IDEAL FUZZY DAN QUASI-IDEAL FUZZY DALAM SEMIRING TERNARI

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang matematika

oleh :

RORO DYAR AYU MAULITASARI
0510940053-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2011

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

**IDEAL FUZZY DAN QUASI-IDEAL FUZZY
DALAM SEMIRING TERNARI**

Oleh:
**RORO DYAR AYU MAULIASARI
0510940053-94**

**Setelah dipertahankan di depan majelis penguji
pada tanggal 12 Agustus 2011
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam Bidang Matematika**

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dra. Ari Andari,MS	**Drs. Bambang Sugandi, MSi**
NIP.196105161987012001	**NIP. 195905151992031002**

**Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya**

**Dr. Abdul Rouf A., MSc
NIP. 196709071992031001**

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Roro Dyar Ayu Maulitasari
NIM	: 0510940053-94
Jurusan	: Matematika
Penulis Skripsi berjudul	: IDEAL FUZZY DAN QUASI-IDEAL FUZZY DALAM SEMIRING TERNARI

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. Isi Skripsi yang saya buat benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain.
2. Apabila di kemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 12 Agustus 2011
Yang menyatakan,

(Roro Dyar Ayu Maulitasari)
NIM. 0510940053-94

IDEAL FUZZY DAN QUASI IDEAL FUZZY DALAM SEMIRING TERNARI

ABSTRAK

Kar memperkenalkan konsep ideal dan quasi-ideal dalam semiring ternari. Quasi-ideal merupakan irisan dari ideal kiri, ideal kanan, dan ideal lateral dalam semiring ternari. Dalam skripsi ini dibahas ideal fuzzy dan quasi-ideal fuzzy dalam semiring ternari serta dibuktikan beberapa teorema yang berhubungan dengan ideal fuzzy dan quasi-ideal fuzzy dalam semiring ternari. Jika μ adalah ideal kiri (ideal kanan dan ideal lateral) fuzzy dari S maka μ merupakan quasi-ideal fuzzy dari S .

Kata kunci: semiring ternari, ideal S , quasi-ideal S , ideal fuzzy S , quasi-ideal fuzzy S .

**FUZZY IDEAL AND FUZZY QUASI-IDEAL
IN TERNARY SEMIRING**

ABSTRACT

Kar introduced the concept of ideal and quasi-ideal in ternary semiring. Quasi-ideal is the intersection of a left ideal, a lateral ideal, and a right ideal in ternary semiring. This paper discuss fuzzy ideal and fuzzy quasi-ideal in ternary semiring and the proof of several theorems which related to fuzzy ideal and fuzzy quasi-ideal in ternary semiring. If μ fuzzy left ideal, fuzzy lateral ideal, and fuzzy right ideal in ternary semiring S, then μ is fuzzy quasi-ideal in ternary semiring S.

Keywords: ternary semiring, ideal of S, quasi-ideal of S, fuzzy ideal of S, fuzzy quasi-ideal of S.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Segala puji hanya bagi Allah yang telah mengutus Muhammad *Shallallahu 'Alaihi wa Sallam* yang menerangi sudut-sudut jalan, menyinari jiwa kita dengan cahaya keyakinan, membimbing kita menuju jalan yang lurus dalam meniti kehidupan, dan hanya kepada Allah-lah semua urusan akan kembali.

Alhamdulillah, atas ijin Allah penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "**Ideal Fuzzy dan Quasi-ideal Fuzzy dalam Semiring Ternari** ". Penulis juga menyadari bahwa penulisan skripsi ini mungkin tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Dra. Ari Andari, MS., selaku pembimbing I sekaligus dosen pembimbing akademik atas segala bimbingan, motivasi serta kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini.
2. Drs. Bambang Sugandi, MSi, selaku pembimbing II atas segala bimbingan, motivasi serta kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini.
3. Dr. Abdul Rouf Alghofari, MSc, Drs. Imam Nurhadi Purwanto, MT, dan Drs. M. Muslikh, M.Si selaku dosen penguji atas segala saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
4. Drs. Sobri Abusini, MT, selaku Ketua Program Studi Matematika Universitas Brawijaya Malang.
5. Seluruh bapak/ibu dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
6. Papa dan Mama, atas segala doa, kasih sayang, dukungan, dan nasihat yang telah diberikan.
7. Fatkhul Laili, suami penulis, atas segala doa, kasih sayang, dukungan, dan nasihat yang telah diberikan.
8. Rafan, anak penulis yang telah memberikan semangat dalam penyelesaikan skripsi ini.
9. Siti Hamdan Sakurni, sahabat dekat penulis atas doa, bantuan, dan semangat dalam penulisan skripsi ini.
10. Damayekti Intan, Emilia Safitri, teman-teman Matematika 2005, dan teman-teman Matematika 2006 yang tercinta atas bantuan,

ini.

11. Semua pihak yang telah membantu penulis dalam penyusunan skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari adanya kekurangan dalam penulisan skripsi ini. Untuk itu penulis menerima kritik dan saran dari berbagai pihak demi perbaikan skripsi ini. Harapan penulis, semoga skripsi ini dapat memberi sumbangan bagi dunia sains Indonesia, khususnya di bidang Aljabar.

Malang, 12 Agustus 2011

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Semiring adalah salah satu struktur aljabar yang lahir dari pengembangan aljabar yang lain, yang merupakan pengembangan dari ring, hanya saja pada ring dibentuk oleh grup dan semigrup, sedangkan pada semiring hanya dibentuk oleh semigrup. Konsep semiring menjadi pendorong dalam pendefinisian semiring ternari. Secara aksiomatis semiring dan semiring ternari hanya memiliki kesamaan pada aksioma semigrup. Sedangkan untuk aksioma yang lain berbeda karena semiring dibangun terhadap operasi biner sedangkan semiring ternari terhadap operasi ternari. Operasi ternari adalah suatu bentuk pemetaan $*: S \times S \times S \to S$.

Teori himpunan logika fuzzy dikembangkan oleh Prof Lofti Zadeh pada tahun 1965. Teori ini merupakan perluasan dari logika klasik dimana pada logika klasik nilai keanggotaannya adalah 0 atau 1, sedangkan pada logika fuzzy bisa antara 0 dan 1. J.Kavikumar dan Azme Bin Khamis di dalam jurnalnya yang berjudul *fuzzy ideals and Quasi-ideal in ternary semirings* pada tahun 2007 memperkenalkan tentang definisi, sifat serta teorema yang berhubungan dengan ideal fuzzy dan quasi-ideal fuzzy dalam semiring ternari.

Pembahasan kelas aljabar abstrak yang berkaitan dengan semiring ternari sudah dibahas dalam beberapa skripsi mahasiswa FMIPA Universitas Brawijaya. Dalam rangka pengembangan teori semiring ternari, maka pada kesempatan kali ini penulis memilih ideal fuzzy dan quasi-ideal fuzzy dalam semiring ternari sebagai judul skripsi.

1.2 Rumusan Masalah

Dari latar belakang di atas, rumusan masalah skripsi ini adalah bagaimana pengertian ideal fuzzy dan quasi-ideal fuzzy dalam semiring ternari dan sifat-sifatnya.

1.3 Batasan Masalah

Dalam penulisan skripsi ini yang dibahas adalah ideal fuzzy dan quasi-ideal fuzzy dalam semiring ternari.

1.4 Tujuan

Sedangkan tujuan dari penulisan skripsi ini adalah mengetahui definisi ideal fuzzy dan quasi-ideal fuzzy dalam semiring ternari beserta sifat-sifatnya.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diberikan dasar teori meliputi definisi, teorema, serta beberapa contoh yang digunakan sebagai acuan dalam bab selanjutnya.

2.1 Operasi Biner dan Ternari

Definisi 2.1.1 (Bhattacharya,1994) Untuk suatu bilangan positif n, pemetaan $*: S^n \to S$, dengan $S^n = S \times S \times \cdots \times S$ (n faktor) disebut operasi n-ari pada S, ketika $n = 1$ maka pemetaan $*: S \to S$ disebut operasi unari, ketika $n = 2$ maka pemetaan $*: S \times S \to S$ disebut **operasi biner**, dan ketika $n = 3$ maka pemetaan $*: S \times S \times S \to S$ disebut **operasi ternari**.

2.2 Semigrup

Dalam semigrup hanya terdapat satu operasi biner.

Definisi 2.2.1 (Whitelaw, 1995) Misalkan M himpunan tak kosong yang di dalamnya didefinisikan operasi biner $*$. Pasangan $(M,*)$ disebut semigrup jika untuk setiap $a,b,c \in M$ maka $(a * b) * c = a * (b * c)$, artinya berlaku hukum assosiatif.

Contoh 2.2.2 Misalkan Z^+ adalah himpunan bilangan bulat positif dan didefinisikan himpunan N sebagai berikut:

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \; a,b,c \in Z^+ \right\}.$$

Akan dibuktikan $(N,+)$ semigrup.

Bukti:

$(N,+)$ merupakan semigrup

i. Akan dibuktikan berlaku sifat tertutup.

Setiap hasil penjumlahan elemen di Z^+ merupakan elemen di Z^+ sehingga hasil penjumlahan setiap matriks N yang entri-entrinya elemen di Z^+ juga merupakan elemen di N. Jadi terbukti bahwa berlaku sifat tertutup.

ii. Akan dibuktikan berlaku sifat assosiatif
Karena $(Z^+,+)$ bersifat assosiatif, maka demikian juga dengan penjumlahan setiap matriks N yang entri-entrinya merupakan elemen di Z^+. Dengan demikian $(N,+)$ assosiatif.

Jadi $(N,+)$ merupakan semigrup ◘

Definisi 2.2.3 Semigrup $(M,*)$ disebut semigrup komutatif jika $a*b = b*a$ untuk setiap $a,b \in M$.

Definisi 2.2.4 Misalkan $(M,*)$ adalah semigrup dan N adalah subset dari M. Jika $(N,*)$ merupakan semigrup maka $(N,*)$ disebut subsemigrup dari $(M,*)$.

Teorema 2.2.5 Misalkan N bukan himpunan kosong, N subset dari M dan $(M,*)$ merupakan semigrup. N adalah subsemigrup dari $(M,*)$ jika dan hanya jika N tertutup terhadap operasi $*$.

Bukti :
$(\Rightarrow)$ Jika $(N,*)$ adalah subsemigrup dari $(M,*)$ maka $(N,*)$ merupakan semigrup. Akibatnya N tertutup terhadap operasi $*$.
$(\Leftarrow)$ Misalkan N tertutup terhadap operasi $*$. Karena $(a*b)*c = a*(b*c)$ untuk setiap $a,b,c \in M$ dan N adalah subset dari M, berlaku $(a*b)*c = a*(b*c)$ untuk setiap $a,b,c \in N$. Jadi $(N,*)$ adalah suatu subsemigrup dari $(M,*)$.

◘

2.3 Grup

Definisi 2.3.1 (Dummit, 1991) Sebuah himpunan tak kosong G disebut grup terhadap suatu operasi biner $*$ jika memenuhi aksioma sebagai berikut:

1) Tertutup: untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b \in G$.
2) Assosiatif: untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$.
3) Mempunyai elemen identitas: untuk setiap $a \in G$ terdapat $e \in G$ sedemikian sehingga $a * e = e * a = a$.
4) Mempunyai invers: untuk setiap $a \in G$ terdapat $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Contoh 2.3.2 Misalkan Z adalah himpunan bilangan bulat dan diberikan himpunan G dengan operasi biner penjumlahan yang didefinisikan dengan

$$G = 2Z.$$

Akan dibuktikan $(G,+)$ grup.

Bukti:

(i) Berlaku sifat tertutup.

Ambil sebarang $x_1, x_2 \in G$. Berarti $x_1 = 2n_1$ untuk suatu $n_1 \in Z$ dan $x_2 = 2n_2$ untuk suatu $n_2 \in Z$.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2n_1 + 2n_2 \\ &= 2(n_1 + n_2) \\ &= 2m \quad \text{untuk suatu } m \in Z \text{ dimana } m = n_1 + n_2 \end{aligned}$$

Jadi $x_1, x_2 \in G$. Terbukti sifat tertutup.

(ii) Berlaku sifat assosiatif.

Ambil sebarang $x_1, x_2, x_3 \in G$ maka harus terbukti $(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$

Berarti $x_1 = 2n_1$ untuk suatu $n_1 \in Z$

$x_2 = 2n_2$ untuk suatu $n_2 \in Z$

$x_3 = 2n_3$ untuk suatu $n_3 \in Z$

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2) + x_3 &= (2n_1 + 2n_2) + 2n_3 \\ &= 2n_1 + (2n_2 + 2n_3) \\ &= x_1 + (x_2 + x_3) \end{aligned}$$

Terbukti sifat assosiatif.

(iii) Memiliki elemen identitas.yaitu $e = 0$

Dipilih $e = 0 \in G, 0 = 2 \bullet 0$

$x \in G \ni x = 2n$ maka $x + 0 = 2n + 2 \bullet 0 = 2n = x$ dan $0 + x = 2 \bullet 0 + 2n = 2n = x$

jadi $e = 0$ adalah elemen identitas dari G.

(iv) Akan dibuktikan memiliki invers yaitu $y = -2n$.

Ambil sebarang $x = 2n$ untuk setiap $n \in Z$.

$x + y = y + x = 0$

Pilih $y = -2n$.

$x + y = 2n + (-2n) = 2n - 2n = 0$

Jadi $y = -2n$ adalah invers dari $x = 2n$.

Dari (i), (ii), (iii) dan (iv) terbukti bahwa $(G,+)$ merupakan grup. ◘

Definisi 2.3.3 (Durbin, 1992) Misalkan $(G,*)$ adalah suatu grup. G disebut grup komutatif jika operasi biner pada G bersifat komutatif.

Definisi 2.3.4 Misal $(G,*)$ grup dan H subset tak kosong dari grup G, H disebut subgrup dari G jika $(H,*)$ grup.

Teorema 2.3.5 Misalkan G grup terhadap operasi $*$, dan $H \subseteq G$. H adalah subgrup dari G jika dan hanya jika

(i) H himpunan tak kosong.

(ii) Jika $a, b \in H$, maka $a * b \in H$.

(iii) jika $a \in H$ maka $a^{-1} \in H$.

Bukti:

$(\Rightarrow)$ Jika diketahui H subgrup dari G maka H merupakan grup:

(i) Terdapat $e \in H$, sehingga terbukti bahwa $H \neq \phi$.

(ii) Karena $(H,*)$ grup, maka $a * b \in H$ untuk setiap $a, b \in H$.

(iii) Untuk setiap $a \in H$, terdapat $b \in H$ sedemikian sehingga $a * b = b * a = e$. Berdasarkan aksioma ke-3 dari grup. Jadi $b = a^{-1} \in H$

Jadi terbukti (i), (ii), dan (iii) terpenuhi

$(\Leftarrow)$ Diketahui $(G,*)$ grup dan H subset tak kosong dari G yang memenuhi kondisi (i), (ii), dan (iii). Akan dibuktikan H subgrup G

(1) Ambil $a,b,c \in H$. Karena $H \subseteq G$ maka $a,b,c \in G$ sehingga berlaku $(a*b)*c = a*(b*c)$. Sifat assosiatif tersebut juga berlaku untuk setiap elemen di H.

(2) Misal ambil $a \in H$, dari kondisi (iii) maka $a^{-1} \in H$. Kondisi (ii) mengakibatkan $a*a^{-1} \in H$. Tetapi $a*a^{-1} \in G$, sedangkan $a*a^{-1} = e$. Jadi $e = a*a^{-1} \in H$. Terbukti bahwa e adalah elemen identitas di H

(3) Setiap elemen di H mempunyai invers, terpenuhi pada kondisi (iii)

Karena $H \subseteq G$ terbukti bahwa H subgrup dari G. ◘

2.4 Ring

Definisi 2.4.1 (Bhattacharya,1994) Suatu himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner (+) dan perkalian (•) disebut ring jika memenuhi:

1) $(R,+)$ merupakan grup komutatif,
2) $(R,\bullet)$ merupakan semigrup,
3) Berlaku hukum distributif, yaitu $x(y+z) = xy + xz$ dan $(x+y)z = xz + yz$ untuk setiap $x, y, z \in R$.

Contoh 2.4.2: $Z_4 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3}\}$ adalah suatu ring.

Tabel 2.1 Operasi biner penjumlahan pada Z_4

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$

Tabel 2.2 Operasi biner pergandaan pada Z_4

$\bullet$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Bukti:

Dari Tabel 2.1 dan Tabel 2.2 berlaku:

1. $(Z_4,+)$ grup komutatif.

2. $(Z_4, \bullet)$ semigrup.
3. $(Z_4, +, \bullet)$ bersifat distributif.

Dari 1, 2, dan 3 terbukti bahwa Z_4 adalah ring. ◘

Definisi 2.4.3 Suatu ring R disebut komutatif jika $a * b = b * a$ untuk setiap $a, b \in R$.

Contoh 2.4.4 Dari Contoh 2.4.2, ring $(Z_4, +, \bullet)$ merupakan ring komutatif.

Bukti:

Dari Tabel 2.2, terlihat bahwa untuk setiap $\overline{a}, \overline{b} \in Z_4$ berlaku $\overline{a} \bullet \overline{b} = \overline{b} \bullet \overline{a}$ ◘

Definisi 2.4.5 Misalkan U subset dari ring R, $U \neq \phi$ dan $(R, +, \bullet)$ ring. U dikatakan subring dari R jika $(U, +, \bullet)$ ring.

Teorema 2.4.6 Misalkan U subset tak kosong dari ring R, U adalah subring dari R jika dan hanya jika berlaku $a - b \in U$ dan $ab \in U \quad \forall a, b \in U$.

Bukti:

$(\Rightarrow)$ Jika diketahui U tak kosong dari ring R dan U adalah subring dari R. Akan dibuktikan untuk setiap $a, b \in U$ berlaku $a - b \in U$ dan $ab \in U$ untuk setiap $a, b \in U$. Karena U adalah subring dari R, menurut definisi dari subring maka $a - b \in U$ dan $ab \in U$.

$(\Leftarrow)$ Diketahui $a - b \in U$ dan $ab \in U$, $\forall a, b \in U$. Berdasarkan Teorema 2.3.5 kondisi $a - b \in U$ menunjukkan bahwa $(U, +)$ adalah subgrup dari grup $(R, +)$ dan kondisi $ab \in U$ menunjukkan bahwa $(U, \bullet)$ tertutup terhadap operasi pergandaan. Kedua hukum distributif berlaku di R, dan U adalah subset dari R, sehingga kedua hukum distributif juga berlaku di U. Sehingga U merupakan subring dari R ◘

Contoh 2.4.7 Misalkan $Z_4 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3}\}$ merupakan suatu ring, $S = \{\overline{0},\overline{2}\}$ merupakan subring dari Z_4

Bukti:

1. $S \neq \phi$
2. $a - b \in U$

   Misalkan $\overline{0},\overline{2} \in S$

   $\overline{2} - \overline{0} = \overline{2}$

   $\overline{2} - \overline{2} = \overline{0}$

   $\overline{0} - \overline{2} = \overline{2}$

   Sehingga $\overline{0},\overline{2} \in S$
3. $ab \in U$

   Misalkan $\overline{0},\overline{2} \in S$

   $\overline{2} \bullet \overline{0} = \overline{0}$

   $\overline{2} \bullet \overline{2} = \overline{0}$

   $\overline{0} \bullet \overline{2} = \overline{0}$

   Sehingga $\overline{0},\overline{2} \in S$

Syarat (1), (2), dan (3) terpenuhi maka S adalah subring dari Z_4. ◘

Definisi 2.4.8 Himpunan bagian tak kosong I pada ring R disebut ideal kanan (kiri) pada R jika:

1) $\forall a,b \in I \Rightarrow a - b \in I$,
2) $\forall a \in I, \forall r \in R \Rightarrow ar \in I (ra \in I)$.

Jika I ideal kiri dan kanan pada R ($ra \in I$ dan $ar \in I$) maka I disebut ideal dua sisi.

Contoh 2.4.9 Dari Contoh 2.4.7, misalkan $Z_4 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3}\}$ merupakan suatu ring, subring $S = \{\overline{0},\overline{2}\}$ adalah suatu ideal.

Bukti:

Pada Contoh 2.4.7 telah ditunjukan bahwa $S = \{\overline{0},\overline{2}\}$ adalah subring dari $Z_4 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3}\}$. Sekarang akan ditunjukan bahwa S merupakan suatu ideal, dengan membuktikan bahwa S adalah ideal kiri dan ideal kanan.

Diketahui : $\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3} \in Z_4$ dan $\overline{0},\overline{2} \in S$

Tabel 2.3 Operasi biner pergandaan Z_4 dengan $S=\{\overline{0},\overline{2}\}$

$\bullet$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$

Dari Tabel 2.3 di atas berlaku jika untuk setiap $a \in S$ dan untuk setiap $r \in Z_4$ maka $ar \in S(ra \in S)$. Jadi S merupakan ideal kiri dan kanan dari Z_4 sehingga S adalah ideal dari Z_4. ◘

2.5 Semiring

Definisi 2.5.1 (Kandasamy, 2002) Suatu himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner $(+)$ dan perkalian $(\bullet)$ disebut semiring jika memenuhi:

1) $(R,+)$ merupakan semigrup komutatif,
2) $(R,\bullet)$ merupakan semigrup,
3) Berlaku hukum distributif, yaitu $x(y+z)=xy+xz$ dan $(x+y)z=xz+yz$ untuk setiap $x,y,z \in R$.

Contoh 2.5.2 $Z_5=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4}\}$ adalah suatu semiring.

Tabel 2.4 Operasi biner penjumlahan Z_5

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$

Tabel 2.5 Operasi biner Pergandaan Z_5

$\bullet$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Bukti:

Dari Tabel 2.4 dan Tabel 2.5 berlaku:

1. $(Z_5,+)$ semigrup komutatif.
2. $(Z_5,\bullet)$ semigrup.
3. $(Z_5,+,\bullet)$ bersifat distributif.

Dari 1, 2, dan 3 terbukti bahwa Z_5 adalah semiring. ◘

Definisi 2.5.3 Suatu semiring R disebut komutatif jika $a*b=b*a$ untuk setiap $a,b\in R$.

Definisi 2.5.4 Misalkan P subset dari semiring R, $P\neq\phi$ dan $(R,+,\bullet)$ semiring. P dikatakan subsemiring dari R jika $(P,+,\bullet)$ semiring.

Definisi 2.5.5 (Monico, 2002) Himpunan bagian tak kosong I pada semiring R disebut ideal kanan (kiri) pada R jika:

1) Untuk setiap $a,b\in I\Rightarrow a+b\in I$,
2) untuk setiap $a\in I$ dan untuk setiap $r\in R\Rightarrow ar\in I(ra\in I)$.

2.6 Semiring Ternari

Definisi 2.6.1 (Kavikumar, 2007) Himpunan tak kosong S bersama dengan operasi biner penjumlahan dan ternari pergandaan disebut sebagai semiring ternari jika $(S,+)$ semigrup komutatif dan S memenuhi kondisi:

(i) $(abc)de = a(bcd)e = ab(cde)$

(ii) $(a+b)cd = acd + bcd$

(iii) $a(b+c)d = abd + acd$

(iv) $ab(c+d) = abc + abd\ ,\ \forall a,b,c,d,e \in S.$

Contoh 2.6.2

Z_5^- adalah bilangan bulat modulo 5 diambil yang negatif dengan $\overline{0} = \{0,-5,-10,-15,\ldots\}, -\overline{1} = \{-1,-6,-11,-16,\ldots\}$, $-\overline{2} = \{-2,-7,-12,-17,\ldots\}, -\overline{3} = \{-3,-8,-13,-18,\ldots\}$, $-\overline{4} = \{-4,-9,-14,-19,\ldots\}$.

$Z_5^- = \{\overline{0},-\overline{1},-\overline{2},-\overline{3},-\overline{4}\}$ adalah suatu semiring ternari.

Tabel 2.6 Operasi biner Penjumlahan Z_5^-

$+$	$\overline{0}$	$-\overline{1}$	$-\overline{2}$	$-\overline{3}$	$-\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$-\overline{1}$	$-\overline{2}$	$-\overline{3}$	$-\overline{4}$
$-\overline{1}$	$-\overline{1}$	$-\overline{2}$	$-\overline{3}$	$-\overline{4}$	$\overline{0}$
$-\overline{2}$	$-\overline{2}$	$-\overline{3}$	$-\overline{4}$	$\overline{0}$	$-\overline{1}$
$-\overline{3}$	$-\overline{3}$	$-\overline{4}$	$\overline{0}$	$-\overline{1}$	$-\overline{2}$
$-\overline{4}$	$-\overline{4}$	$\overline{0}$	$-\overline{1}$	$-\overline{2}$	$-\overline{3}$

Tabel 2.7 Operasi ternari pergandaan Z_5^-

$\bullet$	$\overline{0}$	$-\overline{1}$	$-\overline{2}$	$-\overline{3}$	$-\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$-\overline{1}$	$\overline{0}$	$-\overline{1}$	$-\overline{2}$	$-\overline{3}$	$-\overline{4}$
$-\overline{2}$	$\overline{0}$	$-\overline{2}$	$-\overline{4}$	$-\overline{1}$	$-\overline{3}$
$-\overline{3}$	$\overline{0}$	$-\overline{3}$	$-\overline{1}$	$-\overline{4}$	$-\overline{2}$
$-\overline{4}$	$\overline{0}$	$-\overline{4}$	$-\overline{3}$	$-\overline{2}$	$-\overline{1}$

Bukti:

1. Dari Tabel 2.6 di atas berlaku $(Z_5^-,+)$ semigrup komutatif.

2. Dari Tabel 2.7 dapat dilihat bahwa $(Z_5^-, \bullet)$ tertutup.

3. Akan dibuktikan setiap elemen dari Z_5^- memenuhi empat kondisi pada Definisi 2.6.1.

   Ambil $a, b, c, d, e \in Z_5^-$ maka

   (i) Akan dibuktikan memenuhi kondisi $(abc)de = a(bcd)e = ab(cde)$.

   Jelas terbukti $(abc)de = a(bcd)e = ab(cde)$, karena operasi pergandaan pada bilangan bulat bersifat assosiatif.

   (ii) Akan dibuktikan memenuhi kondisi $(a+b)cd = acd + bcd$

   Ambil $a, b, c, d \in Z_5^-$ maka $a \le 0, b \le 0, c \le 0, d \le 0$ sehingga diperoleh

   a) $a + b \le 0$ dan $cd \ge 0$. Akibatnya $(a+b)cd \le 0$.

   Jadi $(a+b)cd \in Z_5^-$

   b) $acd \le 0$ dan $bcd \le 0$. Akibatnya $(acd + bcd) \le 0$.

   Jadi $(acd + bcd) \in Z_5^-$

   c) Dengan sifat distributif atas penjumlahan dan pergandaan pada bilangan bulat maka berlakulah $(a+b)cd = acd + bcd$.

   Dari a), b), dan c) maka kondisi (ii) terpenuhi

   (iii) Akan dibuktikan memenuhi kondisi $a(b+c)d = abd + acd$

   Ambil $a, b, c, d \in Z_5^-$ maka $a \le 0, b \le 0, c \le 0, d \le 0$ sehingga diperoleh

   a) $b + c \le 0$ dan $a(b+c)d \le 0$. Jadi $a(b+c)d \in Z_5^-$

   b) $abd \le 0$ dan $acd \le 0$. Sehingga $(abd + acd) \le 0$.

   Jadi $(abd + acd) \in Z_5^-$

   c) Dengan sifat distributif atas penjumlahan dan pergandaan pada bilangan bulat maka berlakulah $a(b+c)d = abd + acd$

   Dari a), b), dan c) maka kondisi (iii) terpenuhi

   (iv) Akan dibuktikan memenuhi kondisi $ab(c+d) = abc + abd$

   Ambil $a, b, c, d \in Z_5^-$ maka $a \le 0, b \le 0, c \le 0, d \le 0$ sehingga

a) $c+d \leq 0$ dan $ab \geq 0$. Sehingga $ab(c+d) \leq 0$.

Jadi $ab(c+d) \in Z_5^-$

b) $abc \leq 0$ dan $abd \leq 0$. Sehingga $(abc+abd) \leq 0$.

Jadi $(abc+abd) \in Z_5^-$

c) Dengan sifat distributif atas penjumlahan dan pergandaan pada bilangan bulat maka berlakulah $ab(c+d) = abc+abd$

Dari a), b), dan c) maka kondisi (iv) terpenuhi

Terbukti kondisi (i), (ii), (iii), dan (iv) terpenuhi

Dari 1, 2, dan 3 terbukti bahwa Z_5^- adalah suatu semiring ternari.

▪

Definisi 2.6.3 Misalkan S adalah semiring ternari. Jika terdapat $0 \in S$ sedemikian sehingga $0+x=x$ dan $0xy = x0y = xy0 = 0$, untuk setiap $x, y \in S$ maka ”0” disebut elemen nol semiring ternari S.

Definisi 2.6.4 (Kar, 2005) Misalkan S adalah semiring ternari. $(T,+)$ subsemigrup dari S. T disebut subsemiring ternari S jika $t_1 t_2 t_3 \in T$ untuk setiap $t_1, t_2, t_3 \in T$.

Contoh 2.6.5

Z_2^- adalah bilangan bulat modulo 2 diambil yang negatif dengan $\overline{0} = \{0,-2,-4,-6,\ldots\}, -\overline{1} = \{-1,-3,-5,-7,\ldots\}$,

$Z_2^- = \{\overline{0}, -\overline{1}\}$ adalah suatu subsemiring ternari dari Z_5^-.

Tabel 2.8 Operasi biner penjumlahan pada Z_2^-

$+$	$\overline{0}$	$-\overline{1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$-\overline{1}$
$-\overline{1}$	$-\overline{1}$	$\overline{0}$

Tabel 2.9 Operasi ternari pergandaan pada Z_2^-

$\bullet$	$\overline{0}$	$-\overline{1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$-\overline{1}$	$\overline{0}$	$-\overline{1}$

Bukti:

Z_2^- subset dari Z_5^-.

1. Dari Tabel 2.8 di atas berlaku $(Z_2^-,+)$ semigrup.
2. Dari Tabel 2.9 dapat dilihat bahwa $(Z_2^-,\bullet)$ tertutup.

Dari 1 dan 2 terbukti bahwa Z_2^- adalah suatu subsemiring ternari dari Z_5^-. ◘

Definisi 2.6.6 (Kavikumar, 2007) Misalkan I merupakan subsemigrup penjumlahan dari semiring ternari S, I disebut ideal kiri (kanan, lateral) dari S jika $s_1 s_2 i \in I (is_1 s_2 \in I, s_1 i s_2 \in I)$ untuk setiap $s_1, s_2 \in S$ dan $i \in I$. Jika I adalah ideal kanan dan ideal kiri dari S, maka I disebut ideal dua sisi dari S. Jika I adalah ideal kiri, ideal kanan, dan ideal lateral dari S, maka I disebut ideal dari S.

Definisi 2.6.7 (Kavikumar, 2007) Subsemigrup Q pada semiring ternari S disebut quasi-ideal dalam semiring ternari S jika memenuhi $QSS \cap (SQS + SSQSS) \cap SSQ \subseteq Q$.

Contoh 2.6.2

$S = Z_5^- = \{\overline{0}, -\overline{1}, -\overline{2}, -\overline{3}, -\overline{4}\}$ adalah suatu semiring ternari berdasarkan Contoh 2.6.2. Bentuk $Q = \{\overline{0}\}$ dengan $\overline{0} \in Z_5^-$.

Akan dibuktikan Q adalah quasi-ideal dalam semiring ternari S.

Bukti:

Akan dibuktikan $QSS \cap (SQS + SSQSS) \cap SSQ \subseteq Q$. Ambil sebarang $X \in QSS \cap (SQS + SSQSS) \cap SSQ$. Akan dibuktikan $X \in Q$. Jika $X \in QSS \cap (SQS + SSQSS) \cap SSQ$, maka $X \in QSS$, $X \in (SQS + SSQSS)$, dan $X \in SSQ$. Sehingga $X = QSS = \overline{0}$, $X = (SQS + SSQSS) = \overline{0} + \overline{0} = \overline{0}$, dan $X = SSQ = \overline{0}$. Dari ketiga X yang didapat, maka $X = \overline{0}$. Sehingga terbukti bahwa $X \in Q$. Dengan kata lain $QSS \cap (SQS + SSQSS) \cap SSQ \subseteq Q$. Terbukti bahwa Q adalah quasi-ideal dalam semiring ternari S.

2.7 Himpunan Fuzzy (samar)

Definisi 2.7.1 (Sakawa, 1993) Misalkan X suatu himpunan semesta dan A suatu himpunan bagiannya; $A \subseteq X$. Maka himpunan fuzzy A dalam X adalah suatu pasangan terurut:

$$A = \left\{ (x|\mu_A(x)) \middle| \, x \in X \right\}$$

dimana $\mu_A(x)$ menyatakan derajat keanggotaan x dalam A yang memetakan X ke $[0,1]$ yang dapat dinotasikan sebagai

$$\mu_A : X \to [0,1]$$

semakin $\mu_A(x)$ mendekati 1, semakin tinggi derajat keanggotaan x dalam A. Sementara itu, semakin $\mu_A(x)$ mendekati 0, semakin rendah derajat keanggotaan x dalam A.

Untuk selanjutnya, penulisan notasi himpunan fuzzy dan fungsi keanggotaannya, akan digunakan notasi yang sama yaitu μ.

Definisi 2.7.2: Misalkan A himpunan bagian tak kosong dari X. Fungsi karakteristik $\lambda_A(x)$ merupakan *fuzzy subset* pada X yang didefinisikan oleh:

$$\lambda_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{jika } x \in A \\ 0 & \text{jika } x \notin A \end{cases}$$

Contoh 2.7.3: Misal $X = \{0,1,2,3,4,5\}$ dan A adalah himpunan fuzzy dalam X. Jika $\mu_A(x) = \left| \dfrac{5-x}{5} \right|$. Tentukan A

$\mu(0) = 1; \mu(1) = 0{,}8; \mu(2) = 0{,}6; \mu(3) = 0{,}4; \mu(4) = 0{,}2; \mu(5) = 0;$

maka: $A = \{(0|1),(1|0{,}8),(2|0{,}6),(3|0{,}4),(4|0{,}2),(5|0),\}$.

Definisi 2.7.4 (Klir, 1995) Misalkan μ adalah himpunan fuzzy dalam X, $h(\mu)$ adalah derajat keanggotaan terbesar yang dicapai oleh sebarang elemen dalam himpunan μ. $h(\mu)$ disebut *height* dari μ. Dinotasikan dengan $h(\mu) = \sup_{x \in X} \mu(x)$.

BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai definisi-definisi, sifat-sifat, dan teorema-teorema yang berkaitan dengan ideal fuzzy dalam semiring ternari.

3.1 Ideal Fuzzy dalam Semiring ternari

Definisi 3.1.1 (Kavikumar, 2007) *Fuzzy subsemigrup* μ dari semiring ternari S disebut fuzzy subsemiring ternari jika memenuhi kondisi:

(i) $\mu(x-y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$,

(ii) $\mu(-x) = \mu(x)$,

(iii) $\mu(xyz) \geq \min\{\mu(x), \mu(y), \mu(z)\}$, untuk setiap $x, y, z \in S$.

Definisi 3.1.2 Misalkan μ merupakan *fuzzy subsemigrup* dari semiring ternari S . μ disebut ideal fuzzy dari S dengan fungsi $\mu : S \rightarrow [0,1]$ jika memenuhi kondisi:

(i) $\mu(x-y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$,

(ii) $\mu(xyz) \geq \mu(z)$,

(iii) $\mu(xyz) \geq \mu(x)$, dan

(iv) $\mu(xyz) \geq \mu(y)$, untuk setiap $x, y, z \in S$.

Himpunan fuzzy μ yang memenuhi

a) (i) dan (ii) disebut ideal fuzzy kiri,
b) (i) dan (iii) disebut ideal fuzzy kanan,
c) (i) dan (iv) disebut ideal fuzzy lateral.

Jika Himpunan fuzzy μ yang memenuhi a), b), dan c) maka μ disebut ideal fuzzy.

μ disebut ideal fuzzy dalam semiring ternari S jika dan hanya jika $\mu(xyz) \geq \max\{\mu(x), \mu(y), \mu(z)\}$, untuk setiap $x, y, z \in S$.

Lemma 3.1.3: Jika μ merupakan ideal fuzzy dalam semiring ternari S, maka $\mu(xy) \le \mu(0)$, untuk setiap $x, y \in S$

Bukti:
Ambil sebarang $xy \in S$, sedemikian sehingga

$$\mu(0) = \mu(xy - xy)$$
$$\ge \min\{\mu(xy), \mu(xy)\} = \mu(xy)$$

sehingga $\mu(0) \ge \mu(xy)$

Contoh 3.1.4: Dari Contoh 2.6.5 $Z_2^- = \{\overline{0}, -\overline{1}\}$ adalah suatu semiring ternari.

Didefinisikan $\mu : Z_2^- \to [0,1]$

$$\mu(\overline{0}) = \frac{3}{4}$$

$$\mu(-\overline{1}) = \frac{1}{4}$$

Akan dibuktikan μ merupakan ideal fuzzy dari Z_2^-

Bukti:

(i) $\mu(x - y) \ge \min\{\mu(x), \mu(y)\}$ untuk setiap $x, y \in S$.
Ambil $(x, y) = (0,0)$. Maka $\mu(x - y) = \mu(0 - 0) \ge \min\{\mu(0), \mu(0)\}$. Sehingga $\mu(0) \ge \mu(0)$.
Ambil $(x, y) = (0,-1)$. Maka $\mu(x - y) = \mu(0 - (-1)) \ge \min\{\mu(0), \mu(-1)\}$. Sehingga $\mu(1) = \mu(-1) \ge \mu(-1)$.
Ambil $(x, y) = (-1,0)$. Maka $\mu(x - y) = \mu(-1 - 0) \ge \min\{\mu(-1), \mu(0)\}$. Sehingga $\mu(-1) \ge \mu(-1)$.
Ambil $(x, y) = (-1,-1)$. Maka $\mu(x - y) = \mu(-1 - (-1)) \ge \min\{\mu(-1), \mu(-1)\}$. Sehingga $\mu(0) \ge \mu(-1)$.

(ii) $\mu(xyz) \ge \mu(z)$ untuk setiap $x, y, z \in S$.
Ambil $z = 0$. Maka $\mu(xyz) = \mu(0) \ge \mu(0)$.
Ambil $z = -1$ dan $x = 0$. Maka $\mu(xyz) = \mu(0) \ge \mu(-1)$.

Ambil $z = -1$ dan $y = 0$. Maka $\mu(xyz) = \mu(0) \geq \mu(-1)$.
Ambil $z = x = y = -1$. Maka $\mu(xyz) = \mu(-1) \geq \mu(-1)$.

(iii) $\mu(xyz) \geq \mu(x)$ untuk setiap $x, y, z \in S$.
Ambil $x = 0$. Maka $\mu(xyz) = \mu(0) \geq \mu(0)$.
Ambil $x = -1$ dan $z = 0$. Maka $\mu(xyz) = \mu(0) \geq \mu(-1)$.
Ambil $x = -1$ dan $y = 0$. Maka $\mu(xyz) = \mu(0) \geq \mu(-1)$.
Ambil $z = x = y = -1$. Maka $\mu(xyz) = \mu(-1) \geq \mu(-1)$.

(iv) $\mu(xyz) \geq \mu(y)$ untuk setiap $x, y, z \in S$.
Ambil $y = 0$. Maka $\mu(xyz) = \mu(0) \geq \mu(0)$.
Ambil $y = -1$ dan $z = 0$. Maka $\mu(xyz) = \mu(0) \geq \mu(-1)$.
Ambil $y = -1$ dan $x = 0$. Maka $\mu(xyz) = \mu(0) \geq \mu(-1)$.
Ambil $z = x = y = -1$. Maka $\mu(xyz) = \mu(-1) \geq \mu(-1)$.

Dari (i), (ii), (iii), dan (iv) terbukti bahwa μ merupakan ideal fuzzy dari Z_2^-. ◘

Teorema 3.1.5 I adalah ideal dari semiring ternari S jika dan hanya jika fungsi karakteristik λ_I adalah ideal fuzzy dari semiring ternari S.

Bukti:

$(\Rightarrow)$ I adalah ideal dari semiring ternari S. Menurut Definisi 2.6.6 maka untuk setiap $s_1, s_2 \in S$ .dan $i \in I$ berlaku $(s_1 s_2 i \in I,\ s_1 i s_2 \in I,$ dan $i s_1 s_2 \in I)$. Misal λ_I subsemigrup, dan λ_I adalah fungsi karakteristik dari I. Maka $\lambda_I(s_1) = 0$, $\lambda_I(s_2) = 0$, $\lambda_I(s_1 s_2 i) = 1$, $\lambda_I(s_1 i s_2) = 1$,$\lambda_I(i s_1 s_2) = 1$, dan $\lambda_I(i) = 1$. Akan dibuktikan fungsi karakteristik λ_I memenuhi kondisi (i), (i), (iii), dan (iv) pada Definisi 3.1.2 .

(i) $\lambda_I(s_1 - s_2) \geq \min\{\lambda_I(s_1), \lambda_I(s_2)\}$

$0 \geq \min\{0,0\}$

$0 \geq 0$

(ii) $\lambda(s_1 s_2 i) \geq \lambda(i)$

$1 \geq 1$

(iii) $\lambda(i s_1 s_2) \geq \lambda(i)$

$1 \geq 1$

(iv) $\lambda(s_1 i s_2) \geq \lambda(i)$

$1 \geq 1$

Dari (i), (ii), (iii), dan (iv) terbukti bahwa fungsi karakteristik λ_I adalah ideal fuzzy dari semiring ternari S .

$(\Leftarrow)$ Sebaliknya, λ_I adalah ideal fuzzy dari semiring ternari S . Akan dibuktikan I adalah ideal dari semiring ternari S .

(i) Akan dibuktikan tertutup

Untuk setiap $x, y \in I$, $\lambda_I(x+y) \geq \min\{\lambda_I(x), \lambda_I(y)\}$.

Misal $\lambda_I(x) = 1$ dan $\lambda_I(y) = 1$

$\lambda_I(x+y) \geq \min\{\lambda_I(x), \lambda_I(y)\} = \min\{1,1\} = 1$

$\lambda_I(x+y) \geq 1$

Dengan demikian $x + y \in I$.

(ii) Akan dibuktikan assosiatif penjumlahan

$$
\begin{aligned}
\lambda\ (x+(y+z)) &\geq \min\{\lambda\ (x), \lambda\ (y+z)\} \\
&\geq \min\{\lambda\ (x), \min\{\lambda\ (y), \lambda\ (z)\}\} \\
&\geq \min\{\lambda\ (x), \lambda\ (y), \lambda\ (z)\} \\
&\geq \min\{\min\{\lambda\ (x), \lambda\ (y)\}, \lambda\ (z)\} \\
&\geq \min\{\lambda\ (x+y), \lambda\ (z)\} \\
&\geq \lambda\ ((x+y)+z)
\end{aligned}
$$

(iii) Kemudian ambil $\lambda_I(a)=1$ maka berlaku

$\lambda_I(xya) \geq \max\{\lambda(x), \lambda(y), \lambda(a)\}$

$\lambda_I(xya) \geq \lambda_I(a) = 1$

sehingga $xya \in I$. Dengan demikian I adalah ideal kiri dari semiring ternari S. Demikian pula $axy \in I$ dan $xay \in I$ adalah ideal kanan dan ideal lateral dari semiring ternari S. Sehingga menurut Definisi 2.6.6 terbukti I ideal dari semiring ternari S.

Definisi 3.1.6 Jika μ merupakan himpunan fuzzy dalam semiring ternari S. Maka $\mu_t = \{x, y \in S | \mu(xy) \geq \mu(x) \geq t\}(t \in [0,1])$ disebut *level subset* dari S.

Teorema 3.1.7 Jika μ adalah ideal kiri (kanan, lateral) fuzzy dari S, maka *level set* $\mu_t(t \leq \mu(0))$ juga merupakan ideal kiri (kanan, lateral) dalam semiring ternari S.

Bukti:

Ambil $x, y, z \in \mu_t$ maka $\mu(x) \geq t,\ \mu(y) \geq t,$ dan $\mu(z) \geq t$.
Karena $\mu\ (x+y) \geq \min\{\mu\ (x), \mu\ (y)\} \geq t,\quad x+y \in \mu_t$. Sama halnya dengan $\mu\ (y+z) \geq \min\{\mu\ (y), \mu\ (z)\} \geq t,\quad y+z \in \mu_t$ dan $\mu\ (z+x) \geq \min\{\mu\ (z), \mu\ (x)\} \geq t,\quad z+x \in \mu_t$.
Di sisi lain, jika $x, y \in \mu_t$, $xy \in \mu_t$, dan $z \in S$, maka berdasarkan Definisi 3.1.2

$\mu\ (zxy) \geq \mu\ (y) \geq t,\ (\mu\ (xyz) \geq \mu\ (x) \geq t,\quad \mu\ (xzy) \geq \mu\ (z) \geq t)$

sehingga $zxy \in \mu_t$, $xyz \in \mu_t$, $xzy \in \mu_t$. Sehingga menurut Definisi 2.6.6 μ_t merupakan ideal kiri (kanan, lateral) dari S.

Definisi 3.1.8 Himpunan fuzzy μ dalam semiring ternari S disebut pembagi nol fuzzy jika untuk setiap $x, y, z \in S$, $\mu(xyz) = \mu(0)$ maka $\mu(x) = \mu(0)$, atau $\mu(y) = \mu(0)$, atau $\mu(z) = \mu(0)$.

Definisi 3.1.9 Himpunan fuzzy μ dalam semiring ternari S disebut

(i) Fuzzy multiplikasi kanselasi kiri jika $\mu(abx) = \mu(aby)$ maka $\mu(x-y) = \mu(0)$,

(ii) Fuzzy multiplikasi kanselasi kanan jika $\mu(xab) = \mu(yab)$ maka $\mu(x-y) = \mu(0)$,

(iii) Fuzzy multiplikasi kanselasi lateral jika $\mu(axb) = \mu(ayb)$ maka $\mu(x-y) = \mu(0)$, untuk setiap $x, y \in S$.

Himpunan fuzzy μ dalam semiring ternari S disebut fuzzy multiplikasi kanselasi jika memenuhi kondisi (i), (ii), dan (iii).

3.2 Quasi-Ideal Fuzzy dalam Semiring ternari

Definisi 3.2.1 (Kavikumar, 2007) Misalkan μ_A adalah himpunan fuzzy dalam A, μ_B adalah himpunan fuzzy dalam B, dan μ_C adalah himpunan fuzzy dalam C. Maka

(i) $(\mu_A \cap \mu_B) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$

$$
\begin{aligned}
(\mu_A \cap \mu_B \cap \mu_C) &= (\mu_A \cap (\mu_B \cap \mu_C)) \\
&= \mu_A \cap \min\{\mu_B(x), \mu_C(x)\} \\
&= \min\{\mu_A(x), \min\{\mu_B(x), \mu_C(x)\}\} \\
&= \min\{\mu_A(x), \mu_B(x), \mu_C(x)\}
\end{aligned}
$$

(ii) $(\mu_A \cup \mu_B) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$

$$
\begin{aligned}
(\mu_A \cup \mu_B \cup \mu_C) = (\mu_A \cup (\mu_B \cup \mu_C)) \\
&= \mu_A \cup \max\{\mu_B(x), \mu_C(x)\} \\
&= \max\{\mu_A(x), \max\{\mu_B(x), \mu_C(x)\}\} \\
&= \max\{\mu_A(x), \mu_B(x), \mu_C(x)\}
\end{aligned}
$$

(iii) $(\mu_A + \mu_B) = \begin{cases} \sup\{\min\{\mu(y), \mu(z)\}\}, & \text{jika } x = y + z, \\ 0, & \text{yang lain} \end{cases}$

(iv) $(\mu_A \bullet \mu_B) = \begin{cases} \sup\{\min\{\mu(y), \mu(z)\}\}, & \text{jika } x = yz, \\ 0, & \text{yang lain} \end{cases}$

Definisi 3.2.2 (Dubois, 1980) $\mu_{A\cap B}$ adalah himpunan fuzzy dalam $A \cap B$, $\mu_{A\cup B}$ adalah himpunan fuzzy dalam $A \cup B$, μ_{A+B} adalah himpunan fuzzy dalam $A + B$. Maka

(i) $(\mu_{A\cap B}) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$

$$
\begin{aligned}
(\mu_{A\cap B\cap C}) &= (\mu_{A\cap(B\cap C)}) \\
&= \min\{\mu_A(x), \mu_{B\cap C}\} \\
&= \min\{\mu_A(x), \min\{\mu_B(x), \mu_C(x)\}\} \\
&= \min\{\mu_A(x), \mu_B(x), \mu_C(x)\}
\end{aligned}
$$

(ii) $(\mu_{A\cup B}) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$

$$
\begin{aligned}
(\mu_{A\cup B\cup C}) &= (\mu_{A\cup(B\cup C)}) \\
&= \max\{\mu_A(x), \mu_{B\cup C}\} \\
&= \max\{\mu_A(x), \max\{\mu_B(x), \mu_C(x)\}\} \\
&= \max\{\mu_A(x), \mu_B(x), \mu_C(x)\}
\end{aligned}
$$

(iii) $(\mu_{A+B}) = \begin{cases} \sup\{\min\{\mu(y), \mu(z)\}\}, & \text{jika } x = y + z, \\ 0, & \text{yang lain} \end{cases}$

(iv) $(\mu_{A\bullet B}) = \begin{cases} \sup\{\min\{\mu(y), \mu(z)\}\}, & \text{jika } x = yz, \\ 0, & \text{yang lain} \end{cases}$

Definisi 3.2.3 (Kavikumar, 2007) Jika μ merupakan himpunan fuzzy dalam semiring ternari S. Didefinisikan bahwa

$$(S\mu S + SS\mu SS)(z) = \begin{cases} \sup\{\min\{\mu(a), \mu(b)\}\}, & \text{jika } z = x(a + xby)y, \\ & \forall x, y, a, b \in S, \\ 0, & \text{yang lain} \end{cases}$$

Definisi 3.2.4: *Fuzzy subsemigrup* μ dari semiring ternari S disebut quasi-ideal fuzzy S jika memenuhi kondisi:
$\{\mu SS \cap (S\mu S + SS\mu SS) \cap SS\mu\}(x) \leq \mu(x).$ dimana
$\mu(x) \geq \min\{(\mu SS)(x), (S\mu S + SS\mu SS)(x), (SS\mu)(x)\}.$

Teorema 3.2.5: Misalkan μ *fuzzy subset* dari S. Jika μ adalah ideal kiri (ideal kanan dan ideal lateral) fuzzy dari S maka μ merupakan quasi-ideal fuzzy dari S.

Bukti:
μ ideal kiri (ideal kanan dan ideal lateral) fuzzy dari S. Misalkan $x = as_1s_2 = s_1(b + s_1cs_2)s_2 = s_1s_2d$ dimana, a, b, c, d, s_1 dan $s_2 \in S$.
Berdasarkan Definisi 3.2.4
$(\mu SS \cap (S\mu S + SS\mu SS) \cap SS\mu)(x)$
$= \min\{(\mu SS)(x), (S\mu S + SS\mu SS)(x), (SS\mu)(x)\}$
$= \min\{\sup_{x=as_1s_2}\{\mu(a)\}, \sup_{x=s_1(b+s_1cs_2)s_2} \min\{\mu(b), \mu(c)\},$
$\sup_{x=s_1s_2d}\{\mu(d)\}\}$
$= \min\{1, \sup_{x=s_1(b+s_1cs_2)s_2} \min\{\mu(s_1(b + s_1cs_2)s_2)\}, 1\}$
Dimana
$\mu(s_1(b + s_1cs_2)s_2) \geq \min\{\mu(b), \mu(c)\} = \mu(b) \leq \mu(x)$ jika
$\mu(b) < \mu(c)$, dan
$\mu(s_1(b + s_1cs_2)s_2) \geq \min\{\mu(b), \mu(c)\} = \mu(c) \leq \mu(x)$ jika

$\mu(c) < \mu(b)$ ◘

Teorema 3.2.6 Untuk setiap *subset* tak kosong $A, B,$ dan C dari S ,

1) $\mu_A \mu_B \mu_C = \mu_{ABC}$,

2) $\mu_A \cap \mu_B \cap \mu_C = \mu_{A \cap B \cap C}$,

3) $\mu_A + \mu_B = \mu_{A+B}$.

Bukti:
Berdasarkan Definisi 3.2.1 dan Definisi 3.2.2 maka persamaan 1), 2), dan 3) terpenuhi ◘

Teorema 3.2.7 Misalkan Q subsemigrup dari S . Q quasi-ideal S jika dan hanya jika μ_Q quasi-ideal fuzzy S .

Bukti:
$(\Rightarrow)$ Ambil Q quasi-ideal S . Maka μ_Q quasi-ideal fuzzy S.

$$(\mu_Q SS) \cap (S\mu_Q S + SS\mu_Q SS) \cap (SS\mu_Q)$$
$$= (\mu_Q \mu_S \mu_S) \cap (\mu_S \mu_Q \mu_S + \mu_S \mu_S \mu_Q \mu_S \mu_S) \cap (\mu_S \mu_S \mu_Q)$$
$$= \mu_{QSS} \cap \mu_{(SQS+SSQSS)} \cap \mu_{SQQ}$$
$$= \mu_{QSS \cap (SQS+SSQSS) \cap SSQ} \subseteq \mu_Q$$

Ini artinya μ_Q quasi-ideal fuzzy S .

$(\Leftarrow)$ Ambil μ_Q quasi-ideal fuzzy S . Misal $x \in QSS \cap (SQS + SSQSS) \cap SSQ$. Maka

$$\mu_Q(x) \geq \{((\mu_Q SS) \cap (S\mu_Q S + SS\mu_Q SS) \cap (SS\mu_Q))(x)\}$$
$$= \min\{(\mu_Q SS)(x), (S\mu_Q S + SS\mu_Q SS)(x), (SS\mu_Q)(x)\}$$
$$= \min\{\mu_{QSS}(x), \mu_{(SQS+SSQSS)}(x), \mu_{SQQ}(x)\}$$
$$= \mu_{QSS \cap (SQS+SSQSS) \cap SSQ}(x) = 1$$

Hal ini mengakibatkan $x \in Q$, dan juga

$$QSS \cap (SQS + SSQSS) \cap SSQ \subseteq Q$$

Ini artinya Q quasi-ideal S. ◘

BAB IV
KESIMPULAN

Kesimpulan yang dapat diambil dari pembahasan adalah sebagai berikut:

1. I adalah ideal dari semiring ternari S jika dan hanya jika fungsi karakteristik μ_I adalah ideal fuzzy dari semiring ternari S .
2. Jika μ adalah ideal kiri (kanan, lateral) fuzzy dari S, maka *level set* $\mu_t (t \leq \mu(0))$ juga merupakan ideal kiri (kanan, lateral) dalam semiring ternari S .
3. Misalkan μ *fuzzy subset* dari S . Jika μ adalah ideal kiri (ideal kanan dan ideal lateral) fuzzy dari S maka μ merupakan quasi-ideal fuzzy dari S .
4. Misalkan Q subsemigrup dari S . Q quasi-ideal S jika dan hanya jika μ_Q quasi-ideal fuzzy S .

DAFTAR PUSTAKA

Bhattacharya, P.B.,dkk. 1994. *Basic Abstract Algebra.* Cambridge University Press. New York.

Dubois, Didier. *Fuzzy Sets and Systems.* Academic Press Inc. USA

Dummit, D.S. dan Foote, R.M. 2004. *Abstract Algebra* . Third Ed., John Willey and Sons Inc. New York.

Durbin, J.R. 1992. *Modern Algebra. An Introduction, Third Ed.,* John Willey and Sons Inc. New York.

Kandasamy, W.B.V 2002. *Smarandache Near-Rings.* American Research Press. USA

Kar, S. 2005. *On Quasi Ideal and Bi-Ideal in Ternary Semirings*. Int. J. Math. Sci. V18

Kavikumar, J. 2007. Fuzzy Ideals and Fuzzy Quasi-ideal in Ternary Semirings. *IAENG International Journal of Applied Mathematics 37:2*

Klir, G. J. Dan Yuan, Bo. 1995. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, Theory and Applications.* Prentice Hall PTR. USA

Monico, Cristopher J. 2002. *Semiring and Semigroup Actions in Public-key Cryptography.* Departement of Mathematics Note Dame. Indiana

Sakawa, M. 1993, *Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization.* Plenum Press. New York

Setiadji. 2009. *Himpunan dan Logika Samar Serta Aplikasinya.* Graha Ilmu. Yogyakarta

Whitelaw, T.A. 1998 *Introduction to Abstract Algebra*. Chapman and Hall, Inc. New York.