma_1(2,1) + \gamma_2(2,1) + \gamma_3(2,1)}{\gamma_1(2) + \gamma_2(2) + \gamma_3(2)} \\
&= \frac{5,90508349230351 \cdot 10^{-2} + 1,16309064144406 \cdot 10^{-2} + 5,40489296953798 \cdot 10^{-1}}{9,52577843321898 \cdot 10^{-2} + 1,83609633959586 \cdot 10^{-1} + 7,09433195764187 \cdot 10^{-1}} \\
&= 6,18406008859027 \cdot 10^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{22} &= \frac{\gamma_1(2,2) + \gamma_2(2,2) + \gamma_3(2,2)}{\gamma_1(2) + \gamma_2(2) + \gamma_3(2)} \\
&= \frac{3,13362611927188 \cdot 10^{-2} + 1,64862200777905 \cdot 10^{-1} + 1,36009083441934 \cdot 10^{-1}}{9,52577843321898 \cdot 10^{-2} + 1,83609633959586 \cdot 10^{-1} + 7,09433195764187 \cdot 10^{-1}} \\
&= 3,36140179099136 \cdot 10^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{23} &= \frac{\gamma_1(2,3) + \gamma_2(2,3) + \gamma_3(2,3)}{\gamma_1(2) + \gamma_2(2) + \gamma_3(2)} \\
&= \frac{3,66654385993439 \cdot 10^{-3} + 6,26237028519446 \cdot 10^{-3} + 2,08513637403496 \cdot 10^{-2}}{9,52577843321898 \cdot 10^{-2} + 1,83609633959586 \cdot 10^{-1} + 7,09433195764187 \cdot 10^{-1}} \\
&= 3,11446511797224 \cdot 10^{-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{24} &= \frac{\gamma_1(2,4) + \gamma_2(2,4) + \gamma_3(2,4)}{\gamma_1(2) + \gamma_2(2) + \gamma_3(2)} \\
&= \frac{1,20414435650154 \cdot 10^{-3} + 8,54156482046365 \cdot 10^{-4} + 1,20834516281057 \cdot 10^{-2}}{9,52577843321898 \cdot 10^{-2} + 1,83609633959586 \cdot 10^{-1} + 7,09433195764187 \cdot 10^{-1}} \\
&= 1,43091608621148 \cdot 10^{-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{31} &= \frac{\gamma_1(3,1) + \gamma_2(3,1) + \gamma_3(3,1)}{\gamma_1(3) + \gamma_2(3) + \gamma_3(3)} \\
&= \frac{4,16541059208667 \cdot 10^{-1} + 6,29147902697549 \cdot 10^{-3} + 5,56698681329677 \cdot 10^{-2}}{5,9343475548553 \cdot 10^{-1} + 6,25612784722744 \cdot 10^{-1} + 6,83536032499471 \cdot 10^{-2}} \\
&= 6,60595908118322 \cdot 10^{-1}
\end{aligned}$$

$$a_{32} = \frac{\gamma_1(3,2) + \gamma_2(3,2) + \gamma_3(3,2)}{\gamma_1(3) + \gamma_2(3) + \gamma_3(3)}$$

$$\begin{aligned}
&= 1,23346473472405 \cdot 10^{-1} + 4,97631735975195 \cdot 10^{-2} + 7,81715624703891 \cdot 10^{-3} \\
&= \frac{5,93434755458553 \cdot 10^{-1} + 6,25612784722744 \cdot 10^{-1} + 6,83536032499471 \cdot 10^{-2}}{2,49778275614445 \cdot 10^{-1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{33} &= \frac{\gamma_1(3,3) + \gamma_2(3,3) + \gamma_3(3,3)}{\gamma_1(3) + \gamma_2(3) + \gamma_3(3)} \\
&= \frac{4,69300900512296 \cdot 10^{-2} + 6,144668084409711 \cdot 10^{-3} + 3,8969989361288 \cdot 10^{-3}}{5,93434755458553 \cdot 10^{-1} + 6,25612784722744 \cdot 10^{-1} + 6,83536032499471 \cdot 10^{-2}} \\
&= 7,86550678111774 \cdot 10^{-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{34} &= \frac{\gamma_1(3,4) + \gamma_2(3,4) + \gamma_3(3,4)}{\gamma_1(3) + \gamma_2(3) + \gamma_3(3)} \\
&= \frac{6,61713272625115 \cdot 10^{-3} + 3,59945003682244 \cdot 10^{-4} + 9,69579933811719 \cdot 10^{-4}}{5,93434755458553 \cdot 10^{-1} + 6,25612784722744 \cdot 10^{-1} + 6,83536032499471 \cdot 10^{-2}} \\
&= 1,09707484560552 \cdot 10^{-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{41} &= \frac{\gamma_1(4,1) + \gamma_2(4,1) + \gamma_3(4,1)}{\gamma_1(4) + \gamma_2(4) + \gamma_3(4)} \\
&= \frac{5,59919898417497 \cdot 10^{-2} + 3,37422231915427 \cdot 10^{-3} + 2,09590391973065 \cdot 10^{-2}}{7,37986577326022 \cdot 10^{-2} + 2,00621943584763 \cdot 10^{-2} + 2,55055996658468 \cdot 10^{-2}} \\
&= 6,72929874147409 \cdot 10^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{42} &= \frac{\gamma_1(4,2) + \gamma_2(4,2) + \gamma_3(4,2)}{\gamma_1(4) + \gamma_2(4) + \gamma_3(4)} \\
&= \frac{8,14035678568019 \cdot 10^{-3} + 1,31032077858267 \cdot 10^{-2} + 1,44493592183828 \cdot 10^{-3}}{7,37986577326022 \cdot 10^{-2} + 2,00621943584763 \cdot 10^{-2} + 2,55055996658468 \cdot 10^{-2}} \\
&= 1,90074348021564 \cdot 10^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{43} &= \frac{\gamma_1(4,3) + \gamma_2(4,3) + \gamma_3(4,3)}{\gamma_1(4) + \gamma_2(4) + \gamma_3(4)} \\
&= \frac{4,8664657061306 \cdot 10^{-3} + 2,54305527135466 \cdot 10^{-3} + 1,13181555822639 \cdot 10^{-2}}{7,37986577326022 \cdot 10^{-2} + 2,00621943584763 \cdot 10^{-2} + 2,55055996658468 \cdot 10^{-2}} \\
&= 7,15555871016841 \cdot 10^{-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{44} &= \frac{\gamma_1(4,4) + \gamma_2(4,4) + \gamma_3(4,4)}{\gamma_1(4) + \gamma_2(4) + \gamma_3(4)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4,7998453990417 \cdot 10^{-3} + 1,04170898214071 \cdot 10^{-3} + 1,96980898847565 \cdot 10^{-3}}{7,37986577326022 \cdot 10^{-2} + 2,00621943584763 \cdot 10^{-2} + 2,55055996658468 \cdot 10^{-2}} \\
 &= 6,54401907293425 \cdot 10^{-2}
 \end{aligned}$$

c) $\mathbf{B} = \{ b_i(k) \}$

$$b_j(k) = \frac{\sum_{t=1, O_t=k}^T \gamma_t(j)}{\sum_{t=1}^T \gamma_t(j)}$$

Untuk $j = 1$,

$$\gamma_1(1) = 2,37508802476655 \cdot 10^{-1}$$

$$\gamma_2(1) = 7,333766893209663 \cdot 10^{-1}$$

$$\gamma_3(1) = 1,96707601320019 \cdot 10^{-1}$$

$$\gamma_4(1) = 7,94186203261555 \cdot 10^{-1}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}
 \sum_{t=1}^T \gamma_t(j=1) &= \gamma_1(1) + \gamma_2(1) + \gamma_3(1) + \gamma_4(1) \\
 &= 1,9621950026789.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_1(1) &= \frac{\gamma_3(1)}{\gamma_1(1) + \gamma_2(1) + \gamma_3(1) + \gamma_4(1)} \\
 &= \frac{1,96707601320019 \cdot 10^{-1}}{1,9621950026789} \\
 &= 1,00250055509049 \cdot 10^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_1(2) &= \frac{\gamma_2(1) + \gamma_4(1)}{\gamma_1(1) + \gamma_2(1) + \gamma_3(1) + \gamma_4(1)} \\
 &= \frac{7,333766893209663 \cdot 10^{-1} + 7,94186203261555 \cdot 10^{-1}}{1,9621950026789} \\
 &= 7,78705966157668 \cdot 10^{-1}
 \end{aligned}$$

$$b_1(3) = \frac{\gamma_1(1)}{\gamma_1(1) + \gamma_2(1) + \gamma_3(1) + \gamma_4(1)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2,37508802476655 \cdot 10^{-1}}{1,9621950026789} \\
 &= 1,21043978333283 \cdot 10^{-1}
 \end{aligned}$$

$$b_1(4) = \frac{0}{\gamma_1(1) + \gamma_2(1) + \gamma_3(1) + \gamma_4(1)} = 0$$

Untuk $j = 2$,

$$\gamma_1(2) = 9,525778443321898 \cdot 10^{-2}$$

$$\gamma_2(2) = 1,83609633959586 \cdot 10^{-1}$$

$$\gamma_3(2) = 7,09433195764187 \cdot 10^{-1}$$

$$\gamma_4(2) = 7,94186203261555 \cdot 10^{-1}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}
 \sum_{t=1}^T \gamma_t(j=2) &= \gamma_1(2) + \gamma_2(2) + \gamma_3(2) + \gamma_4(2) \\
 &= 1,1422043050457.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_2(1) &= \frac{\gamma_3(2)}{\gamma_1(2) + \gamma_2(2) + \gamma_3(2) + \gamma_4(2)} \\
 &= \frac{7,09433195764187 \cdot 10^{-1}}{1,1422043050457} \\
 &= 6,21108844214873 \cdot 10^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_2(2) &= \frac{\gamma_2(2) + \gamma_4(2)}{\gamma_1(2) + \gamma_2(2) + \gamma_3(2) + \gamma_4(2)} \\
 &= \frac{1,83609633959586 \cdot 10^{-1} + 7,94186203261555 \cdot 10^{-1}}{1,1422043050457} \\
 &= 2,9549295468276 \cdot 10^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_2(3) &= \frac{\gamma_1(2)}{\gamma_1(2) + \gamma_2(2) + \gamma_3(2) + \gamma_4(2)} \\
 &= \frac{9,525778443321898 \cdot 10^{-2}}{1,1422043050457} \\
 &= 3,33982011023663 \cdot 10^{-2}
 \end{aligned}$$

$$b_2(4) = \frac{0}{\gamma_1(2) + \gamma_2(2) + \gamma_3(2) + \gamma_4(2)} = 0$$

Untuk $j = 3$,

$$\gamma_1(3) = 5,93434755458553 \cdot 10^{-1}$$

$$\gamma_2(3) = 6,25612784722744 \cdot 10^{-2}$$

$$\gamma_3(3) = 6,83536032499471 \cdot 10^{-2}$$

$$\gamma_4(3) = 2,9742592794842 \cdot 10^{-2}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T \gamma_t(j=3) &= \gamma_1(3) + \gamma_2(3) + \gamma_3(3) + \gamma_4(3) \\ &= 7,54092229975616 \cdot 10^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_3(1) &= \frac{\gamma_3(3)}{\gamma_1(3) + \gamma_2(3) + \gamma_3(3) + \gamma_4(3)} \\ &= \frac{6,83536032499471 \cdot 10^{-2}}{7,54092229975616 \cdot 10^{-1}} \\ &= 9,06435586163743 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_3(2) &= \frac{\gamma_2(3) + \gamma_4(3)}{\gamma_1(3) + \gamma_2(3) + \gamma_3(3) + \gamma_4(3)} \\ &= \frac{6,25612784722744 \cdot 10^{-2} + 2,9742592794842 \cdot 10^{-2}}{7,54092229975616 \cdot 10^{-1}} \\ &= 1,22403954845286 \cdot 10^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_3(3) &= \frac{\gamma_1(3)}{\gamma_1(3) + \gamma_2(3) + \gamma_3(3) + \gamma_4(3)} \\ &= \frac{9,525778443321898 \cdot 10^{-2}}{7,54092229975616 \cdot 10^{-1}} \\ &= 7,8695248653834 \cdot 10^{-1} \end{aligned}$$

$$b_3(4) = \frac{0}{\gamma_1(3) + \gamma_2(3) + \gamma_3(3) + \gamma_4(3)} = 0$$

Untuk $j = 4$,

$$\gamma_1(4) = 7,37986577326022 \cdot 10^{-2}$$

$$\gamma_2(4) = 2,00621943584763 \cdot 10^{-2}$$

$$\gamma_3(4) = 2,55055996658468 \cdot 10^{-2}$$

$$\gamma_4(4) = 2,21675129538668 \cdot 10^{-2}$$

Sehingga,

$$\sum_{t=1}^T \gamma_t(j=4) = \gamma_1(4) + \gamma_2(4) + \gamma_3(4) + \gamma_4(4) \\ = 1,41533964710792 \cdot 10^{-1}.$$

$$b_4(1) = \frac{\gamma_3(4)}{\gamma_1(4) + \gamma_2(4) + \gamma_3(4) + \gamma_4(4)} \\ = \frac{2,55055996658468 \cdot 10^{-2}}{1,41533964710792 \cdot 10^{-1}} \\ = 1,80208331745419 \cdot 10^{-1}$$

$$b_4(2) = \frac{\gamma_2(4) + \gamma_4(4)}{\gamma_1(4) + \gamma_2(4) + \gamma_3(4) + \gamma_4(4)} \\ = \frac{2,00621943584763 \cdot 10^{-2} + 2,21675129538668 \cdot 10^{-2}}{1,41533964710792 \cdot 10^{-1}} \\ = 2,98371542114534 \cdot 10^{-1}$$

$$b_4(3) = \frac{\gamma_1(4)}{\gamma_1(4) + \gamma_2(4) + \gamma_3(4) + \gamma_4(4)} \\ = \frac{7,37986577326022 \cdot 10^{-2}}{1,41533964710792 \cdot 10^{-1}} \\ = 5,21420126140047 \cdot 10^{-1}$$

$$b_4(4) = \frac{0}{\gamma_1(4) + \gamma_2(4) + \gamma_3(4) + \gamma_4(4)} = 0$$

Lampiran 3

LISTING PROGRAM

```
unit Unit1;  
  
interface  
  
uses  
  Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes,  
  Graphics, Controls, Forms,  
  Dialogs, StdCtrls, Grids;  
  
type  
  TForm1 = class(TForm)  
    GroupBox1: TGroupBox;  
    SG_A1: TStringGrid;  
    SG_B1: TStringGrid;  
    SG_PHI1: TStringGrid;  
    Label1: TLabel;  
    Label2: TLabel;  
    Label3: TLabel;  
    Label0: TLabel;  
    SG_O: TStringGrid;  
    GroupBox2: TGroupBox;  
    Label6: TLabel;  
    Label7: TLabel;  
    Label8: TLabel;  
    Label9: TLabel;  
    SG_A2: TStringGrid;  
    SG_B2: TStringGrid;  
    SG_PHI2: TStringGrid;  
    SG_Trelis: TStringGrid;  
    Label10: TLabel;  
    EditOawal: TEdit;  
    ButtonPROSES: TButton;  
    Label12: TLabel;  
    EditOupdate: TEdit;  
    Button1: TButton;  
    ButtonOK: TButton;  
    Edititer: TEdit;  
    Label11: TLabel;  
    Label5: TLabel;  
    EditT: TEdit;  
    Label4: TLabel;  
    EditN: TEdit;
```

```

Label13: TLabel;
EditM: TEdit;
procedure ButtonOKClick(Sender: TObject);
procedure ButtonPROSESClick(Sender: TObject);
private
  { Private declarations }
public
  { Public declarations }
end;

var
  Form1: TForm1;
  maxiter,Ta,N,M : Integer;
implementation

{$R *.dfm}

procedure TForm1.ButtonOKClick(Sender: TObject);
begin
M:=StrToInt(EditM.Text);
N:=StrToInt(EditN.Text);

Ta:=StrToInt(EditT.Text);
maxiter:=StrToInt(Edititer.Text);
SG_O.ColCount:=Ta+1;
SG_Trelis.ColCount:=Ta+1;
SG_O.Visible:=true;
labelo.Visible:=true;
Label1.Visible:=True;
Label2.Visible:=True;
Label3.Visible:=True;
SG_A1.Visible:=True;
SG_B1.Visible:=True;
SG_PHI1.Visible:=True;
end;

procedure TForm1.ButtonPROSESClick(Sender:
TObject);
var
  i,j,k,t, iter: Integer;
  prob0, probOld, numer, denom : Real;
  pi: Array [1..5] of real;
  A, B: Array [1..5, 1..5] of real;
  alpa,beta,gama,gamax: Array [1..100, 1..5] of
Real;
  O, Q : Array [1..100] of integer;

```

```

gama_max :Array [1..100] of real;
di_gama, di_gamax : Array [1..100, 1..5, 1..5]
of real;

begin
  GroupBox2.Visible:=True;
  // input nilai
  for i:= 1 to N do
    begin
      pi[i]:= StrToFloat(SG_PHI1.Cells[i-1,1]);
      for j:= 1 to N do
        a[i,j]:= StrToFloat(SG_A1.Cells[j,i]);
        for j:= 1 to M do
          b[i,j]:= StrToFloat(SG_B1.Cells[j,i]);
        end;
      for t:= 1 to Ta do
        begin
          O[t]:= StrToInt(SG_O.Cells[t,0]);
          SG_Trelis.Cells[t,0]:= SG_O.Cells[t,0];
          Q[t]:= 0;
        end;
      probOld:=0; probO:=0;
      iter:=0;

      //hitung alpha awal
      for i:= 1 to N do
        alpa[1,i]:=pi[i]*b[i,o[1]];
        for t:= 2 to Ta do
          begin
            for i:= 1 to N do
              begin
                alpa[t,i]:=0;
                for j:= 1 to N do
                  alpa[t,i]:=alpa[t,i]+alpa[t-1,j]*a[j,i];
                alpa[t,i]:=alpa[t,i]*b[i,o[t]];
              end;
            end;
          end;

          // hitung peluang O awal
          for i:= 1 to N do
            probO:=probO+alpa[Ta,i];
          EditOawal.Text:= FloatToStr(probO);

          While (iter < maxiter) AND (probO >= probold) do
            begin
              iter:=iter+1;

```

```

probOld:=prob0;

// hitung beta
for i:= 1 to N do
    beta[ta,i]:=1;
for t:= (Ta-1) downto 1 do
begin
    for i:= 1 to N do
        begin
            beta[t,i]:=0;
            for j:= 1 to N do
beta[t,i]:=beta[t,i]+a[i,j]*b[j,o[t+1]]*beta[t+1,j
];
            end;
        end;
    end;

// hitung gamma[t,i]
for t:= 1 to Ta do
begin
    for i:= 1 to N do
        begin
            gamax[t,i]:=alpha[t,i]*beta[t,i];
            gama[t,i]:=gamax[t,i]/prob0;
        end;
    end;

//mencari Q
if iter =1 then
begin
    for t:= 1 to Ta do
        begin
            gama_max[t]:=gama[t,1];
            Q[t]:=1;
            for i:= 2 to N do
                begin
                    if (gama[t,i]>= gama_max[t]) then
                        begin
                            gama_max[t]:=gama[t,i];
                            Q[t]:=i;
                        end;
                    end;
                end;
            end;
        end;
    end;

// hitung gamma [t,i,j]

```

```

for t:= 1 to Ta-1 do
begin
  for i:= 1 to N do
  begin
    for j:=1 to N do
    begin
di_gamax[t,i,j]:=alpha[t,i]*a[i,j]*b[j,o[t+1]]*beta
[t+1,j];
      di_gama[t,i,j]:=di_gamax[t,i,j]/prob0;
    end;
  end;
end;

// re-estimasi lamda=(A,B,pi)
for i:= 1 to N do
  pi[i]:=gama[1,i];

for i:= 1 to N do
begin
  for j:=1 to N do
  begin
    numer:=0; denom:=0;
    for t:= 1 to Ta-1 do
    begin
      numer:=numer+di_gamax[t,i,j];
      denom:=denom+gamax[t,i];
    end;
    a[i,j]:=numer/denom;
  end;
end;

for i:= 1 to N do
begin
  for k:= 1 to M do
  begin
    numer:=0; denom:=0;
    for t:= 1 to Ta do
    begin
      if O[t] = k then
        numer:=numer+gama[t,i];
        denom:=denom+gama[t,i];
      end;
    end;
    b[i,k]:=numer/denom;
  end;
end;

```



```

//hitung alpha update
for i:= 1 to N do
    alpa[1,i]:=pi[i]*b[i,o[1]];
for t:= 2 to Ta do
begin
    for i:= 1 to N do
        begin
            alpa[t,i]:=0;
            for j:= 1 to N do
                alpa[t,i]:=alpa[t,i]+alpa[t-
1,j]*a[j,i];
            alpa[t,i]:=alpa[t,i]*b[i,o[t]];
        end;
    end;

// hitung peluang O update
for i:= 1 to N do
    prob0:=prob0+alpa[Ta,i];

end {while};
    EditOupdate.Text:=FloatToStr(prob0);

// output nilai
for i:= 1 to N do
begin
    SG_PHI2.Cells[i-1,1]:=FloatToStr(pi[i]);
    for j:= 1 to N do
        SG_A2.Cells[j,i]:= FloatToStr(a[i,j]);
        for j:= 1 to M do
            SG_B2.Cells[j,i]:= FloatToStr(b[i,j]);
        end;
    for t:= 1 to Ta do
        SG_Trelis.Cells[t,q[t]]:='====>';
    end;
end;
end.

```