TEOREMA TITIK TETAP REICH PADA RUANG METRIK

SKRIPSI

Oleh:
NADZIFA SANDI RAHMAWATI
0610940036-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2011

TEOREMA TITIK TETAP REICH PADA RUANG METRIK

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh:
NADZIFA SANDI RAHMAWATI
0610940036-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2011

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

TEOREMA TITIK TETAP REICH
PADA RUANG METRIK

Oleh :
NADZIFA SANDI RAHMAWATI
0610940036-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 22 Juli 2011
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Pembimbing I	Pembimbing II
Dr. Ratno Bagus E. W., M.Si.	Kwardiniya A., S.Si., M.Si.
NIP. 197509082000031003	NIP. 197006221998022001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Abdul Rouf A., M.Sc
NIP. 196709071992031001

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	:	Nadzifa Sandi Rahmawati
Nim	:	0610940036-94
Jurusan	:	Matematika
Penulis tugas akhir berjudul	:	Teorema Titik Tetap Reich pada Ruang Metrik

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. Isi Skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan di daftar pustaka dalam Skripsi ini.
2. Apabila di kemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 22 Juli 2011
Yang menyatakan,

Nadzifa Sandi Rahmawati
NIM. 0610940036-94

TEOREMA TITIK TETAP REICH PADA RUANG METRIK

ABSTRAK

Dalam skripsi ini dibahas pemetaan Reich dan teorema titik tetap pada pemetaan Reich. Pemetaan $f : X \to X$ dengan (X, d) ruang metrik disebut pemetaan Reich jika untuk setiap $x, y \in X$ dan $a + b + c < 1$ berlaku:
$d(f(x), f(y)) \leq ad(x, f(x)) + bd(y, f(y)) + cd(x, y)$, dengan $a, b, c \geq 0$. Selain itu ditunjukkan pula hubungan pemetaan Reich dengan pemetaan kontraksi.

Kata kunci : pemetaan Reich, pemetaan kontraksi, teorema titik tetap, ruang metrik.

REICH FIXED POINT THEOREM IN METRIC SPACE

ABSTRACT

This final project discusses Reich mapping and fixed point theorem on Reich mapping. A mapping $f : X \to X$ on metric space (X, d) is called Reich mapping if every $x, y \in X$ and $a + b + c < 1$ satisfied $d(f(x), f(y)) \leq ad(x, f(x)) + bd(y, f(y)) + cd(x, y)$, with $a, b, c \geq 0$. It is also shown the relation between Reich mapping and contractive mapping.

Key words: Reich mapping, contractive mapping, fixed point theorem, metric space.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

KATA PENGANTAR

Segala puji syukur bagi Allah SWT. yang telah melimpahkan rahmat, taufik dan hidayah-Nya sehingga tugas akhir ini dapat diselesaikan dengan baik. Sholawat dan salam tetap tercurahkan kepada kekasih Allah yang paling utama yaitu nabi Muhammad SAW.

Dalam penyusunan Skripsi dengan judul "Teorema Titik Tetap Reich pada Ruang Metrik" banyak pihak yang telah membantu. Oleh karena itu penulis mengucapkan terimakasih kepada :

1. R. Bagus E. W., M.Si., Ph.D. selaku dosen pembimbing I atas bimbingan, kesabaran dan koreksi skripsi ini sehingga layak untuk diajukan sebagai syarat kelulusan penulis.
2. Kwardiniya A., S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing II atas bimbingan, motivasi dan koreksi di dalam penulisan skripsi ini.
3. Drs. M. Muslikh, M.Si., Dr. Wuryansari Muharini K., M.Si., dan Prof. Dr. Marjono, M.Phil., selaku dosen penguji pada ujian skripsi atas segala saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini
4. Endang Wahyu H., M.Si. selaku dosen pembimbing akademik atas bimbingan yang terarah bagi penulis selama masa perkuliahan.
5. Dosen pengajar jurusan Matematika atas kesabaran dan bimbingan selama masa perkuliahan dan keikhlasan dalam memberikan ilmu yang bermanfaat.
6. Ayah, ibu, kakak, dan seluruh keluaga besar penulis yang senantiasa tanpa henti memberikan semangat dan dorongan serta doanya agar penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
7. Rekan-rekan "Mat[6]ic" atas kerjasama dan dukungannya selama ini.

Penulis menyadari masih banyak kekurangan dalam penulisan Skripsi ini. Oleh karena itu, segala macam kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan demi perbaikan selanjutnya. Semoga tulisan ini bermanfaat bagi penulis dan semua pihak.

Malang,

Penulis

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL i
LEMBAR PENGESAHAN TUGAS AKHIR iii
LEMBAR PERNYATAAN v
ABSTRAK vii
ABSTRACT ix
KATA PENGANTAR xi
DAFTAR ISI xiii

BAB I PENDAHULUAN 1
1.1. Latar Belakang 1
1.2. Rumusan Masalah 1
1.3. Tujuan 1

BAB II TINJAUAN PUSTAKA 3
2.1. Ruang Metrik 3
2.2. Pemetaan Pada Ruang Metrik 5
2.3. Titik Tetap Pada Ruang Metrik 7

BAB III PEMBAHASAN 9
3.1. Pemetaan Reich 9
3.2. Teorema Titik Tetap Reich 16

BAB IV PENUTUP 21
4.1. Kesimpulan 21
4.2. Saran 21

DAFTAR PUSTAKA 23

DAFTAR SIMBOL

Simbol	Keterangan
$d(x,y)$	Fungsi jarak antara titik x dan y
$\langle x_n \rangle$	Barisan titik x_n
$\langle x_{n_k} \rangle$	Subbarisan $\langle x_n \rangle$
$\square$	Himpunan bilagan riil
$\square$	Himpunan bilangan asli
f^n	Fungsi komposisi ke n dari fungsi f
$\varnothing$	Himpunan kosong
k	Konstanta pemetaan kontraksi

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Perkembangan teorema titik tetap memberikan pengaruh besar terhadap perkembangan analisis matematika dan memberikan solusi yang dapat digunakan pada berbagai macam bidang. Titik tetap seringkali digunakan untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan pada persamaan integral, diferensial, optimasi, serta pada disiplin ilmu lainnya.

Pada tahun 1922, Stefan Banach, membuktikan suatu teorema yang menjamin eksistensi dan ketunggalan titik tetap pada pemetaan kontraksi. Teorema tersebut dinamakan Teorema Titik Tetap Banach atau Prinsip Kontraksi Banach. Teorema ini menyediakan suatu metode untuk menyelesaikan berbagai macam masalah dalam ilmu matematika dan teknik. Beberapa ahli kemudian memperluas, memperumum, dan menyempurnakan teorema titik tetap tersebut dalam berbagai cara, seperti Kannan, Chu-diaz, Reich, dan lainnya (Ahmed, 2003).

Secara umum, teorema-teorema yang dibahas tersebut diaplikasikan pada ruang metrik. Meskipun sama penggunaannya yaitu pada ruang metrik, kontraksi yang digunakan dalam setiap teorema-teorema tersebut berbeda (Zafar dan Ali, 2009).

Teorema titik tetap pada ruang metrik yang sering dibahas adalah teorema titik tetap Banach dan Kannan. Oleh karena itu, dalam skripsi ini akan diperkenalkan serta dijelaskan tentang pemetaan Reich dan teorema titik tetap dari pemetaan Reich pada ruang metrik serta hubungan antara pemetaan Reich dengan pemetaan kontraksi.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, pokok permasalahan yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimanakah definisi pemetaan Reich?
2. Bagaimanakah hubungan antara pemetaan Reich dengan pemetaan kontraksi?
3. Apakah pemetaan Reich menjamin adanya titik tetap?

1.3 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Memperkenalkan dan menjelaskan pemetaan Reich.
2. Mengetahui hubungan pemetaan Reich dengan pemetaan kontraksi.
3. Menyelidiki eksistensi titik tetap pada pemetaan Reich.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Ruang Metrik

Definisi 2.1 (Ruang Metrik)
Diberikan himpunan $X \neq \emptyset$, dan himpunan $\square$ bilangan riil. Suatu metrik pada himpunan X adalah suatu fungsi $d : X \times X \to \square$ yang memenuhi aksioma-aksioma berikut.

1. $d(x, y) \geq 0$, untuk setiap $x, y \in X$ (nonnegatif)
2. $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$ (identitas)
3. $d(x, y) = d(y, x)$, untuk setiap $x, y \in X$ (simetris)
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, untuk setiap $x, y, z \in X$ (ketaksamaan segitiga).

Suatu ruang metrik (X, d) adalah pasangan himpunan X dengan metrik d pada X (Bartle dan Sherbert, 2000).

Definisi 2.2 (Barisan Titik)
Diberikan ruang metrik (X, d) dan bilangan asli $\square$. Barisan titik-titik di dalam ruang metrik (X, d) adalah suatu fungsi $f : \square \to X$. Untuk setiap $n \in \square$, maka

$$f(n) = x_n \in X .$$

Untuk menyatakan barisan f digunakan lambang $\langle x_n \rangle$. Jika A suatu himpunan bagian X, dan $x_n \in A$, $\forall n \in \square$, maka $\langle x_n \rangle$ dinamakan barisan di dalam A (Soemantri, 1988).

Definisi 2.3 (Barisan Konvergen)
Misalkan (X, d) merupakan ruang metrik. Suatu barisan $\langle x_n \rangle$ di (X, d) dikatakan konvergen ke suatu titik $x \in X$ (disimbolkan $x_n \to x$) jika

$$d(x_n, x) \to 0, \text{ ketika } n \to \infty$$

(Iyer, 1977).

Definisi 2.4 (Barisan Cauchy)

Barisan $\langle x_n \rangle$ di dalam ruang metrik (X,d) dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $N = N(\varepsilon)$ sedemikian sehingga

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

untuk setiap $m,n \geq N$ (Kreyszig, 1978).

Contoh 2.1

Barisan bilangan real $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in N$ dengan metrik $d(x,y) = |x-y|$ merupakan barisan Cauchy.

Bukti:

Ambil $\varepsilon > 0$, dipilih bilangan asli $N = N(\varepsilon)$ sehingga $N < \frac{2}{\varepsilon}$.

Untuk setiap $m, n \geq N$ berlaku $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$, sehingga

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &= \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \\
&= \left|\frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{m}\right)\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{m}\right| \\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon .
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\langle x_n \rangle$ barisan Cauchy (Bartle ddan Sherbert, 2000).

Teorema 2.1
Di dalam sebarang ruang metrik (X,d), setiap barisan yang konvergen merupakan barisan Cauchy.

Bukti:
Diberikan barisan $\langle x_n \rangle$ di X dengan $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, maka untuk sebarang $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat $N \in$ N sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.3}$$

Demikian juga untuk setiap $m \geq N$ berlaku

$$d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.4}$$

Dari ketaksamaan (2.3) dan (2.4) dan sifat ketaksamaan segitiga maka untuk setiap $m,n \geq N$ berlaku

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Terbukti $\langle x_n \rangle$ merupakan barisan Cauchy (Soemantri,1988).

Definisi 2.5 (Ruang Metrik Lengkap)
Suatu ruang metrik dikatakan lengkap (*complete*) jika setiap barisan Cauchy di dalam ruang metrik tersebut konvergen (Soemantri, 1988).

2.2 Pemetaan pada Ruang Metrik

Definisi 2.6 (Pemetaan Kontinu)
Misal $X = (X, d)$ dan $Y = (Y, d)$ merupakan ruang metrik. $f : X \to Y$ dikatakan kontinu pada suatu titik $x_0 \in X$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

untuk setiap x yang memenuhi

$$d(x, x_0) < \delta.$$

f dikatakan kontinu di X jika f kontinu di setiap titik pada X (Kreyszig, 1978).

Definisi 2.7 (Kontraksi)
Misalkan (X, d) merupakan sebuah ruang metrik. Suatu pemetaan $f : X \to X$ disebut kontraksi jika terdapat suatu konstanta k, $0 \le k < 1$, sehingga untuk setiap $x, y \in X$

$$d(f(x), f(y)) \le kd(x, y)$$

(Han, 2003).

Lemma 2.1 (Kekontinuan Pemetaan Kontraksi)
Suatu kontraksi f pada ruang metrik (X, d) merupakan sebuah pemetaan yang kontinu (Kreyszig, 1978).

Bukti:

Ambil sebarang $x_0 \in X$. Untuk $\varepsilon > 0$ pilih $\delta = \frac{\varepsilon}{k} > 0$, sehingga $d(x, x_0) < \delta$. Karena f merupakan pemetaan kontraksi, maka

$$d(f(x), f(x_0)) \le kd(x, x_0)$$

untuk setiap $x, x_0 \in X$ dan dengan nilai $d(x, x_0) < \delta$ maka

$$\begin{aligned} d(f(x), f(x_0)) &\le kd(x, x_0) \\ &\le k\delta \\ &= k\frac{\varepsilon}{k} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Jadi untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta = \frac{\varepsilon}{k} > 0$ sehingga

$$d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Menurut definisi 2.6 maka f adalah pemetaan yang kontinu.

Definisi 2.8 (Komposisi Fungsi)
Misalkan X, Y, Z adalah ruang metrik. Jika $f : X \to Y$ dan $g : Y \to Z$, maka fungsi komposisi $g \circ f$ adalah fungsi dari X ke Z yang didefinisikan

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

untuk setiap $x \in X$ (Bartle dan Sherbert, 2000).

Komposisi $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f^2(x)$ dan untuk komposisi sebanyak *n* suku, maka $\underbrace{(f \circ f \circ f \ldots \circ f)}_{n}(x) = f^n(x)$.

Contoh 2.2

Misalkan diberikan fungsi f dan g yang didefinisikan sebagai berikut

$f(x) = \sqrt{x-4}$ dan $g(x) = |x|$,

untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Maka fungsi komposisi $(g \circ f)$ adalah

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(\sqrt{x-4}) \\ &= \left|\sqrt{x-4}\right| \\ &= \sqrt{x-4}\end{aligned}$$

sedangkan fungsi komposisi $(f \circ g)$ adalah

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(|x|) \\ &= \sqrt{|x|-4}\ .\end{aligned}$$

Pada kasus ini $(g \circ f) \neq (f \circ g)$.

2.3 Titik Tetap Pada Ruang Metrik

Definisi 2.9 (Titik Tetap)

Diberikan ruang metrik (*X*,*d*). Misalkan f adalah pemetaan pada *X*,

$$f : X \to X\ .$$

Solusi $x^* = x$ dari persamaan $f(x) = x$ disebut titik tetap (Takashi dan Hiroyuki, 2010).

Contoh 2.3

Pandang $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang diberikan oleh

$$f(x) = \frac{1}{4}x + 3\ ,\quad \forall x \in \mathbb{R}\ .$$

Penyelesaian untuk mendapatkan titik tetap dari pemetaan di atas adalah sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x \\
\frac{1}{4}x + 3 &= x \\
x + 12 &= 4x \\
3x &= 12 \\
x &= 4 .
\end{aligned}
$$

Jadi, $x^* = x = 4$ adalah titik tetap fungsi $f(x) = \frac{1}{4}x + 3$.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas hubungan pemetaan Reich dengan pemetaan kontraksi (subbab 3.1) dan eksistensi titik tetap pada pemetaan Reich (subbab 3.2).

3.1 Pemetaan Reich

Teorema 3.1
Misalkan (X, d) adalah ruang metrik. Jika pemetaan f kontraksi pada X, maka

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq k^n d(x, y) \tag{3.1}$$

untuk setiap $x, y \in X$ dan $n \in \mathbb{N}$, di mana $0 \leq k < 1$.

Bukti:
Diketahui f pemetaan kontraksi pada X, maka untuk setiap $x, y \in X$ berlaku

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$

dengan $0 \leq k < 1$.

Jadi, $d(f^n(x), f^n(y)) = d(f(f^{n-1}(x)), f(f^{n-1}(y)))$

$$\begin{aligned}
&\leq kd(f^{n-1}(x), f^{n-1}(y)) \\
&\leq k(kd(f^{n-2}(x), f^{n-2}(y))) \\
&= k^2 d(f^{n-2}(x), f^{n-2}(y)) \\
&\leq k^3 d(f^{n-3}(x), f^{n-3}(y)) \\
&\vdots \\
&\leq k^{n-1} d(f^{n-(n-1)}(x), f^{n-(n-1)}(y)) \\
&= k^{n-1} d(f(x), (y)) \\
&\leq k^{n-1} kd(x, y)
\end{aligned}$$

$= k^n d(x, y)$. ■

Definisi 3.1

Misalkan (X,d) ruang metrik dan misalkan $f : X \to X$. Pemetaan f disebut pemetaan Reich jika memenuhi

$$d(f(x), f(y)) \le ad(x, f(x)) + bd(y, f(y)) + cd(x, y) \qquad (3.2)$$

untuk setiap $x, y \in X$, dan $a+b+c<1$, dengan $a,b,c \ge 0$.

Contoh 3.1

Diberikan ruang metrik (X,d) dan $d(x,y)=|x-y|$. Didefinisikan fungsi f sebagai berikut

$$f(x) = \frac{2x}{5} - 1$$

untuk setiap $x \in X$, maka f merupakan pemetaan Reich.

Bukti:

$$\begin{aligned}
d(f(x), f(y)) &= |f(x) - f(y)| \\
&= \left|\left(\frac{2}{5}x - 1\right) - \left(\frac{2}{5}y - 1\right)\right| \\
&= \left|\frac{2}{5}x - \frac{2}{5}y\right| \\
&= \frac{2}{5}|x-y| \\
&= \frac{1}{5}|x-y| + \frac{1}{5}|x-y| \\
&\le \frac{1}{5}|x-y| + \frac{1}{5}(|x| + |-y|) \\
&= \frac{1}{5}|x-y| + \frac{1}{5}(|x| + |y|) \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d(x, f(x)) + d(y, f(y)) &= \left|x - \left(\frac{2}{5}x - 1\right)\right| + \left|y - \left(\frac{2}{5}y - 1\right)\right| \\
&= \left|\frac{3}{5}x + 1\right| + \left|\frac{3}{5}y + 1\right|
\end{aligned}$$

$$d(x, f(x)) + d(y, f(y)) \geq \left|\frac{3}{5}x\right| + \left|\frac{3}{5}y\right|$$
$$= \frac{3}{5}\left(|x| + |y|\right).$$

Jadi

$$\left(|x| + |y|\right) \leq \frac{5}{3}[d(x, f(x)) + d(y, f(y))]. \qquad (3.4)$$

Kemudian substitusikan persamaan (3.4) ke persamaan (3.3),

$$d(f(x), f(y)) \leq \frac{1}{5}|x - y| + \frac{1}{5}\frac{5}{3}[d(x, f(x)) + d(y, f(y))]$$
$$= \frac{1}{3}d(x, f(x)) + \frac{1}{3}d(y, f(y)) + \frac{1}{5}|x - y|$$
$$= \frac{1}{3}d(x, f(x)) + \frac{1}{3}d(y, f(y)) + \frac{1}{5}d(x, y). \qquad (3.5)$$

Jika $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{3}$, dan $c = \frac{1}{5}$, maka $a + b + c = \frac{13}{15} < 1$ dan persamaan(3.5) dapat ditulis sebagai

$$d(f(x), f(y)) \leq ad(x, f(x)) + bd(y, f(y)) + cd(x, y).$$

Terbukti bahwa f merupakan pemetaan Reich.

Teorema 3.2

Diberikan ruang metrik (X, d) dengan $f : X \to X$. f adalah pemetaan kontraksi $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$ dengan $0 \leq k < \frac{1}{2}$ maka f merupakan pemetaan Reich, dengan $a = b = c$.

Bukti:

Misalkan f pemetaan kontraksi pada ruang metrik (X, d) maka

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$

untuk setiap $x, y \in X$ dengan $0 \leq k < 1$. Akan dibuktikan bahwa pemetaan kontraksi f merupakan pemetaan Reich dengan $a = b = c$.

$$d(f(x), f(y)) \le kd(x, y)$$

$$= \frac{k}{2} d(x, y) + \frac{k}{2} d(x, y)$$

$$\le \frac{k}{2}\left[d(x, f(x)) + d(f(x), f(y)) + d(f(y), y)\right] + \frac{k}{2} d(x, y)$$

$$= \frac{k}{2}\left[d(x, f(x)) + d(f(x), f(y)) + d(y, f(y))\right] + \frac{k}{2} d(x, y)$$

$$\left(1 - \frac{k}{2}\right) d(f(x), f(y)) \le \frac{k}{2}\left[d(x, f(x)) + d(y, f(y))\right] + \frac{k}{2} d(x, y)$$

$$d(f(x), f(y)) \le \frac{k/2}{\left(1 - k/2\right)}\left[d(x, f(x)) + d(y, f(y)) + d(x, y)\right]$$

$$d(f(x), f(y)) \le \frac{k/2}{\left(1 - k/2\right)} d(x, f(x)) + \frac{k/2}{\left(1 - k/2\right)} d(y, f(y)) +$$

$$\frac{k/2}{\left(1 - k/2\right)} d(x, y). \qquad (3.6)$$

Dari persamaan (3.5) diketahui bahwa $a = b = c = \dfrac{k/2}{1 - k/2}$. Agar f juga merupakan pemetaan Reich, maka $a + b + c = \dfrac{3k/2}{1 - k/2} < 1$.

Karena nilai $k < 1$ dan selalu positif, maka $1 - \dfrac{k}{2} > 0$

$$\frac{3k}{2} < 1 - \frac{k}{2}$$

$$\frac{4k}{2} < 1$$

$$k < \frac{2}{4}. \tag{3.7}$$

Dari ketaksamaan (3.7) diperoleh bahwa $k < \frac{1}{2}$. Karena k selalu positif, terbukti untuk nilai $0 \le k < \frac{1}{2}$, f merupakan pemetaan Reich. Namun teorema ini belum tentu berlaku sebaliknya.

Contoh 3.2

Diberikan ruang metrik $([0,1], d)$ dan $d(x, y) = |x - y|$. Didefinisikan fungsi f sebagai berikut

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{5}, 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{6}, x = 1 \end{cases}$$

untuk setiap $x \in [0,1]$.

- $0 \le x < 1$ dan $0 \le y < 1$

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= |f(x) - f(y)| \\ &= \left|\frac{x}{5} - \frac{y}{5}\right| \\ &= \frac{1}{5}|x - y| \\ &= \frac{1}{10}|x - y| + \frac{1}{10}|x - y| \\ &= \frac{1}{10}|x - y| + \frac{1}{10}|x - f(x) + f(x) - f(y) + f(y) - y| \\ &\le \frac{1}{10}|x - y| + \frac{1}{10}\left[|x - f(x)| + |f(x) - f(y)| + |f(y) - y|\right] \end{aligned}$$

$$\left(1-\frac{1}{10}\right)\left|f(x)-f(y)\right| \le \frac{1}{10}\left[\left|x-y\right|+\left|x-f(x)\right|+\left|f(y)-y\right|\right]$$

$$\left|f(x)-f(y)\right| \le \frac{1/10}{1-1/10}\left[\left|x-y\right|+\left|x-f(x)\right|+\left|f(y)-y\right|\right]$$

$$\left|f(x)-f(y)\right| \le \frac{1}{9}\left[\left|x-y\right|+\left|x-f(x)\right|+\left|f(y)-y\right|\right]$$

$$\left|f(x)-f(y)\right| \le \frac{1}{9}\left|x-y\right|+\frac{1}{9}\left|x-f(x)\right|+\frac{1}{9}\left|y-f(y)\right|. \qquad (3.8)$$

Terbukti f merupakan pemetaan Reich dengan $a=b=c=\frac{1}{9}$ untuk $0 \le x < 1$ dan $0 \le y < 1$.

- $x=1$ dan $y=1$

Substitusi nilai x dan y ke dalam ketaksamaan (3.8) untuk menunjukkan bahwa f merupakan pemetaan Reich,

$$\left|f(x)-f(y)\right| \le \frac{1}{9}\left|x-y\right|+\frac{1}{9}\left|x-f(x)\right|+\frac{1}{9}\left|y-f(y)\right|$$

$$\left|f(1)-f(1)\right| \le \frac{1}{9}\left|1-1\right|+\frac{1}{9}\left|1-f(1)\right|+\frac{1}{9}\left|1-f(1)\right|$$

$$\left|\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\right| \le \frac{1}{9}\left|1-1\right|+\frac{1}{9}\left|1-\frac{1}{6}\right|+\frac{1}{9}\left|1-\frac{1}{6}\right|$$

$$\left|0\right| \le \frac{1}{9}\left(\left|0\right|+\left|\frac{5}{6}\right|+\left|\frac{5}{6}\right|\right)$$

$$0 \le \frac{1}{9}\frac{10}{6}$$

$$0 < \frac{10}{54}$$

Terbukti bahwa f merupakan pemetaan Reich pada $x=1$ dan $y=1$.

- $0 \le x < 1$ dan $y = 1$

Substitusi nilai x dan y ke dalam ketaksamaan (3.8) untuk menunjukkan bahwa f merupakan pemetaan Reich.

$$\left| f(x) - f(y) \right| \le \frac{1}{9}\left|x - y\right| + \frac{1}{9}\left|x - f(x)\right| + \frac{1}{9}\left|y - f(y)\right|$$

$$\left|\frac{x}{5} - \frac{1}{6}\right| \le \frac{1}{9}\left|x - 1\right| + \frac{1}{9}\left|x - \frac{x}{5}\right| + \frac{1}{9}\left|1 - \frac{1}{6}\right|$$

$$\left|\frac{x}{5} - \frac{1}{6}\right| \le \frac{1}{9}\left(\left|x - 1\right| + \left|\frac{4x}{5}\right| + \left|\frac{5}{6}\right|\right)$$

$$\left|\frac{54x - 45}{270}\right| < \left(\frac{30\left|x - 1\right| + 24\left|x\right| + 225}{270}\right),$$

karena ruas kanan dan ruas kiri sama-sama bernilai positif dan penjumlah pada ruas kanan lebih besar daripada ruas kiri, maka terbukti bahwa ruas kanan lebih besar daripada ruas kiri sehingga memenuhi kondisi Reich.

- $x = 1$ dan $0 \le y < 1$

Substitusi nilai x dan y ke dalam ketaksamaan (3.8) untuk menunjukkan bahwa f merupakan pemetaan Reich.

$$\left| f(x) - f(y) \right| \le \frac{1}{9}\left|x - y\right| + \frac{1}{9}\left|x - f(x)\right| + \frac{1}{9}\left|y - f(y)\right|$$

$$\left|\frac{1}{6} - \frac{y}{5}\right| \le \frac{1}{9}\left|1 - y\right| + \frac{1}{9}\left|1 - \frac{1}{6}\right| + \frac{1}{9}\left|y - \frac{y}{5}\right|$$

$$\left|\frac{1}{6} - \frac{y}{5}\right| \le \frac{1}{9}\left(\left|1 - y\right| + \left|\frac{5}{6}\right| + \left|\frac{4y}{5}\right|\right)$$

$$\left|\frac{45 - 54y}{270}\right| < \left(\frac{30\left|1 - y\right| + 225 + 24\left|y\right|}{270}\right).$$

Terbukti memenuhi pemetaan Reich sebab ruas kanan dan ruas kiri sama-sama bernilai positif dan ruas kanan akan selalu memiliki nilai yang lebih besar daripada ruas kiri.

Jadi terbukti bahwa f merupakan pemetaan Reich pada $\square = [0,1]$.

Akan tetapi pemetaan Reich tersebut bukan merupakan kontraksi, sebab f tidak kontinu pada titik $x=1$.

Teorema 3.3

Diberikan ruang metrik (X,d) dengan $f:X\to X$. f adalah pemetaan kontraksi dengan $0\le k<\sqrt[n]{\frac{1}{2}}$, maka f^n merupakan pemetaan Reich dengan $a=b=c$ dan $n\ge 2$, $n\in\square$.

Bukti:

Misalkan f pemetaan kontraksi pada ruang metrik (X,d), maka berlaku

$$d(f(x),f(y))\le kd(x,y)$$

untuk setiap $x,y\in X$, dengan $0\le k<1$.

Dengan menggunakan Teorema 3.1 dan Teorema 3.2 , diperoleh

$$\begin{aligned}
d(f^n(x),f^n(y)) &\le k^n d(x,y)\\
&=\frac{k^n}{2}d(x,y)+\frac{k^n}{2}d(x,y)\\
&\le\frac{k^n}{2}d(x,y)+\frac{k^n}{2}\Big[d(x,f^n(x))+d(f^n(x),f^n(y))+\\
&\qquad d(f^n(y),y)\Big]\\
&\le\frac{k^n}{2}\Big[d(x,y)+d(x,f^n(x))+d(f^n(x),f^n(y))+\\
&\qquad d(f^n(y),y)\Big]
\end{aligned}$$

$$\left(1-\frac{k^n}{2}\right)d(f^n(x),f^n(y))\le\frac{k^n}{2}\Big[d(x,y)+d(x,f^n(x))+d(y,f^n(y))\Big]$$

$$d(f^n(x),f^n(y))\le\frac{k^n/2}{\left(1-k^n/2\right)}\Big[d(x,y)+d(x,f^n(x))+$$

$$d(y, f^n(y))\Big]$$

$$d(f^n(x), f^n(y)) \le \frac{k^n/2}{\left(1-k^n/2\right)} d(x,y) + \frac{k^n/2}{\left(1-k^n/2\right)} d(x, f^n(x)) + \frac{k^n/2}{\left(1-k^n/2\right)} d(x, f^n(x)) \quad (3.9)$$

Dari persamaan (3.9) diketahui bahwa $a = b = c = \dfrac{k^n/2}{1-k^n/2}$. Agar f^n juga merupakan pemetaan Reich, maka $a+b+c = \dfrac{3k^n/2}{1-k^n/2} < 1$.

Karena nilai $k^n < 1$ dan selalu positif, maka $1 - \dfrac{k^n}{2} > 0$

$$\frac{3k^n}{2} < 1 - \frac{k^n}{2}$$

$$\frac{4k^n}{2} < 1$$

$$k^n < \frac{1}{2}$$

$$k < \sqrt[n]{\frac{1}{2}}. \quad (3.10)$$

Dari ketaksamaan (3.10) diperoleh bahwa $k < \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$, Karena k selalu positif, terbukti untuk nilai $0 \le k < \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$, f^n merupakan pemetaan Reich untuk $n \ge 2$.

3.2 Teorema Titik Tetap Reich

Teorema 3.4

Diberikan (X,d) ruang metrik lengkap dan $f: X \to X$ adalah pemetaan Reich pada X, maka f memiliki tepat satu titik tetap.

Bukti:

Ambil $x_0 \in X$. Selanjutnya dibentuk barisan $\langle x_n \rangle$ sebagai berikut

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \ldots, x_{n+1} = f(x_n). \qquad (3.11)$$

Akan ditunjukkan bahwa $\langle x_n \rangle$ adalah barisan Cauchy.

$$\begin{aligned} d(x_1,x_2) &= d(f(x_0), f(x_1)) \\ &\le ad(x_0, f(x_0)) + bd(x_1, f(x_1)) + cd(x_0,x_1) \\ &= ad(x_0,x_1) + bd(x_1,x_2) + cd(x_0,x_1) \end{aligned}$$

$$d(x_1,x_2) \le \frac{a+c}{1-b} d(x_0,x_1)$$

$$\begin{aligned} d(x_2,x_3) &= d(f(x_1), f(x_2)) \\ &\le ad(x_1, f(x_1)) + bd(x_2, f(x_2)) + cd(x_1,x_2) \\ &\le ad(x_1,x_2) + bd(x_2,x_3) + cd(x_1,x_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(x_2,x_3) &\le \frac{a+c}{1-b} d(x_1,x_2) \\ &\le \frac{a+c}{1-b}\frac{a+c}{1-b} d(x_0,x_1) \\ &\le \left(\frac{a+c}{1-b}\right)^2 d(x_0,x_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(x_3,x_4) &= d(f(x_2), f(x_3)) \\ &\le ad(x_2, f(x_2)) + bd(x_3, f(x_3)) + cd(x_2,x_3) \\ &\le ad(x_2,x_3) + bd(x_3,x_4) + cd(x_2,x_3) \end{aligned}$$

$$d(x_3,x_4) \le \frac{a+c}{1-b} d(x_2,x_3)$$

$$\leq \frac{a+c}{1-b}\left(\frac{a+c}{1-b}\right)^2 d(x_0, x_1)$$

$$\leq \left(\frac{a+c}{1-b}\right)^3 d(x_0, x_1)$$

dan seterusnya, hingga diperoleh

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \left(\frac{a+c}{1-b}\right)^n d(x_0, x_1). \tag{3.12}$$

Misalkan $\frac{a+c}{1-b} = q$, maka ketaksamaan (3.12) menjadi

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq q^n d(x_0, x_1). \tag{3.13}$$

Jika $a+b+c<1$, maka

$$a+b+c+(-b) < 1+(-b)$$

$$a+c < 1-b$$

$$\frac{a+c}{1-b} < \frac{1-b}{1-b}$$

$$\frac{a+c}{1-b} < 1.$$

Karena $\frac{a+c}{1-b} = q$ dan $a, b, c \geq 0$ maka $0 \leq q < 1$.

Ambil $\varepsilon > 0$ dan pilih $m, n \in \square$. Untuk $m > n$, maka

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq q^n d(x_0, x_1) + q^{n+1} d(x_0, x_1) + \ldots + q^{m-1} d(x_0, x_1) \\ &\leq (q^n + q^{n+1} + \ldots + q^{m-1}) d(x_0, x_1) \\ &\leq q^n (1 + q^1 + \ldots + q^{m-n-1}) d(x_0, x_1) \\ &= q^n \sum_{i=0}^{m-n-1} q^i d(x_0, x_1). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Berikut ini akan ditentukan jumlah dari deret geometri $\sum_{i=0}^{m-n-1} q^i$.

Perhatikan persamaan berikut

$$(1-q)(1+q+q^2+\ldots+q^{m-n-1}) = (1+q+q^2+\ldots+q^{m-n-1})$$

$$-(q+q^2+...+q^{m-n})$$

$$(1-q)(1+q+q^2+...+q^{m-n-1})=1-q^{m-n},$$

sehingga

$$\sum_{i=0}^{m-n-1} q^i = (1+q+q^2+...+q^{m-n-1}) = \frac{1-q^{m-n}}{(1-q)}. \qquad (3.15)$$

Dengan mensubstitusikan (3.15) ke (3.14), diperoleh

$$d(x_n, x_m) \le q^n \frac{1-q^{m-n}}{1-q} d(x_0, x_1),\ m > n.$$

Misalkan $m-n=t$, maka

$$d(x_n, x_m) \le q^n \frac{1-q^t}{1-q} d(x_0, x_1).$$

Karena $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, maka $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$.

Dengan demikian terbukti bahwa $\langle x_n \rangle$ adalah barisan Cauchy.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa pemetaan Reich f memiliki titik tetap.

Telah diketahui bahwa $\langle x_n \rangle$ merupakan barisan Cauchy dan oleh karena *(X,d)* ruang metrik lengkap sehingga $\lim_{n\to\infty} x_n = z$, di mana $z \in X$.

Akan dibuktikan bahwa $f(z) = z$, dengan cara membuktikan $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(z)$.

Misalkan $x = x_n$ dan $y = z$, maka:

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, f(z)) &= d(f(x_n), f(z)) \\ &\le ad(x_n, f(x_n)) + bd(z, f(z)) + cd(x_n, z) \\ &\le ad(x_n, f(x_n)) + bd(z, f(x_n)) + bd(f(x_n), f(z)) \\ &\quad + cd(x_n, z) \\ &\le ad(x_n, x_{n+1}) + bd(z, x_{n+1}) + bd(x_{n+1}, f(z)) \\ &\quad + cd(x_n, z). \end{aligned} \qquad (3.16)$$

Telah diketahui pada (3.13) bahwa

$$d(x_n, x_{n+1}) \le q^n d(x_0, x_1),$$

dan disubstitusikan ke (3.13) menjadi

$$d(x_{n+1}, f(z)) \le aq^n d(x_0, x_1) + bd(z, x_{n+1}) + bd(x_{n+1}, f(z)) + cd(x_n, z)$$

$$(1-b)d(x_{n+1}, f(z)) \le aq^n d(x_0, x_1) + bd(z, x_{n+1}) + cd(x_n, z)$$

$$d(x_{n+1}, f(z)) \le \frac{1}{(1-b)}[aq^n d(x_0, x_1) + bd(z, x_{n+1}) + cd(x_n, z)]. \tag{3.17}$$

Diketahui bahwa $\lim_{n\to\infty} x_n = z$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, $d(x_{n+1}, z) < \varepsilon$ dan $d(x_n, z) < \varepsilon$. Oleh karena itu

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, z) = 0, \tag{3.18}$$

dan

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, z) = 0. \tag{3.19}$$

Ketaksamaan (3.17) menjadi

$$d(x_{n+1}, f(z)) \le \frac{1}{(1-b)}[aq^n d(x_0, x_1)]. \tag{3.20}$$

Karena $q < 1$ dan $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, maka ketaksamaan (3.20) menjadi

$$d(x_{n+1}, f(z)) = 0. \tag{3.21}$$

Dari persamaan (3.11), persamaan (3.21) dapat pula ditulis menjadi

$$d(f(x_n), f(z)) = 0, \tag{3.22}$$

dengan kata lain, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(z)$. Sedangkan persamaan (3.18) dapat ditulis menjadi

$$d(f(x_n), z) = 0 \tag{3.23}$$

yang berarti juga bahwa $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = z$. Sehingga terbukti bahwa $f(z) = z$. Jadi, $z \in X$ merupakan titik tetap dari pemetaan Reich f.

Selanjutnya akan dibuktikan ketunggalan titik tetap pada pemetaan Reich. Misalkan x dan y adalah titik tetap pemetaan f, dengan $x \ne y$. andaikan

$$x = f(x) \text{ dan } y = f(y).$$

Maka

$$\begin{aligned} d(x,y) &= d(f(x), f(y)) \\ &\le ad(x, f(x)) + bd(y, f(y)) + cd(x,y) \\ &= cd(x,y) \end{aligned}$$

$$d(x,y) \le cd(x,y)$$

$$d(x,y) - cd(x,y) \le 0$$

$$(1-c)d(x,y) \le 0 .$$

Karena $d(x,y) \ge 0$ maka

$$(1-c) \ge 0$$

$$c \ge 1 .$$

Kontradiksi dengan syarat pemetaan Reich $a+b+c<1$, maka pengandaian salah. Agar memenuhi syarat tersebut, maka $x = y$. Jadi terbukti bahwa pemetaan Reich memiliki titik tetap yang tunggal.

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Jika f pemetaan kontraksi dengan $0 \le k < \frac{1}{2}$, maka f merupakan pemetaan Reich dengan $a = b = c$.
2. Jika f pemetaan kontraksi dengan $0 \le k < \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$, maka f^n merupakan pemetaan Reich dengan $a = b = c$, untuk $n \ge 2$, $n \in \mathbb{N}$.
3. Pemetaan Reich pada ruang metrik yang lengkap memiliki titik tetap yang tunggal.

4.2 Saran

Pada skripsi ini hanya dibahas eksistensi dan ketunggalan titik tetap pemetaan Reich pada ruang metrik. Untuk penelitian selanjutnya, diharapkan dapat dibahas eksistensi titik tetap untuk fungsi komposisi ke *n* dari suatu pemetaan Reich.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

DAFTAR PUSTAKA

Ahmed, M. A. . 2003. Common Fixed Point Theorems for Weakly Compatible Mappings. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*. Volume 33. Hal 1189-1203.

Bartle, R.G. dan Sherbert D.R. 2000. *Introduction to Real Analysis*. Third Edition. John Wiley and Sons, Inc. Canada. Hal. 9, 81,328.

Han, Goo Jung. 2003. *Fixed Point Theorems in Generalized Metric Spaces*. Changwon National University.

Iyer, V. Ganapathy. 1977. *Mathematical Analysis*. Tata Mc Graw-Hill Publishing Company Ltd. New Delhi. Hal 119.

Kreyszig, E. 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley and Sons, Inc. Canada. Hal. 20, 28, 303.

Reich, Simeon. 1971. Some Remarks Concerning Contraction Mapping. *Canadian Math. Bulletin*. Volume 44. Hal 121-124.

Soemantri, R. 1988. *Analisis Real I*. Universitas Terbuka, Departemen Pendidikan dan Kebudayaan. Hal. 4.3, 4.25, 4.27.

Takashi, Suzuki dan Hiroyuki, Yamazashi. 2010. *Introduction to Mathematical Science Model*. Baifukan. Japan. Hal. 27.

Zafar, A. A. dan Ali, L. 2009. Generalization of Reich's Fixed Point Theorem. *International Journal of Math. Analysis*. Volume 3. Hal 1239-1243.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA