MATRIKS INVERTIBEL ATAS SEMIRING IDEMPOTEN

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
dalam bidang Matematika

Oleh :
TERESIA PURNOMO SALIM
0710943009-94

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2011

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

MATRIKS INVERTIBEL ATAS SEMIRING IDEMPOTEN

Oleh:
TERESIA PURNOMO SALIM
0710943009-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 9 Agustus 2011
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Dosen Pembimbing I,	Dosen Pembimbing II,
<u>Dra. Ari Andari, MS</u>	**<u>Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc.</u>**
NIP. 196105161987012001	**NIP. 196709071992031001**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

<u>Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc.</u>
NIP. 196709071992031001

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	**:**	**Teresia Purnomo Salim**
NIM	**:**	**0710943009-94**
Jurusan	**:**	**Matematika**
Penulis skripsi berjudul	**:**	**Matriks Invertibel atas Semiring Idempoten**

Dengan ini menyatakan bahwa:

1. **Skripsi ini benar-benar karya sendiri, dan bukan hasil plagiat karya orang lain. Karya-karya yang tercantum dalam Daftar Pustaka Skripsi ini, semata-mata digunakan sebagai acuan/ referensi.**
2. **Apabila di kemudian hari diketahui bahwa isi Skripsi saya merupakan hasil plagiat, maka saya bersedia menanggung akibat hukum dari keadaan tersebut.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 9 Agustus 2011
Yang menyatakan,

(Teresia Purnomo Salim)
NIM. 0710943009

MATRIKS INVERTIBEL ATAS SEMIRING IDEMPOTEN

ABSTRAK

Semiring idempoten $(S,+,\cdot)$ dapat diartikan sebagai semiring komutatif dengan elemen identitas nol 0 dan identitas 1 sedemikian sehingga $x \cdot x = x^2 = x$ untuk semua $x \in S$. Pada tahun 1963, DE Rutherford menunjukkan bahwa sebuah matriks bujur sangkar A invertibel atas S jika A adalah matriks permutasi. Dengan menggunakan Definisi C. Reutenauer dan H. Straubing, hasil ini dapat diperluas, sehingga sebuah matriks A invertibel atas S jika dan hanya jika hasil perkalian setiap dua elemen dalam kolom yang sama adalah 0 dan hasil penjumlahan semua elemen dalam setiap baris adalah 1.

Kata kunci: semiring idempoten, matriks invertibel.

INVERTIBLE MATRICES OVER IDEMPOTENT SEMIRINGS

ABSTRACT

By an idempotent semiring we mean a commutative semirings $(S,+,\cdot)$ with zero 0 and identity 1 such that $x \cdot x = x^2 = x$ for all $\in S$. In 1963, D.E.Rutherford showed that a square matrix A over an idempotent semirings S is invertible over S if A is a permutation matrix. By making use of C. Reutenauer and H. Straubing's definition, we extend this result to an idempotent semiring as follows. A square matrix A over an idempotent semiring S is invertible over S if and only if the product of any two elements in the same column is 0 and the sum of all elements in each row is 1.

Keywords: Idempotent semirings, invertible matrix

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat ALLAH SWT yang telah melimpahkan rahmat, pertolongan, dan petunjuk-Nya sehingga skripsi yang berjudul **“Matriks Invertibel atas Semiring Idempoten”** ini dapat diselesaikan dengan baik.

Skripsi ini disusun dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang Matematika. Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Dra. Ari Andari, MS selaku dosen pembimbing I atas segala bimbingan, nasehat, motivasi serta kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini.
2. Dr. Abdul Rouf Alghofari, M. Sc selaku Ketua Jurusan Matematika sekaligus dosen pembimbing II atas segala bimbingan, nasehat, motivasi serta kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini.
3. Dr. Sobri Abusini, MT selaku Ketua Program Studi Matematika yang telah memberikan segala pertimbangan waktu dan saran bagi kelancaran studi penulis.
4. Drs. Marsudi, MS selaku Penasehat Akademik sekaligus dosen penguji atas segala saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
5. Dr. Wuryansari Muharini K., M.Si dan Drs. Bambang Sugandi, M.Si selaku dosen penguji atas segala saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
6. Papa, mama, adik tercinta, atas kesabaran, dorongan, semangat, dan pengorbanan yang diberikan selama penulisan skripsi ini.

7. Seluruh dosen pengajar serta segenap staf dan karyawan TU Fakultas MIPA Universitas Brawijaya yang telah membagikan ilmunya kepada penulis.
8. Sahabatku Lina, Dian, Irma, Resthi, Nirma, Maya, Mira, dan Mas Firman atas segala kebaikan, pengertian, dukungan, semangat, doa, dan bantuan yang diberikan kepada penulis.
9. Teman-teman Matematika 2007 atas semua doa dan semangat yang diberikan kepada penulis.
10. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Sebagai manusia yang mempunyai keterbatasan, dengan segala kerendahan hati penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat kekurangan sehingga belum dapat dikatakan sempurna. Untuk itu penulis menerima kritik dan saran dari berbagai pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Harapan penulis, semoga skripsi ini dapat memberi sumbangan bagi dunia sains dan Indonesia, khususnya di bidang Aljabar.

Malang, 9 Agustus 2011

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

DAFTAR NOTASI

Notasi	Keterangan
$\mathbb{R}$	Himpunan bilangan riil
$\mathbb{Q}$	Himpunan bilangan rasional
$\mathbb{N}$	Himpunan bilangan asli
$\mathbb{Z}$	Himpunan bilangan bulat
$\mathbb{Z}_n$	Himpunan bilangan bulat modulo n
$\mathbb{Z}^+$	Himpunan bilangan bulat positif
$\in$	Elemen (anggota)
$A \times B$	Hasil kali cartesius A dan B
$f : A \rightarrow B$	Pemetaan dari A ke B
a_{ij}	Entri-entri suatu matriks pada baris ke i dan kolom ke j
$(M,*)$	Semigrup
$(G,*)$	Grup
$\longrightarrow$	Direduksi menjadi eselon baris
A_n	*Alternating group* berderajat n

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Struktur aljabar adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan suatu operasi biner tertentu dan memenuhi aksioma tertentu. Dengan kata lain, struktur aljabar dibangun oleh tiga komponen, yakni himpunan, operasi, dan aksioma. Banyaknya operasi atau aksioma menjadi pembeda antara struktur aljabar yang satu dengan yang lainnya. Sebagai contoh, grup, semiring, dan ring merupakan struktur aljabar.

Struktur aljabar yang sederhana adalah semigrup. Semigrup adalah suatu himpunan tak kosong yang hanya dilengkapi satu operasi biner saja dan memenuhi sifat ketertutupan dan keasosiatifan. Seperti halnya semigrup, grup juga merupakan suatu struktur aljabar yang dilengkapi satu operasi biner. Aksioma-aksioma yang berlaku pada grup juga berlaku pada semigrup, tetapi harus memiliki elemen identitas dan setiap elemennya memiliki invers.

Selanjutnya, terdapat struktur aljabar yang dinamakan ring. Ring merupakan perluasan dari konsep grup dengan dua operasi biner, yaitu penjumlahan dan pergandaan. Konsep struktur aljabar yang lebih sederhana dari ring adalah semiring.

Matriks merupakan jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks. Apabila matriks tersebut memiliki invers dapat disebut matriks invertibel. Dalam skripsi ini juga akan dibahas mengenai semiring idempoten. Semiring idempoten merupakan semiring komutatif dengan elemen identitas 0 dan 1, serta setiap $x \in S$ merupakan elemen idempoten.

Struktur aljabar selalu mengalami perkembangan sehingga memungkinkan munculnya teori-teori baru. Selanjutnya, dalam skripsi ini akan dibahas mengenai teorema dan definisi yang terkait dengan “ Matriks Invertibel atas Semiring Idempoten”.

1.2 Rumusan Masalah

Apa teorema beserta bukti yang terkait dengan “Matriks Invertibel atas Semiring Idempoten”?

1.3 Tujuan

Tujuan pembahasan skripsi ini adalah membuktikan teorema-teorema yang terkait dengan matriks invertibel atas semiring idempoten.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan beberapa definisi dan teorema untuk membantu memahami materi yang dibahas dan juga digunakan sebagai acuan dalam bab pembahasan.

2.1 Himpunan, Relasi, dan Pemetaan

Definisi 2.1.1

Misalkan A dan B adalah himpunan tak kosong. Himpunan semua pasangan terurut (x, y) dengan $x \in A, y \in B$, disebut hasil kali Cartesius dari *A* dan *B*, dinyatakan sebagai

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

(Bhattacharya, 1990)

Definisi 2.1.2

Misalkan *A* dan *B* himpunan tak kosong, dan ρ adalah himpunan bagian dari $A \times B$, maka ρ disebut relasi dari *A* ke *B*. Jika $(x, y) \epsilon \rho$, maka *x* dikatakan berelasi dengan *y* diberi notasi $x\rho y$. Khususnya, relasi dari *A* ke *A* disebut relasi pada *A* atau di dalam *A*.

(Bhattacharya, 1990)

Definisi 2.1.3

Misalkan ρ relasi pada himpunan *X*, ρ disebut relasi ekivalensi jika ρ memenuhi:

i. sifat refleksif, yaitu $x\rho x$, untuk setiap $x \in X$,
ii. sifat simetris, yaitu $x\rho y$ maka $y\rho x$, untuk setiap $x, y \in X$,
iii. sifat transitif, yaitu jika $x\rho y$ dan $y\rho z$ maka $x\rho z$, untuk setiap $x, y, z \in X$.

Jika ρ bersifat refleksif, simetris, dan transitif maka ρ disebut relasi ekivalensi.

(Bhattacharya, 1990)

Definisi 2.1.4

Misalkan *A* dan *B* adalah himpunan tak kosong. Pemetaan *f* dari *A* ke *B* adalah suatu relasi sedemikian sehingga untuk setiap $a \in A$, terdapat tepat satu $b \in B$, dengan $(a, b) \in f$. Selanjutnya, jika $(a, b) \in f$ maka dituliskan $f(b) = a$

(Bhattacharya, 1990)

Definisi 2.1.5

Suatu pemetaan $f: A \to B$ adalah

i. injektif (1- 1) jika untuk setiap $x_1, x_2 \in A$, maka $f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$ atau $x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$

ii. surjektif jika untuk setiap $y \in B$, terdapat $x \in A$, sehingga $f(x) = y$.

Suatu pemetaan yang bersifat injektif dan surjektif disebut bijektif. Jika $f: A \to B$ adalah pemetaan yang bijektif, maka dapat dinyatakan dengan $f: A \cong B$.

(Bhattacharya, 1990)

Definisi 2.1.6

Misalkan S adalah suatu himpunan tak kosong. Suatu operasi biner * pada himpunan *S* adalah pemetaan setiap pasangan terurut

$$(a, b) \in S \times S \ ke \ a * b \ \in S$$

Dalam bentuk notasi dapat ditulis:

$$*: S \ x \ S \ \to S$$
$$(a, b) \to * \ (a, b) = \ a * b$$

(Bhattacharya, 1990)

2.2 Permutasi

Definisi 2.2.1

Suatu permutasi dari himpunan A adalah fungsi dari A ke A yang satu-satu dan pada. Dengan kata lain, suatu permutasi dari A adalah fungsi bijektif dari A ke A. Secara matematis dapat ditulis

$$\theta: A \xrightarrow[1-1]{pada} A$$

(John B. Fraleigh,1989)

Contoh 2.2.2

Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$. Tentukan banyak permutasinya.

Jawab:

$t_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad t_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad t_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$t_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad t_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad t_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Jadi, banyaknya permutasi dari himpunan A adalah 6 buah, yaitu $t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5$.

Himpunan $\{1, 2, \dots, n\}$ akan mempunyai $n!$ permutasi yang berbeda. Untuk menyatakan permutasi umum dari himpunan $\{1, 2, \dots, n\}$ maka dituliskan dengan $(j_1, j_2, \dots, j_n)$. Dalam hal ini, j_1 adalah bilangan bulat pertama dari permutasi, j_2 adalah bilangan bulat kedua, dan seterusnya. Suatu inversi dikatakan terjadi dalam suatu permutasi $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ jika bilangan bulat yang lebih besar mendahului bilangan bulat yang lebih kecil. Jumlah total inversi yang terjadi dalam permutasi dapat diperoleh sebagai berikut: (1) menentukan banyaknya bilangan bulat yang lebih kecil dari j_1 dan yang mengikuti j_1 dalam permutasi; (2) menentukan banyaknya bilangan bulat yang lebih kecil dari j_2 dan yang mengikuti j_2 dalam permutasi. Kemudian, melanjutkan proses perhitungan untuk $j_3, \dots, j_{n-1}$. Jumlah dari bilangan-bilangan ini akan merupakan total banyaknya inversi dalam permutasi tersebut.

(Howard Anton, 2002)

Definisi 2.2.3

Suatu permutasi dikatakan genap jika total banyaknya inversi adalah genap, sedangkan dikatakan ganjil jika total banyaknya inversi adalah ganjil.

(Howard Anton, 2002)

Contoh 2.2.4

Jika $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, maka σ merupakan permutasi ganjil.

Bukti:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Dapat ditunjukkan:

1, 3, 4, 5, 2, 6	jumlah inversi	0	(karena tidak terdapat angka lebih kecil daripada 1)
3, 4, 5, 2, 6	jumlah inversi	1	(karena hanya terdapat 1 angka lebih kecil daripada 3,yaitu 2)

4, 5, 2, 6	jumlah inversi 1	(karena hanya terdapat 1 angka lebih kecil daripada 4, yaitu 2)
5, 2, 6	jumlah inversi 1	(karena hanya terdapat 1 angka lebih kecil daripada 5, yaitu 2)
2, 6	jumlah inversi 0	(karena tidak terdapat angka lebih kecil daripada 2)

Karena total inversi adalah $0 + 1 + 1 + 1 + 0 = 3$, maka σ disebut permutasi ganjil.

□

Contoh 2.2.5

Jika $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, maka μ merupakan permutasi genap.

Bukti:

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Dapat ditunjukkan:

1, 4, 3, 5, 2, 6	Jumlah inversi 0	(karena tidak terdapat angka yang lebih kecil daripada 1)
4, 3, 5, 2, 6	Jumlah inversi 2	(karena terdapat 2 angka yang lebih kecil daripada 4, yaitu 2 dan 3)
3, 5, 2, 6	Jumlah inversi 1	(karena terdapat 1 angka yang lebih kecil daripada 3, yaitu 2)
5, 2, 6	jumlah inversi 1	(karena terdapat 1 angka yang lebih kecil daripada 5, yaitu 2)
2, 6	jumlah inversi 0	(karena tidak terdapat angka yang lebih kecil daripada 2)

Jadi, total inversinya adalah $0 + 2 + 1 + 1 + 0 = 4$, maka μ disebut permutasi genap.

□

Contoh 2.2.6

Jika $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, maka θ merupakan permutasi genap.

Bukti:

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Dapat ditunjukkan:

1, 2, 3	jumlah inversi 0	karena tidak terdapat angka yang lebih kecil daripada 1
2, 3	jumlah inversi 0	karena tidak terdapat angka yang lebih kecil daripada 2

Karena total inversi adalah $0 + 0 = 0$, maka θ merupakan permutasi genap.

□

Definisi 2.2.7

Matriks P dikatakan matriks permutasi apabila matriks tersebut merupakan matriks identitas yang entri-entrinya berpindah posisi/urutannya.

2.3 Grup

Definisi 2.3.1

Misalkan G adalah suatu himpunan tak kosong dengan suatu operasi biner *, dinotasikan $(G,*)$. $(G,*)$ disebut suatu grup jika memenuhi aksioma-aksioma:

i. tertutup, yaitu untuk setiap $a, b \in G$, $a * b \in G$,
ii. asosiatif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in G$ memenuhi $(a * b) * c = a * (b * c)$,
iii. memiliki elemen identitas, yaitu terdapat $e \in G$, sehingga untuk setiap $a \in G$ berlaku $a * e = e * a = a$,
iv. setiap elemen memiliki invers, yaitu untuk setiap $a \in G$, terdapat $a^{-1} \in G$ sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

Definisi 2.3.2

Grup G yang terdiri dari semua permutasi disebut grup simetris, dan permutasi dari n bilangan diberi notasi S_n.

Contoh 2.3.3
Diketahui $A = \{1, 2, 3\}$, misalkan $S_3 = \{t_0, t_1, t_2, t_3, \sigma_1, \sigma_2\}$, dengan

$$t_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad t_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$t_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad t_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$t_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad t_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Tabel 2.1 Perkalian S_3

$\circ$	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
t_0	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
t_1	t_1	t_2	t_0	t_5	t_3	t_4
t_2	t_2	t_0	t_1	t_4	t_5	t_3
t_3	t_3	t_4	t_5	t_0	t_1	t_2
t_4	t_4	t_5	t_3	t_2	t_0	t_1
t_5	t_5	t_3	t_4	t_1	t_2	t_0

$$t_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$t_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} & \boxed{t_3} & & \boxed{t_1} & \\ 1 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & 2 \\ 2 & \longrightarrow & 3 & \longrightarrow & 1 \\ 3 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 3 \end{array}$$

Jadi, $t_1 t_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = t_5$.

Dari Tabel 2.1 dapat dilihat bahwa S_3 grup simetris dengan operasi komposisi pemetaan, tetapi S_3 bukan grup komutatif karena $t_1 t_4 \neq t_4 t_1$.

$\square$

Definisi 2.3.4
Himpunan bagian dari S_n yang terdiri dari semua permutasi genap, disebut *alternating group* berderajat n, dan dilambangkan: A_n.

Contoh 2.3.5
Dari Contoh 2.2.3, akan dibuktikan $S_3 = \{t_0, \sigma_1, \sigma_2\}$ merupakan *alternating group*.

Bukti:
Langkah pertama, yakni menunjukkan S_3 merupakan grup menggunakan tabel di bawah ini.

Tabel 2.2 Perkalian S_3

$\circ$	t_0	σ_1	σ_2
t_0	t_0	σ_1	σ_2
σ_1	σ_1	σ_2	t_0
σ_2	σ_2	t_0	σ_1

Dari Tabel 2.2, S_3 merupakan grup, karena $S_3 = \{t_0, \sigma_1, \sigma_2\}$ terbukti bahwa S_3 merupakan *alternating group*.

$\square$

Definisi 2.3.6
Misalkan M himpunan tak kosong dan di dalamnya didefinisikan hanya satu operasi biner. M disebut semigrup jika dan hanya jika:
1. M tertutup,
2. M berlaku sifat asosiatif.

(Whitelaw, 1995)

Dari definisi grup dan semigrup di atas, dapat disimpulkan bahwa suatu grup pasti merupakan semigrup. Akan tetapi tidak berlaku sebaliknya, yaitu tidak semua semigrup merupakan suatu grup. Sebagai contoh, $(\mathbb{Z}^+,+)$ adalah semigrup karena setiap elemen di $\mathbb{Z}^+$ bersifat tertutup dan asosiatif terhadap operasi penjumlahan. Namun, $(\mathbb{Z}^+,+)$ bukan grup karena $(\mathbb{Z}^+,+)$ tidak memiliki invers.

Contoh 2.3.7
Diberikan suatu himpunan $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$. Maka $(\mathbb{Z}_4, +)$ dan $(\mathbb{Z}_4, \cdot)$ (dengan $+$ dan $\cdot$ masing-masing adalah operasi penjumlahan dan pergandaan biasa) merupakan semigrup.

Bukti:

Tabel 2.3 Operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}_4$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

Tabel 2.4 Operasi pergandaan pada $\mathbb{Z}_4$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel 2.3 dan 2.4, terlihat bahwa $\mathbb{Z}_4$ tertutup pada operasi penjumlahan dan pergandaan. Selain itu, $\mathbb{Z}_4$ memenuhi hukum asosiatif pada operasi penjumlahan dan pergandaan. Sehingga, $(\mathbb{Z}_4, +)$ dan $(\mathbb{Z}_4, \cdot)$ merupakan semigrup.

□

Definisi 2.3.8
Jika dalam semigrup $(M, *)$ berlaku $a * b = b * a$, untuk setiap $a, b \in M$ maka $(M, *)$ disebut semigrup komutatif.

(Kandasamy, 2002)

2.4 Ring

Definisi 2.4.1
Ring adalah suatu himpunan tak kosong R dengan operasi penjumlahan dan pergandaan yang memenuhi aksioma berikut:

i. $(R, +)$ grup komutatif,
ii. (R, *) semigrup,
iii. Berlaku hukum distributif: $a * (b + c) = a * b + a * c$ dan $(a + b) * c = a * c + b * c$.

Contoh 2.4.2
$\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, dan $\mathbb{Q}$ merupakan ring pada operasi penjumlahan dan perkalian biasa.

Definisi 2.4.3
Misalkan R himpunan tak kosong dan di dalamnya didefinisikan dua operasi biner, yaitu penjumlahan dan pergandaan yang memenuhi:

i. $(R, +)$ semigrup komutatif,
ii. $(R,*)$ semigrup,
iii. untuk setiap $a, b, c \in R$, berlaku $(a+b) * c = a * c + b * c$ dan $a * (b + c) = a * b + a * c$,

maka $(R, +, *)$ disebut semiring.

(Kandasamy, 2002)

Contoh 2.4.4
Himpunan $(\mathbb{Z}^+, +,*)$ (dengan + dan * masing-masing adalah operasi penjumlahan dan pergandaan biasa) merupakan suatu semiring.

Bukti:

1. Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ maka berlaku:
   i. $a + b \in \mathbb{Z}^+$
   ii. $(a + b) + c = a + (b + c)$
   iii. $a + b = b + a$

   Dari i, ii, dan iii maka $(\mathbb{Z}^+, +)$ merupakan semigrup komutatif.
2. Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ maka berlaku:
   i. $a * b \in \mathbb{Z}^+$
   ii. $(a * b) * c = a * (b * c)$

   Dari i dan ii maka $(\mathbb{Z}^+,*)$ merupakan semigrup.
3. Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ maka berlaku:
   $(a + b) * c = a * c + b * c$ dan $a * (b + c) = a * b + a * c$.

Dari 1, 2, dan 3 maka terbukti bahwa $\mathbb{Z}^+$ merupakan suatu semiring.

□

Definisi 2.4.5 (Semiring Komutatif)
Suatu semiring S disebut komutatif jika operasi pergandaan bersifat komutatif.

$$a * b = b * a, \forall a, b \in S$$

Definisi 2.4.6
Elemen x dalam ring R disebut elemen idempoten dari R jika $x^2 = x$
(Bhattacharya, 1990)

Definisi 2.4.7
Semiring idempoten merupakan semiring komutatif dengan elemen identitas 0 dan 1, serta setiap $x \in S$ merupakan elemen idempoten.

Contoh 2.4.8
Apakah $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ merupakan semiring idempoten?

Jawab:
Dalam hal ini, $\mathbb{Z}_2$ memenuhi aksioma-aksioma semiring. Selanjutnya untuk mengetahui $\mathbb{Z}_2$ merupakan semiring idempoten, dengan:

$$Z_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$$

Tabel 2.5 Operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}_2$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

Tabel 2.6 Operasi pergandaan pada $\mathbb{Z}_2$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Dari Tabel 2.5 dan 2.6 terlihat bahwa $\mathbb{Z}_2$ merupakan semiring idempoten.

Contoh 2.4.9
Apakah $S = \{0,1,a\}$ merupakan semiring idempoten?

Jawab:

Tabel 2.7 Operasi penjumlahan pada S

+	0	1	a
0	0	1	a
1	1	a	0
a	a	0	1

Tabel 2.8 Operasi pergandaan pada S

$\cdot$	0	1	a
0	0	0	0
1	0	1	a
a	0	a	a

Pada Tabel 2.7 dan Tabel 2.8, terlihat bahwa S merupakan semiring idempoten.

Teorema 2.4.10
Misalkan S semiring idempoten, maka berlaku:
i. $x, y \in S, x + y = 0 \rightarrow x = 0 = y$
ii. $x, y \in S, xy = 1 \rightarrow x = 1 = y$

2.5 Determinan Matriks pada Semiring

Misalkan S_n merupakan grup simetris, dimana $n \geq 2$, A_n *alternating group* berderajat n, maka dapat dituliskan

$$A_n = \{\sigma \in S_n | \sigma \text{ adalah permutasi genap}\}$$
$$B_n = \{\sigma \in S_n | \sigma \text{ adalah permutasi ganjil}\}$$

Jika S semiring komutatif dengan nol dan identitas , maka $det^{+}A$ dan $det^{-}A$, dimana $A \in M_n(S)$ dapat dituliskan sebagai berikut

$$det^{+}A = \sum_{\sigma \in A_n} \left(\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \right)$$
$$det^{-}A = \sum_{\sigma \in B_n} \left(\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \right)$$

Contoh 2.5.1
Diketahui A merupakan matriks permutasi berordo 3. Tentukan $det^{+}A$ dan $det^{-}A$.

Jawab:
Misalkan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, maka hasil permutasinya sebanyak $3! = 6$.

i. $a_{11}a_{22}a_{33}$ dapat ditulis ke bentuk permutasi $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ dan total inversinya adalah 0 (genap).

ii. $a_{12}a_{23}a_{31}$ dapat ditulis ke bentuk permutasi $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$ dan total inversinya adalah 2 (genap).

iii. $a_{13}a_{21}a_{32}$ dapat ditulis ke bentuk permutasi $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$ dan total inversinya adalah 2 (genap).

iv. $a_{13}a_{22}a_{31}$ dapat ditulis ke bentuk permutasi $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ dan total inversinya adalah 3 (ganjil).

v. $a_{11}a_{23}a_{32}$ dapat ditulis ke bentuk permutasi $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$ dan total inversinya adalah 1 (ganjil).

vi. $a_{12}a_{21}a_{33}$ dapat ditulis ke bentuk permutasi $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ dan total inversinya adalah 1 (ganjil).

$$det^{+}(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$det^{-}(A) = a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}$$

Contoh 2.5.2

Diketahui $A = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{bmatrix}$.

Tentukan $det^{+}(AB)$ dan $det^{-}(AB)$.

Jawab:

Ambil $AB = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{3} a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{3} a_{1i}b_{i2} & \sum_{i=1}^{3} a_{1i}b_{i3} \\ \sum_{i=1}^{3} a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{3} a_{2i}b_{i2} & \sum_{i=1}^{3} a_{2i}b_{i3} \\ \sum_{i=1}^{3} a_{3i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{3} a_{3i}b_{i2} & \sum_{i=1}^{3} a_{3i}b_{i3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

i. $c_{11}c_{22}c_{33}$ dapat ditulis ke bentuk permutasi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ dan total inversinya adalah 0 (genap).

ii. $c_{12}c_{23}c_{31}$ dapat ditulis ke bentuk permutasi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ dan total inversinya adalah 2 (genap).

iii. $c_{13}c_{21}c_{32}$ dapat ditulis ke bentuk permutasi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dan total inversinya adalah 2 (genap).

iv. $c_{13}c_{22}c_{31}$ dapat ditulis ke bentuk permutasi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dan total inversinya adalah 3 (ganjil).

v. $c_{11}c_{23}c_{32}$ dapat ditulis ke bentuk permutasi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ dan total inversinya adalah 1 (ganjil).

vi. $c_{12}c_{21}c_{33}$ dapat ditulis ke bentuk permutasi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ dan total inversinya adalah 1 (ganjil).

$$det^{+}(AB) = c_{11}c_{22}c_{33} + c_{12}c_{23}c_{31} + c_{13}c_{21}c_{32}$$
$$det^{-}(AB) = c_{13}c_{22}c_{31} + c_{11}c_{23}c_{32} + c_{12}c_{21}c_{33}$$

Contoh 2.5.3

Diketahui $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$, tentukan $det^{+}A$ dan $det^{-}A$.

Jawab:

Ambil $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$, maka hasil permutasinya sebanyak $4! = 24$.

i. $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ dapat ditulis ke bentuk permutasi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ dan total inversinya adalah 0 (genap).

ii. $a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$ dapat ditulis ke bentuk permutasi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ dan total inversinya adalah 3 (ganjil).

iii. $a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$ dapat ditulis ke bentuk permutasi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dan total inversinya adalah 4 (genap).

iv. $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$ dapat ditulis ke bentuk permutasi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ dan total inversinya adalah 3 (ganjil).

v. $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ dapat ditulis ke bentuk permutasi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dan total inversinya adalah 6 (genap).

vi. $a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$ dapat ditulis ke bentuk permutasi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ dan total inversinya adalah 3 (ganjil).

vii. $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$ dapat ditulis ke bentuk permutasi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ dan total inversinya adalah 2 (genap).

Pengecekan permutasi ganjil dan genap dilakukan hingga permutasi ke-xxiv.

$$
\begin{aligned}
det^{+}A = \{(&a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43})\} \\
&+ \{(a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} \\
&+ a_{12}a_{24}a_{31}a_{43})\} \\
&+ \{(a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} \\
&+ a_{13}a_{24}a_{31}a_{42})\} \\
&+ \{(a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} \\
&+ a_{14}a_{23}a_{31}a_{42})\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
det^{-}A = \{(&a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} + a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} + a_{11}a_{22}a_{34}a_{43})\} \\
&+ \{(a_{12}a_{41}a_{33}a_{24} + a_{12}a_{43}a_{34}a_{21} \\
&+ a_{12}a_{44}a_{31}a_{23})\} \\
&+ \{(a_{13}a_{41}a_{32}a_{24} + a_{13}a_{42}a_{34}a_{21} \\
&+ a_{13}a_{44}a_{31}a_{22})\} \\
&+ \{(a_{14}a_{41}a_{32}a_{23} + a_{14}a_{42}a_{33}a_{21} \\
&+ a_{14}a_{43}a_{31}a_{22})\}
\end{aligned}
$$

Teorema 2.5.4

Misalkan S semiring komutatif dengan nol dan identitas di mana $n \geq 2, n \in \mathbb{Z}$. Jika $A, B \in M_n(S)$, maka $\exists r \in S$, sehingga:

$$det^{+}(AB) = (det^{+}A)(det^{+}B) + (det^{-}A)(det^{-}B) + r$$
$$det^{-}(AB) = (det^{+}A)(det^{-}B) + (det^{-}A)(det^{+}B) + r$$

Contoh 2.5.5

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$. Tentukan nilai *r* .

Jawab:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 16 \\ 7 & 11 \end{bmatrix}$$

$$det^{+}(AB) = (det^{+}A)(det^{+}B) + (det^{-}A)(det^{-}B) + r$$
$$(22)(11) = (2)(2) + (15)(12) + r$$
$$242 = 4 + 180 + r$$
$$r = 58$$

$$det^{-}(AB) = (det^{+}A)(det^{-}B) + (det^{-}A)(det^{+}B) + r$$
$$(7)(16) = (2)(12) + (15)(2) + r$$
$$112 = 24 + 30 + r$$
$$r = 58$$

BAB III
MATRIKS INVERTIBEL ATAS SEMIRING IDEMPOTEN

Untuk memahami materi “**Matriks Invertibel atas Semiring Idempoten**” diperlukan definisi, teorema, dan lemma sebagai berikut:

Definisi 3.1
Misalkan S semiring idempoten, matriks bujur sangkar A invertibel atas S jika matriks A merupakan matriks permutasi.
(C. Reuteanauer & H. Straubing, 1984)

Teorema 3.2
Misal S semiring komutatif dengan nol dan identitas dimana $n \in I_n$. Untuk $A, B \in M_n(S)$, jika $AB = I_n$maka $BA = I_n$.

Bukti:

$$AB = I_n$$
$$ABB^{-1} = I_nB^{-1}$$
$$A = B^{-1}$$
$$BA = BB^{-1}$$
$$BA = I_n$$

Jadi, $A = B^{-1}$ atau invers kanan B adalah A.

□

Contoh 3.3
Jika $A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, maka $AB = I_2 = BA$.

Bukti:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Jadi, terbukti bahwa $AB = I_2 = BA$.

□

Lemma 3.4
Misalkan S semiring idempoten dan $n \geq 2, n \in \mathbb{Z}^+$. Jika $A \in M_n(S)$ adalah invertibel, maka $det^+A + det^-A = 1$.
Bukti:
Misalkan $B \in M_n(S)$ dengan $AB = BA = I_n$. Dengan Teorema 2.5.1, dimana $r \in S$ sehingga:

$$det^+(AB) = (det^+A)(det^+B) + (det^-A)(det^-B) + r$$
$$det^-(AB) = (det^+A)(det^-B) + (det^-A)(det^+B) + r$$

Tetapi $det^+(AB) = det^+I_n = 1$ dan $det^-(AB) = det^-I_n = 0$, jadi didapat:

$$1 = (det^+A)(det^+B) + (det^-A)(det^-B) + r$$
$$0 = (det^+A)(det^-B) + (det^-A)(det^+B) + r$$

Dari persamaan terakhir dan Definisi 2.4.10 didapatkan:

$$(det^+A)(det^-B) = (det^-A)(det^+B) = r = 0$$

Kemudian,

$$1 = (det^+A)(det^+B) + (det^-A)(det^-B)$$
$$1 = (det^+A)(det^+B) + (det^-A)(det^-B) + (det^+A)(det^-B) + (det^-A)(det^+B)$$
$$1 = (det^+A)(det^+B) + (det^-A)(det^-B)$$
$$1 = (det^+A)(det^+B) + 0$$

(karena $A, B \in M_n(S)$, S merupakan semiring idempoten, sehingga $(det^-A)(det^-B) = det^-(AB) = det^-I_n = 0$)

Karena $(det^-A)(det^-B) = 0$, maka $det^-A = 0$ atau $det^-B = 0$.
Jadi,

$$det^-A = 0 \qquad \text{(i)}$$

Menurut Teorema 2.4.10 (ii) diperoleh

$$1 = (det^+A)(det^+B)$$
$$det^+A = 1 = det^+B$$

Jadi,

$$det^+A = 1$$

(ii)

Dari (i) dan (ii) diperoleh

$$det^+A + det^-A = 1 + 0 = 1$$

□

Contoh 3.5

$M_3(\mathbb{Z}_2) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ akan dibuktikan $det^+A + det^-A = 1$, dimana $A \in M_3(\mathbb{Z}_2)$.

Bukti:

$$A = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix}$$

$$det^+A = (\bar{0})(\bar{0})(\bar{0}) + (\bar{0})(\bar{0})(\bar{0}) + (\bar{1})(\bar{1})(\bar{1}) = \bar{1}$$
$$det^-A = (\bar{1})(\bar{0})(\bar{0}) + (\bar{0})(\bar{0})(\bar{1}) + (\bar{0})(\bar{1})(\bar{0}) = \bar{0}$$
$$det^+A + det^-A = \bar{1} + \bar{0} = \bar{1}$$

□

Contoh 3.6

Dari Contoh 2.4.9, $S = \{0,1,a\}$ merupakan semiring idempoten. Misal $M_3(S) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d, e, f, g, h, i \in S \right\}$. Akan dibuktikan $det^+A + det^-A = 1$, dimana $A \in M_3(S)$.

Bukti:

$$A = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ 0 & a & a \\ a & 0 & a \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan Tabel 2.7 dan Tabel 2.8, didapatkan

$$det^{+}A = (a)(a)(a) + (a)(a)(a) + (0)(0)(0) = a + a + 0 = 1$$

$$det^{-}A = (a)(a)(0) + (0)(a)(a) + (a)(0)(a) = 0 + 0 + 0 = 0$$

Sehingga, $det^{+}A + det^{-}A = 1 + 0 = 1$.

□

Teorema 3.7

Misalkan S semiring idempoten dengan nol dan identitas, $n \in \mathbb{Z}^{+}$, $A \in M_n(S)$. A invertibel atas S, jika dan hanya jika:

i. Hasil perkalian dari semua entri dalam kolom yang sama adalah 0.
ii. Hasil penjumlahan dari semua entri dalam baris yang sama adalah 1.

Bukti:

Dengan menggunakan Teorema 2.4.10 (ii), terbukti bahwa $n = 1$. Misalkan $n > 1$, asumsikan A invertibel atas S, $B \in M_n(S)$ sedemikian sehingga $AB = BA = I_n$. Misalkan $i, j \in \{(1, \dots, n)\}$ yang berbeda, maka

$$0 = (I_n)_{ij} = (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$$

Dengan Teorema 2.4.10 (i), maka $A_{ik}B_{kj} = 0$ untuk setiap $k \in \{(1, \dots, n)\}$ membuktikan bahwa:

i. $A_{ik}B_{kt} = 0$, untuk setiap $l, t, k \in \{(1, \dots, n)\}$ yang berbeda, sedemikian sehingga $l \neq t$

$$A_{ik}A_{jk} = (A_{ik}A_{jk})1$$

$$A_{ik}A_{jk} = (A_{ik}A_{jk})(AB)_{kk}$$

$$A_{ik}A_{jk} = (A_{ik}A_{jk})\left(\sum_{t=1}^{n} B_{kt}A_{tk}\right)$$

$$A_{ik}A_{jk} = \sum_{t=1}^{n} A_{ik}A_{jk}B_{kt}A_{tk}$$

$$A_{ik}A_{jk} = A_{ik}A_{jk}B_{kj}A_{jk} + \sum_{\substack{t=1 \\ t\neq j}}^{n} A_{ik}A_{jk}B_{kt}A_{tk}$$

$$A_{ik}A_{jk} = (A_{ik}B_{kj})A_{jk} + \sum_{\substack{t=1\\t\neq j}}^{n} A_{ik}(A_{jk}B_{kt})A_{tk}$$

$$A_{ik}A_{jk} = 0 + 0 = 0$$

ii. Dari Lemma 3.4, diketahui bahwa $det^{+}A + det^{-}A = 1$.
$A_{1k_1}A_{2k_2} \dots A_{nk_n} = 0$, jika $k_1, k_2, \dots, k_n \in \{1, \dots, n\}$ yang berbeda. Kemudian,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} A_{1k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} A_{2k}\right)\dots\left(\sum_{k=1}^{n} A_{nk}\right) = \sum_{k_1,k_2,\dots,k_n\in\{1,\dots,n\}} A_{1k_1}A_{2k_2}\dots A_{nk_n}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} A_{1k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} A_{2k}\right)\dots\left(\sum_{k=1}^{n} A_{nk}\right) = \sum_{\sigma\in S_n} A_{1\sigma(1)}A_{2\sigma(2)}\dots A_{n\sigma(n)}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} A_{1k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} A_{2k}\right)\dots\left(\sum_{k=1}^{n} A_{nk}\right) = det^{+}A + det^{-}A = 1$$

Oleh karena itu, dengan Teorema 2.4.10 (ii), diperoleh

$$\left(\sum_{k=1}^{n} A_{1k}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} A_{2k}\right) = \dots = \left(\sum_{k=1}^{n} A_{nk}\right) = 1$$

Sebaliknya dengan pernyataan $AA^t = I_n$. Jika $i \in \{1, \dots, n\}$, maka

$$(AA^t)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}A^t_{ki} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} = 1$$

Berlaku juga untuk $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$(AA^t)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}A^t_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}A_{jk} = 0$$

□

Contoh 3.8

$M_3(\mathbb{Z}_2) = \left\{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \middle| a,b,c,d,e,f,g,h,i \in \mathbb{Z}_2\right\}$, akan dibuktikan $A \in M_3(\mathbb{Z}_2)$ invertibel jika dan hanya jika

i. Hasil perkalian dari semua entri dalam kolom yang sama adalah 0.

ii. Hasil penjumlahan dari semua entri dalam baris yang sama adalah 1.

Bukti:

$\Rightarrow$ Ambil $A = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix}$, maka A^{-1} adalah:

$$A^{-1} = \frac{1}{0-1}\begin{bmatrix} \bar{0} & -\bar{1} & \bar{0} \\ -\bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & -\bar{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix}$$

Karena nilai A^{-1} ada, maka berlaku:

i. Hasil perkalian dari semua entri dalam kolom yang sama adalah 0.

ii. Hasil penjumlahan dari semua entri dalam baris yang sama adalah 1.

$\Leftarrow$ $A = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix}$ yang memenuhi:

i. Hasil perkalian dari semua entri dalam kolom yang sama adalah 0.

ii. Hasil penjumlahan dari semua entri dalam baris yang sama adalah 1.

Sehingga, nilai A^{-1} ada, yakni

$$A^{-1} = \frac{1}{0-1}\begin{bmatrix} \bar{0} & -\bar{1} & \bar{0} \\ -\bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & -\bar{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix}$$

$\square$

Contoh 3.9

Dari Contoh 2.4.9, $S = \{0,1,a\}$ merupakan semiring idempoten. Misal $M_3(S) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \middle| a,b,c,d,e,f,g,h,i \in S \right\}$. Akan dibuktikan $A \in M_n(S)$ invertibel jika dan hanya jika

i. Hasil perkalian dari semua entri dalam kolom yang sama adalah 0.

ii. Hasil penjumlahan dari semua entri dalam baris yang sama adalah 1.

Bukti:

$\Rightarrow$ Ambil $A = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ 0 & a & a \\ a & 0 & a \end{bmatrix}$, maka A^{-1} adalah:

$$A^{-1} = \frac{1}{1-0} \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ 0 & a & a \\ a & 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ 0 & a & a \\ a & 0 & a \end{bmatrix}$$

Karena nilai A^{-1} ada, maka berlaku:

i. Hasil perkalian dari semua entri dalam kolom yang sama adalah 0.

ii. Hasil penjumlahan dari semua entri dalam baris yang sama adalah 1.

$\Leftarrow$ Ambil $A = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ 0 & a & a \\ a & 0 & a \end{bmatrix}$ yang memenuhi:

i. Hasil perkalian dari semua entri dalam kolom yang sama adalah 0.

ii. Hasil penjumlahan dari semua entri dalam baris yang sama adalah 1.

Sehingga, nilai A^{-1} ada, yakni:

$$A^{-1} = \frac{1}{1-0} \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ 0 & a & a \\ a & 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ 0 & a & a \\ a & 0 & a \end{bmatrix}$$

$\square$

BAB IV
KESIMPULAN

Dari pembahasan skripsi ini, dapat disimpulkan sifat-sifat berikut

1. Misalkan S semiring idempoten, $n \in \mathbb{Z}^+, A \in M_n(S)$. A invertibel atas S jika dan hanya jika:
   i. Hasil perkalian dari semua elemen dalam kolom yang sama adalah 0.
   ii. Hasil penjumlahan dari semua elemen dalam baris yang sama adalah 1.
2. Misalkan S semiring idempoten dan $n \geq 2, n \in \mathbb{Z}^+$. Jika $A \in M_n(S)$ adalah invertibel, maka $det^+A + det^-A = 1$.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H., Rorres, C., 2002. Aljabar Linier Elementer. Erlangga, Jakarta.

Bhattacharya, P. B., Jain, S. K., Nagpaul, S. R., 1990. *Basic Abstract Algebra*. Cambridge University Press, New York.

Durbin, J.R. 1992. *Modern Algebra, An Introduction*. John Wiley & Sons,Inc.Kanada.

Fraleigh.J.B., 1989. *A First Course in Abstract Algebra.* Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Kanada.

Golan, J.S. 1999. *Semirings and Their Applications*. Kluwer Academic Publisher. London.

Jacobson, N. 1951. *Lecture in Abstract Algebra*. D Van Nostrand Company, Inc.New Jersey.

Kandasamy, W.B.V. 2002. *Smarandache Semirings, Semifield, and Semivector Spaces*. Deparment of Mathematics Indian Institute of Technology. Madras.

Kusumawati, R., 2009. Aljabar Linier dan Matriks. UIN Malang Press, Malang.

Mahmudi, H & Suryadi. Teori dan Soal Pendahuluan Aljabar Linier. Ghalia Indonesia, Jakarta, 1986, 114 – 116.

Milewski, E.G. *The Essentials of Group Theory I,Research and Education Association***,**1989,30-43.

Reutenauer, C. dan H. Straubing. 1984. *Inversion of matrices over commutative semiring*. J. Algebra 88 hal. 350-360.

Whitelaw, T.A. 1995. *Introduction to Abstract Algebra*. Chapman and Hall, Inc. New York.