ANALISIS GLOBAL MODEL PREDATOR-PREY DENGAN PERLINDUNGAN PREY

SKRIPSI

Oleh:
RAHIL AS SAKINAH
0610940049-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2011

ANALISIS GLOBAL MODEL PREDATOR-PREY DENGAN PERLINDUNGAN PREY

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh:
RAHIL AS SAKINAH
0610940049-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2011

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

ANALISIS GLOBAL MODEL PREDATOR-PREY DENGAN PERLINDUNGAN PREY

oleh:
Rahil As Sakinah
0610940049-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 11 Agustus 2011
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dr. Agus Suryanto, M.Sc.	**Drs. Moh. Muslikh, M.Si.**
NIP. 196908071994121001	**NIP. 195910311989121001**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc.
NIP. 196709071992031001

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	**:**	**Rahil As Sakinah**
NIM	**:**	**0610940049-94**
Jurusan	**:**	**Matematika**
Penulis Skripsi berjudul	**:**	**Analisis Global Model Predator-Prey dengan Perlindungan Prey**

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. **isi skripsi yang saya buat benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka skripsi ini,**
2. **apabila di kemudian hari ternyata skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 11 Agustus 2011
Yang menyatakan,

(Rahil As Sakinah)
NIM. 0610940049

ANALISIS GLOBAL MODEL PREDATOR-PREY DENGAN PERLINDUNGAN PREY

ABSTRAK

Dalam skripsi ini dibahas model *predator-prey* dengan perlindungan *prey*. Perlindungan pada *prey* dilakukan terhadap sejumlah *prey* sehingga tidak dapat ditemukan oleh *predator.* Interaksi *predator-prey* dengan perlindungan *prey* dimodelkan sebagai sistem persamaan diferensial biasa nonlinear dengan dua variabel, yaitu *predator* dan *prey*. Parameter-parameter yang digunakan antara lain tingkat pertumbuhan *prey*, daya maksimum *prey*, tingkat kematian *predator*, tingkat interaksi *predator* dan *prey*, tingkat emigrasi, dan jumlah *prey* yang berlindung. Berdasarkan hasil analisis diperoleh tiga titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan E_0, E_1, dan E_2. Selanjutnya, analisis menunjukkan bahwa jika titik kesetimbangan E_2 adalah stabil global, maka titik kesetimbangan E_0 dan E_1 adalah tidak stabil.

Kata kunci: model *predator-prey,* perlindungan, stabil global.

GLOBAL ANALYSIS OF PREDATOR-PREY MODEL WITH SOME COVER ON PREY SPECIES

ABSTRACT

This final project discusses a predator-prey model with some cover on prey species. Cover of the prey is the number of prey population to make them inaccessible by predator. Predator-prey interaction with some cover on prey species is modeled as a nonlinear differential equation system of two variables, namely predator and prey. The parameters involved in the system are growth rate of prey, carrying capacity, date rate of predator, interaction rate of predator and prey, emigration rate and the number of prey population who finds some cover. Based on the analysis, the model has three equilibrium points, namely E_0, E_1, and E_2. Furthermore, analysis shows that if E_2 is globally stable, then E_0 and E_1 are unstable.

Keyword: predator-prey model, cover, globally stable.

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan bimbingan dan petunjuk-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "**Analisis Global Model Predator-Prey dengan Perlindungan Prey"** dengan baik dan lancar. Shalawat serta salam semoga selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW sebagai suri tauladan bagi penulis.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan serta motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada:

1. Dr. Agus Suryanto, M.Sc., selaku pembimbing I sekaligus dosen penasehat akademik atas segala bimbingan, nasihat, motivasi serta kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini dan selama penulis menempuh kuliah.
2. Drs. M. Muslikh, M.Si., selaku pembimbing II atas segala bimbingan, nasihat, motivasi serta kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini.
3. Dr. Wuryansari Muharini K., M.Si., Drs. Marsudi, M.S., dan Kwardiniya A., S.Si., M.Si., selaku dosen penguji atas segala saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
4. Seluruh bapak/ibu dosen Matematika yang telah memberikan bekal dan ilmu pengetahuan kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
5. Mama, papa, Mas Alfi, dan Adek Mia tersayang atas segala doa, kasih sayang, dukungan, dan nasihat yang telah diberikan.
6. Indrawan Nugrahanto atas kesabaran, motivasi, nasihat dan semangat yang telah diberikan.
7. Keluarga besar Matematika 2006 dan semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu. Terimakasih.

Penulis menyadari bahwa dalam skripsi ini masih banyak kekurangan, untuk itu penulis sangat mengharapkan kritik dan saran melalui email penulis stroberinasakinah@yahoo.com. Akhir kata, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak.

Malang, 11 Agustus 2011

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

HALAMAN JUDUL i
LEMBAR PENGESAHAN iii
LEMBAR PERNYATAAN..... v
ABSTRAK..... vii
ABSTRACT ix
KATA PENGANTAR xi
DAFTAR ISI..... xiii
DAFTAR GAMBAR xv
DAFTAR TABEL..... xvii

BAB I PENDAHULUAN 1
1.1. Latar Belakang..... 1
1.2. Rumusan Masalah 2
1.3. Batasan Masalah..... 2
1.4. Tujuan..... 2

BAB II TINJAUAN PUSTAKA..... 3
2.1. Sistem Dinamik 3
2.2. Sistem Persamaan Diferensial 3
2.3. Sistem Otonomus 4
2.4. Titik Kesetimbangan 4
2.5. Kestabilan Titik Kesetimbangan 4
2.6. Linearisasi 5
2.7. Orbit Periodik 7
2.8. Kriteria Dulac 8
2.9. Teorema Poincare-Bendixson 8
2.10. Model Logistik 8
2.11. Model *Predator-Prey* 9

BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN 11
3.1. Formulasi Model 11
3.1.1.Laju Perubahan *Paramecium caudatum* (*Prey*) 11
3.1.2.Laju Perubahan *Didinium nasutum (Predator)* 12
3.2. Analisis Model *Predator-Prey* dengan Perlindungan 14
3.2.1.Titik Kesetimbangan 14

3.2.2. Kestabilan Titik Kesetimbangan 16
3.2.2.1.Kestabilan Titik Kesetimbangan E_0 17
3.2.2.2.Kestabilan Titik Kesetimbangan E_1 18
3.2.2.2.Kestabilan Titik Kesetimbangan E_2 20
3.2.2.4.Kestabilan Global 21
3.3. Simulasi Numerik 23

BAB IV KESIMPULAN 31

DAFTAR PUSTAKA 33

LAMPIRAN 35

DAFTAR GAMBAR

Halaman

Gambar 3.1 Diagram kompartemen model predator-prey dengan perlindungan prey 11

Gambar 3.2 Solusi numerik menuju $E_0(0,0)$ dengan $k = 0$, untuk nilai awal (200,180)..... 24

Gambar 3.3 Solusi numerik menuju $E_0(0,0)$ dengan $k = 30$, untuk nilai awal (200,180)..... 24

Gambar 3.4 Solusi numerik menuju $E_1(266.667,0)$ dengan $k = 0$, dengan nilai awal (200,180)..... 25

Gambar 3.5 Solusi numerik menuju $E_1(266.667,0)$ dengan $k = 30$, dengan nilai awal (200,180)..... 25

Gambar 3.6 Solusi numerik menuju $E_2(N_1^*, N_2^*)$ dengan $k = 0$, dengan nilai awal (200,180). 26

Gambar 3.7 Solusi numerik menuju $E_2(N_1^*, N_2^*)$ dengan $k = 30$, dengan nilai awal (200,180). 27

Gambar 3.8 Solusi numerik menuju $E_2(N_1^*, N_2^*)$ dengan $k = 50$, dengan nilai awal (200,180). 28

Gambar 3.9 Potret phase (N_1^*, N_2^*) dengan $k = 0$ dan beberapa nilai awal yang berbeda. Semua orbit menuju $E_2(220,28)$..... 28

Gambar 3.10 Potret phase (N_1^*, N_2^*) dengan $k = 30$ dan beberapa nilai awal yang berbeda. Semua orbit menuju $E_2(220,28)$..... 29

DAFTAR TABEL

Halaman

Tabel 2.1 Kestabilan berdasarkan nilai eigennya 7
Tabel 3.1 Sifat-sifat titik kesetimbangan sistem (3.11) 23

BAB I
PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Model *predator-prey* adalah salah satu penerapan matematika dalam bidang biologi. Model tersebut digunakan untuk mengetahui bagaimana interaksi antara populasi *predator* dan *prey*. Salah satu penggunaan model *predator-prey* adalah untuk melakukan studi empiris (Gause, 1934) antara *Protozoans Paramecium caudatum* (*prey)* dan *Didinium nasutum* (*predator*) pada medium tanaman sagu. Adanya studi tersebut mengakibatkan munculnya beberapa eksperimen, namun eksperimen-eksperimen tersebut sebagian besar menunjukkan hasil akhir yang sama yaitu *Didinium nasutum* memangsa *Paramecium caudatum* hingga populasi *Paramecium caudatum* habis. Kemudian dalam waktu tertentu *Didinium nasutum* tidak dapat meneruskan reproduksinya karena *Paramecium caudatum* sebagai sumber makanan utamanya telah habis. Dengan demikian kedua populasi akan menuju kepunahan.

Dalam upaya menghindari kepunahan kedua populasi tersebut, diperkenalkan perlindungan *prey* ke dalam sistem. Pada sistem dengan perlindungan ini *Paramecium caudatum* sebagai *prey* terkadang selamat, namun dalam kasus lain *Didinium casutum* sebagai *predator* mampu menyapu bersih semua *Paramecium caudatum* meskipun ada yang berlindung. Oleh karena itu dibutuhkan kajian teoritisnya. Pada hakekatnya masalah mendasar dalam ekologi adalah menentukan kondisinya, sehingga kedua populasi dapat terus hidup berdampingan. Mempelajari kestabilan dengan adanya perlindungan prey akan memberitahukan bahwa kondisi tersebut akan stabil di titik kesetimbangan tertentu.

Dalam skripsi ini dibahas model *predator-prey* yang terdiri dari dua populasi di atas, yaitu *Protozoans Paramecium caudatum* sebagai *prey* (N_1) dan *Didinium nasutum* sebagai *predato* (N_2), serta adanya perlindungan *prey* (k), sehingga diperoleh suatu sistem persamaan diferensial biasa nonlinear. Kemudian dipelajari perilaku kualitatifnya, yaitu analisis sistem dinamik untuk menentukan titik kesetimbangan dan jenis kestabilannya. Selanjutnya dilakukan simulasi numerik untuk mengetahui perilaku solusi model tersebut.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, pokok permasalahan dalam penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana konstruksi model *predator-prey* dengan perlindungan pada *prey*,
2. Bagaimana titik kesetimbangan model *predator-prey* dengan perlindungan *prey*,
3. Bagaimana kestabilan titik kesetimbangan model *predator-prey* dengan perlindungan *prey*.

1.3. Batasan Masalah

Penulisan skripsi ini difokuskan dengan batasan, yaitu *Paramecium caudatum* (*prey)* merupakan satu-satunya makanan *Didinium nasutum* (*predator*).

1.4. Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah:

1. mengkonstruksi model *predator-prey* dengan perlindungan *prey*,
2. menentukan titik kesetimbangan model *predator-prey* dengan perlindungan *prey*,
3. menentukan kestabilan titik kesetimbangan model *predator-prey* dengan perlindungan *prey*.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah suatu sistem yang dapat diketahui kondisinya di masa yang akan datang jika diberikan kondisi pada masa sekarang atau pada masa yang lalu.

(Naggle dan Edward, 1993).

2.2. Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial biasa berdimensi n adalah suatu sistem yang memuat n persamaan diferensial biasa, dengan n variabel tak bebas yang belum diketahui, dan $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Diasumsikan persamaan diferensial yang satu dengan yang lain saling terkait dan konsisten.

(Finizio dan Ladas, 1982).

Bentuk umum sistem persamaan diferensial biasa linear berdimensi n adalah

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= g_1\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \\ \frac{dx_2}{dt} &= g_2\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= g_n\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \end{aligned} \tag{2.1}$$

dengan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah variabel bebas dan t adalah variabel terikat, sehingga $x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t), \ldots, x_n = x_n(t),$ dimana $\frac{dx_n}{dt}$ merupakan derivatif fungsi x_n terhadap t, dan g_n adalah fungsi yang bergantung pada variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dan t.

(Robinson, 2004).

2.3. Sistem Otonomus

Sistem otonomus adalah suatu sistem persamaan diferensial yang berbentuk seperti persamaan (2.1) dengan fungsi $g_1, g_2, \ldots, g_n$ tidak bergantung terhadap waktu t secara eksplisit.

(Finizio dan Ladas,1982)

Suatu sistem dikatakan sebagai sistem otonomus nonlinear apabila pada sistem tersebut terdapat perkalian antar variabel tak bebas atau dengan turunannya.

2.4. Titik Kesetimbangan

Pandang sistem otonomus

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Titik (x^*, y^*) merupakan titik kesetimbangan sistem (2.2) jika $f(x^*, y^*) = 0$ dan $g(x^*, y^*) = 0$. Titik kesetimbangan merupakan solusi sistem (2.2) yang bersifat konstan.

(Boyce dan DiPrima, 2001).

2.5. Kestabilan Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan (x^*, y^*) sistem (2.2) dikatakan:

1) stabil jika $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi $x = x(t)$ dan $y = y(t)$ dari sistem memenuhi $\left\| (x(0), y(0)) - (x^*, y^*) \right\| < \delta$ maka $\left\| (x(t), y(t)) - (x^*, y^*) \right\| < \varepsilon$, $\forall t > 0$,
2) stabil asimtotik jika stabil dan $\exists \delta_0$, $0 < \delta_0 < \delta$, sedemikian sehingga sebuah solusi $x = x(t)$ dan $y = y(t)$ yang memenuhi $\left\| (x(t), y(t)) - (x^*, y^*) \right\| < \delta_0$ bersifat $\lim_{t \to \infty} (x(t), y(t)) = (x^*, y^*)$,
3) tak stabil apabila tidak memenuhi kriteria pertama.

(Boyce dan DiPrima, 2001).

2.6. Linearisasi

Jika diketahui sistem (2.2) adalah sistem otonomus nonlinear dan diasumsikan f dan g mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik (x^* , y^*), maka deret Taylor fungsi f dan g di sekitar (x^* , y^*) adalah

$$f(x,y)=f\left(x^*,y^*\right)+\frac{\partial f\left(x^*,y^*\right)}{\partial x}\left(x-x^*\right)+\frac{\partial f\left(x^*,y^*\right)}{\partial y}\left(y-y^*\right)+\eta_1(x,y) \tag{2.3}$$

dan

$$g(x,y)=g\left(x^*,y^*\right)+\frac{\partial g\left(x^*,y^*\right)}{\partial x}\left(x-x^*\right)+\frac{\partial g\left(x^*,y^*\right)}{\partial y}\left(y-y^*\right)+\eta_2(x,y) \tag{2.4}$$

dengan $\eta_1(x,y)$ dan $\eta_2(x,y)$ adalah suku sisa.

Mengingat $\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{d\left(x-x^*\right)}{dt}$ dan $\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{d\left(y-y^*\right)}{dt}$, persamaan (2.2) dapat ditulis dalam bentuk matriks berikut

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\left(x-x^*\right)\\ \left(y-y^*\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f\left(x^*,y^*\right)\\ g\left(x^*,y^*\right)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{\partial f\left(x^*,y^*\right)}{\partial x}\left(x-x^*\right)+\frac{\partial f\left(x^*,y^*\right)}{\partial y}\left(y-y^*\right)\\ \frac{\partial g\left(x^*,y^*\right)}{\partial x}\left(x-x^*\right)+\frac{\partial g\left(x^*,y^*\right)}{\partial y}\left(y-y^*\right)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\eta_1(x,y)\\ \eta_2(x,y)\end{bmatrix}$$

atau

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\left(x-x^*\right)\\ \left(y-y^*\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f\left(x^*,y^*\right)\\ g\left(x^*,y^*\right)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{\partial f\left(x^*,y^*\right)}{\partial x} & \frac{\partial f\left(x^*,y^*\right)}{\partial y}\\ \frac{\partial g\left(x^*,y^*\right)}{\partial x} & \frac{\partial g\left(x^*,y^*\right)}{\partial y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x-x^*\\ y-y^*\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\eta_1(x,y)\\ \eta_2(x,y)\end{bmatrix}.$$

Karena $f(x^*,y^*) = g(x^*,y^*) = 0$, maka

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}(x-x^*)\\(y-y^*)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f(x^*,y^*)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(x^*,y^*)}{\partial y}\\ \dfrac{\partial g(x^*,y^*)}{\partial x} & \dfrac{\partial g(x^*,y^*)}{\partial y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x-x^*\\y-y^*\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\eta_1(x,y)\\ \eta_2(x,y)\end{bmatrix} \quad (2.5)$$

dengan matriks $$J(x,y)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f(x^*,y^*)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(x^*,y^*)}{\partial y}\\ \dfrac{\partial g(x^*,y^*)}{\partial x} & \dfrac{\partial g(x^*,y^*)}{\partial y}\end{bmatrix} \quad (2.6)$$

disebut *matriks Jacobi* atau *partial derivative matrix*.

Jika dimisalkan $u=x-x^*, v=y-y^*$, maka persamaan (2.6) dapat di tulis sebagai

$$\begin{bmatrix}\dfrac{du}{dt}\\ \dfrac{dv}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f(x^*,y^*)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(x^*,y^*)}{\partial y}\\ \dfrac{\partial g(x^*,y^*)}{\partial x} & \dfrac{\partial g(x^*,y^*)}{\partial y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\eta_1(x,y)\\ \eta_2(x,y)\end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Dan jika $\vec{w}=(u,v)^T$, maka persamaan (2.7) dapat di tulis dalam bentuk

$$\frac{d\vec{w}}{dt}=J\vec{w}+\vec{\eta}. \quad (2.8)$$

Bila (x,y) berada cukup dekat dengan (x^*, y^*), (u,v) bernilai kecil, sehingga $\|\vec{\eta}\|\le\|\vec{w}\|$. Oleh karena itu, $\vec{\eta}$ dapat diabaikan dan sistem nonlinear dapat dihampiri oleh sistem yang baru

$$\frac{d\vec{w}}{dt}=J\vec{w}. \quad (2.9)$$

Untuk $x=x^*$ dan $y=y^*$ diperoleh (u,v) = (0,0) sehingga sistem linear (2.9) memiliki titik kesetimbangan (u,v) = (0,0).

(Boyce dan DiPrima, 2005).

Teorema 2.1

1) Titik kesetimbangan sistem otonomus nonlinear bersifat stabil asimtotik jika titik kesetimbangan sistem yang dilinearkan bersifat stabil asimtotik,
2) Titik kesetimbangan sistem otonomus nonlinear bersifat tak stabil jika titik kesetimbangan sistem yang dilinearkan bersifat tak stabil,
3) Jika salah satu nilai eigen matriks bernilai nol dan yang lainnya mempunyai bagian riil negatif, maka titik kesetimbangannya bersifat stabil tetapi tidak asimtotik.

(Robinson, 2004).

Jenis kestabilan titik kesetimbangan ditentukan menggunakan nilai eigen J yaitu λ_1 dan λ_2. Berdasarkan nilai eigennya, jenis kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.2) dapat dilihat pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1. Kestabilan berdasarkan nilai eigennya

Nilai Eigen	Kestabilan
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	tidak stabil
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	stabil asimtotik
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	tidak stabil
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	tidak stabil
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	stabil asimtotik
$\lambda_1, \lambda_2 = r \pm i\mu$ $r > 0$ $r < 0$	 tidak stabil stabil asimtotik
$\lambda_1 = i\mu, \lambda_2 = -i\mu$	tidak dapat ditentukan

2.7. Orbit Periodik

Suatu solusi persamaan $\frac{d\vec{x}}{dt} = f\left(\vec{x}\right)$ disebut solusi periodik jika $\vec{x}(t)$ memenuhi $\vec{x}(t+T) = \vec{x}(t)$, untuk semua t dan untuk semua konstanta tak negatif T. Dalam hal ini T disebut periode.

Perhatikan bahwa solusi periodik membentuk orbit tertutup pada bidang fase, sehingga disebut orbit periodik.

(Boyce dan DiPrima, 2005).

2.8. Kriteria Dulac

Kriteria Dulac merupakan cara untuk menunjukkan bahwa tidak terdapat orbit periodik dalam suatu daerah di ruang fase. Misalkan diketahui lintasan sistem (2.2) dan diberikan sebuah daerah $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Jika dapat ditemukan fungsi *smooth* $h(x, y)$ sedemikian sehingga

$$\frac{\partial}{\partial x}(hf) + \frac{\partial}{\partial y}(hg) \neq 0 \tag{2.10}$$

untuk semua $x, y \in \Omega$ maka tidak terdapat orbit periodik yang terkandung sepenuhnya dalam Ω dan $h(x, y)$ disebut sebagai fungsi Dulac.

(Robinson, 2004).

2.9. Teorema Poincare-Bendixson

Teorema 2.3

Misalkan D adalah daerah terbatas pada bidang xy dan sistem (2.2) adalah sistem dinamik dimana f dan g adalah kontinu dan diferensiabel. Jika trayektori sistem dinamik selalu berada pada D untuk semua $t \geq 0$, maka trayektori haruslah memenuhi satu dari tiga bentuk berikut.

1. Orbit tertutup,
2. Menuju orbit tertutup,
3. Menuju titik kesetimbangan pada $t \to \infty$.

(Richard, 2002).

2.10. Model Logistik

Model logistik atau model Verhulst atau kurva pertumbuhan logistik adalah sebuah model pertumbuhan populasi. Model tersebut dideskripsikan sebagai berikut:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right). \tag{2.11}$$

Konstanta r diasumsikan positif, dimana r adalah tingkat pertumbuhan intrinsik karena perbandingan tingkat pertumbuhan untuk N diperkirakan sama dengan r. Konstanta positif K menyatakan daya kapasitas lingkungan, yaitu kemampuan maksimum suatu populasi.

(Boyce dan DiPrima, 2005).

2.11. Model Predator-Prey

Persamaan diferensial biasa yang menggambarkan interaksi dua spesies (*Predator-Prey*) pertamakali digunakan oleh Volterra dan dikenal dengan nama model Lotka-Volterra.

Diberikan model sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= N\left(a - bP\right) \\ \frac{dP}{dt} &= P\left(cN - d\right) \end{aligned} \tag{2.12}$$

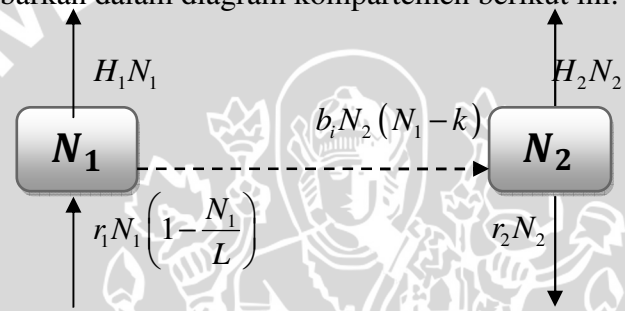
dengan a, b, c, dan d adalah konstanta positif. $N(t)$ dan $P(t)$ berturut-turut menyatakan jumlah populasi *prey* dan *predator*. Suku aN menyatakan pertumbuhan populasi *prey* tanpa adanya *predator*. Suku $-bNP$ dan cNP menyatakan interaksi spesies, dimana populasi *prey* berkurang sedangkan *predator* diuntungkan dengan kondisi ini. Suku $-dP$ menyatakan punahnya *predator* karena tidak adanya *prey*.

(Murray, 1993).

BAB III
HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Formulasi Model

Dalam skripsi ini dibahas model *predator-prey* dengan adanya perlindungan *prey*, dimana *Protozoans Paramecium caudatum* sebagai *prey* (N_1) dan *Didinium nasutum* sebagai *predator* (N_2). Perlindungan pada *Paramecium caudatum* dinotasikan dengan *k*. Model *predator-prey* tersebut digambarkan dalam diagram kompartemen berikut ini.



Gambar 3.1. Diagram kompartemen model *predator-prey* dengan perlindungan *prey*.

3.1.1. Laju Perubahan *Paramecium caudatum* (*Prey*)

Model sederhana yang menggambarkan pertumbuhan logistik *Paramecium caudatum* berdasarkan persamaan (2.11) adalah

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1N_1\left(1-\frac{N_1}{L}\right) \tag{3.1}$$

dimana N_1 adalah banyaknya populasi *Paramecium caudatum,* L menyatakan kapasitas maksimum, dan r_1 menyatakan tingkat pertumbuhan intrinsik populasi *Paramecium caudatum* sesuai dengan model logistik di atas.

Banyaknya *Paramecium caudatum* berkurang disebabkan adanya kematian akibat interaksi antara *Paramecium caudatum* dan *Didinium nasutum*. Dalam hal ini *Paramecium caudatum* dimangsa oleh *Didinium nasutum,* sehingga laju perubahan *Paramecium caudatum* berbanding lurus dengan berkurangnya *Paramecium caudatum* karena adanya interaksi antara *Paramecium caudatum* dan *Didinium nasutum* (b_1), yaitu

$$\frac{dN_1}{dt} = -b_1 N_1 N_2. \tag{3.2}$$

Jika k adalah banyaknya individu *Paramecium caudatum* yang berlindung dan tidak dapat ditemukan oleh *Didinium nasutum*, maka *Didinium nasutum* bisa menyerang *Paramecium caudatum* sebanyak ($N_1 - k$). Oleh karena itu, persamaan (3.2) berubah menjadi

$$\frac{dN_1}{dt} = -b_1 N_2 \left(N_1 - k \right). \tag{3.3}$$

Jumlah *Paramecium caudatum* juga dapat berkurang disebabkan adanya emigrasi, baik dengan dipanen ataupun pergi dengan sendirinya. Oleh karena itu, laju berkurangnya jumlah *Paramecium caudatum* berbanding lurus dengan hilangnya *Paramecium caudatum* karena adanya emigrasi, yaitu

$$\frac{dN_1}{dt} = -H_1 N_1. \tag{3.4}$$

Berdasarkan persamaan (3.1), (3.2), (3.3), dan (3.4) diperoleh laju perubahan *Paramecium caudatum* terhadap waktu, yaitu

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{L} \right) - b_1 N_2 \left(N_1 - k \right) - H_1 N_1. \tag{3.5}$$

3.1.2. Laju Perubahan *Didinium nasutum (Predator)*

Banyaknya *Didinium nasutum* dapat berkurang disebabkan kematian alami dinyatakan sebagai

$$\frac{dN_2}{dt} = -r_2 N_2 \tag{3.6}$$

dimana N_2 adalah banyaknya populasi *Didinium nasutum* dan r_2 menyatakan tingkat kematian alami *Didinium nasutum.*

Didinium nasutum hanya dapat bereproduksi jika mendapatkan makanan berupa *Paramecium caudatum.* Oleh karena itu, interaksi antara *Paramecium caudatum* dan *Didinium nasutum* menyebabkan jumlah *Didinium nasutum* bertambah, sehingga laju perubahan *Didinium nasutum* berbanding lurus dengan tingkat interaksi antara *Paramecium caudatum* dan *Didinium nasutum*, yaitu

$$\frac{dN_2}{dt} = b_2 N_1 N_2. \tag{3.7}$$

dengan b_2 menyatakan tingakat pertumbuhan *Didinium nasutum* akibat interaksi antara *Didinium nasutum* dan *Paramecium caudatum* .

Jika k adalah banyaknya individu *Paramecium caudatum* yang berlindung, yaitu aman dari *Didinium nasutum*, maka *Didinium nasutum* bisa menyerang *Paramecium caudatum* sebanyak ($N_1 - k$). Oleh karena itu, persamaan (3.7) berubah menjadi

$$\frac{dN_2}{dt} = b_2 N_2 \left(N_1 - k \right). \tag{3.8}$$

Banyaknya *Didinium nasutum* dapat berkurang disebabkan adanya emigrasi, baik dengan dipanen ataupun pergi dengan sendirinya, sehingga laju berkurangnya jumlah *Didinium nasutum* berbanding lurus dengan berkurangnya *Didinium nasutum* karena adanya emigrasi, yaitu

$$\frac{dN_2}{dt} = -H_2 N_2. \tag{3.9}$$

Berdasarkan persamaan (3.6), (3.7), (3.8), dan (3.9) diperoleh laju perubahan *Didinium nasutum* terhadap waktu, yaitu

$$\frac{dN_2}{dt} = -r_2 N_2 + b_2 N_2 \left(N_1 - k \right) - H_2 N_2. \tag{3.10}$$

Secara ringkas model *predator-prey* dengan adanya perlindungan pada *prey* pada *Didinium nasutum* dan *Paramecium caudatum* berdasarkan persamaan (3.5) dan (3.10) dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{L}\right) - b_1 N_2 \left(N_1 - k\right) - H_1 N_1 \\ \frac{dN_2}{dt} &= -r_2 N_2 + b_2 N_2 \left(N_1 - k\right) - H_2 N_2 \end{aligned} \tag{3.11}$$

dimana

N_1 adalah banyaknya individu *Paramecium caudatum* pada waktu t,

N_2 adalah banyaknya individu *Didinium nasutum* pada waktu t,

r_1 adalah tingkat pertumbuhan intrinsik *Paramecium caudatum* per satuan waktu ($r_1 > 0$),

r_2 adalah tingkat kematian alami *Didinium nasutum* per satuan waktu ($r_2 > 0$),

k adalah banyaknya individu *Paramecium caudatum* yang berlindung pada waktu t ($k \geq 0$),

L kapasitas maksimum populasi *Paramecium caudatum* ($L > 0$),

b_1 adalah tingkat kematian *Paramecium caudatum* akibat interaksi antara *Paramecium caudatum* dan *Didinium nasutum* per satuan waktu ($b_1 \geq 0$),

b_2 adalah tingkat pertumbuhan *Didinium nasutum* akibat interaksi antara *Paramecium caudatum* dan *Didinium nasutum* per satuan waktu ($b_2 \geq 0$),

H_1 adalah tingkat emigrasi *Paramecium caudatum* per satuan waktu ($H_1 \geq 0$),

H_2 adalah tingkat emigrasi *Didinium nasutum* per satuan waktu ($H_2 \geq 0$).

3.2. Analisis Model Predator-Prey dengan Perlindungan Prey

3.2.1. Titik Kesetimbangan

Berdasarkan Definisi 2.4, titik kesetimbangan sistem (3.11) dapat diperoleh jika $\frac{dN_1}{dt} = \frac{dN_2}{dt} = 0,$ yaitu

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{L}\right) - b_1 N_2 \left(N_1 - k\right) - H_1 N_1 = 0 \tag{3.12}$$

dan

$$\frac{dN_2}{dt} = -r_2 N_2 + b_2 N_2 \left(N_1 - k\right) - H_2 N_2 = 0. \tag{3.13}$$

Persamaan (3.13) dapat ditulis sebagai

$$0 = N_2 \left(-r_2 + b_2 \left(N_1 - k\right) - H_2\right).$$

Dengan demikian penyelesaian persamaan (3.13) adalah $N_2 = 0$ atau $-r_2 + b_2 \left(N_1 - k\right) - H_2 = 0.$

Persamaan (3.12) dapat ditulis sebagai

$$0 = N_1 \left(r_1 \left(1 - \frac{N_1}{L}\right) - b_1 N_2 - H_1\right) - b_1 N_2 k. \tag{3.14}$$

Jika $N_2 = 0$ disubstitusikan ke persamaan (3.14), maka diperoleh

$$0 = N_1 \left(r_1 \left(1 - \frac{N_1}{L}\right) - H_1\right).$$

Dengan demikian diperoleh $N_1 = 0$ atau $N_1 = \frac{L}{r_1}\left(r_1 - H_1\right).$

Berdasarkan uraian di atas diperoleh titik kesetimbangan

$E_0 = (0,0)$ dan $E_1 = \left(\frac{L}{r_1}\left(r_1 - H_1\right), 0\right)$. Titik kesetimbangan E_1 dijamin ada apabila $r_1 - H_1 > 0.$

Persamaan (3.13) juga memberikan solusi persamaan $0 = -r_2 + b_2 N_1 - b_2 k - H_2$, yaitu

$$N_1^* = \frac{r_2 + b_2 k + H_2}{b_2}. \tag{3.15}$$

Kemudian dari persamaan (3.12) diperoleh

$$0 = N_1\left(r_1\left(1 - \frac{N_1}{L}\right) - H_1\right) - b_1 N_2 \left(N_1 - k\right)$$

$$b_1 N_2 \left(N_1 - k\right) = N_1\left(r_1\left(\frac{L - N_1}{L}\right) - H_1\right)$$

$$b_1 N_2 \left(N_1 - k\right) = N_1\left(\frac{r_1 L - r_1 N_1 - H_1 L}{L}\right)$$

$$b_1 N_2 \left(N_1 - k\right) = \frac{N_1}{L}\left(L\left(r_1 - H_1\right) - r_1 N_1\right)$$

$$N_2^* = \frac{N_1}{L b_1 \left(N_1 - k\right)}\left(L\left(r_1 - H_1\right) - r_1 N_1\right).$$

Dengan mensubstitusikan N_1^* diperoleh N_2^*, yaitu

$$N_2^* = \frac{N_1^*}{L b_1\left(N_1^* - \left(\frac{b_2 N_1^* - r_2 - H_2}{b_2}\right)\right)}\left(L\left(r_1 - H_1\right) - r_1 N_1^*\right)$$

$$N_2^* = \frac{N_1^*}{L b_1\left(N_1^* - N_1^* + \frac{r_2}{b_2} + \frac{H_2}{b_2}\right)}\left(L\left(r_1 - H_1\right) - r_1 N_1^*\right)$$

$$N_2^* = \frac{N_1^*}{\frac{L b_1}{b_2}\left(r_2 + H_2\right)}\left(L\left(r_1 - H_1\right) - r_1 N_1^*\right)$$

$$N_2^* = \frac{b_2 N_1^*}{b_1 L\left(r_2 + H_2\right)}\left(L\left(r_1 - H_1\right) - r_1 N_1^*\right).$$

Jadi diperoleh titik kesetimbangan ke-tiga, yaitu E_2 (N_1^*, N_2^*). Titik kesetimbangan E_2 ada jika $r_1 - H_1 > 0$ dan $L\left(r_1 - H_1\right) - r_1 N_1^* > 0$.

3.2.2. Kestabilan Titik Kesetimbangan

Sistem (3.11) merupakan suatu sistem otonomus nonlinear. Dengan memisalkan sistem (3.11) sebagai

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_1}{\partial t} = f\left(N_1, N_2\right) \\ \dfrac{\partial N_2}{\partial t} = g\left(N_1, N_2\right) \end{cases}$$

maka dalam menentukan kestabilan lokal titik kesetimbangannya dilakukan proses linearisasi untuk sistem (3.11) menggunakan matriks Jacobi, yaitu

$$J\left(N_1, N_2\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f\left(N_1, N_2\right)}{\partial N_1} & \dfrac{\partial f\left(N_1, N_2\right)}{\partial N_2} \\ \dfrac{\partial g\left(N_1, N_2\right)}{\partial N_1} & \dfrac{\partial g\left(N_1, N_2\right)}{\partial N_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r_1 - 2r_1 \dfrac{N_1}{L} - b_1 N_2 - H_1 & -b_1 N_1 + b_1 k \\ b_2 N_2 & -r_2 + b_2 N_2 - b_2 k - H_2 \end{bmatrix}. \tag{3.16}$$

Nilai eigen matriks Jacobi tersebut merupakan acuan dalam menentukan kestabilan titik kesetimbangan. Berdasarkan persamaan (3.16) maka nilai eigen tersebut diperoleh melalui

$$\det\left(J\left(N_1^*, N_2^*\right) - \lambda I\right) = 0 \tag{3.17}$$

dimana $\left(N_1^*, N_2^*\right)$ merupakan titik kesetimbangan.

3.2.2.1. Kestabilan Titik Kesetimbangan E_0

Akan diperiksa jenis kestabilan E_0 (0,0) dengan menentukan nilai eigen $J(E_0)$, yaitu

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} r_1 - H_1 & b_1 k \\ 0 & -r_2 - b_2 k - H_2 \end{bmatrix}.$$

Karena $J(E_0)$ adalah matriks segitiga atas, maka jelas bahwa nilai eigennya adalah $\lambda_{1.1} = r_1 - H_1$ dan $\lambda_{1.2} = -r_2 - b_2 k - H_2$.

Jika $r_1 - H_1 < 0,$ maka diperoleh nilai eigen $\lambda_{1.1}$ dan $\lambda_{1.2}$ negatif. Jadi titik kesetimbangan E_0 adalah stabil asimtotik lokal jika $r_1 - H_1 < 0.$

Berdasarkan hasil pembahasan di atas, dapat disusun Lemma sebagai berikut.

Lemma 3.1. Jika titik kesetimbangan E_0 adalah stabil asimtotik lokal, maka titik kesetimbangan E_1 dan E_2 tidak ada.

Bukti. Diketahui titik kesetimbangan E_0 stabil asimtotik lokal jika $r_1 - H_1 < 0.$

Sedangkan syarat eksistensi titik kesetimbangan E_1 adalah $r_1 - H_1 > 0$ dan syarat eksistensi titik kesetimbangan E_2 adalah $r_1 - H_1 > 0$ dan $L(r_1 - H_1) - r_1 N_1^* > 0.$

Dengan demikian jika E_0 stabil asimtotik lokal, maka titik kesetimbangan E_1 dan E_2 tidak ada.

3.2.2.2. Kestabilan Titik Kesetimbangan E_1

Dengan mensubstitusikan $E_1 \left(\frac{L}{r_1}(r_1 - H_1), 0\right)$ dengan $r_1 - H_1 > 0$ ke dalam matriks Jacobi diperoleh

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -(r_1 - H_1) & b_1\left(\frac{L}{r_1}(r_1 - H_1) - k\right) \\ 0 & -r_2 - b_2 k - H_2 + \frac{b_2 L}{r_1}(r_1 - H_1) \end{bmatrix}.$$

Nilai eigennya adalah $\lambda_{2.1} = -(r_1 - H_1)$ dan $\lambda_{2.2} = -r_2 - b_2 k - H_2 + \frac{b_2 L}{r_1}(r_1 - H_1).$

Jika syarat eksistensi $r_1 - H_1 > 0,$ maka nilai eigen $\lambda_{2.1}$ negatif. Titik kesetimbangan E_1 akan stabil asimtotik lokal jika $\lambda_{2.2}$ juga bernilai negatif, yaitu

$$-r_2 - b_2 k - H_2 + \frac{b_2 L}{r_1}(r_1 - H_1) < 0$$

$$-r_2 - H_2 + b_2\left(\frac{L}{r_1}(r_1 - H_1) - k\right) < 0$$

$$b_2\left(\frac{L}{r_1}(r_1 - H_1) - k\right) < r_2 + H_2$$

$$b_2\left(\frac{L(r_1 - H_1) - r_1 k}{r_1}\right) < r_2 + H_2$$

$$b_2 < \frac{r_1(r_2 + H_2)}{L(r_1 - H_1) - r_1 k}.$$

Dengan demikian titik kesetimbangan E_1 bersifat stabil asimtotik lokal jika $b_2 < \dfrac{r_1(r_2 + H_2)}{L(r_1 - H_1) - r_1 k}$.

Berdasarkan uraian di atas, dapat disusun Lemma sebagai berikut.

Lemma 3.2. Jika titik kesetimbangan E_1 adalah stabil asimtotik lokal, maka titik kesetimbangan E_2 tidak ada.

Bukti. Titik kesetimbangan E_1 stabil asimtotik lokal jika syarat eksistensi $r_1 - H_1 > 0$ dan $b_2 < \dfrac{r_1(r_2 + H_2)}{L(r_1 - H_1) - r_1 k}$.

Eksistensi titik kesetimbangan E_2 dijamin ada apabila $r_1 - H_1 > 0$ dan $L(r_1 - H_1) - r_1 N_1^* > 0$.

Syarat kestabilan titik kesetimbangan E_1 dapat ditulis dalam bentuk

$$b_2 < \frac{r_1(r_2 + H_2)}{L(r_1 - H_1) - r_1 k}$$

$$L(r_1 - H_1) - r_1 k < \frac{r_1(r_2 + H_2)}{b_2}$$

$$L(r_1 - H_1) - r_1 k - \frac{r_1(r_2 + H_2)}{b_2} < 0$$

$$\frac{b_2\left(L(r_1 - H_1) - r_1 k\right) - r_1(r_2 + H_2)}{b_2} < 0$$

$$\frac{b_2L(r_1-H_1)-b_2r_1k-r_1(r_2+H_2)}{b_2}<0$$

$$\frac{b_2L(r_1-H_1)-r_1(r_2+b_2k+H_2)}{b_2}<0$$

$$L(r_1-H_1)-r_1\left(\frac{r_2+b_2k+H_2}{b_2}\right)<0$$

$$L(r_1-H_1)-r_1N_1^*<0.$$

Berdasarkan uraian Lemma di atas terbukti bahwa syarat kestabilan titik kesetimbangan E_1 kontradiksi dengan syarat eksistensi titik kesetimbangan E_2. Dengan demikian jika titik kesetimbangan E_1 adalah stabil asimtotik lokal, maka titik kesetimbangan E_2 tidak ada.

3.2.2.3. Kestabilan Titik Kesetimbangan E_2

Substitusi titik kesetimbangan E_2 (N_1^*, N_2^*) ke dalam matriks (3.16) menghasilkan

$$J(E_2)=\begin{bmatrix} -\frac{r_1N_1^*}{L}-\frac{b_1kN_2^*}{N_1^*} & -b_1\left(N_1^*-k\right) \\ b_2N_2^* & 0 \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen dari matriks $J(E_2)$ dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan karakteristik

$$\det(J(E_2)-\lambda I)=\begin{vmatrix} \left(-\frac{r_1N_1^*}{L}-\frac{b_1kN_2^*}{N_1^*}\right)-\lambda & -b_1\left(N_1^*-k\right) \\ b_2N_2^* & -\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\left(\left(-\frac{r_1N_1^*}{L}-\frac{b_1kN_2^*}{N_1^*}\right)-\lambda\right)(-\lambda)-\left(b_2N_2^*\right)\left(-b_1\left(N_1^*-k\right)\right)=0.$$

Persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk

$$\lambda^2+A\lambda+B=0 \tag{3.18}$$

dimana

$$A = \frac{r_1 N_1^*}{L} + \frac{b_1 k N_2^*}{N_1^*}, (>0),$$

$$B = b_2 N_2^* b_1 \left(N_1^* - k \right), (>0).$$

Dari persamaan (3.18) dapat diperoleh nilai eigen $\lambda_{3.1}$ dan $\lambda_{3.2}$, yaitu

$$\lambda_{3.1,3.2} = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 4(1)(B)}}{2(1)}$$

$$\lambda_{3.1,3.2} = \frac{-\left(\frac{r_1 N_1^*}{L} + \frac{b_1 k N_2^*}{N_1^*} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{r_1 N_1^*}{L} + \frac{b_1 k N_2^*}{N_1^*} \right)^2 - 4\left(b_2 N_2^* b_1 \left(N_1^* - k \right) \right)}}{2}. \tag{3.19}$$

Jika $\left(\frac{r_1 N_1^*}{L} + \frac{b_1 k N_2^*}{N_1^*} \right)^2 > 4\left(b_2 N_2^* b_1 \left(N_1^* - k \right) \right)$, maka pada bagian akar persamaan (3.19) bernilai riil, sehingga nilai eigen $\lambda_{3.1}$ dan $\lambda_{3.2}$ bernilai negatif dan titik kesetimbangannya adalah stabil asimtotik lokal. Sedangkan jika $\left(\frac{r_1 N_1^*}{L} + \frac{b_1 k N_2^*}{N_1^*} \right)^2 < 4\left(b_2 N_2^* b_1 \left(N_1^* - k \right) \right)$, maka pada bagian akar persamaan (3.19) bernilai imajiner dan pada bagian riilnya tetap bernilai negatif, sehingga titik kesetimbangannya adalah stabil asimtotik lokal.

Berdasarkan hasi pembahasan di atas, dapat disusun Lemma sebagai berikut.

Lemma 3.3. Titik kesetimbangan E_2 dijamin ada dan stabil asimtotik lokal jika memenuhi

1) $r_1 - H_1 > 0,$
2) $b_2 < \frac{r_1 \left(r_2 + H_2 \right)}{L\left(r_1 - H_1 \right) - r_1 k}.$

3.2.2.4. Kestabilan Global

Akan dibuktikan bahwa sistem (3.11) adalah stabil asimtotik global karena tidak memiliki orbit periodik sesuai dengan kriteria Dulac. Jika titik kesetimbangan E_2 stabil asimtotik lokal, maka sesuai dengan Teorema Poincare-Bendixson titik kesetimbangan tersebut tidak memiliki orbit periodik.

Teorema 3.1. Sistem (3.11) tidak memiliki orbit periodik.

Bukti. Misalkan $h(N_1, N_2) = \dfrac{1}{N_1 N_2}$.

Menurut kriteria Dulac sistem (3.11) tidak memiliki orbit periodik jika $\dfrac{d(fh)}{dN_1} + \dfrac{d(gh)}{dN_2} \neq 0$.

Berikut akan diperiksa nilai $\dfrac{d(fh)}{dN_1} + \dfrac{d(gh)}{dN_2}$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\frac{d(fh)}{dN_1} &= \frac{d}{dN_1}\left(\left(\frac{1}{N_1 N_2}\right)\left(r_1 N_1\left(1-\frac{N_1}{L}\right) - b_1 N_2 (N_1 - k) - H_1 N_1\right)\right) \\
&= \frac{d}{dN_1}\left(\frac{r_1}{N_2} - \frac{r_1 N_1}{L N_2} - b_1 + \frac{b_1 k}{N_1} + \frac{H_1}{N_2}\right) \\
&= -\frac{r_1 N_1}{L N_2} - \frac{b_1 k}{N_1^2}
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
\frac{d(gh)}{dN_2} &= \frac{d}{dN_2}\left(\left(\frac{1}{N_1 N_2}\right)\left(-r_2 N_2 + b_2 N_2 (N_1 - k) - H_2 N_2\right)\right) \\
&= \frac{d}{dN_2}\left(-\frac{r_2}{N_1} + b_2 - \frac{b_2 k}{N_1} - \frac{H_2}{N_1}\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh $\frac{d(fh)}{dN_1}+\frac{d(gh)}{dN_2}=-\left(\frac{r_1N_1}{LN_2}+\frac{b_1k}{N_1^2}\right)\neq 0,$ jika $N_1>0$ dan $N_2>0.$

Jadi terbukti bahwa sistem (3.11) tidak memilki orbit, sehingga sistem (3.11) adalah stabil asimtotik global.

Berdasarkan uraian Lemma 3.1, Lemma 3.2, Lemma 3.3, dan Teorema 3.1 sistem (3.11) memiliki sifat-sifat seperti dalam Tabel.3.1.

Tabel.3.1. Sifat-sifat Titik kesetimbangan sistem (3.11)

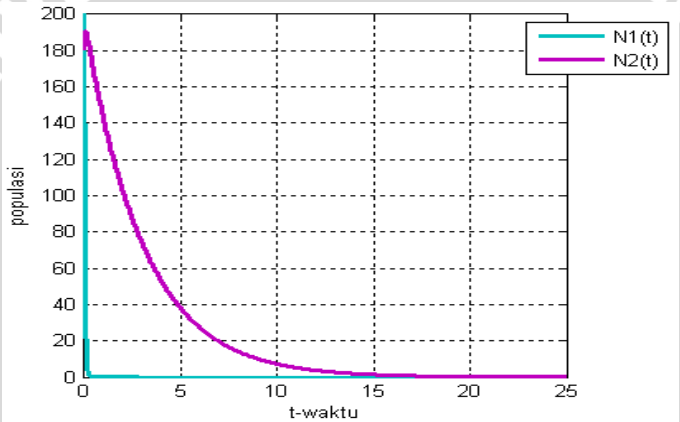
Titik Kesetimbangan	Syarat Eksistensi	Syarat Kestabilan	Jenis Kestabilan
$E_0\,(0,0)$	-	$r_1-H_1<0$	stabil asimtotik lokal
$E_1\left(\frac{L}{r_1}(r_1-H_1),0\right)$	$r_1-H_1>0$	$r_1-H_1>0$ dan $b_2<\frac{r_1(r_2+H_2)}{L(r_1-H_1)-r_1k}$	stabil asimtotik lokal
$E_2\left(N_1^*,N_2^*\right)$	$r_1-H_1>0$ dan $b_2>\frac{r_1(r_2+H_2)}{L(r_1-H_1)-r_1k}$	$r_1-H_1>0$ dan $b_2>\frac{r_1(r_2+H_2)}{L(r_1-H_1)-r_1k}$	stabil asimtotik global

3.3. Simulasi Numerik

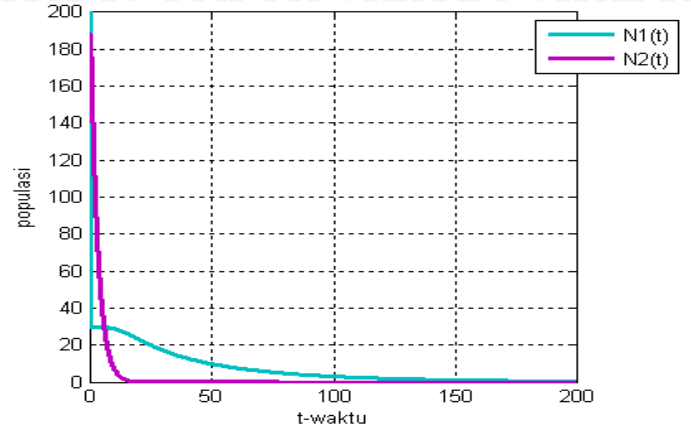
Berikut ini akan dilakukan simulasi numerik model *predator-prey* dengan mempertimbangkan adanya perlindungan pada *prey* (*k*). Perlindungan pada prey adalah banyaknya *Paramecium caudatum* yang berlindung dari

Didinium nasutum. Berikut akan dilakukan simulasi numerik model *predator-prey* yang ditunjukkan oleh sistem (3.11) dengan metode Runge Kutta orde empat menggunakan *software* Matlab.

Berdasarkan Pembahasan sebelumnya, ketika $r_1 - H_1 < 0$ sistem (3.11) memiliki titik kesetimbangan E_0 (0,0) yang stabil. Dalam simulasi ini digunakan parameter $r_1 = 0.18$, $r_2 = 0.3$, $L = 300$, $b_1 = 0.1$, $b_2 = 0.01$, $H_1 = 0.2$, dan $H_2 = 0.03$, sehingga diperoleh $r_1 - H_1 = -0.02 < 0$.

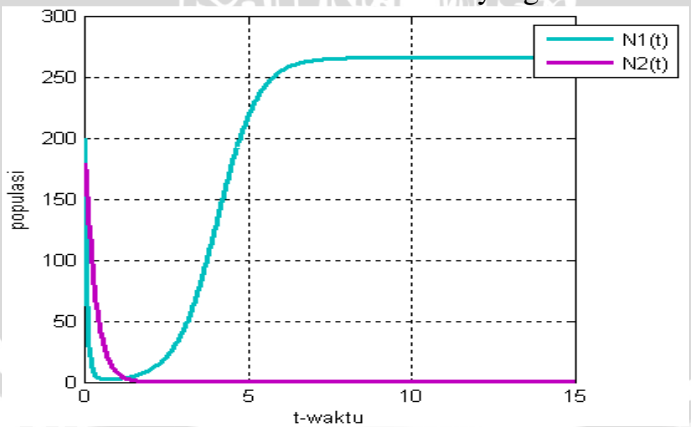


Gambar 3.2. Solusi numerik menuju E_0 (0,0) dengan $k = 0$, untuk nilai awal (200,180).

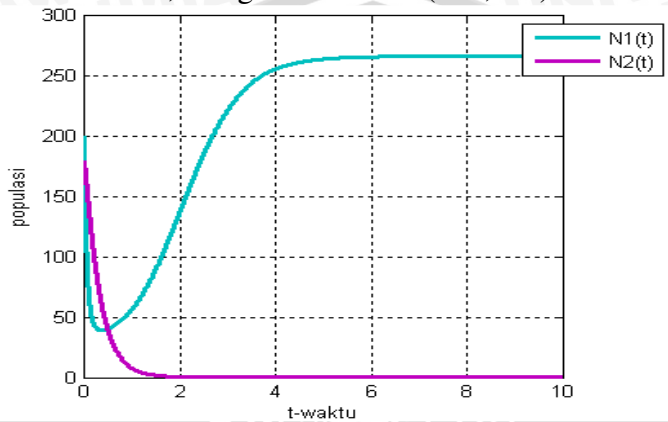


Gambar 3.3. Solusi numerik menuju $E_0\,(0,0)$ dengan $k = 30$, dengan nilai awal (200,180).

Simulasi dengan $k = 0$ dan $k = 30$ yang ditunjukkan oleh Gambar 3.2 dan Gambar 3.3 menunjukkan bahwa simulasi numerik konvergen ke E_0. Titik kesetimbangan E_0 adalah stabil, sehingga kedua populasi tersebut habis dan tidak ada lagi interaksi antara *Didinium nasutum* dan *Paramecium caudatum.* Ketika tidak ada perlindungan pada *Paramecium caudatum,* maka populasi *Didinium nasutum* dan *Paramecium caudatum* akan habis. Di sisi lain, jika ada beberapa perlindungan pada *Paramecium caudatum,* maka kedua populasi tersebut akan habis dalam waktu yang lebih lama.



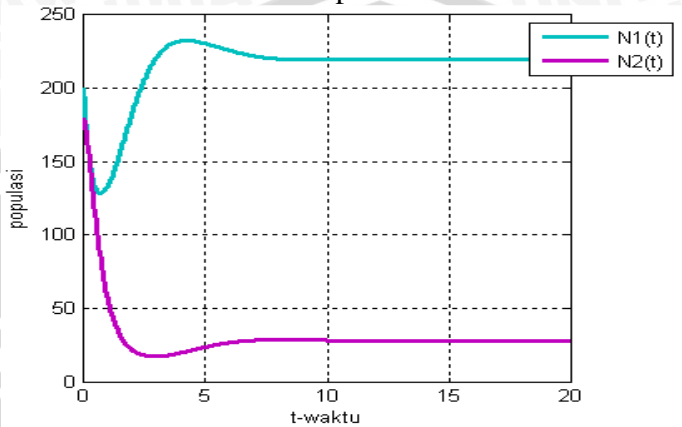
Gambar 3.4. Solusi numerik menuju E_1 (266.667,0) dengan $k = 0$, dengan nilai awal (200,180).



Gambar 3.5. Solusi numerik menuju E_1 (266.667,0) dengan $k = 30$, dengan nilai awal (200,180).

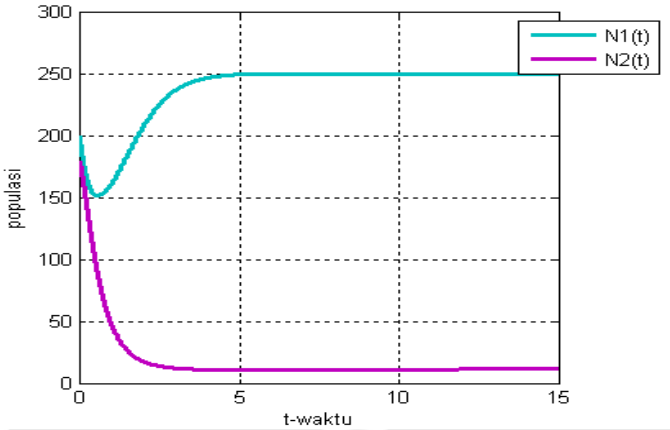
Untuk $r_1 - H_1 > 0$ dan $b_2 < \dfrac{r_1(r_2 + H_2)}{L(r_1 - H_1) - r_1 k}$, diperoleh titik kesetimbangan E_1 yang stabil. Dalam simulasi berikut digunakan parameter $r_1 = 1.8$, $r_2 = 3$, $L = 300$, $b_1 = 0.1$, $b_2 = 0.01$, $H_1 = 0.2$, dan $H_2 = 0.3$, sehingga diperoleh titik kesetimbangan $E_1 = (266.667,0)$, nilai $r_1 - H_1 = 1.6 > 0$, $b_2 = 0.0124$ untuk $k = 0$, dan $b_2 = 0.0139$ untuk $k = 30$. Simulasi dengan $k = 0$ dan $k = 30$ yang ditunjukkan oleh Gambar 3.4 dan Gambar 3.5 menunjukkan bahwa simulasi numerik konvergen ke E_1. Titik kesetimbangan E_1 adalah stabil, sehingga populasi *Didinium nasutum* habis dan tidak ada lagi interaksi antara *Didinium nasutum* dan *Paramecium caudatum.* Tanpa adanya perlindungan yang ditunjukkan pada Gambar 3.4, maka jumlah *Didinium nasutum* berkurang mengikuti berkurangnya jumlah *Paramecium caudatum* hingga mendekati nol. Selanjutnya jumlah *Paramecium caudatum* akan bertambah pesat karena jumlah *Didinium nasutum* habis. Di lain pihak, jika *Paramecium caudatum* diberikan perlindungan seperti pada Gambar 3.5, maka populasi

Didinium nasutum berkurang menuju nol dan populasi *Paramecium caudatum* lebih cepat bertambah.



Gambar 3.6. Solusi numerik menuju $E_2\,(N_1^*, N_2^*)$ dengan k = 0, dengan nilai awal (200,180).

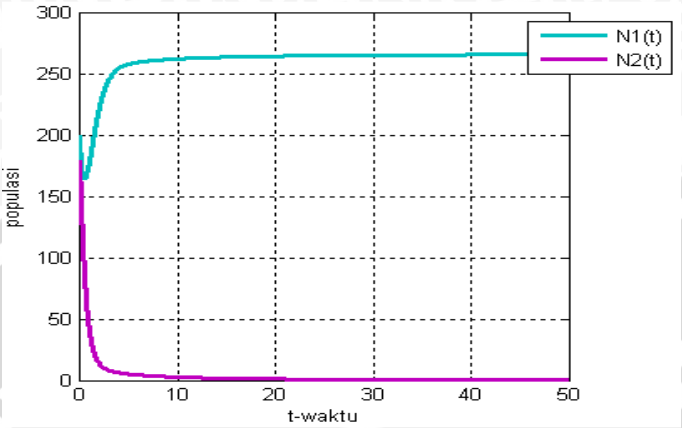
Untuk $r_1 - H_1 > 0$ dan $b_2 > \dfrac{r_1(r_2 + H_2)}{L(r_1 - H_1) - r_1 k}$, sistem (3.11) memiliki titik kesetimbangan $E_2\,(N_1^*, N_2^*)$. Berikut adalah simulasi numerik untuk $k = 0$ menggunakan parameter r_1 = 1.8, $r_2 = 3$, $L = 300$, $b_1 = 0.01$, $b_2 = 0.015$, $H_1 = 0.2$, dan H_2 = 0.3, sehingga diperoleh titik kesetimbangan E_2 = (220,28), nilai $r_1 - H_1 = 1.6 > 0$, dan b_2 = 0.0124. Sedangkan untuk k = 30 diperoleh titik kesetimbangan E_2 = (250,11.36), nilai $r_1 - H_1 = 1.6 > 0$, dan b_2 = 0.0139. Solusi pada Gambar 3.6 dan Gambar 3.7 menunjukkan bahwa hasil simulasi numerik konvergen ke E_2 yang menunjukkan bahwa titik kesetimbangan E_2 stabil, sehingga berlangsung interaksi yang berkelanjutan antara *Didinium nasutum* dan *Paramecium caudatum.*



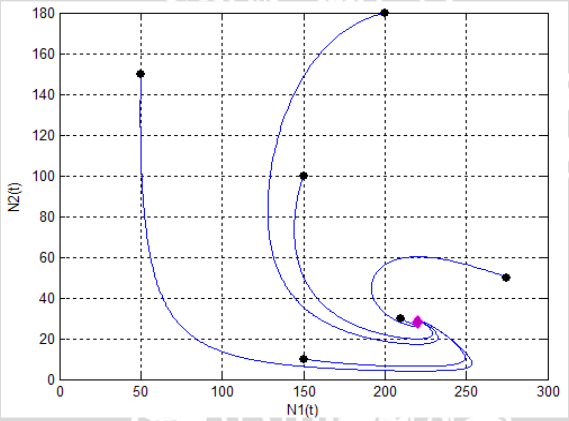
Gambar 3.7. Solusi numerik menuju $E_2\,(N_1^*, N_2^*)$ dengan k = 30, dengan nilai awal (200,180).

Selanjutnya pada Gambar 3.8 dengan $k = 50$ diperoleh nilai $b_2 = 0.0152$ yang menunjukkan bahwa grafik tidak stabil menuju $E_2\,(N_1^*, N_2^*)$. Hal ini dikarenakan nilai b_2 tidak memenuhi syarat kestabilan karena $b_2 = 0.015 < \dfrac{r_1(r_2 + H_2)}{L(r_1 - H_1) - r_1 k} = 0.0152$.

Pada Gambar 3.6 dengan $k = 0$, maka jumlah *Didinium nasutum* mengikuti jumlah *Paramecium caudatum* dan interaksi terus berlanjut. Di sisi lain, jika $k = 30$ seperti pada Gambar 3.7, maka interaksi antar kedua populasi tersebut terus berlanjut, dimana jumlah *Didinium nasutum* semakin berkurang dan jumlah *Paramecium caudatum* akan lebih besar. Di pihak lain, jika diberikan perlindungan yang cukup besar seperti pada Gambar 3.8, yaitu $k = 50$, maka jumlah *Didinium nasutum* akan terus berkurang menuju nol karena tidak dapat menemukan makanannya, sehingga jumlah *Paramecium caudatum* bertambah dengan pesat.



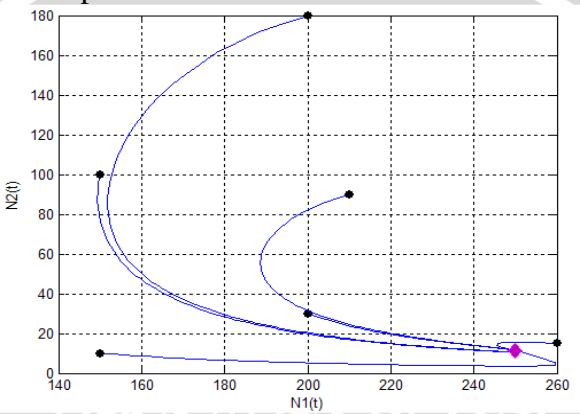
Gambar 3.8. Solusi numerik menuju $E_2\,(N_1^*, N_2^*)$ dengan $k =$ 50, dengan nilai awal (200,180).



Gambar 3.9. Potret phase (N_1^*, N_2^*) dengan $k = 0$ dan beberapa nilai awal yang berbeda. Semua orbit menuju E_2 (220,28).

Berdasarkan Gambar 3.9, untuk beberapa syarat awal yang berbeda, semua orbit pada oktan pertama tertarik ke titik kesetimbangan E_2 = (220,28). Jadi, titik kesetimbangan E_2 dengan $k = 0$ stabil secara global pada oktan pertama dengan parameter-parameter tersebut.

Selanjutnya pada Gambar 3.10, untuk $k = 30$ dan beberapa syarat awal yang berbeda, semua orbit pada oktan pertama tertarik ke titik kesetimbangan E_2 = (250,11.36). Jadi, titik kesetimbangan E_2 stabil secara global pada oktan pertama dengan parameter-parameter tersebut.



Gambar 3.10. Potret phase (N_1^*, N_2^*) dengan $k = 30$ dan beberapa nilai awal yang berbeda. Semua orbit menuju E_2 (250,11.36).

BAB IV
KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan skripsi ini, dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut

1. Dengan menggunakan diagram kompartemen, diperoleh model *predator-prey* dengan perlindungan *prey* yang merupakan sistem otonomus nonlinear dengan dua variabel tak bebas N_1 dan N_2, dan variabel bebas t. Parameter-parameter yang berpengaruh di antaranya tingkat pertumbuhan intrinsik *prey,* kematian alami *predator*, kapasitas maksimum, tingkat interaksi antara *prey* dan *predator,* tingkat emigrasi, dan banyaknya *prey* yang berlindung.
2. Model *predator-prey* dengan perlindungan *prey* mempunyai tiga titik kesetimbangan, yaitu titik titik kesetimbangan E_0, E_1, dan E_2.
3. Jika titik kesetimbangan E_0 bersifat stabil asimtotik lokal, maka titik kesetimbangan E_1 dan E_2 tidak ada, sedangkan jika titik kesetimbangan E_1 bersifat stabil asimtotik lokal, maka titik kesetimbangan E_2 tidak ada. Dan jika titik kesetimbangan E_2 bersifat stabil asimtotik global, maka titik kesetimbangan E_0 dan E_1 tidak stabil.

DAFTAR PUSTAKA

Boyce, W.E. dan R.C. DiPrima. 2005. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Seventh edition, John Willey & Sons, Inc. United State of America.

Chattopadhyay, J. 2000. *A Predator-Prey Model with Some Cover on Prey Species.* Embryology Research Unit. India.

Finizio dan G. Ladas. 1982. *Persamaan Differensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Edisi ke-dua. Terjemahan Widiarti Santoso. Erlangga. Jakarta.

Gause, G.F. 1934. *The Struggle for Existence*. University of Moscow. Russia.

Murray, J.D. 1993. *Mathematical Biology.* Applied Mathematics Department. University of Washington.

Naggle, R.K. dan E.S. Saff. 1993. *Fundamental of Differential Equation and Boundary Value Problem.* Addison-Wesley Publishing Company. USA.

Richard, D. 2002. *Advanced Mathematics Method with Maple.* Cambridge University Press: UK.

Robinson, J.C. 2004. *An Introduction to Ordinary Differential Equations*. Cambridge University Press. New York.

LAMPIRAN

Lampiran 1. *Listing Program* untuk Simulasi Numerik Titik Kesetimbangan pada Model *Predator-Prey* dengan Metode Runge Kutta Orde Empat Menggunakan *Software* Matlab 7.0

```
function dy=PP(t,y);

r1 = 1.8;
r2 = 3;
L = 300;
b1 = 0.01;
b2 = 0.1;
c1 = 0.2;
c2 = 0.3;
k = 0;

dy(1)=r1*y(1)*(1-y(1)/L)-b1*y(2)*(y(1)-k)-c1*y(1);
dy(2)=-r2*y(2)+b2*y(2)*(y(1)-k)-c2*y(2);


function [T,Z]=rks4(PP,a,b,Za,M)
h=(b-a)/M;
T=zeros(1,M+1);
Z=zeros(M+1,length(Za));
T=a:h:b;
Z(1,:)=Za;
for j=1:M
    k1=h*feval(PP,T(j),Z(j,:));
    k2=h*feval(PP,T(j)+h/2,Z(j,:)+k1/2);
    k3=h*feval(PP,T(j)+h/2,Z(j,:)+k2/2);
    k4=h*feval(PP,T(j)+h,Z(j,:)+k3);
    Z(j+1,:)=Z(j,:)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;

end;


[t y]=rks4('PP',0,25,[200 180],500);
figure(1);
```

```
plot(t,y,'linewidth',1.5);
hold on;

xlabel('t-waktu');
ylabel('populasi');
grid on
axis square
legend('N1(t)','N2(t)');

figure(2);
plot(y(:,1),y(:,2));
hold on
plot(y(1,1),y(1,2),'k.');
plot(y(500,1),y(500,2),'md');
hold off
hold on
xlabel('N1(t)');
ylabel('N2(t)');
grid on
```