BILANGAN PEWARNAAN λ-*BACKBONE* PADA GRAF SPLIT DENGAN *BACKBONE* K_4

SKRIPSI

Oleh:
INDRIANA KURNIAWATI
0410940028-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2011

BILANGAN PEWARNAAN λ-*BACKBONE* PADA GRAF SPLIT DENGAN *BACKBONE* K_4

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh :
INDRIANA KURNIAWATI
0410940028-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2011

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

BILANGAN PEWARNAAN λ-*BACKBONE*
PADA GRAF SPLIT DENGAN *BACKBONE* K_4

Oleh :
INDRIANA KURNIAWATI
0410940028-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 8 Juli 2011
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang matematika

Pembimbing I	Pembimbing II
Drs. Marsudi, MS	**Prof. Dr. Agus Widodo, M.Kes**
NIP. 196101171988021002	**NIP. 195305231983031002**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc
NIP. 196709071992031001

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	**:**	**INDRIANA KURNIAWATI**
NIM	**:**	**0410940028-94**
Jurusan	**:**	**MATEMATIKA**
Penulis Skripsi berjudul	**:**	**BILANGAN PEWARNAAN *λ-BACKBONE* PADA GRAF SPLIT DENGAN *BACKBONE* K_4**

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. **Isi skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain. Nama-nama yang termaktub di dalam isi dan tertulis di daftar pustaka dalam skripsi ini hanya saya jadikan sebagai sumber referensi.**
2. **Apabila di kemudian hari ternyata skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 8 Juli 2011
Yang menyatakan,

(Indriana Kurniawati)
NIM. 0410940028-94

BILANGAN PEWARNAAN λ-*BACKBONE* PADA GRAF SPLIT DENGAN *BACKBONE* K_4

ABSTRAK

Pewarnaan titik adalah penentuan warna bagi setiap titik dari graf sedemikian sehingga tiap dua titik yang berdekatan (*adjacent*) mendapat warna yang berbeda. Banyak warna minimal pada sembarang pewarnaan di graf G disebut bilangan kromatik dari G, dinotasikan dengan $\chi(G)$. Jika diberikan bilangan bulat $\lambda \geq 2$, sebuah graf $G = (V, E)$ dan subgraf perentang H dari G (*backbone* dari G), maka pewarnaan λ-*backbone* dari (G, H) adalah suatu pewarnaan titik dari G sehingga titik-titik yang bertetangga di H memperoleh warna paling sedikit λ. Bilangan terkecil l di mana terdapat pewarnaan λ-*backbone* disebut bilangan pewarnaan λ-*backbone* dan dilambangkan dengan $BBC_\lambda(G, H)$. Suatu graf yang titik-titiknya dapat dipartisi ke dalam sebuah *clique* dan suatu himpunan bebas dengan kemungkinan sisi di antaranya disebut dengan graf split. Bilangan pewarnaan λ-*backbone* pada graf split $G = (V, E)$ dengan *backbone* K_4 dan $\chi(G) = k$ bergantung pada bilangan kromatiknya dalam tiga kondisi batas.

Kata kunci : *backbone* K_4, bilangan kromatik, bilangan pewarnaan λ-*backbone*, *clique*, graf split, himpunan bebas.

λ-*BACKBONE* COLORING NUMBER
OF SPLIT GRAPH WITH K_4 *BACKBONE*

ABSTRACT

Vertex coloring is assigned colors to the vertices of a graph such that adjacent vertices are colored differently. The smallest number of colors in any coloring of a graph *G* is called the chromatic number of *G* and is denoted by $\chi(G)$. Give an integer $\lambda \geq 2$, a graph $G = (V, E)$ and a spanning subgraph *H* of *G* (the *backbone* of *G*), a λ-*backbone* coloring of (G, H) is a vertex coloring of *G* in which the colors assigned to adjacent vertices in *H* differ by at least λ. The smallest integer *l* for which there exist a λ-*backbone* coloring called λ-*backbone* coloring number and denoted by $BBC_\lambda(G, H)$. A graph whose vertex can be partitioned into a *clique* and an independent set with possibility edges in between is called split graph. The λ-*backbone* coloring number of split graph $G = (V, E)$ with K_4 *backbone* and $\chi(G) = k$ depend on the the chromatic number in three condition of bound.

Key words : K_4 *backbone*, chromatic number, λ-*backbone* coloring number, *clique*, split graph, independent set.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahi rabbil ‘alamin, segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, pertolongan dan petunjuk-Nya sehingga skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik. Shalawat serta salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW sebagai suri tauladan bagi penulis.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini tidak dapat terealisasikan tanpa bimbingan dan bantuan baik yang bersifat moral maupun spiritual dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Drs.Marsudi, MS selaku pembimbing I dan Prof. Dr. Agus Widodo, M.Kes selaku pembimbing II atas segala pengarahan, motivasi, nasihat, dan ilmu yang telah diberikan selama penyusunan skripsi ini.
2. Dra. Ari Andari, M.Sc, Dr. Sobri Abusini, MT, dan Prof. Dr. Marjono, M.Phil, selaku dosen penguji atas segala masukan dan saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
3. Dr. Abdul Rouf A., M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika, Dr. Sobri Abusini, MT, selaku ketua program studi.
4. Drs. H. Noor Hidayat, M.Si selaku dosen penasihat akademik atas segala pengarahan, motivasi dan ilmu yang telah diberikan selama penulis melaksanakan studi.
5. Orang tuaku yang kuhormati Bapak Kariono dan Ibu Murtiati, bapak dan ibu mertuaku, adik-adikku beserta keluarga besarku.
6. Suami tercinta Deni Triandini, S.ST dan buah hati kami Nizar Hafiy Abdani, motivator terbesar dalam hidupku.
7. Nina, Firman, Indah, Haris, Zulpi, Mazu, Islah, Amin, Nopia, Antok, sahabat-sahabat seperjuangan Matematika angkatan 2004 dan adik tingkat.
8. Segenap dosen dan staf pengajar yang telah mencurahkan ilmunya selama penulis melaksanakan studi, serta staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
9. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari masih banyak kekurangan dalam penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, semua kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan demi perbaikan selanjutnya.

Akhir kata, penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat dan sumbangan yang berarti di masa yang akan datang.

Malang, 8 Juli 2011

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

Halaman

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf adalah salah satu topik dalam matematika diskret yang memiliki berbagai aplikasi pada permasalahan modern seperti masalah dalam jaringan sosial, komunikasi, transportasi, ilmu komputer, dan sebagainya. Teori tersebut didasari ide yang pertama kali diperkenalkan oleh seorang matematikawan Swiss, Leonard Euler, pada tahun 1736. Dalam tulisannya Euler membahas mengenai tujuh jembatan yang menyeberangi sungai Pregel di kota Königsberg, Prussia (sekarang Kaliningrad, Rusia). Permasalahannya adalah menentukan suatu cara untuk melalui setiap jembatan tepat satu kali. Euler menggunakan representasi titik dan garis untuk menyelesaikan masalah tesebut. Konsep yang diperkenalkan Euler dalam karya tulisnya tersebut adalah yang saat ini dikenal sebagai teori graf.

Salah satu topik dalam teori graf adalah tentang pewarnaan graf. Secara umum, pewarnaan di dalam graf dibagi menjadi tiga jenis, yaitu pewarnaan titik, pewarnaan garis, dan pewarnaan peta/sisi. Adapun pewarnaan graf memiliki banyak aplikasi dalam dunia nyata seperti pada masalah penjadwalan, penugasan kerja, penetapan frekuensi, dan sebagainya. Skripsi ini akan membahas tentang pewarnaan λ-*backbone* yang termasuk ke dalam masalah penetapan frekuensi (*frequency assignment*).

Di dalam masalah *frequency assignment*, graf digunakan untuk memodelkan topologi pada jaringan komunikasi. Titik-titik pada graf merepresentasikan pemancar, dua titik dikatakan *adjacent* jika dua pemancar saling berhubungan. Permasalahannya adalah untuk menetapkan saluran frekuensi ke beberapa pemancar sehingga interferensi dapat dihindari. Hajo Broersma, dkk., memodelkan situasi tersebut dalam karya mereka *Backbone Colorings for Networks* di mana pemancar-pemancar yang bertetangga (disebut *backbone*) dimungkinkan untuk saling berinterferensi/mengganggu jika mereka beroperasi pada saluran frekuensi yang sama. Hal ini berarti dibutuhkan pembatasan yang lebih dalam penetapan saluran frekuensi di dalam *backbone* dibandingkan pada jaringan yang berdekatan.

Dalam dunia nyata, pewarnaan λ-*backbone* dapat digunakan untuk memodelkan permasalahan di bidang komunikasi yaitu untuk menetapkan saluran frekuensi pada televisi maupun radio, serta untuk memodelkan jaringan sensor. Berdasarkan hal tersebut, penulis termotivasi untuk meneliti lebih lanjut tentang permasalahan pewarnaan λ-*backbone*, khususnya pewarnaan λ-*backbone* dari graf split dengan *backbone* K_4.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang permasalahan di atas, maka pokok permasalahan yang dikaji dalam penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana karakteristik pewarnaan λ-*backbone* pada graf split?
2. Bagaimana hubungan bilangan kromatik dengan bilangan pewarnaan λ-*backbone* pada graf split dengan *backbone* K_4?
3. Bagaimana implementasi pewarnaan λ-*backbone* pada graf split dengan *backbone* K_4?

1.3 Batasan Masalah

Penulisan skripsi ini difokuskan pada masalah graf yang dibahas adalah graf terhubung, sederhana, dan tak berarah.

1.4 Tujuan

Tujuan penulisan dalam skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Menentukan karakteristik pewarnaan λ-*backbone* pada graf split.
2. Menentukan hubungan bilangan kromatik dengan bilangan pewarnaan λ-*backbone* pada graf split dengan *backbone* K_4.
3. Mengimplementasikan pewarnaan λ-*backbone* pada graf split dengan *backbone* K_4.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Graf

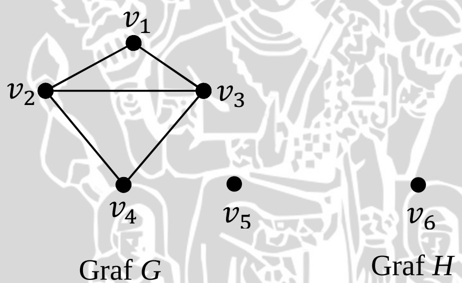
Definisi 2.1.1 Graf *G*

Suatu graf G adalah pasangan himpunan $\left(V(G), E(G)\right)$ dengan $V(G)$ adalah himpunan titik-titik (*vertex*) dan $E(G)$ adalah himpunan garis-garis (*edges*) (Roman, 1989).

Graf yang hanya terdiri dari satu titik disebut graf trivial. Graf yang titik-titiknya diberi label disebut graf berlabel (Chartrand dan Zhang, 2005).

Titik terasing (*isolated vertex*) dalam graf G adalah titik yang tidak mempunyai garis yang bersisian dengannya (Munir, 2003).

Contoh 2.1.



Gambar 2.1. Graf G graf berlabel dan graf H graf trivial

Pada Contoh 2.1. Graf G dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}$. Graf H dengan $V(G) = \{v_6\}$. Titik v_5 pada graf G adalah titik terasing.

Definisi 2.1.2 *Adjacent* dan *Incident*

Dua titik v_1 dan v_2 pada graf G dikatakan *adjacent* (berdekatan) jika (v_1v_2) adalah sebuah garis pada graf G. Garis (v_1v_2) dikatakan *incident* (bersisian) dengan titik v_1 dan v_2. Garis (v_1v_2) juga disebut penghubung titik v_1 dan v_2. Titik v_1 dan v_2 disebut *endpoint* dari garis (v_1v_2) (Rosen, 2003).

Pada Contoh 2.1. titik v_1 dan v_2 *adjacent*, sedangkan garis v_1v_2 *incident* dengan titik-titik v_1 dan v_2.

Definisi 2.1.3 Order (*Order*) dan Ukuran (*Size*) dari Graf

Banyak titik pada graf *G* disebut order (*order*) dari *G*, sedangkan banyak garisnya disebut ukuran (*size*) dari *G* (Chartrand dan Zhang, 2005).

Pada Contoh 2.1. order dari graf *G* adalah 5, sedangkan ukuran dari graf *G* adalah 5.

Definisi 2.1.4 Derajat Titik (*Degree*)

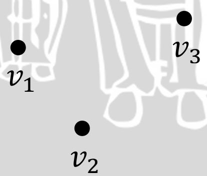
Derajat titik *v* di graf *G* adalah banyaknya garis yang bersisian (*incident*) dengan titik *v*, dinotasikan dengan $deg(v)$. Dua titik yang saling *adjacent* disebut bertetangga (*neighbor*) satu sama lain. Himpunan $N(v)$ dari tetangga titik *v* disebut lingkungan (*neighborhood*) dari *v*, sehingga $deg\,(v) = |N(v)|$ (Chartrand dan Zhang, 2005).

Pada Contoh 2.1. $N(v_1) = \{v_2, v_3\}$ dan $|N(v_1)| = 2$, sehingga $deg\,(v_1) = 2$. $N(v_2) = \{v_1, v_3, v_4\}$ dan $|N(v_2)| = 3$, sehingga $deg\,(v_2) = 3$. $N(v_5) = \{\emptyset\}$ dan $|N(v_5)| = 0$, sehingga $deg\,(v_5) = 0$.

Definisi 2.1.5 Graf Kosong (*Null Graph*)

Graf *G* disebut graf kosong jika himpunan garis pada *G* merupakan himpunan kosong. Graf kosong dinotasikan dengan N_n dimana *n* adalah banyaknya titik dari graf tersebut (Munir, 2003).

Contoh 2.2.



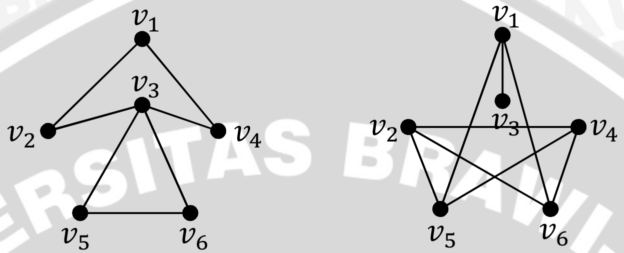
Gambar 2.2. Graf kosong dengan 3 titik (N_3)

Definisi 2.1.6 Komplemen dari Graf

Komplemen dari graf *G* ($\bar{G}$) adalah suatu graf yang himpunan titiknya adalah $V(G)$ sedemikian sehingga setiap pasang titik *u*,*v* di

G, *uv* adalah adalah garis di $\bar{G}$ jika dan hanya jika *uv* bukan garis di G (Chartrand dan Zhang, 2005).

Contoh 2.3.



Graf G Graf $\bar{G}$

Gambar 2.3. Graf G dan komplemennya (Graf $\bar{G}$)

Pada Contoh 2.3. graf G dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_3v_4, v_3v_5, v_3v_6, v_5v_6\}$ serta graf $\bar{G}$ dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan $E(\bar{G}) = \{v_1v_3, v_1v_5, v_1v_6, v_2v_4, v_2v_5, v_2v_6, v_4v_5, v_4v_6\}$.

2.2 Keterhubungan (*Connectivity*)

Definisi 2.2.1 Jalan (*Walk*)

Suatu jalan (*walk*) dari graf G adalah suatu barisan yang terdiri dari titik dan garis secara berselang-seling, diawali dan diakhiri dengan titik di mana setiap garisnya bersisian dengan dua titik terdekat pada deretan tersebut (Chartrand dan Zhang, 2005).

Definisi 2.2.2 Lintasan (*Path*)

Lintasan dengan panjang n dari v ke w adalah jalan (*walk*) dari v ke w yang semua titiknya berbeda (Chartrand dan Zhang, 2005).

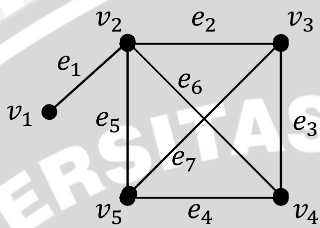
Definisi 2.2.3 Sirkuit (*Circuit*)

Sirkuit adalah *walk* tertutup yang titik-titiknya tidak muncul lebih dari satu kali, kecuali titik awal dan titik akhir. Sirkuit juga disebut putaran atau siklus (*cycle*) (Chartrand dan Zhang, 2005).

Definisi 2.2.4 Lintasan Hamilton

Lintasan Hamilton dari graf *G* adalah suatu lintasan yang melalui tiap titik di dalam *G* tepat satu kali (Munir, 2003).

Contoh 2.4.



Graf *G*

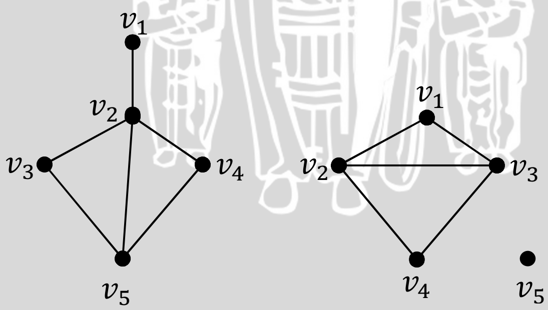
Gambar 2.4. Graf *G*

Pada Contoh 2.4. graf *G* mempunyai *walk* $v_1e_1v_2e_6v_4e_4v_5$, *path* $v_1e_1v_2e_2v_3e_3v_4e_4v_5$, sirkuit $v_2e_2v_3e_3v_4e_4v_5e_5v_2$, dan lintasan Hamilton $v_1e_1v_2e_6v_4e_4v_5e_7v_3$.

Definisi 2.2.5 Terhubung (*Connected*)

Suatu graf *G* dikatakan terhubung jika setiap pasang titik dari *G* dihubungkan oleh suatu lintasan. Jika terdapat sepasang titik yang tidak dihubungkan oleh sembarang lintasan, maka graf *G* dikatakan tidak terhubung (*disconnected*) (Marsudi, 1998).

Contoh 2.5



Graf *G* Graf *H*

Gambar 2.5. Graf *G* terhubung dan graf *H* tidak terhubung

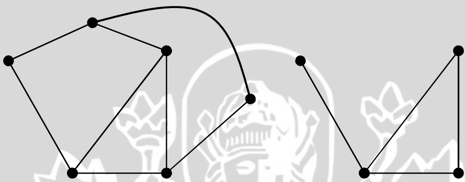
Pada Contoh 2.5. graf G terhubung karena setiap pasang titiknya dihubungkan oleh sebuah garis. Graf H tidak terhubung karena ada satu titik terasing yaitu v_5.

2.3 Subgraf, Komponen Graf, dan Subgraf Pembangun (*Backbone*)

Definisi 2.3.1 Subgraf

Subgraf dari $G = (V, E)$ adalah graf $H = (V_1, E_1)$ di mana $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$ (Rosen, 2003).

Contoh 2.6.



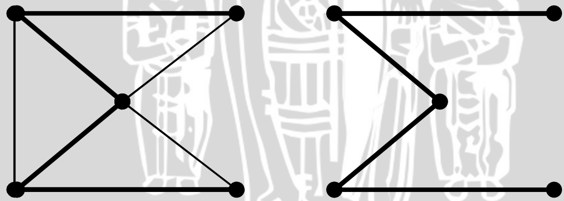
Graf G Graf H

Gambar 2.6. Graf *G* dan graf *H* (subgraf dari *G*)

Definisi 2.3.2 Subgraf Pembangun (*Backbone*)

Subgraf *H* dari *G* disebut subgraf pembangun atau *backbone* jika $V_H = V$ (Broersma, dkk., 2003).

Contoh 2.7.



Graf G Graf H

Gambar 2.7. Graf *G* dan graf *H* (*backbone* dari *G*)

Pada Contoh 2.7. dapat dilihat bahwa graf *H* (*backbone* dari *G*) berbentuk lintasan Hamilton (warna tebal) dan $V_H = V$.

Definisi 2.3.3 Komponen Graf

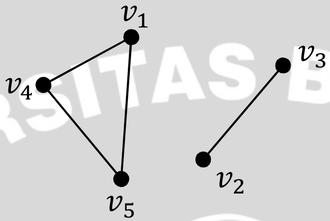
Suatu subgraf H dari G disebut komponen dari G jika:

a. H terhubung

b. H tidak memuat subgraf terhubung lain yang lebih besar

(Dierker dan Voxman, 1986).

Contoh 2.8.



Gambar 2.8. Graf G

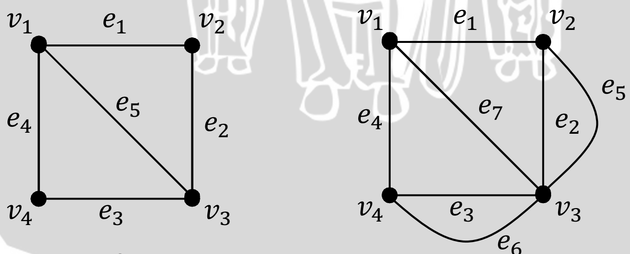
Pada Contoh 2.8. graf G mempunyai dua komponen, yaitu: $V(H_1) = \{v_1, v_4, v_5\}$ dengan $E(H_1) = \{v_1v_4, v_1v_5, v_4v_5\}$ dan $V(H_2) = \{v_2, v_3\}$ dengan $E(H_2) = \{v_2v_3\}$.

2.4 Beberapa Macam Graf

Definisi 2.4.1 Graf Sederhana dan Graf Ganda

Suatu graf yang tidak memiliki *loop* dan garis-garis ganda disebut graf sederhana (*simple graph*). Sedangkan graf ganda (*multigraph*) merupakan graf yang memiliki suatu garis ganda atau mengandung sebuah *loop* (garis yang menghubungkan titik ke dirinya sendiri) (Clark dan Holton, 1991).

Contoh 2.9.



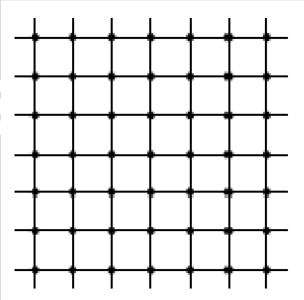
Graf G Graf H

Gambar 2.9. Graf G graf sederhana dan graf H graf ganda

Definisi 2.4.2 Graf Hingga dan Tak Berhingga

Suatu graf $G = (V, E)$ dikatakan berhingga jika $V(G)$ dan $E(G)$ merupakan himpunan berhingga. Graf $G = (V, E)$ dikatakan tak berhingga jika $V(G)$ dan $E(G)$ tak berhingga (Marsudi, 1998).

Contoh 2.10.

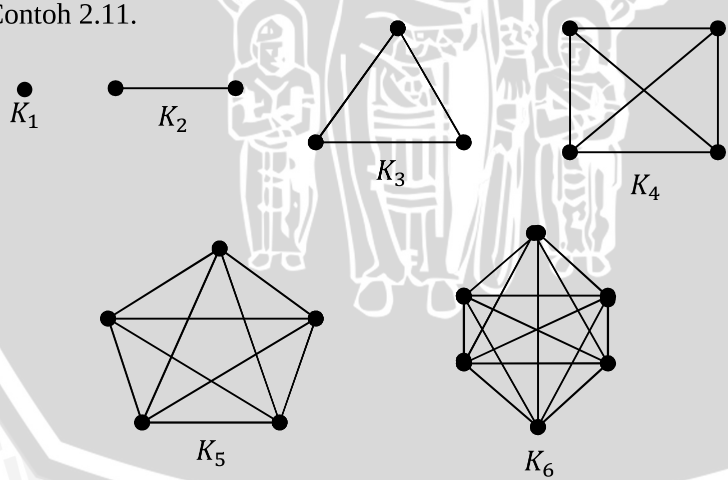


Gambar 2.10. Graf tak berhingga

Definisi 2.4.3 Graf Lengkap

Suatu graf *G* dikatakan lengkap jika setiap dua titik yang saling asing dihubungkan oleh suatu garis. Graf lengkap dengan banyak titik *n* dinotasikan dengan K_n (Chartrand dan Zhang, 2005).

Contoh 2.11.



Gambar 2.11. Graf lengkap

Teorema 2.4.4

Jika setiap dua titik yang saling asing dari K_n dihubungkan oleh sebuah garis, maka banyak garis dari K_n adalah $\frac{n(n-1)}{2}$ (Siang, 2002).

Bukti:

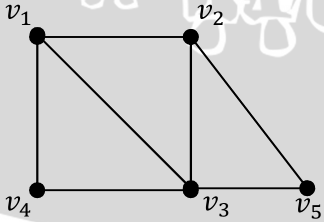
Misalkan G adalah suatu graf lengkap dengan n titik $(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Pertama, ambil sembarang titik (misalkan v_1). Karena G merupakan graf lengkap, maka v_1 dihubungkan dengan $(n-1)$ titik lainnya yaitu $v_2, v_3, \dots, v_n$. Jadi ada $(n-1)$ buah garis yang berhubungan dengan v_1. Kedua, ambil sembarang titik berikutnya (misalkan v_2). Karena G adalah graf lengkap, maka v_2 juga dihubungkan dengan semua titik sisanya $(v_1, v_3, \dots, v_n)$, sehingga ada $(n-1)$ buah garis yang berhubungan dengan v_2. Salah satu garis tersebut menghubungkan v_2 dengan v_1. Garis ini sudah diperhitungkan pada saat menghitung banyaknya garis yang berhubungan dengan v_1. Jadi ada $(n-2)$ garis yang belum diperhitungkan. Selanjutnya, menghitung banyaknya garis yang berhubungan dengan $(v_3, v_4, \dots, v_{n-1})$ dan yang belum diperhitungkan sebelumnya. Banyak garis yang didapat berturut-turut adalah $(n-3), (n-4), \dots, 3, 2, 1$. Jadi, secara keseluruhan terdapat $(n-1) + (n-2) + (n-3) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ buah garis.

2.5 *Clique*, Himpunan Bebas, Graf *Perfect* dan Graf Split

Definisi 2.5.1 *Clique*

Suatu *clique* $C \subseteq V$ pada graf $G = (V, E)$ adalah suatu himpunan titik yang memuat subgraf lengkap dari G. Banyaknya titik (order) maksimum suatu *clique* dalam G disebut bilangan *clique* yang dinotasikan dengan $\omega(G)$ (Chartrand dan Zhang, 2005).

Contoh 2.12.



Graf G

Gambar 2.12. Graf G

Pada Contoh 2.12. dapat ditulis beberapa macam *clique* dari graf G yaitu $C_1 = \{v_1, v_2\}$, $C_2 = \{v_1, v_3\}$, $C_3 = \{v_1, v_4\}$, $C_4 = \{v_2, v_3\}$, $C_5 = \{v_4, v_3\}$, $C_6 = \{v_2, v_5\}$ dan $C_7 = \{v_3, v_5\}$ yang masing-masing memuat subgraf lengkap K_2. Sedangkan $C_8 = \{v_1, v_2, v_3\}$, $C_9 = \{v_2, v_3, v_5\}$, dan $C_{10} = \{v_1, v_3, v_4\}$ memuat subgraf lengkap K_3 yang merupakan subgraf lengkap maksimum, sehingga bilangan *clique* dari graf G adalah $\omega(G) = 3$.

Definisi 2.5.2 Himpunan Bebas

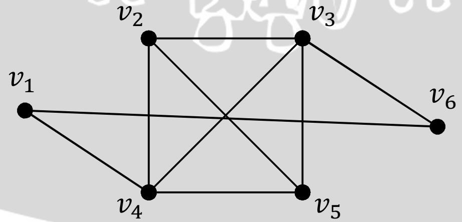
Suatu himpunan titik $I \subseteq V$ pada graf G disebut himpunan bebas jika tidak ada dua titik di I yang *adjacent*. Himpunan bebas maksimum adalah sebuah himpunan bebas dengan kardinalitas maksimum. Banyaknya titik maksimum dalam himpunan bebas dinotasikan dengan $\alpha(G)$ dan disebut bilangan bebas dari G (Chartrand dan Zhang, 2005).

Pada Contoh 2.12. graf G semua titiknya terhubung langsung kecuali titik v_2 dan v_4 serta titik v_1 dan v_5, sehingga himpunan bebas dari graf G yaitu $I_1 = \{v_2, v_4\}$ dan $I_2 = \{v_1, v_5\}$ yang masing-masing berorder maksimum. Oleh karena itu, bilangan bebas dari graf G adalah $\alpha(G) = 2$.

Definisi 2.5.3 Graf *Perfect*

Graf *perfect* adalah suatu graf yang mempunyai bilangan kromatik dan bilangan *clique* yang sama atau $\chi(G) = \omega(G)$ (Columbic, 1980). Bilangan kromatik suatu graf G dinotasikan dengan $\chi(G)$ didefinisikan sebagai jumlah minimal warna yang diperlukan untuk mewarnai titik-titik pada graf G sedemikian sehingga setiap titik-titik yang terhubung langsung mendapatkan warna yang berbeda (Chartrand dan Zhang, 2005).

Contoh 2.13.



Graf G

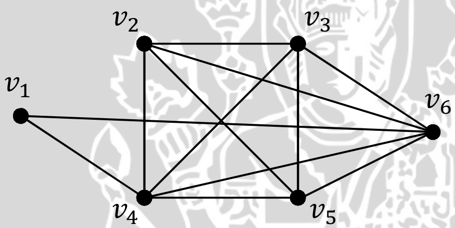
Gambar 2.13. Graf G Graf *Perfect*

Pada Contoh 2.13. subgraf lengkap maksimum dari graf G adalah graf K_4, sehingga order subgraf lengkapnya adalah 4 atau $\omega(G) = 4$. Graf G dapat diwarnai dengan pewarnaan minimum sebanyak 4, sehingga $\chi(G) = 4$. Dengan demikian, graf G adalah graf *perfect* yang memenuhi $\chi(G) = \omega(G) = 4$.

Definisi 2.5.4 Graf Split

Suatu graf $G = (V, E)$ disebut graf split jika terdapat suatu partisi $V = I + C$ dari himpunan titiknya menjadi himpunan bebas I dan himpunan lengkap C. Bentuk graf split merupakan subbagian dari graf *perfect*. Oleh karena itu, graf split memenuhi $\chi(G) = \omega(G) = k$ (Columbic, 1980).

Contoh 2.14.



Gambar 2.14. Graf split

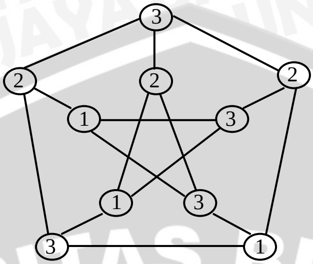
2.6 Pewarnaan Graf (*Graph Coloring*)

Definisi 2.6.1 Pewarnaan Titik (*Vertex Coloring*)

Pewarnaan titik adalah penentuan warna bagi setiap titik dari graf sedemikian sehingga tiap dua titik yang berdekatan (*adjacent*) mendapat warna yang berbeda (Marsudi, 1998).

Banyak warna minimal pada sembarang pewarnaan di graf G disebut bilangan kromatik dari G, dinotasikan dengan $\chi(G)$. Jika dimungkinkan untuk mewarnai titik di G dari suatu himpunan k warna, maka G disebut terwarnai-k (*k-colorable*). Pewarnaan yang menggunakan k warna disebut pewarnaan-k (*k-coloring*). Jika $\chi(G) = k$, maka G juga disebut berkromatik-k (*k-chromatic*) dan setiap pewarnaan-k dari G disebut pewarnaan minimum dari G (Chartrand dan Zhang, 2005).

Contoh 2.15.



Gambar 2.15. Graf dengan $\chi(G) = 3$

Teorema 2.6.2

Jika graf G adalah graf kosong, maka $\chi(G) = 1$ (Arniati, 2010).

Bukti :

Karena graf G adalah graf kosong *(Null Graph)*, maka graf tersebut tidak memiliki garis yang berarti tidak ada titik yang *adjacent*, sehingga setiap titik boleh mempunyai warna yang sama. Oleh karena itu, pewarnaan pada G hanya memerlukan satu warna. Sehingga, bilangan kromatik G adalah 1 atau $\chi(G) = 1$.

Contoh 2.16.

Gambar 2.16 Graf kosong dengan dua titik dan $\chi(G) = 1$

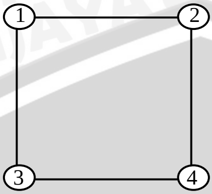
Teorema 2.6.3

Jika graf G terwarnai-k, maka $\chi(G) \leq k$ (Arniati, 2010).

Bukti:

Jika graf G terwarnai-k berarti semua titik pada graf G dapat diwarnai dengan menggunakan k warna. Karena bilangan kromatik merupakan minimum banyaknya warna yang digunakan untuk mewarnai semua titik pada graf G sedemikian sehingga setiap dua titik yang berdekatan mendapat warna yang berbeda, maka $\chi(G) \leq k$.

Contoh 2.17.

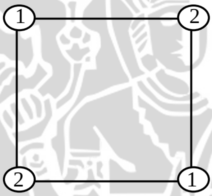


Graf G

Gambar 2.17. Graf *G* terwarnai – 4

Graf *G* pada Contoh 2.17. di atas dapat diwarnai dengan menggunakan 2 warna. Dengan demikian, $\chi(G) = 2 \leq 4$ yang berarti $\chi(G) \leq k$.

Contoh 2.18.



Graf G

Gambar 2.18. Graf *G* dengan $\chi(G) = 2$

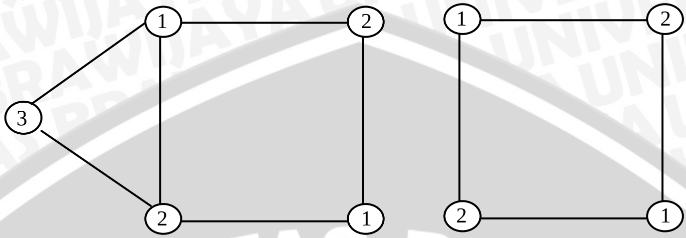
Teorema 2.6.4

Jika *H* adalah sebuah subgraf dari graf *G*, maka $\chi(H) \leq \chi(G)$ (Arniati, 2010).

Bukti:

Misalkan *H* sebuah subgraf dari graf *G*, berarti $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Karena sembarang pewarnaan pada *G* menghasilkan suatu pewarnaan pada *H* juga serta dimungkinkan untuk mewarnai *H* dengan warna yang lebih sedikit, maka $\chi(H) \leq \chi(G)$.

Contoh 2.19.



Graf G Graf H

Gambar 2.19. Graf G dan graf H subgraf dari G

Dari Contoh 2.19. diperoleh $\chi(G) = 3$ dan $\chi(H) = 2$ yang berarti $\chi(H) \leq \chi(G)$.

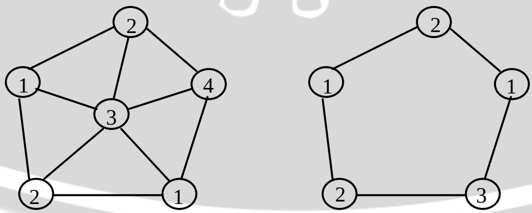
Teorema 2.6.5

Jika $G_{1,} G_{2,} \dots, G_n$ adalah komponen–komponen graf *G*, maka $\chi(G) =$ maks $\{\chi(G_i) | 1 \leq i \leq n\}$ (Arniati, 2010).

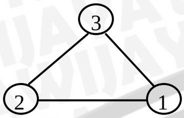
Bukti:

- Misalkan G_i untuk suatu $1 \leq i \leq n$ yang ditulis dengan $G_{1,} G_{2,} \dots, G_n$ adalah komponen–komponen graf *G* yang mempunyai bilangan kromatik maksimum, katakan *k*. Sehingga *k* warna yang digunakan untuk mewarnai semua titik di G_i, dapat digunakan untuk mewarnai semua titik di *G* pada komponen selain G_i, sehingga graf *G* terwarnai–*k*.
- Berdasarkan definisi bahwa $\chi(G) \leq k$ dan karena G_i adalah subgraf dari *G* dan $\chi(G_i) = k$, maka $\chi(G) \geq \chi(G_i) = k$. Karena $\chi(G) \leq k$ dan $\chi(G) \geq k$, maka $\chi(G) = k$.

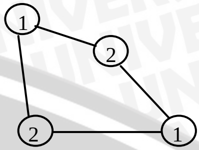
Contoh 2.20.



Graf G Graf G_1



Graf G_2



Graf G_3

Gambar 2.20. Graf *G* dan komponennya (graf $G_1, G_2,$ dan G_3)

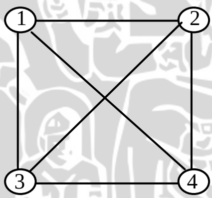
Teorema 2.6.6

Jika graf *G* adalah graf lengkap dengan *n* titik, maka $\chi(G) = n$ (Chartrand dan Zhang, 2005).

Bukti:

Karena graf *G* adalah graf lengkap, maka seluruh titik pada *G* pasti *adjacent*. Dalam pewarnaan pada graf, titik yang *adjacent* tidak boleh memiliki warna yang sama. Oleh karena itu, seluruh titik pada *G* harus diwarnai berbeda. Jadi, warna yang diperlukan untuk mewarnai graf *G* adalah *n* karena *G* berorder *n*. Sehingga, bilangan kromatik *G* adalah *n* atau $\chi(G) = n$.

Contoh 2.21.



Graf K_4

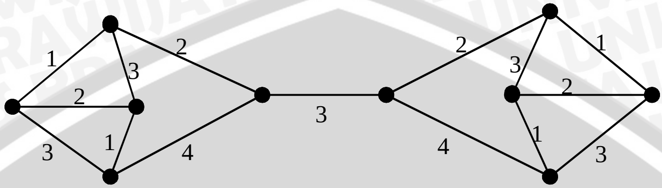
Gambar 2.21. Graf K_4 dengan $\chi(G) = 4$

Definisi 2.6.7 Pewarnaan Garis (*Edge Coloring*)

Pewarnaan garis adalah penentuan warna bagi setiap garis dari graf *G* sedemikian sehingga setiap dua garis yang bersisian (*incident*) mendapat warna yang berbeda (Marsudi, 1998).

Graf *G* dikatakan terwarnai (garis)-*k* jika setiap garis dari *G* dapat diwarnai dengan beberapa atau keseluruhan dari *k* warna sedemikian sehingga setiap dua garis yang berdekatan mendapat warna yang berbeda. Bilangan kromatik garis dari graf *G* adalah *k* ditulis $\chi'(G) = k$ (Marsudi, 1998).

Contoh 2.22.

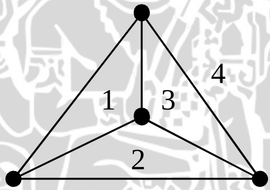


Gambar 2.22. Graf dengan $\chi'(G) = 4$

Definisi 2.6.8 Pewarnaan Peta/Sisi (*Map Coloring*)

Pewarnaan peta/sisi pada graf *G* adalah penentuan warna bagi tiap–tiap sisi dari graf *G* sedemikian sehingga tiap dua sisi yang berdekatan (bersekutu dengan satu garis) mendapat warna yang berbeda. Bilangan kromatik sisi dari graf *G* adalah *k* ditulis $\chi^*(G) = k$ (Marsudi, 1998).

Contoh 2.23.



Gambar 2.23. Graf dengan $\chi^*(G) = 4$

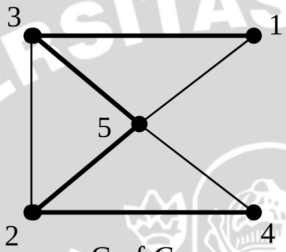
Definisi 2.6.9 Pewarnaan λ-*backbone*

Misalkan *H* adalah subgraf pembangun dari *G* yang merupakan *backbone*, yaitu $H = (V_G, E_H)$. Diberikan bilangan bulat $\lambda \geq 2$. Suatu pewarnaan titik *f* dari graf *G* disebut pewarnaan *λ-backbone* dari (G, H) jika memenuhi $|f(u) - f(v)| \geq \lambda$. Bilangan terkecil *l* di mana terdapat pewarnaan *λ-backbone* $f: V \rightarrow \{1,2,3, \dots, l\}$ disebut bilangan pewarnaan *λ-backbone* dan dilambangkan dengan $BBC_\lambda(G, H)$ (Broersma, dkk., 2003).

Karakteristik pewarnaan λ-*backbone* pada graf G dengan *backbone* $H = (V_G, E_H)$ adalah:

1. Setiap titik yang *adjacent* di G mendapatkan warna yang berbeda.
2. Setiap pasang titik u,v dengan $uv \in E_H$ mendapatkan warna yang berbeda dengan selisih minimal λ.

Contoh 2.24.



Graf G

Gambar 2.24. Pewarnaan *2-backbone* pada graf G dengan *backbone* lintasan Hamilton

Graf G pada Contoh 2.24. di atas mempunyai bilangan pewarnaan *2-backbone* sama dengan 5. Setiap titik yang *adjacent* di G mendapatkan warna yang berbeda. Kemudian untuk setiap titik yang bertetangga (dilewati lintasan Hamilton) mendapatkan warna yang berbeda dengan selisih minimal 2.

BAB III
PEMBAHASAN

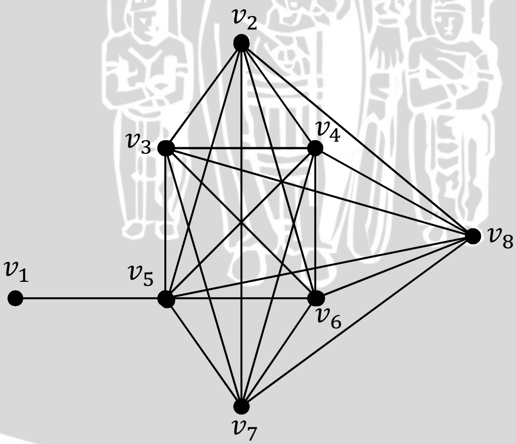
Pada bagian ini diuraikan tiga tahapan yang akan dicapai pada pembahasan skripsi, yaitu:

1. Menentukan karakteristik pewarnaan λ-*backbone* pada graf split berdasarkan karakteristik pewarnaan λ-*backbone* pada graf biasa.
2. Menentukan bilangan pewarnaan λ-*backbone* pada graf split dengan *backbone* K_4 berdasarkan bilangan pewarnaan λ-*backbone* pada graf split dengan *backbone* segitiga, kemudian melihat hubungannya dengan bilangan kromatik.
3. Menyajikan implementasi dari pewarnaan λ-*backbone* dalam suatu studi kasus.

3.1 Graf Split dan Pewarnaan λ-*Backbone*
3.1.1 Graf Split

Suatu graf $G = (V, E)$ disebut graf split jika terdapat suatu partisi $V = I + C$ dari himpunan titiknya menjadi himpunan bebas I dan himpunan lengkap C. Bentuk graf split merupakan subbagian dari graf *perfect*. Oleh karena itu, graf split memenuhi $\chi(G) = \omega(G) = k$ (Columbic, 1980).

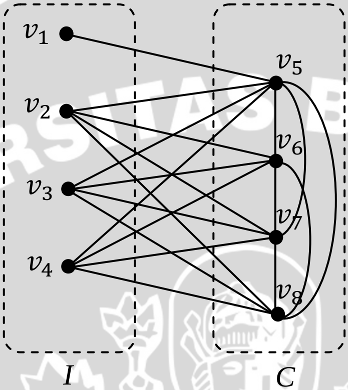
Contoh 3.1.



Gambar 3.1. Graf split

Graf split pada Contoh 3.1. dapat dipartisi menjadi beberapa macam partisi. Berikut adalah ilustrasi dari salah satu partisinya. Partisi yang lain akan disajikan di dalam tabel.

Contoh 3.2.



Gambar 3.2. Partisi dari graf split

Graf split pada Contoh 3.1. mempunyai 4 macam partisi. Partisi yang lain adalah $(I - \{x_i\}) + (C \cup \{x_i\})$ untuk i = 2, 3, 4 seperti yang tertera pada tabel berikut.

Tabel 3.1. Partisi graf split ke dalam *clique* dan himpunan bebas

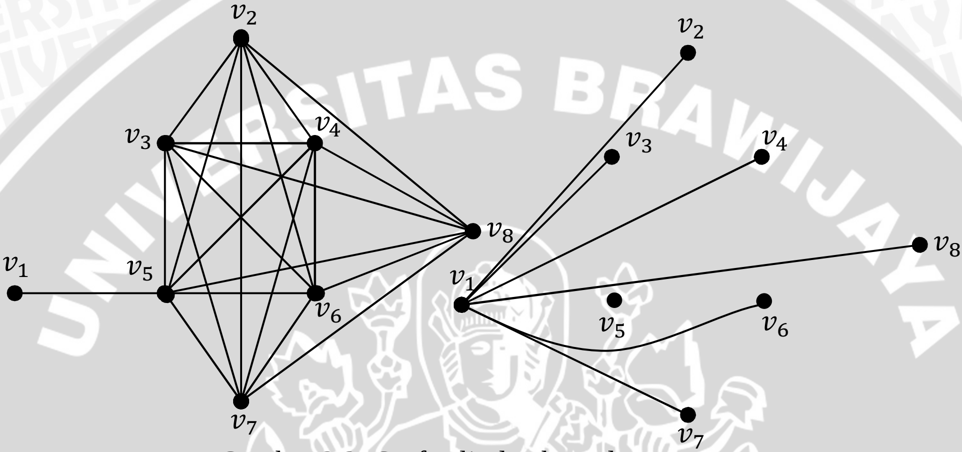
Partisi	*Clique*	Himpunan bebas
1	$C_1 = \{v_5, v_6, v_7, v_8\}$	$I_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
2	$C_2 = \{v_2, v_5, v_6, v_7, v_8\}$	$I_2 = \{v_1, v_3, v_4\}$
3	$C_3 = \{v_2, v_3, v_5, v_6, v_7, v_8\}$	$I_3 = \{v_1, v_4\}$
4	$C_4 = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$	$I_4 = \{v_1\}$

Dari Tabel 3.1. dapat diketahui bahwa $\alpha(G) = 4$ dan $\omega(G) = 8$. I_1 adalah satu-satunya himpunan bebas maksimum untuk G, dan $C \cup \{x_i\} = C_4$ (untuk i = 2, 3, 4) adalah satu-satunya *clique* maksimum. Graf split di atas mempunyai bilangan kromatik = 7, sehingga terpenuhi $\chi(G) = \omega(G) = 7$.

3.1.2 Komplemen Graf Split

Oleh karena himpunan bebas G adalah himpunan lengkap dari komplemen $\bar{G}$ dan sebaliknya, maka suatu graf tak berarah disebut graf split jika dan hanya jika komplemennya ($\bar{G}$) adalah graf split (Columbic, 1980).

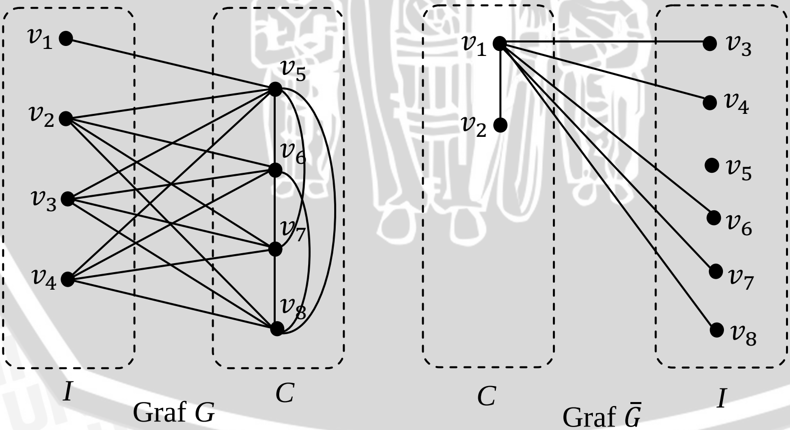
Contoh 3.3.



Gambar 3.3. Graf split dan komplemennya

Adapun salah satu partisi graf split dan komplemennya menjadi *clique* dan himpunan bebas pada Contoh 3.3. disajikan pada diagram berikut.

Contoh 3.4.



Gambar 3.4. Partisi graf split (graf G) dan komplemennya (graf $\bar{G}$)

Graf $\bar{G}$ pada Contoh 3.4. di atas dapat dipartisi ke dalam *clique* $C = \{v_1, v_2\}$ dan himpunan bebas $I = \{v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$. Partisi tersebut adalah partisi maksimal yang mungkin. Sehingga, bilangan *clique*nya adalah $\omega(\bar{G}) = 2$ dan bilangan bebasnya adalah $\alpha(\bar{G}) = 6$. Graf $\bar{G}$ juga mempunyai bilangan kromatik = 2, sehingga terpenuhi $\chi(\bar{G}) = \omega(\bar{G}) = 2$.

3.1.3 Pewarnaan Graf Split

3.1.3.1 Pewarnaan Titik

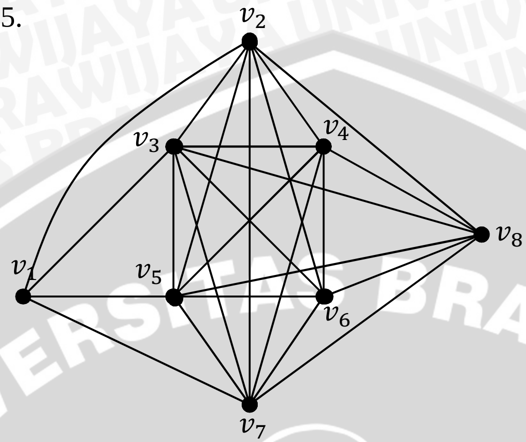
Pewarnaan titik adalah penentuan warna bagi setiap titik dari graf sedemikian sehingga tiap dua titik yang berdekatan (*adjacent*) mendapat warna yang berbeda (Marsudi, 1998). Banyak warna minimal pada sembarang pewarnaan di graf *G* disebut bilangan kromatik dari *G*, dinotasikan dengan $\chi(G)$ (Chartrand dan Zhang, 2005).

Dalam proses pewarnaan pada graf split, maka graf split dipartisi menjadi himpunan bebas dan *clique* dengan order terbesar. Adapun *clique* dengan order terbesar tersebut dapat dikonstruksi dengan mencari subgraf komplit maksimum dari graf split tersebut. Sehingga, jelas bilangan kromatik graf split sama dengan *clique* dengan order terbesar, sesuai dengan definisi graf split dimana bilangan kromatiknya sama dengan bilangan *clique*nya $(\chi(G) = \omega(G) = k)$. Graf split pada Contoh 3.1. mempunyai bilangan clique sama dengan 7, sehingga dapat diambil kesimpulan bahwa bilangan kromatiknya juga sama dengan 7.

Pewarnaan titik pada graf split dengan $\chi(G) = k$ dapat dilakukan dengan langkah sebagai berikut.

1. Jika $I = \emptyset$, warnai semua titik pada *clique* secara terurut dengan warna yang berbeda dari himpunan warna $i = 1,2, \dots, k$.
2. Jika $I \neq \emptyset$, warnai semua titik pada *clique* secara terurut dengan warna yang berbeda dari himpunan warna $i = 1,2, \dots, k$. Kemudian untuk setiap titik *u* pada himpunan bebas dan titik *v* pada *clique* sedemikian sehingga $uv \notin E_G$, warnai titik *u* dengan warna yang sama dengan *v*.

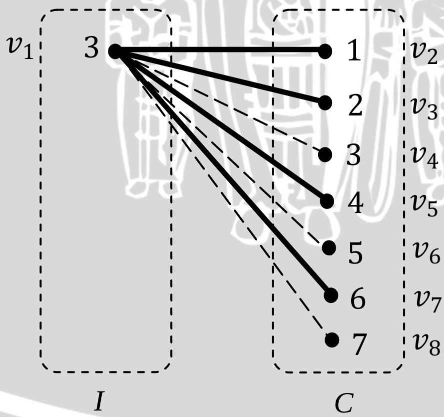
Contoh 3.5.



Gambar 3.5. Graf split

Graf split pada Contoh 3.5. mempunyai $\chi(G) = \omega(G) = 7$. Karena order dari graf split tersebut sama dengan 8 sedangkan $\omega(G) = 7$, maka satu titiknya jelas berada pada himpunan bebas atau $I \neq \emptyset$. Oleh karena itu, pewarnaan titiknya dilakukan dengan mewarnai semua titik pada *clique* secara terurut dengan warna yang berbeda dari himpunan warna $i = 1,2, \ldots, k$. Kemudian untuk setiap titik *u* pada himpunan bebas dan titik *v* pada *clique* sedemikian sehingga $uv \notin E_G$, warnai titik *u* dengan warna yang sama dengan *v*. Pewarnaan tersebut dapat diilustrasikan dengan diagram berikut.

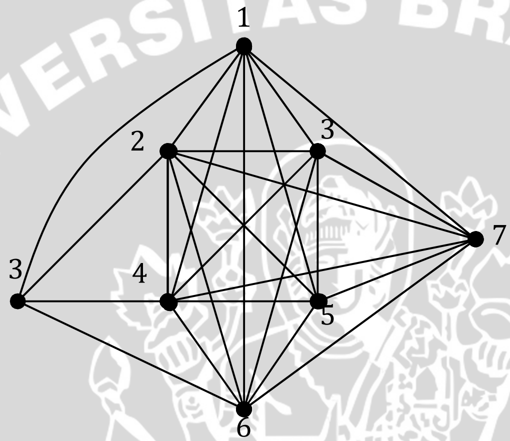
Contoh 3.6.



Gambar 3.6. Partisi dan pewarnaan titik pada graf split

Graf split pada Contoh 3.5. dapat dipartisi seperti pada Gambar 3.6. Garis tebal menunjukkan hubungan ketetanggaan sedangkan garis putus-putus menunjukkan hubungan tak bertetangga. Titik v_1 dapat diwarnai sama dengan titik v_4, v_6, atau v_8 karena tak bertetangga dan juga sebaliknya, tidak dapat diwarnai sama dengan v_2, v_3, v_5, atau v_7 karena mempunyai hubungan ketetanggaan. Pewarnaan akhir dari grafnya diberikan pada gambar berikut.

Contoh 3.7.



Gambar 3.7. Pewarnaan titik pada graf split

3.1.3.2 Pewarnaan λ-*Backbone*

Misalkan H adalah subgraf pembangun dari G yang merupakan *backbone*, yaitu $H = (V_G, E_H)$. Diberikan bilangan bulat $\lambda \geq 2$. Suatu pewarnaan titik f dari graf G disebut pewarnaan λ-*backbone* dari (G, H) jika memenuhi $|f(u) - f(v)| \geq \lambda$. Bilangan terkecil l di mana terdapat pewarnaan λ-*backbone* $f: V \rightarrow \{1,2,3, \dots, l\}$ disebut bilangan pewarnaan λ-*backbone* dan dilambangkan dengan $BBC_\lambda(G, H)$ (Broersma, dkk., 2003).

Adapun karakteristik dari pewarnaan λ-*backbone* pada graf split $G = (V, E)$ dengan *backbone* $H = (V_G, E_H)$ adalah sebagai berikut:

1. Setiap titik yang *adjacent* di G mendapatkan warna yang berbeda.

2. Setiap pasang titik *u*,*v* di *C* dengan $uv \in E_H$ mendapatkan warna yang berbeda dengan selisih minimal λ.
3. Setiap pasang titik u di C dan w di I dengan $uw \in E_H$ mendapatkan warna yang berbeda dengan selisih minimal λ.

Teorema 3.1.3.3

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf split dengan *backbone* segitiga dan $\chi(G) = k$. Untuk setiap *backbone* segitiga $\kappa = (V_G, E_\kappa)$ dari *G* berlaku:

$$BBC_\lambda(G,\kappa) \leq \begin{cases} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 2\lambda & \text{jika } 3 \leq k \leq 2\lambda + 1 \text{ dan } \lambda \geq 2 \\ k + 1 & \text{jika } k \geq 6 \text{ dan } \lambda = 2 \\ 2\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \lambda - 1 & \text{jika } k \geq 2\lambda + 2 \text{ dan } \lambda \geq 3 \end{cases}$$

($\lfloor x \rfloor$adalah bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan *x*) (Hayati, 2007).

Pembuktian Batas Atas

Misal $G = (V, E)$ adalah graf split dengan *backbone* segitiga $\kappa = (V_G, E_\kappa)$. Misal *C* dan *I* adalah partisi dari *V* sedemikian sehingga *C* dengan $|C| = k$ adalah suatu *clique* dengan order terbesar dan *I* adalah suatu himpunan bebas. Karena *G* adalah graf split, akibatnya $\chi(G) = \omega(G) = k$.

Misalkan κ terdiri dari *m* segitiga yang saling lepas dan dari *m* segitiga yang saling lepas tersebut terdapat *n* segitiga yang semua titiknya berada di *C*. Kemudian, yang dimaksud dengan segitiga adalah segitiga yang berada di κ, dan yang dimaksud dengan dua titik bertetangga adalah dua titik yang bertetangga di κ kecuali jika dikatakan khusus.

Untuk bukti batas atas akan dibagi ke dalam tiga kasus sebagai berikut.

1) Kasus $3 \leq k \leq 2\lambda + 1$ dan $\lambda \geq 2$
    1. Pilih salah satu titik dari setiap segitiga yang semua titiknya berada di *C* dan warnai masing-masing titiknya secara terurut dengan warna $1, 2, \dots, n$.

2. Pilih salah satu titik yang terletak di C dari setiap segitiga yang memuat titik di I dan warnai masing-masing titik-titiknya secara terurut dengan warna $n+1, n+2, \dots, m$.
3. Untuk $i = 1,2, \dots, m$, warnai salah satu titik di C yang bertetangga dengan titik i dengan warna $\lambda + i$.
4. Untuk $j = 1,2, \dots, n$, warnai titik di C yang bertetangga dengan titik yang berwarna j dan dengan titik yang berwarna $\lambda + j$ dengan warna $2\lambda + j$.
5. Semua titik di I diwarnai dengan $m + 2\lambda$.

2) Kasus $k \geq 6$ dan $\lambda = 2$

Dalam kasus ini pembuktian akan dibagi ke dalam 2 subkasus, yaitu:

i. Subkasus $I = \emptyset$

Untuk $i = 1,2, \dots, m$, warnai titik-titik di setiap segitiga ke-i dengan warna $i, m+i, 2m+i, 3m+i$.

ii. Subkasus $I \neq \emptyset$

1. Misal $u \in I$ dan $v \in C$ sedemikian sehingga $uv \notin E_G$, warnai u dan v dengan warna 1.
2. Warnai dua titik di C yang bertetangga dengan u berturut-turut dengan m dan $2m$.
3. Perhatikan m-2 segitiga yang semua titiknya belum terwarnai. Untuk setiap segitiga tersebut warnai salah satu titiknya yang berada di C berturut-turut dengan warna $2,3, \dots, m-1$.
4. Untuk $i = 1,2, \dots, m-1$, warnai titik yang bertetangga dengan titik berwarna i dengan warna $m + i$.
5. Warnai titik-titik di C yang belum terwarnai dengan warna $2m+1, 2m+2, \dots, 2m+n$.
6. Titik-titik yang belum terwarnai diwarnai dengan warna $k+1$.

3) Kasus $k \geq 2\lambda + 2$ dan $\lambda \geq 3$

Pembuktian ini akan dibagi ke dalam dua subkasus, yaitu:

i. Subkasus $m \leq \lambda$

1. Pilih salah satu titik dari setiap segitiga yang semua titiknya berada di C, dan warnai masing-masing titiknya secara terurut dengan warna $1,2 \dots, n$.

2. Pilih salah satu titik yang terletak di C dari setiap segitiga yang memuat titik di I, dan warnai masing-masing titik-titiknya secara terurut dengan warna $n+1, n+2, \dots, m$.
3. Untuk $i = 1,2, \dots, m$, warnai salah satu titik di C yang bertetangga dengan titik i dengan warna $\lambda + i$
4. Untuk $j = 1,2, \dots, n$, warnai titik di C yang bertetangga dengan titik yang berwarna j dan dengan titik yang berwarna $\lambda + j$ dengan warna $2\lambda + j$.
5. Semua titik di *I* diwarnai dengan $m + 2\lambda$.

ii. Subkasus $m > \lambda$

Untuk subkasus ini akan dibagi dalam dua subsubkasus, yaitu:

a. Subsubkasus $I = \emptyset$

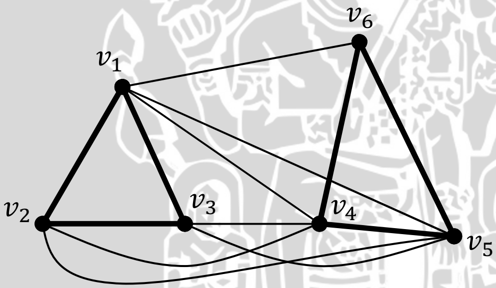
Untuk $i = 1,2, \dots, m$, warnai titik-titik di setiap segitiga ke-*i* dengan $i = i, m + i, 2m + i, 3m + i$.

b. Subsubkasus $I \neq \emptyset$

1. Warnai salah satu titik *u* di *I* dan salah satu titik *v* di *C* yang tak bertetangga dengan *u* dengan warna 1.
2. Warnai dua titik di *C* yang bertetangga dengan *u* berturut-turut dengan *m* dan *2m*.
3. Jika *v* berada di salah satu segitiga yang semua titiknya di *C*, maka:
   - Pilih salah satu titik dari setiap segitiga di *C* dan warnai titik tersebut secara terurut dengan warna $2,3, \dots, m-1$. Dahulukan titik di segitiga yang semua titiknya di *C* dan tidak memuat titik *v* kemudian titik di $C \in \kappa$ yang memuat titik di *I*.
   - Untuk $i = 1,2, \dots, m-1$, warnai salah satu titik di *C* yang bertetangga dengan titik yang berwarna *i* dengan warna $m + i$.
   - Untuk $j = 1,2, \dots, n$ Warnai titik yang bertetangga dengan titik berwarna j dan $m + j$ dengan warna $2m + j$.
   - Semua titik di I yang belum terwarnai diwarnai dengan $2m + \lambda - 1$.

4. Jika v berada di salah satu segitiga yang salah satu titiknya di I, maka:
   - Pilih salah satu titik dari setiap segitiga di C dan warnai titik tersebut secara terurut dengan warna $2,3,\dots,m-1$. Dahulukan titik di segitiga yang semua titiknya di C kemudian titik di $C \in \kappa$ yang memuat titik di I dan tidak memuat titik v. Warnai titik tersebut secara terurut.
   - Untuk $i = 1,2,\dots,m-1$, warnai salah satu titik di C yang bertetangga dengan titik yang berwarna i dengan warna $m+i$.
   - Untuk $j = 1,2,\dots,m$, warnai titik yang bertetangga dengan titik berwarna $j+1$ dan $m+j+1$ dengan warna $2m+j$.
   - Semua titik di I yang belum terwarnai diwarnai dengan $2m+\lambda-1$.

Contoh 3.8.



Gambar 3.8. Graf split dengan *backbone* segitiga

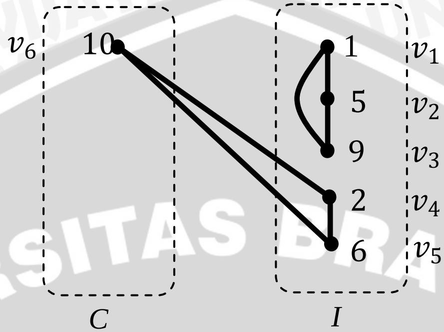
Graf split pada Contoh 3.8. mempunyai bilangan kromatik sama dengan 5. Misalkan diambil $\lambda = 4$, maka

$$BBC_\lambda(G,\kappa) \le \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 2\lambda = \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor + 2.4 = 10.$$

Langkah pewarnaan:

1. Warnai v_1 dengan warna 1.
2. Warnai v_4 dengan warna 2.
3. Warnai v_2 dan v_5 berturut-turut dengan warna 5 dan 6.
4. Warnai v_3 dengan warna 9.
5. Warnai v_6 dengan warna $2 + 2\lambda = 2 + 2.4 = 10$.

Contoh 3.9.



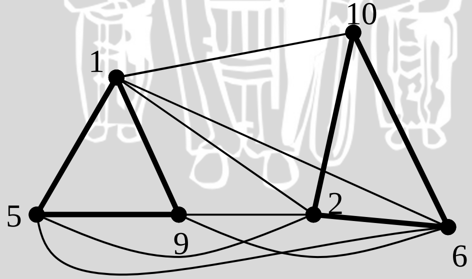
Gambar 3.9. Partisi dan pewarnaan *4-backbone* pada graf split

Pewarnaan pada Contoh 3.9. di atas mendefinisikan pewarnaan *λ-backbone* karena:

1. Setiap titik yang *adjacent* di G mendapat warna yang berbeda.
2. Untuk setiap titik u,v di C dengan $uv \in E_\kappa$ mendapatkan warna yang berbeda dengan selisih lebih besar atau sama dengan 4.
3. Untuk setiap titik u di C dan w di I sedemikian sehingga $uw \in E_\kappa$ mendapatkan warna yang berbeda dengan selisih minimal 4.

Pewarnaan akhir dari grafnya diberikan dalam gambar berikut.

Contoh 3.10.



Gambar 3.10. Pewarnaan *4-backbone* pada graf split dengan *backbone* segitiga

3.2 Hubungan Bilangan Kromatik dengan Bilangan Pewarnaan *λ-backbone* pada Graf Split dengan *Backbone* K_4.

Pada bagian sebelumnya telah dipaparkan pewarnaan *λ-backbone* pada graf split dengan *backbone* segitiga. Dari pemaparan jelas terlihat adanya hubungan antara bilangan kromatik dari graf split dengan bilangan pewarnaan *λ-backbone* dengan *backbone* segitiga. Pada bagian ini akan dipaparkan tentang hubungan antara bilangan kromatik dari graf split dengan bilangan pewarnaan *λ-backbone* dengan *backbone* K_4.

3.2.1 Bilangan Pewarnaan *λ-Backbone* pada Graf Split dengan *Backbone* K_4

Teorema 3.2.2

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf split dengan *backbone* K_4 dan $\chi(G) = k$. Untuk setiap *backbone* $K = (V_G, E_K)$ dari *G* berlaku:

$$BBC_\lambda(G,K) \leq \begin{cases} \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor + 3\lambda & \text{jika } 4 \leq k \leq 3\lambda + 2, k \neq 5 \text{ dan } \lambda \geq 2 \\ k+1 & \text{jika } k \geq 9 \text{ dan } \lambda = 2 \\ 3\left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor + \lambda - 1 & \text{jika } k \geq 3\lambda + 3 \text{ dan } \lambda \geq 3 \end{cases}$$

($\lfloor x \rfloor$adalah bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan *x*).

Penentuan batas atas bilangan pewarnaan *λ-backbone* pada graf split dengan *backbone* K_4 didasarkan pada bilangan pewarnaan *λ-backbone* pada graf split dengan *backbone* segitiga karena segitiga sendiri merupakan graf lengkap dengan tiga titik (K_3). Oleh karena itu, pembuktian batas atas untuk *backbone* K_4 juga analog dengan *backbone* segitiga.

A. Pembuktian Batas Atas

Misal $G = (V, E)$ adalah graf split dengan *backbone* K_4 $(K = (V_G, E_K))$. Misal *C* dan *I* adalah partisi dari *V* sedemikian sehingga *C* dengan $|C| = k$ adalah suatu *clique* dengan order terbesar dan *I* adalah suatu himpunan bebas. Karena *G* adalah graf split, akibatnya $\chi(G) = \omega(G) = k$.

Misalkan K terdiri dari K_4 yang saling lepas sebanyak r dan dari r buah K_4 yang saling lepas tersebut terdapat K_4 yang semua titiknya berada di C sebanyak s. Kemudian, yang dimaksud dengan K_4 adalah K_4 yang berada di K, dan yang dimaksud dengan dua titik bertetangga adalah dua titik yang bertetangga di K kecuali jika disebutkan secara khusus.

Untuk bukti batas atas akan dibagi ke dalam tiga kasus, yaitu:

1) Kasus $4 \leq k \leq 3\lambda + 2, k \neq 5$ dan $\lambda \geq 2$
   a. Untuk $k = 4$
      Warnai titik-titiknya dengan warna $1 + \lambda, 2 + \lambda, 3 + \lambda,$ dan $4 + \lambda$.
   b. Untuk $6 \leq k \leq 3\lambda + 2$
      1. Pilih salah satu titik dari setiap K_4 yang semua titiknya berada di C dan warnai masing-masing titiknya secara terurut dengan warna $1,2 \dots, s$.
      2. Pilih salah satu titik yang terletak di C dari setiap K_4 yang memuat titik di I dan warnai masing-masing titik-titiknya secara terurut dengan warna $s + 1, s + 2, \dots, r$.
      3. Untuk $i = 1,2, \dots, r$, warnai salah satu titik di C yang bertetangga dengan titik i dengan warna $\lambda + i$.
      4. Untuk $j = 1,2, \dots, r$, warnai titik di C yang bertetangga dengan titik yang berwarna j dan dengan titik yang berwarna $\lambda + j$ dengan warna $2\lambda + j$.
      5. Warnai titik di C yang belum terwarnai secara terurut dengan warna $3\lambda + 1, 3\lambda + 2, \dots, 3\lambda + s$.
      6. Semua titik di I diwarnai dengan $r + 3\lambda$.

Pewarnaan di atas mendefinisikan pewarnaan *λ-backbone* karena:

a. Setiap titik yang *adjacent* di G mendapatkan warna yang berbeda.
b. Untuk setiap pasang titik u,v di C dengan $uv \in E_K$ mendapatkan warna yang berbeda dengan selisih sebesar λ.
c. Untuk setiap pasang titik u di C dan w di I dengan $uw \in E_K$ memperoleh warna yang berbeda dengan selisih paling sedikit λ.
d. Warna maksimum yang terpakai dalam pewarnaan ini adalah $r + 3\lambda \leq \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor + 3\lambda$ karena $r \leq \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor$.

2) Kasus $k \geq 9$ dan $\lambda = 2$

Dalam kasus ini pembuktian akan dibagi ke dalam 2 subkasus, yaitu:

i. Subkasus $I = \emptyset$

Untuk $i = 1,2, \dots, r$, warnai titik-titik di setiap K_4 ke-*i* dengan warna $i, r + i, 2r + i, 3r + i$.

ii. Subkasus $I \neq \emptyset$

1. Misal $u \in I$ dan $v \in C$ sedemikian sehingga $uv \notin E_G$, warnai *u* dan *v* dengan warna 1.
2. Warnai dua titik di C yang bertetangga dengan *u* berturut-turut dengan *r* dan *2r*.
3. Misal $u \in I$ dan $v \in C$ sedemikian sehingga $uv \notin E_G$, warnai *u* dan *v* dengan warna 1.
4. Warnai dua titik di C yang bertetangga dengan *u* berturut-turut dengan *r* dan *2r*.
5. Perhatikan K_4 yang semua titiknya belum terwarnai. Untuk setiap K_4 tersebut warnai salah satu titiknya yang berada di *C* berturut-turut dengan warna $2,3, \dots, r - 1$.
6. Untuk $i = 1,2, \dots, r - 1$, warnai titik yang bertetangga dengan titik berwarna *i* dengan warna $r + i$.
7. Untuk $j = 1,2, \dots, r$, warnai titik di *C* yang bertetangga dengan titik yang berwarna j dan dengan titik yang berwarna $r + j$ dengan warna $2r + j$.
8. Warnai titik-titik di C yang belum terwarnai dengan warna $3r + 1, 3r + 2, \dots, 3r + s$.
9. Titik-titik yang belum terwarnai diwarnai dengan warna $k + 1$.

Pewarnaan di atas mendefinisikan pewarnaan *backbone*, karena:

a. Semua titik yang *adjacent* di *G* mendapatkan warna yang berbeda.
b. Untuk setiap pasang titik *u,v* di *C* dengan $uv \in E_K$ mendapatkan warna yang berbeda dengan selisih minimal 2.
c. Untuk setiap pasang titik *u* di *C* dan *w* di *I* dengan $uw \in E_K$ memperoleh warna yang berbeda dengan selisih minimal 2.

3) Kasus $k \geq 3\lambda + 3$ dan $\lambda \geq 3$

   Pembuktian ini akan dibagi ke dalam dua subkasus, yaitu:

   i. Subkasus $r \leq \lambda$
      1. Pilih salah satu titik dari setiap K_4 yang semua titiknya berada di C, dan warnai masing-masing titiknya secara terurut dengan warna $1,2 \dots, s$.
      2. Pilih salah satu titik yang terletak di C dari setiap K_4 yang memuat titik di I, dan warnai masing-masing titik-titiknya secara terurut dengan warna $s + 1, s + 2, \dots, r$.
      3. Untuk $i = 1,2, \dots, r$, warnai salah satu titik di C yang bertetangga dengan titik i dengan warna $\lambda + i$
      4. Untuk $j = 1,2, \dots, r$, warnai titik di C yang bertetangga dengan titik yang berwarna j dan dengan titik yang berwarna $\lambda + j$ dengan warna $2\lambda + j$.
      5. Warnai titik di C yang belum terwarnai secara terurut dengan warna $3\lambda + 1, 3\lambda + 2, \dots, 3\lambda + s$.
      6. Semua titik di I diwarnai dengan $r + 3\lambda$.

Pewarnaan di atas mendefinisikan pewarnaan *backbone*, karena:

   a. Setiap titik yang *adjacent* di G mendapatkan warna yang berbeda.
   b. Setiap pasang titik u,v di C dengan $uv \in E_K$ mendapatkan warna yang berbeda dengan selisih sebesar λ atau 2λ.
   c. Setiap pasang titik u di C dan w di I dengan $uw \in E_K$ memperoleh warna yang berbeda dengan selisih paling sedikit λ.
   d. Warna maksimum yang terpakai adalah $r + 3\lambda$ karena $\lambda \leq \frac{k}{3} - 1$ dan $r \leq \lambda$ akibatnya

$$r + 3\lambda \leq \lambda + 3\left(\frac{k}{3} - 1\right) = k - 3 + \lambda.$$

   Karena $k - 2 \leq 3\left\lceil\frac{k}{3}\right\rceil$, jelas $r + 3\lambda \leq 3\left\lceil\frac{k}{3}\right\rceil + \lambda - 1$.

   ii. Subkasus $r > \lambda$

   Untuk subkasus ini akan dibagi dalam dua subsubkasus, yaitu:

      a. Subsubkasus $I = \emptyset$

         Untuk $i = 1,2, \dots, r$, warnai titik-titik di setiap K_4 ke-*i* dengan $i = i, r + i, 2r + i, 3r + i$.

b. Subsubkasus $I \neq \emptyset$
   1. Warnai salah satu titik *u* di *I* dan salah satu titik *v* di *C* yang tak bertetangga dengan *u* dengan warna 1.
   2. Warnai dua titik di *C* yang bertetangga dengan *u* berturut-turut dengan *r* dan *2r*.
   3. Pilih salah satu titik dari setiap K_4 di *C* dan warnai titik tersebut secara terurut dengan warna $2,3,4, \dots, r-1$. Dahulukan titik di K_4 yang semua titiknya di *C* dan tidak memuat titik *v* kemudian titik di $C \in K_4$ yang memuat titik di *I*.
   4. Untuk $i = 1,2, \dots, r-1$, warnai salah satu titik di *C* yang bertetangga dengan titik yang berwarna i dengan warna $r + i$.
   5. Untuk $j = 1,2, \dots, r$ Warnai titik yang bertetangga dengan titik berwarna j dan $r + j$ dengan warna $2r + j$.
   6. Warnai titik di *C* yang belum terwarnai secara terurut dengan warna $3r + 1, 3r + 2, \dots, 3r + s$.
   7. Semua titik di *I* yang belum terwarnai diwarnai dengan $3r + \lambda - 1$.

Pewarnaan di atas mendefinisikan pewarnaan *backbone*, karena:

a. Setiap titik yang *adjacent* di *G* mendapatkan warna yang berbeda.
b. Untuk setiap pasang titik *u*,*v* di *C* dengan $uv \in E_{\mathrm{K}}$ mendapatkan warna yang berbeda dengan selisih sebesar *r* atau *2r*.
c. Untuk setiap pasang titik *u* di *C* dan *w* di *I* dengan $uw \in E_{\mathrm{K}}$ memperoleh warna yang berbeda dengan selisih paling sedikit λ.
d. Warna maksimum yang terpakai adalah

$$3r + \lambda - 1 \leq 3\left\lfloor\frac{k}{3}\right\rfloor + \lambda - 1 \text{ karena } \lambda \leq r \leq \left\lfloor\frac{k}{3}\right\rfloor.$$

B. Pembuktian Kesesuaian Batas Atas

Perhatikan graf split $G = (V, E)$ dengan $\chi(G) = k$, dan misalkan *K* adalah *backbone* K_4 dari *G* yang terdiri dari $r = \left\lfloor\frac{k}{3}\right\rfloor$ buah K_4.

Untuk k genap, G dikonstruksi sehingga $(\alpha(G)-1)$ titik di I bertetangga di G dengan semua titik kecuali dengan satu titik di C, sebut titik tersebut dengan p.

Untuk k ganjil, G dikonstruksi sehingga semua titik di I bertetangga di G dengan semua titik kecuali dengan satu titik di C, sebut titik tersebut p. Pembuktian akan dibagi menjadi tiga kasus, yaitu:

1) Kasus $4 \leq k \leq 3\lambda + 2, k \neq 5$ dan $\lambda \geq 2$

   Andaikan $BBC_\lambda(G,K) \leq r + 3\lambda - 1$, untuk setiap K_4 paling sedikit tiga titiknya berada di C. Oleh karena itu, dan karena $r \leq \lambda$, akibatnya banyaknya warna yang diperlukan untuk mewarnai $3r$ titik tersebut paling sedikit $r + 2\lambda$. Warnai $3r$ titik tersebut terlebih dahulu.

   Misalkan w adalah titik dengan warna $r + 2\lambda$, t dan u adalah titik yang telah terwarnai dan bertetangga dengan w. Misalkan v adalah titik yang bertetangga dengan t dan u.

   Warna dari v tidak mungkin di $\{1,2,\ldots,2r\}$ karena warna t dan u di $\{1,2,\ldots,2r\}$ dan $r \leq \lambda$. Warna dari v juga tidak mungkin di $\{2r+1,\ldots,\lambda+r-1,\lambda+r,\ldots,2\lambda+r-1,\ldots,3\lambda+r-1\}$ karena $vw \in E_K$. Diperoleh kontradiksi.

   Jadi, terbukti bahwa $r + 3\lambda$, adalah batas atas terbaik dari $BBC_\lambda(G,K)$ untuk $4 \leq k \leq 3\lambda + 2, k \neq 5$ dan $\lambda \geq 2$.

2) Kasus $k \geq 9$ dan $\lambda = 2$

   Andaikan $BBC_\lambda(G,K) \leq k$. Untuk setiap K_4 paling sedikit tiga titiknya berada di C. Oleh karena itu, dan karena $r > \lambda$ akibatnya banyaknya warna yang diperlukan untuk mewarnai $3r$ titik tersebut paling sedikit $3r$ warna. Warnai $3r$ titik tersebut terlebih dahulu.

   Misalkan p diwarnai dengan a untuk suatu $a \in \{1,2,\ldots,k\}$.

   - Subkasus pertama $a \in \{1,2,\ldots,k\}$

     Untuk subkasus ini, misalkan x adalah titik dengan warna $a+1$, sehingga x berada di K_4 yang tidak memuat p.

Misalkan y adalah titik di I yang bertetangga dengan titik x. Jelas bahwa y bertetangga di G dengan semua titik di C kecuali dengan titik p. Oleh karena itu, y tidak mungkin diwarnai dengan $\{1,2,\ldots,k\}$. Tetapi y juga tidak mungkin diwarnai dengan a karena $xy \in E_K$. Diperoleh suatu kontradiksi.

- Subkasus kedua $a = k$.
  Untuk subkasus ini, misalkan z adalah titik dengan warna $k-1$, sehingga z berada di K_4 yang tidak memuat p. Misalkan y adalah titik di I yang bertetangga dengan z. Jelas bahwa y bertetangga di G dengan semua titik di C kecuali dengan titik p. Oleh karena itu, y tidak mungkin diwarnai dengan $\{1,2,\ldots,k-1\}$. Tetapi y juga tidak mungkin diwarnai dengan k karena $yz \in E_K$. Kontradiksi dengan pengandaian.

3) Kasus $k \geq 3\lambda + 3$ dan $\lambda \geq 3$

Andaikan $BBC_\lambda(G,K) \leq 3r + \lambda - 2$. Untuk setiap K_4 paling sedikit tiga titiknya berada di C. Oleh karena itu, banyaknya warna yang diperlukan untuk mewarnai $3r$ titik tersebut paling sedikit $3r$ warna. Warnai $3r$ titik tersebut terlebih dahulu.

Untuk titik yang bertetangga dengan titik yang berwarna $3r$, diwarnai dengan warna yang lebih kecil yaitu 1 karena yang ingin dicapai adalah pewarnaan minimum. Misalkan w adalah titik dengan warna $3r-1$, t dan u adalah titik yang telah terwarnai dan bertetangga dengan w. Misalkan v adalah titik yang bertetangga dengan t dan u.

Warna dari v tidak mungkin di $\{1,2,\ldots,2r-1\}$ karena warna t dan u di $\{1,2,\ldots,2r-1\}$ dan $r > \lambda$. Warna dari v juga tidak mungkin di $\{2r,\ldots,2r+\lambda+1, 2r+\lambda,\ldots,3r+\lambda-2\}$ karena $vw \in E_K$. Diperoleh kontradiksi.

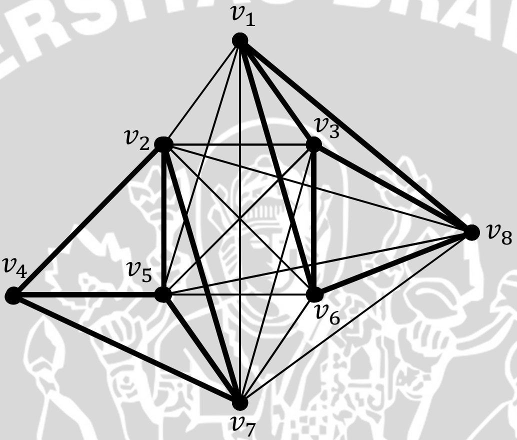
Jadi, terbukti bahwa $3r + \lambda - 1$ adalah batas atas terbaik yang mungkin dari $BBC_\lambda(G,K)$ untuk $k \geq 3\lambda + 3$ dan $\lambda \geq 3$.

3.2.2 Cara Pewarnaan λ-*Backbone*

Pada bagian ini akan ditunjukkan cara pewarnaan λ-*backbone* dari graf split dengan *backbone* K_4. Untuk masing-masing kasus diambil satu contoh kasus.

1. Kasus $4 \leq k \leq 3\lambda + 2, k \neq 5$ dan $\lambda \geq 2$.

Contoh 3.11.



Gambar 3.11. Graf split dengan *backbone* K_4

Graf split pada Contoh 3.11. mempunyai bilangan kromatik $k = 7$. Misal diambil $\lambda = 5$, maka

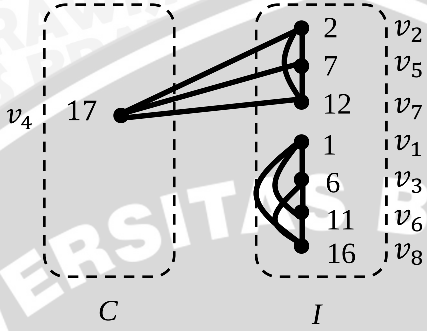
$$BBC_\lambda(G, K) \leq \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor + 3\lambda = \left\lfloor \frac{7}{3} \right\rfloor + 3.5 = 17.$$

Partisi graf split ke dalam *clique* C dengan order maksium dan himpunan bebas *I*. Karena $k = 7$, maka graf split dibangun oleh dua buah K_4 yang saling lepas $(r = 2)$ dan ada sebuah K_4 yang semua titiknya ada di C $(s = 1)$.

Langkah pewarnaan:

- Warnai v_1 dengan warna 1.
- Warnai v_2 dengan warnai dengan 2.
- Warnai v_3 dengan warna 6 dan v_5 dengan warna 1.
- Warnai v_6 dengan warna 11 dan v_7 dengan warna 12.
- Warnai v_8 dengan warna 16.
- Warnai semua titik di *I* yaitu v_4 dengan warna 17.

Contoh 3.12.



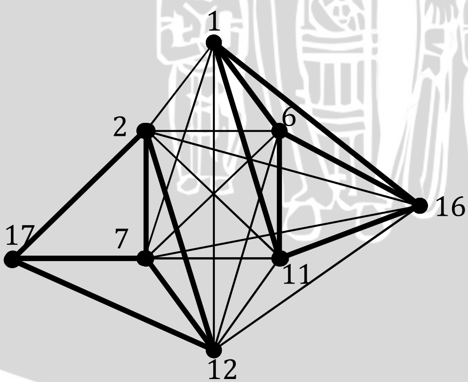
Gambar 3.12. Partisi dan pewarnaan λ-*backbone* pada graf split

Pewarnaan pada Gambar 3.12. mendefinisikan pewarnaan λ-*backbone* karena:

1. Setiap titik di G mendapat warna yang berbeda.
2. Untuk setiap titik u,v di C dengan $uv \in E_K$ mendapatkan warna yang berbeda dengan selisih minimal 5.
3. Untuk setiap pasang titik u di C dan w di I dengan $uw \in E_K$ mendapat warna yang berbeda dengan selisih minimal 5.

Pewarnaan akhir dari grafnya diberikan dalam gambar berikut.

Contoh 3.13.



Gambar 3.13. Pewarnaan *5-backbone* dengan $k = 7$

Untuk kasus selanjutnya, terutama graf split dengan bilangan kromatik besar, graf split akan digambarkan dengan garis tebal sebagai garis *backbone*, garis putus-putus tebal dan tipis masing-masing sebagai garis yang menghubungkan dua titik yang tak bertetangga di *I* dan di *G*, sedangkan garis yang menghubungkan dua titik yang *adjacent* akan digambarkan sebagian saja dengan garis biasa. Hal ini dilakukan untuk menyederhanakan penggambaran graf.

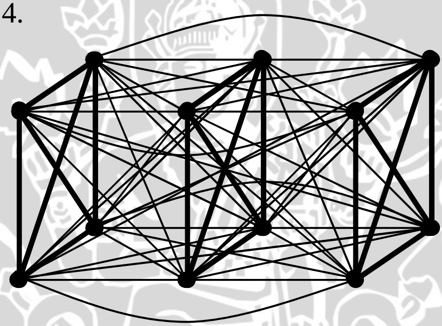
2. Kasus $k \geq 9$ dan $\lambda = 2$.

   Misalkan diambil $k = 12$, maka

$$BBC_\lambda(G, K) \leq k + 1 = 12 + 1 = 13.$$

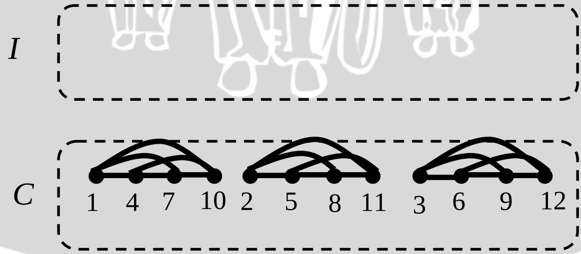
   Untuk $k = 18$ ada dua kemungkinan, yaitu:

   a. Semua titik di *G adjacent*. Dengan kata lain, ada 3 buah K_4 yang semua titiknya di *C*. Ini berarti $I = \emptyset$, $r = 3$ dan $s = 3$. Contoh 3.14.



Gambar 3.14. Graf split dengan $k = 12$ dan $I = \emptyset$

Langkah pewarnaannya adalah untuk $i = 1,2,3$ warnai titik-titik di setiap K_4 ke-*i* dengan warna $i, r + i, 2r + i, 3r + i$. Contoh 3.15.



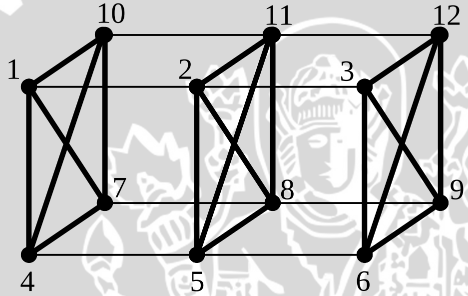
Gambar 3.15 Partisi dan pewarnaan *2-backbone* pada graf split

Garis tebal pada Gambar 3.15. menghubungkan titik-titik yang membentuk *backbone* K_4. Pewarnaan pada Gambar 3.15. di atas mendefinisikan pewarnaan λ-*backbone* karena:

1. Setiap titik di G mendapat warna yang berbeda.
2. Untuk setiap titik u,v di C dengan $uv \in E_K$ mendapatkan warna yang berbeda dengan selisih minimal 2.

Pewarnaan akhir dari grafnya diberikan pada gambar berikut.

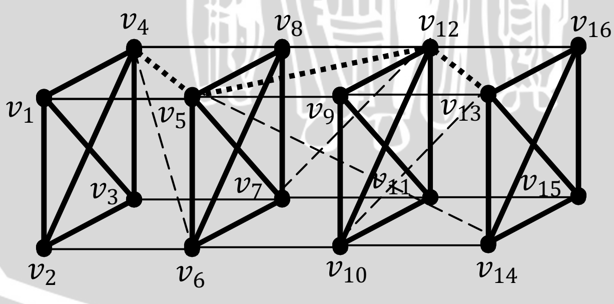
Contoh 3.16.



Gambar 3.16. Pewarnaan *2-backbone* dengan $k = 12$

b. Tidak ada K_4 yang semua titiknya di C. Ini berarti ada 4 buah K_4 yang masing-masing 3 titiknya ada di C dan 1 titiknya ada di I. Atau $I \neq \emptyset, r = 4$, dan $s = 0$

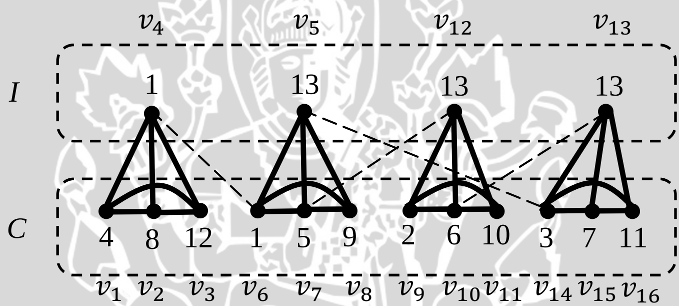
Contoh 3.17.



Gambar 3.17. Graf split dengan $k = 12$ dan $I \neq \emptyset$

Langkah-langkah pewarnaannya adalah sebagai berikut:
- Warnai v_4 dan v_6 dengan warna 1.
- Warnai dua tetangga titik v_4 yaitu v_1 dan v_2 masing-masing dengan warna 4 dan 8.
- Warnai v_9 dan v_{14} secara terurut dengan warna 2 dan 3.
- Warnai v_7, v_{10}, dan v_{15} berturut-turut dengan warna 5, 6, dan 7.
- Warnai v_8,v_{11}, v_{16}, dan v_3 berturut-turut dengan warna 9, 10, 11, dan 12.
- Warnai semua titik di *I* yang belum terwarnai (v_5, v_{12}, dan v_{13}) dengan warnai $3r + \lambda - 1 = 3.4 + 2 - 1 = 13$.

Contoh 3.18.



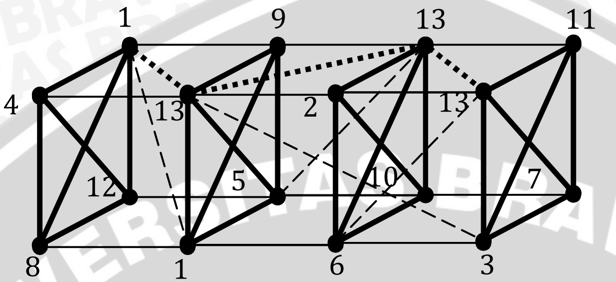
Gambar 3.18. Partisi dan pewarnaan *2-backbone* pada graf split

Pewarnaan pada Gambar 3.18. mendefinisikan pewarnaan *λ-backbone* karena:

1. Setiap titik di *G* mendapat warna yang berbeda.
2. Untuk setiap titik *u,v* di *C* dengan $uv \in E_K$ mendapatkan warna yang berbeda dengan selisih minimal 2.
3. Untuk setiap pasang titik *u* di *C* dan *w* di *I* dengan $uw \in E_K$ mendapat warna yang berbeda dengan selisih minimal 2.

Pewarnaan akhir diberikan dalam gambar berikut.

Contoh 3.19.



Gambar 3.19. Pewarnaan *2-backbone* dengan $k = 12$

3. Kasus $k \geq 3\lambda + 3$ dan $\lambda \geq 3$.

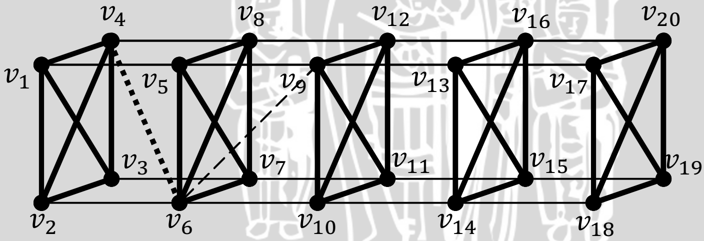
Misalkan diambil $k = 18$ dan $\lambda = 4$ maka

$$BBC_\lambda(G, K) \leq 3\left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor + \lambda - 1 = 3\left\lfloor \frac{18}{3} \right\rfloor + 4 - 1 = 21.$$

Untuk $k = 18$ maka ada dua kemungkinan, yaitu:

a. Ada 3 buah K_4 yang semua titiknya di C dan 2 buah K_4 di C yang salah satu titiknya ada di I. Atau dapat ditulis $I \neq \emptyset$ $r = 5$, dan $s = 3$.

Contoh 3.20.



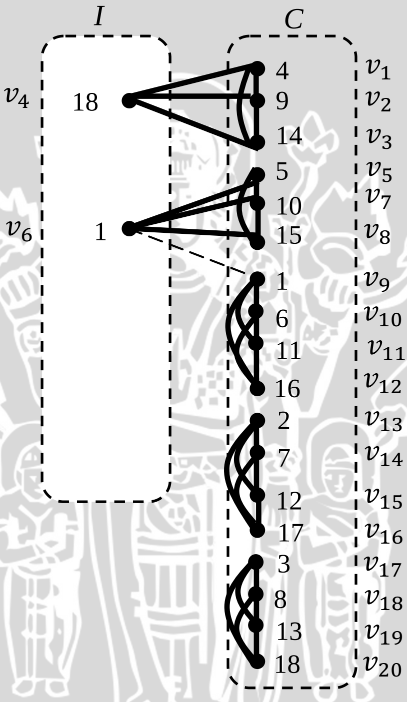
Gambar 3.20. Graf split dengan $k = 18$

Langkah pewarnaannya adalah sebagai berikut:

- Warnai v_6 dan v_9 dengan warna 1.
- Warnai dua tetangga titik v_6 yaitu v_5 dan v_7 berturut-turut dengan warna 5 dan 10.
- Warnai v_{13}, v_{17}, dan v_1 berturut-turut dengan warna 2, 3, dan 4.

- Warnai v_{10}, v_{14}, v_{18}, dan v_2 berturut-turut dengan warna 6, 7, 8, dan 9.
- Warnai $v_{11}, v_{15}, v_{19}, v_3$, dan v_8 berturut-turut dengan warna 11, 12, 13, 14, dan 15.
- Warnai titik di *C* yang belum terwarnai yaitu v_{12}, v_{16}, dan v_{20} secara terurut dengan warna 16, 17, dan 18.
- Terakhir, warnai semua titik di *I* yang belum terwarnai yaitu v_4 dengan warna $3r + \lambda - 1 = 3.5 + 4 - 1 = 18$.

Contoh 3.21.



Gambar 3.21. Partisi dan pewarnaan *4-backbone* pada graf split

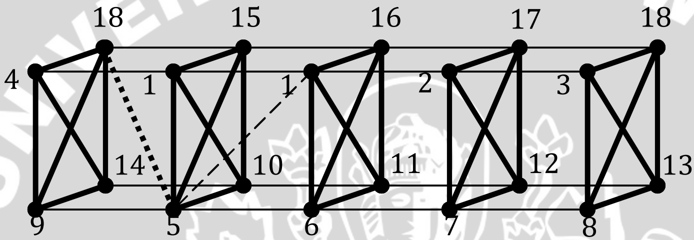
Pewarnaan pada Gambar 3.21. mendefinisikan pewarnaan *λ-backbone* karena:

1. Setiap titik di *G* mendapat warna yang berbeda.

2. Untuk setiap titik u,v di C dengan $uv \in E_K$ mendapatkan warna yang berbeda dengan selisih minimal 4.
3. Untuk setiap pasang titik u di C dan w di I dengan $uw \in E_K$ mendapat warna yang berbeda dengan selisih minimal 4.

Pewarnaan akhir dari grafnya diberikan dalam gambar berikut.

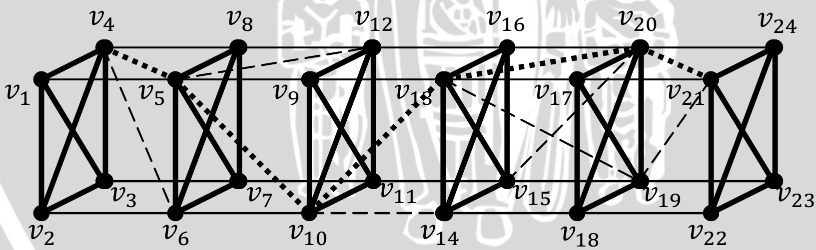
Contoh 3.22.



Gambar 3.22. Pewarnaan *4-backbone* dengan $k = 18$

b. Tidak ada K_4 yang semua titiknya ada di C atau dengan kata lain ada $r = 6$ buah K_4 yang masing-masing satu titiknya ada di I.

Contoh 3.23.

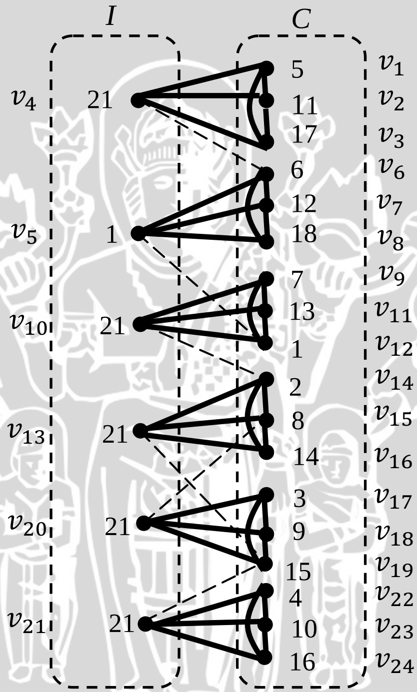


Gambar 3.23. Graf split dengan $k = 18$

Pewarnaannya dilakukan sebagai berikut:
- Warnai v_5 dan v_{12} dengan warna 1.
- Warnai dua tetangga titik v_5 yaitu v_6 dan v_7 berturut-turut dengan warna 6 dan 12.

- Warnai v_{14}, v_{17}, v_{22}, dan v_1 secara terurut dengan warna 2,3, ... ,5.
- Warnai $v_9, v_{15}, v_{18}, v_{23}$, dan v_2 berturut-turut dengan warna 7, 8, …, 11.
- Warnai $v_{11}, v_{16}, v_{19}, v_{24}$, 3, dan v_8 berturut-turut dengan warna 13, 14, …, 18.
- Warnai semua titik di *I* yang belum terwarnai yaitu titik $v_4, v_{10}, v_{13}, v_{20}$, dan v_{21} dengan warna $3r + \lambda - 1 = 3.6 + 4 - 1 = 21$.

Contoh 3.24.



Gambar 3.24. Partisi dan pewarnaan *4-backbone* pada graf split

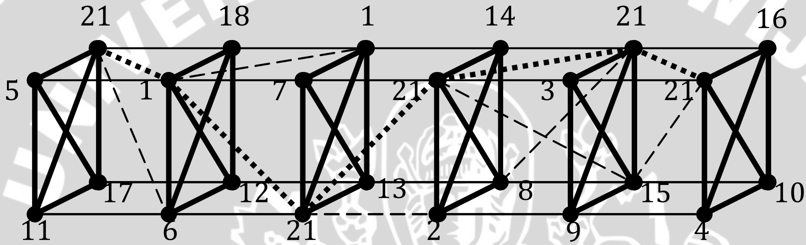
Pewarnaan pada Gambar 3.24. mendefinisikan pewarnaan *λ-backbone* karena:

1. Setiap titik di *G* mendapat warna yang berbeda.

2. Untuk setiap titik u,v di C dengan $uv \in E_K$ mendapatkan warna yang berbeda dengan selisih minimal 4.
3. Untuk setiap pasang titik u di C dan w di I dengan $uw \in E_K$ mendapat warna yang berbeda dengan selisih minimal 4.

Pewarnaan akhir dari grafnya diberikan dalam gambar berikut.

Contoh 3.25.



Gambar 3.25. Pewarnaan *4-backbone* dengan $k = 18$

Dari contoh-contoh yang telah dipaparkan di atas terlihat bahwa batas atas untuk bilangan pewarnaan *λ-backbone* telah memenuhi untuk semua kasus. Dengan demikian, batas atas untuk bilangan pewarnaan *λ-backbone* pada graf split dengan *backbone* K_4 telah sesuai.

3.3 Implementasi Pewarnaan *λ-backbone* pada Graf Split dengan *Backbone* K_4

Pada bagian ini akan dipaparkan implementasi pewarnaan *λ-backbone* dari graf split dengan *backbone* K_4 dalam bidang komunikasi. Diberikan suatu studi kasus tentang bagaimana menentukan frekuensi sekelompok pemancar sehingga interferensi dapat dihindarkan dan total alokasi frekuensi menjadi optimal dan teratur. Setiap pemancar mengirimkan sinyal pada frekuensi tertentu. Dapat terjadi interferensi yang mengakibatkan hilangnya sinyal jika terjadi kedua kondisi berikut:

1. Pemancar saling berdekatan.
2. Frekuensi saling berdekatan.

Dua pemancar dikatakan masih dalam jangkauan (bertetangga) jika jarak keduanya kurang dari atau sama dengan 6 km. Kriteria ini berdasarkan ketentuan umum setiap pemancar mempunyai daya pancar 100 Watt dengan ketinggian antena 30 meter akan didapatkan jarak pancar sekitar 6 Km. Adapun dua pemancar yang berdekatan setidak-tidaknya harus mempunyai beda sekitar 600 Khz (0,6 MHz) (Suhardiman, 2010).

Contoh Kasus

Pada suatu daerah terdapat 8 stasiun pemancar radio, satu sama lain dengan jarak dan frekuensi tertentu. Permasalahannya adalah bagaimana menetapkan frekuensi agar tidak terjadi interferensi antar pemancar. Adapun data mengenai jarak antara pemancar yang satu dengan yang lain serta frekuensi awalnya diberikan pada tabel sebagai berikut.

Tabel 3.2. Jarak Antar Pemancar (dalam Km)

Pemancar	A	B	C	D	E	F	G	H
A	0	5	10	5	4	6	6	5
B	5	0	3	4	6	4	5	12
C	10	3	0	9	5	6	15	13
D	5	4	9	0	6	2	6	1
E	4	6	5	6	0	5	2	2
F	6	4	6	2	5	0	1	3
G	6	5	15	6	2	1	0	3
H	5	12	13	1	2	3	3	0

Keterangan: tabel yang berwarna menunjukkan pemancar-pemancar yang tidak saling bertetangga.

Tabel 3.3. Frekuensi Awal Pemancar (dalam MHz)

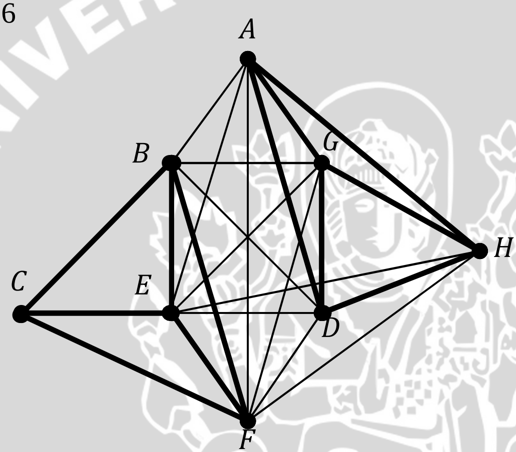
Pemancar	A	B	C	D	E	F	G	H
Frekuensi	93,5	89,3	89,5	93,9	89,2	89,4	93,6	93,8

Keterangan: warna yang sama menunjukkan pemancar-pemancar yang saling bertetangga.

Penyelesaian

Permasalahan di atas dapat diselesaikan dengan pewarnaan λ-*backbone*. Pemancar dinyatakan dengan titik, sedangkan garis-garis menyatakan ketetanggaan/kedekatan antar pemancar. Pemancar yang jarak dan frekuensinya berdekatan membentuk suatu *backbone* di dalam suatu jaringan pemancar. Sementara itu, pemancar yang masih dalam jangkauan (bertetangga) dihubungkan oleh suatu garis (*adjacent*). Permasalahan tersebut dapat dikonstruksi ke dalam graf split dengan *backbone* K_4 sebagai berikut.

Contoh 3.26



Gambar 3.26. Graf split dengan $k = 6$

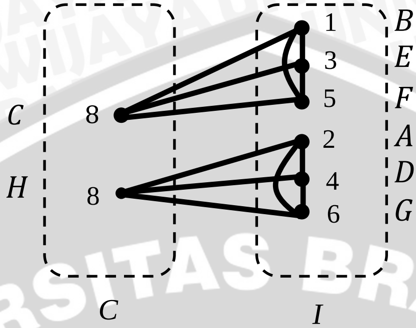
Graf split pada Gambar 3.26. di atas memiliki bilangan kromatik sama dengan 6. Misal diambil $\lambda = 2$, maka

$$BBC_{\lambda}(G, K) \leq \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor + 3\lambda = \left\lfloor \frac{6}{3} \right\rfloor + 3.2 = 8.$$

Langkah pewarnaan:

- Warnai B dengan warna 1.
- Warnai A dengan warnai dengan 2.
- Warnai E dengan warna 3 dan D dengan warna 4.
- Warnai F dan G berturut-turut dengan warna 5 dan 7.
- Semua titik di I yaitu C dan H dengan warna 8.

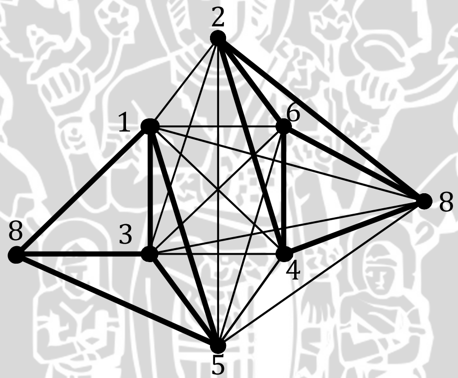
Contoh 3.27.



Gambar 3.27. Partisi dan pewarnaan *2-backbone* pada graf split

Pewarnaan akhir dari grafnya diberikan dalam gambar berikut.

Contoh 3.28.



Gambar 3.28. Pewarnaan *2-backbone* dengan $k = 6$

Di dalam Gambar 3.28. dapat diketahui bahwa semua pemancar memiliki frekuensi yang berbeda kecuali pemancar C dan H yang sama-sama memiliki frekuensi "8". Meskipun frekuensinya sama, tidak akan mengganggu siaran kedua pemancar tersebut karena keduanya tidak bertetangga (tidak berada dalam jangkauan satu sama lain). Hal ini dapat mengoptimalkan alokasi frekuensi. Pemancar-pemancar yang bertetangga di dalam *backbone* memiliki frekuensi yang berbeda dengan selisih minimal "λ" karena adanya pembatasan yaitu untuk mencegah terjadinya interferensi satu sama lain.

Tabel 3.4. Pemancar dan pewarnaannya

Pemancar	A	B	C	D	E	F	G	H
Frekuensi	2	1	8	4	3	5	6	8

Di dalam menentukan frekuensi akhir berdasarkan pewarnaan *λ-backbone*, besarnya perbedaan antar frekuensi tidak bergantung pada besarnya λ yang diambil. Dengan kata lain, jika λ yang diambil semakin besar, maka bukan berarti perbedaan antar frekuensi akan semakin besar pula dan juga sebaliknya. Hal ini dikarenakan tujuan penetapan frekuensi adalah agar seoptimal mungkin. Dengan kata lain, jika jumlah pemancar semakin banyak, maka perbedaan frekuensi juga harus seminimal mungkin.

Misalkan diambil selisih antar frekuensi minimal 0,8 MHz. Agar alokasi frekuensi menjadi optimal, maka yang dijadikan frekuensi patokan pada masing-masing *backbone* adalah frekuensi pemancar yang paling rendah yaitu pemancar A dan B. Frekuensi akhir dari masing-masing pemancar adalah pada tabel berikut.

Tabel 3.5. Pemancar dan frekuensi akhirnya (dalam MHz)

Pemancar	A	B	C	D	E	F	G	H
Frekuensi	93,5	89,3	91,7	94,3	90,1	90,9	95,1	91,7

Di dalam Tabel 3.5. pemancar-pemancar yang membentuk *backbone* K_4 yaitu A, D, G, H dan B, C, E, F masing-masing mempunyai perbedaan minimal 0,8 MHz. Pemancar C dan H mempunyai frekuensi yang sama tetapi keduanya tidak akan saling mengganggu karena jaraknya saling berjauhan. Adapun pemancar-pemancar yang frekuensinya berubah dari frekuensi awal, harus melakukan penyesuaian agar mendapatkan frekuensi akhir sesuai dengan yang telah ditentukan, antara lain dengan cara menambah daya pancar ataupun menyesuaikan ketinggian antena. Dengan demikian, penentuan frekuensi serta alokasinya telah optimal dan teratur.

BAB IV
KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan skripsi ini dapat disimpulkan hal-hal berikut.

1. Pewarnaan λ-*backbone* dari graf split $G = (V, E)$ dengan *backbone* K_4 ($K = (V_G, E_K)$) mempunyai karakteristik titik-titik yang *adjacent* di G mendapat warna yang berbeda, untuk setiap titik *u*,*v* di *C* dan *w* di *I* dengan $uv, uw \in E_K$ mendapat warna yang berbeda dengan selisih minimal λ.
2. Bilangan pewarnaan λ-*backbone* pada graf split $G = (V, E)$ dengan *backbone* K_4 ($K = (V, E_K)$) dan $\chi(G) = k$ bergantung pada bilangan kromatiknya dengan tiga kondisi, yaitu jika $4 \leq k \leq 3\lambda + 2$, $k \neq 5$ dan $\lambda \geq 2$, maka $BBC_\lambda(G, K) \leq \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor + 3\lambda$, jika $k \geq 9$ dan $\lambda = 2$, maka $BBC_\lambda(G, K) \leq k + 1$, dan jika $k \geq 3\lambda + 3$ dan $\lambda \geq 3$, maka $BBC_\lambda(G, K) \leq 3 \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor + \lambda - 1$.
3. Masalah penentuan frekuensi radio sedemikian sehingga interferensi dapat dihindari dan total alokasi frekuensi menjadi optimal dan teratur dapat diselesaikan dengan pewarnaan λ-*backbone* pada graf split dengan *backbone* K_4.

4.2 Saran

Pada pembahasan selanjutnya, ada beberapa hal yang dapat dikembangkan dari skripsi ini antara lain:
1. Menentukan bilangan pewarnaan λ-*backbone* pada graf split dengan *backbone* bentuk umum dari graf lengkap yaitu K_n karena berdasarkan sifat bahwa bilangan pewarnaan λ-*backbone* dengan *backbone* K_4 diperoleh dari perluasan *backbone* segitiga.
2. Menambahkan studi kasus yang lain yaitu penentuan frekuensi televisi dan membandingkannya dengan radio.

DAFTAR PUSTAKA

Arniati, 2010. *Pewarnaan Titik*. http://arniatiu.files.wordpress.com/2010/12/pewarnaan-titik.docx. Tanggal akses: 1 November 2010.

Broersma, H., Fomin, F.V., Golovach, P.A., Woeginger, G.J. 2003. *Backbone Colorings for Networks*. http://www.ii.uib.no/publikasjoner/texrap/pdf/2003-247.pdf. Tanggal akses: 20 Oktober 2009.

Chartrand, G. dan Zhang, P. 2005. *Introduction to Graph Theory*. McGraw-Hill Companies, Inc. New York.

Clark, J. dan D.A. Holton. 1991. *A First Look at Graph Theory*. World Scientific Publishing Company. Singapore.

Columbic, C.M. 1980. *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. Academic Press, Inc. New York.

Dierker, P. dan Voxman, W. 1986. *Discrete Mathematics*. Harcourt Brace Jovanovich, Inc. Florida.

Hayati, A. K. 2007. *Studi Bilangan Pewarnaan λ-backbone pada Graf Split Dengan Backbone Segitiga*. http://www.informatika.org/~rinaldi/Matdis/20062007/Makalah/Makalah0607-120.pdf. Tanggal akses: 9 April 2009.

Marsudi. 1998. *Pengantar Teori Graf*. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Universitas Brawijaya Malang.

Munir, R. 2003. *Matematika Diskrit*. Penerbit Informatika. Bandung.

Roman, S. 1989. *An Introduction to Discrete Mathematics, Second Edition*. Harcourt Brace Jovanovich Publishers. USA.

Rosen, K. H. 2003. *Disrete Mathematics and Its Applications*. McGraw-Hill Companies, Inc. New York.

Siang, J.J. 2002. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*. Penerbit ANDI. Yogyakarta.

Suhardiman, B. 2010. *Mencoba Memahami Pengaturan Frekuensi*. http://yd2kzr.blogspot.com/2010/08/mencoba-memahami-pengaturan-frekuensi.html. Tanggal akses: 12 April 2011.