

**ANALISIS GLOBAL MODEL EPIDEMIK SIRS DENGAN  
TINGKAT KEJADIAN INFEKSI NONMONOTON**

**SKRIPSI**

oleh:

**INDAH YUNI SETYAWATI**

**0610940024-94**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
MALANG**

**2011**

**ANALISIS GLOBAL MODEL EPIDEMIK SIRS DENGAN  
TINGKAT KEJADIAN INFEKSI NONMONOTON**

**SKRIPSI**

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh:

**INDAH YUNI SETYAWATI**

**0610940024-94**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
MALANG  
2011**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



**LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI**

**ANALISIS GLOBAL MODEL EPIDEMIK SIRS DENGAN  
TINGKAT KEJADIAN INFEKSI NONMONOTON**

oleh:  
**INDAH YUNI SETYAWATI**  
**0610940024-94**

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji  
pada tanggal 19 Mei 2011  
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

**Dosen Pembimbing I**

**Dosen Pembimbing II**

**Dr. Agus Suryanto, M.Sc.**  
**NIP. 196908071994121001**

**Drs. Moh. Muslikh, M.Si.**  
**NIP. 195910311989121001**

**Mengetahui,**  
**Ketua Jurusan Matematika**  
**Fakultas MIPA Universitas Brawijaya**

**Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc.**  
**NIP. 196709071992031001**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## LEMBAR PERNYATAAN

**Saya yang bertanda tangan di bawah ini :**

**Nama** : Indah Yuni Setyawati  
**NIM** : 0610940024-94  
**Jurusan** : Matematika  
**Penulis Skripsi berjudul** : Analisis Global Model Epidemik SIRS dengan Tingkat Kejadian Infeksi Nonmonoton

**Dengan ini menyatakan bahwa :**

1. isi skripsi yang saya buat benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka skripsi ini,
2. apabila di kemudian hari ternyata skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.

**Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.**

**Malang, 19 Mei 2011**  
**Yang menyatakan,**

**(Indah Yuni Setyawati)**  
**NIM. 0610940024**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



# ANALISIS GLOBAL MODEL EPIDEMIK SIRS DENGAN TINGKAT KEJADIAN INFEKSI NONMONOTON

## ABSTRAK

Dalam skripsi ini dibahas model epidemik SIRS dengan tingkat kejadian infeksi nonmonoton. Model epidemik SIRS merupakan model epidemik penyakit dengan tiga kelas subpopulasi, yaitu *susceptible*, *infectious*, dan *removed*. Tingkat kejadian infeksi nonmonoton adalah tingkat kejadian infeksi penyakit yang menggambarkan pengaruh psikologis perubahan perilaku masyarakat terhadap penyebaran penyakit pada saat jumlah individu terinfeksi meningkat. Dari hasil analisis diketahui bahwa model mempunyai dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Selanjutnya analisis global menunjukkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil global jika  $R_0 < 1$ , *saddle-node* jika  $R_0 = 1$ , dan tidak stabil jika  $R_0 > 1$ . Titik kesetimbangan endemik stabil global jika  $R_0 > 1$ .

$R_0$  didefinisikan sebagai angka reproduksi dasar, yaitu angka yang mempengaruhi adanya penyebaran penyakit dalam suatu populasi. Lebih lanjut, jika parameter pengaruh psikologis semakin besar (menuju tak hingga) maka jumlah individu terinfeksi menuju nol pada saat infeksi penyakit terus berlanjut.

**Kata kunci:** kejadian infeksi nonmonoton, model epidemik SIRS, pengaruh psikologis, kestabilan global.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



# GLOBAL ANALYSIS OF SIRS EPIDEMIC MODEL WITH NONMONOTONE INCIDENCE RATE OF INFECTION

## ABSTRACT

This final project discusses SIRS epidemic model with nonmonotone incidence rate of infection. SIRS epidemic model is epidemic model with three classes of subpopulation, namely susceptible, infectious, and removed. Nonmonotone incidence rate of infection is the incidence rate of infectious diseases that describes the psychological effect of changes in community attitudes towards the spread of disease as the number of infectious individuals increases. Results of analysis show that the model has two equilibrium points, namely disease-free equilibrium point and endemic equilibrium point. Furthermore, global analysis shows that disease-free equilibrium point is globally stable if  $R_0 < 1$ , saddle-node if  $R_0 = 1$ , and unstable if  $R_0 > 1$ . On the other hand, endemic equilibrium point is globally stable if  $R_0 > 1$ .  $R_0$  is defined as the basic reproduction number, which is a number that affect the spread of disease in a population. Furthermore, if parameters of psychological effect tends to infinity, then the number of infected individuals tends to zero as the infectious disease persists.

**Keyword:** nonmonotone incidence of infection, SIRS epidemic model, psychological influences, global stability.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan bimbingan dan petunjuk-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “**Analisis Global Model Epidemik SIRS dengan Tingkat Kejadian Infeksi Nonmonoton**” dengan baik dan lancar. Shalawat serta salam semoga selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW sebagai suri tauladan bagi penulis.

Pada penyelesaian skripsi ini penulis banyak mendapat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak, karena itu pada kesempatan kali ini penulis ingin mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Dr. Agus Suryanto, M.Sc., selaku pembimbing I atas segala bimbingan, nasihat, motivasi serta kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini.
2. Drs. M. Muslikh, M.Si., selaku pembimbing II sekaligus dosen penasehat akademik atas segala bimbingan, nasihat, motivasi serta kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini dan selama penulis menempuh kuliah.
3. Drs. Imam Nurhadi Purwanto, M.T., Drs. Marsudi, M.S., dan Dr. Wuryansari Muharini K., M.Si., selaku dosen penguji pada ujian skripsi atas segala saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
4. Seluruh bapak/ibu dosen Matematika yang telah memberikan bekal dan ilmu pengetahuan kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
5. Ayah, mama, kakak, adik dan seluruh keluarga besar penulis yang senantiasa tanpa henti memberikan semangat dan dorongan serta doanya agar penulis dapat menyelesaikan skripsinya.
6. Keluarga besar Matematika 2006 dan semua pihak yang telah membantu proses penulisan skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu. Terimakasih.

Penulis menyadari bahwa dalam skripsi ini masih banyak kekurangan, untuk itu penulis sangat mengharapkan kritik dan saran melalui email penulis [indhoelz\\_taz@yahoo.com](mailto:indhoelz_taz@yahoo.com).

Akhirnya semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca,  
khususnya mahasiswa Matematika Universitas Brawijaya.

Malang, 19 Mei 2011

Penulis

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## DAFTAR ISI

	Halaman
<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	i
<b>LEMBAR PENGESAHAN</b> .....	iii
<b>LEMBAR PERNYATAAN</b> .....	v
<b>ABSTRAK</b> .....	vii
<b>ABSTRACT</b> .....	ix
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	xi
<b>DAFTAR ISI</b> .....	xiii
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xv
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xvii
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	xix
<b>BAB I PENDAHULUAN</b> .....	1
1.1. Latar Belakang .....	1
1.2. Rumusan Masalah .....	3
1.3. Tujuan .....	3
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA</b> .....	5
2.1. Sistem Dinamik .....	5
2.2. Sistem Otonomus.....	5
2.3. Kestabilan Titik Kesetimbangan .....	5
2.4. Kestabilan Sistem Otonomus Linear .....	6
2.5. Kestabilan Sistem Otonomus Nonlinear.....	8
2.6. Orbit Periodik .....	12
2.6.1. Kriteria Dulac .....	13
2.6.2. Teorema Poincare-Bendixson .....	14
<b>BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN</b> .....	17
3.1. Konstruksi Model.....	17
3.1.1. Laju Perubahan Individu Rentan ( <i>Susceptible</i> ).....	17
3.1.2. Laju Perubahan Individu Terinfeksi ( <i>Infectious</i> ) .....	20
3.1.3. Laju Perubahan Individu Sembuh ( <i>Removed</i> ).....	21
3.2. Titik Kesetimbangan .....	22
3.2.1. Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit .....	27
3.2.2. Titik Kesetimbangan Endemik.....	28
3.3. Kestabilan Titik Kesetimbangan .....	33

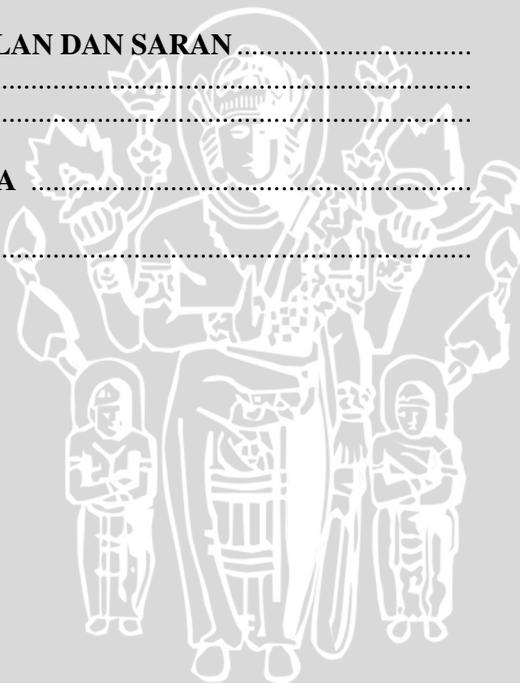
3.3.1.	Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas Penyakit.....	37
3.3.2.	Kestabilan Titik Keseimbangan Endemik.....	41
3.4.	Angka Reproduksi Dasar.....	49
3.5.	Simulasi Numerik.....	49
3.5.1.	Simulasi Numerik untuk $R_0 \leq 1$ .....	49
3.5.1.1.	Simulasi Numerik untuk $R_0 < 1$ .....	50
3.5.1.2.	Simulasi Numerik untuk $R_0 = 1$ .....	51
3.5.2.	Simulasi Numerik untuk $R_0 > 1$ .....	53
3.5.3.	Simulasi Numerik Pengaruh Parameter $\alpha$ pada Individu Terinfeksi.....	55
3.6.	Interpretasi Hasil .....	55

**BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN** ..... 57

4.1	Kesimpulan .....	57
4.2	Saran .....	57

**DAFTAR PUSTAKA** ..... 59

**LAMPIRAN** ..... 61



## DAFTAR GAMBAR

	Halaman
<b>Gambar 2.1</b> <i>Saddle-node</i> pada titik pusat.....	12
<b>Gambar 3.1</b> Model kompartemen dari model epidemik SIRS .	17
<b>Gambar 3.2</b> Fungsi kejadian infeksi nonmonoton $g(I)$ .....	19
<b>Gambar 3.3</b> Potret fase sistem (3.47) .....	40
<b>Gambar 3.4</b> Grafik $S, I$ , dan $R$ terhadap $t$ hasil simulasi numerik untuk $R_0 = 0.36 < 1$ . $(S, I, R)$ menuju titik $E_0 = (0.8, 0, 0)$ . .....	50
<b>Gambar 3.5</b> Potret phase $(S, I, R)$ untuk $R_0 = 0.36 < 1$ , dengan beberapa nilai awal yang berbeda. Semua orbit menuju titik $E_0 = (0.8, 0, 0)$ . .....	51
<b>Gambar 3.6</b> Grafik $S, I$ , dan $R$ terhadap $t$ hasil simulasi numerik untuk $R_0 = 1$ . $(S, I, R)$ menuju titik $E_0 = (1.5, 0, 0)$ . .....	52
<b>Gambar 3.7</b> Potret phase $(S, I, R)$ untuk $R_0 = 1$ , dengan beberapa nilai awal yang berbeda. Semua orbit menuju $E_0 = (1.5, 0, 0)$ . .....	52
<b>Gambar 3.8</b> Grafik $S, I$ , dan $R$ terhadap $t$ hasil simulasi numerik untuk $R_0 = 2.86 > 1$ , dengan syarat awal $(4, 2, 1)$ . $(S, I, R)$ menuju titik $E^* = (4.2267, 0.5948, 0.1784)$ . .....	53
<b>Gambar 3.9</b> Potret phase $(S, I, R)$ untuk $R_0 = 2.86 > 1$ , dengan beberapa nilai awal yang berbeda. Semua orbit menuju $E^* = (4.2267, 0.5948, 0.1784)$ , bahkan untuk titik yang dekat dengan titik $E_0 = (5.0, 0, 0)$ . .....	54
<b>Gambar 3.10</b> Variasi $I^*$ untuk beberapa nilai parameter $\alpha$ .....	55

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## DAFTAR TABEL

	Halaman
<b>Tabel 2.1</b> Jenis kestabilan sistem linear.....	8
<b>Tabel 2.2</b> Jenis kestabilan sistem hampiran.....	10

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
<b>Lampiran 1</b> Penjabaran Persamaan (3.39a) Menjadi Persamaan (3.40) .....	61
<b>Lampiran 2</b> Penjabaran Persamaan (3.53) Menjadi Persamaan (3.54) .....	62
<b>Lampiran 3</b> Penjabaran Persamaan (3.59) Menjadi Persamaan (3.60) .....	63
<b>Lampiran 4</b> Pembuktian $B_1A + B_2 > 0$ Ketika $m - A < 0$ .....	65
<b>Lampiran 5</b> Penjabaran Persamaan (3.61) Menjadi Persamaan (3.63) dengan Menggunakan Persamaan (3.62) .....	67
<b>Lampiran 6</b> <i>Listing Program</i> untuk Simulasi Numerik Titik Kesetimbangan pada Model Epidemik SIRS dengan Metode Runge Kutta Orde Empat Menggunakan Software Matlab 7.0 .....	69



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1. Latar Belakang

Perkembangan teknologi, ilmu pengetahuan dan lalu lintas internasional serta perubahan lingkungan hidup dapat mempengaruhi perubahan pola penyakit yang dapat menimbulkan wabah/epidemic dan dapat membahayakan kesehatan masyarakat. Epidemic adalah kejadian berjangkitnya suatu penyakit menular dalam masyarakat yang jumlah penderitanya meningkat secara nyata melebihi keadaan yang lazim pada waktu dan daerah tertentu. Oleh karena itu, diperlukan upaya untuk menanggulangnya, antara lain dengan tindakan karantina untuk memberikan pertolongan medis kepada penderita agar sembuh dan mencegah agar mereka tidak menjadi sumber penularan.

Model epidemik penyakit merupakan salah satu contoh pemodelan Matematika dalam bidang Biologi dan Kedokteran. Dalam skripsi ini dibahas model epidemik SIRS yang merupakan model epidemik penyakit dengan tiga kelas subpopulasi, yaitu *susceptible* (*S*), *infectious* (*I*), dan *removed* (*R*). Kelas *susceptible* merupakan kelompok individu yang rentan terhadap penyakit atau kelompok individu yang sehat tetapi mempunyai kemungkinan untuk tertular penyakit, kelas *infectious* merupakan kelompok individu yang terinfeksi atau menderita suatu penyakit dan dapat menularkan penyakit ke individu lain, dan kelas *removed* merupakan kelompok individu yang sembuh dari suatu penyakit.

Secara umum, model epidemik SIRS mempertimbangkan tingkat kejadian infeksi penyakit yang dalam skripsi ini dinotasikan oleh fungsi  $g(I)$ . Tingkat kejadian infeksi menyatakan banyaknya individu yang terinfeksi penyakit akibat kontak langsung dengan individu terinfeksi. Tingkat kejadian infeksi penyakit pada model epidemik penyakit biasanya diberikan oleh fungsi linear

$$g(I) = kI. \quad (1.1)$$

Akan tetapi, tingkat kejadian infeksi yang sebenarnya mungkin tidak benar-benar linear karena ketika individu yang terinfeksi sedikit, tingkat kejadian infeksi dapat lebih besar dan ketika individu yang terinfeksi banyak, tingkat kejadian infeksi dapat lebih kecil. Hal ini

disebabkan adanya perubahan perilaku individu (Hethcote dan Driessche, 1990).

Capasso dan Serio (1978) telah menunjukkan bahwa perilaku dinamis model epidemik penyakit dengan tingkat kejadian infeksi nonlinear dapat berbeda dari tingkat kejadian infeksi linear, sehingga diperkenalkan tingkat kejadian infeksi nonlinear yang disebut tingkat kejadian infeksi tersaturasi, yaitu

$$g(I) = \frac{kI}{1 + \alpha I}, \quad (1.2)$$

dimana  $kI$  mengukur kekuatan infeksi penyakit dan  $1/(1 + \alpha I)$  menyatakan pengaruh penghambatan yang ditimbulkan oleh perubahan perilaku individu rentan ketika jumlah individu terinfeksi meningkat atau oleh pengaruh kepadatan individu terinfeksi. Tingkat kejadian semacam ini tampaknya lebih beralasan karena mempertimbangkan perubahan perilaku dan pengaruh kepadatan individu terinfeksi.

Model epidemik dengan tingkat kejadian infeksi linear dan tersaturasi disebut tingkat kejadian infeksi monoton karena nilai  $g(I)$  selalu monoton naik, namun fungsi  $g(I)$  yang nonmonoton juga dapat digunakan untuk menafsirkan pengaruh psikologis perubahan perilaku individu rentan. Epidemik penyakit SARS (*Severe Acute Respiratory Syndrom*) memiliki pengaruh psikologis, seperti pemeriksaan perbatasan, pemakaian masker, karantina, dan isolasi, yang telah terbukti sangat efektif mengurangi angka infeksi pada tahap akhir wabah SARS, bahkan ketika jumlah individu terinfeksi semakin meningkat. Oleh karena itu, dalam skripsi ini dibahas tingkat kejadian infeksi nonmonoton, yaitu

$$g(I) = \frac{kI}{1 + \alpha I^2} \quad (1.3)$$

dimana  $kI$  menunjukkan kekuatan infeksi penyakit dan  $1/(1 + \alpha I^2)$  menggambarkan pengaruh psikologis perubahan perilaku individu rentan terhadap penyebaran penyakit pada saat jumlah individu terinfeksi meningkat. Hal ini penting karena jumlah kontak yang efektif antara individu terinfeksi dan individu rentan menurun pada tingkat kejadian infeksi tinggi, disebabkan oleh karantina individu terinfeksi atau tindakan perlindungan oleh setiap individu rentan (Xiao dan Ruan, 2007).

## **1.2. Rumusan Masalah**

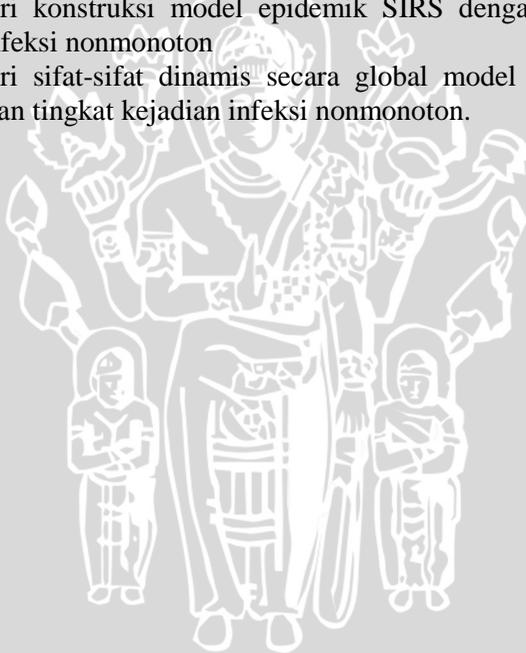
Berdasarkan latar belakang tersebut, permasalahan yang dibahas dalam skripsi ini, yaitu

1. bagaimana mengkonstruksi model epidemik SIRS dengan tingkat kejadian infeksi nonmonoton
2. bagaimana sifat-sifat dinamis secara global model epidemik SIRS dengan tingkat kejadian infeksi nonmonoton.

## **1.3. Tujuan**

Tujuan penulisan skripsi ini adalah

1. mempelajari konstruksi model epidemik SIRS dengan tingkat kejadian infeksi nonmonoton
2. mempelajari sifat-sifat dinamis secara global model epidemik SIRS dengan tingkat kejadian infeksi nonmonoton.



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## BAB II TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1. Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah fungsi  $\phi(x, t)$  yang didefinisikan untuk semua  $t \in \mathbb{R}$  dan  $x \in E \subset \mathbb{R}^n$  dan menjelaskan bagaimana titik  $x \in E$  bergerak terhadap waktu

(Perko, 2001).

### 2.2. Sistem Otonomus

Dimisalkan sistem persamaan diferensial berbentuk

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y)\end{aligned}\tag{2.1}$$

dimana fungsi  $f$  dan  $g$  adalah kontinu dan mempunyai turunan parsial kontinu pada domain  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Jika fungsi  $f$  dan  $g$  pada sistem persamaan (2.1) tidak bergantung secara eksplisit pada variabel bebas  $t$ , tetapi hanya pada variabel tak bebas  $x$  dan  $y$  maka sistem (2.1) disebut sistem otonomus

(Boyce dan DiPrima, 2001).

### 2.3. Kestabilan Titik Keseimbangan

Titik  $(x^*, y^*)$  disebut titik kritis sistem otonomus (2.1) jika  $f(x^*, y^*) = 0$  dan  $g(x^*, y^*) = 0$ . Titik kritis  $(x^*, y^*)$  disebut juga *titik keseimbangan* karena  $\frac{dx}{dt} = 0$  dan  $\frac{dy}{dt} = 0$ .

Jenis kestabilan titik keseimbangan  $(x^*, y^*)$  dibedakan menjadi tiga, yaitu

1. titik  $(x^*, y^*)$  dikatakan stabil jika  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  sedemikian sehingga untuk  $\|(x(0), y(0)) - (x^*, y^*)\| < \delta$  berlaku

$$\|(x(t), y(t)) - (x^*, y^*)\| < \varepsilon, \quad \forall t > 0,$$

2. titik  $(x^*, y^*)$  dikatakan tidak stabil jika tidak memenuhi kriteria pertama,
3. titik  $(x^*, y^*)$  dikatakan stabil asimtotik jika stabil dan  $\exists \delta_0$ ,  $0 < \delta_0 < \delta$ , sedemikian sehingga sebuah solusi  $x = x(t)$  dan  $y = y(t)$  yang memenuhi  $\|(x(t), y(t)) - (x^*, y^*)\| < \delta_0$  akan bersifat  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (x^*, y^*)$

(Boyce dan DiPrima, 2001).

#### 2.4. Kestabilan Sistem Otonomus Linear

Suatu sistem otonomus dikatakan linear jika tidak terdapat perkalian di antara variabel tak bebasnya. Sistem otonomus linear dua dimensi dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Dalam bentuk matriks, sistem (2.2) dapat disajikan sebagai

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

atau secara ringkas dapat ditulis  $\vec{\dot{x}} = A\vec{x}$ , dengan  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

matriks koefisien. Jika  $\det(A) \neq 0$ , maka titik  $(0,0)$  merupakan satu-satunya titik kesetimbangan sistem (2.2).

Untuk mengetahui jenis kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.2) digunakan nilai eigen matriks  $A$  dengan persamaan berikut

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

atau

$$(A - I\lambda)\vec{v} = 0. \quad (2.3)$$

Persamaan (2.3) mempunyai solusi tak trivial jika dan hanya jika  $|A - I\lambda| = 0$  dengan  $\lambda$  menyatakan nilai eigen matriks  $A$ , sehingga diperoleh

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

(Boyce dan DiPrima, 2001).

Nilai eigen matriks  $A$  adalah akar-akar persamaan karakteristik yang dituliskan sebagai

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0. \quad (2.4)$$

Konstanta  $(ad - bc)$  adalah determinan matriks  $A$  yang dinotasikan dengan  $\det(A)$  dan jumlah  $(a + d)$  disebut trace matriks  $A$  yang dinotasikan dengan  $\text{tr}(A)$ . Persamaan (2.4) dapat disajikan sebagai

$$\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$$

dengan nilai-nilai eigen

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \text{tr}(A) \pm \sqrt{(\text{tr}(A))^2 - 4 \det(A)} \right)$$

(Chicone, 1999).

Jenis kestabilan titik kesetimbangan  $(0,0)$  ditentukan menggunakan nilai eigen matriks  $A$ , yaitu

1. stabil asimtotik jika bagian real  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  bernilai negatif,
2. stabil (tetapi bukan stabil asimtotik) jika bagian real  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  bernilai nol, yaitu  $\lambda_1 = i\beta$  dan  $\lambda_2 = -i\beta$ ,
3. tidak stabil jika salah satu atau kedua nilai eigen bernilai real positif, atau bagian real  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  bernilai positif.

Jenis-jenis kestabilan titik kesetimbangan sistem linear, disajikan pada Tabel 2.1 berikut.

**Tabel 2.1.** Jenis kestabilan sistem linear.

Nilai Eigen		Jenis Kestabilan
$\lambda_1, \lambda_2 > 0$		tidak stabil
$\lambda_1, \lambda_2 < 0$		stabil asimtotik
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$		tidak stabil
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$		tidak stabil
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$		stabil asimtotik
$\lambda_1, \lambda_2 = a \pm ib$	$a > 0$	tidak stabil
	$a < 0$	stabil asimtotik
	$a = 0$	stabil

(Boyce dan DiPrima, 2001).

**Teorema 2.1**

Misalkan  $\delta = \det(A)$  dan  $\tau = \text{trace}(A)$  dan diketahui sistem linear (2.2).

1. Jika  $\delta < 0$  maka (2.2) mempunyai *saddle* pada titik kritis.
2. Jika  $\delta > 0$  dan  $\tau^2 - 4\delta \geq 0$  maka (2.2) mempunyai *node* pada titik kritis, stabil jika  $\tau < 0$  dan tidak stabil jika  $\tau > 0$ .
3. Jika  $\delta > 0$ ,  $\tau^2 - 4\delta < 0$ , dan  $\tau \neq 0$  maka (2.2) mempunyai *focus* pada titik kritis, stabil jika  $\tau < 0$  dan tidak stabil jika  $\tau > 0$ .
4. Jika  $\delta > 0$  dan  $\tau = 0$  maka (2.2) mempunyai *center* pada titik kritis.

Dengan catatan pada kasus (2),  $\tau^2 \geq 4|\delta|$ ;  $\tau \neq 0$

(Perko, 2001).

**2.5. Kestabilan Sistem Otonomus Nonlinear**

Jika diketahui sistem otonomus nonlinear (2.1) dan jika diasumsikan  $f$  dan  $g$  mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik  $(x^*, y^*)$ , maka fungsi  $f$  dan  $g$  di sekitar titik  $(x^*, y^*)$  didekati menggunakan deret Taylor sebagai berikut

$$f(x, y) = f(x^*, y^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y}(y - y^*) + \eta_1(x, y)$$

$$g(x, y) = g(x^*, y^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y}(y - y^*) + \eta_2(x, y)$$

dimana  $\eta_1(x, y)$  dan  $\eta_2(x, y)$  merupakan suku sisa.

Karena  $\frac{dx}{dt} = \frac{d(x - x^*)}{dt}$  dan  $\frac{dy}{dt} = \frac{d(y - y^*)}{dt}$ , maka sistem (2.1)

dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x^*, y^*) \\ g(x^*, y^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y}(y - y^*) \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y}(y - y^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(x, y) \\ \eta_2(x, y) \end{bmatrix}.$$

Karena  $f(x^*, y^*) = 0$  dan  $g(x^*, y^*) = 0$ , maka

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y}(y - y^*) \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y}(y - y^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(x, y) \\ \eta_2(x, y) \end{bmatrix},$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x - x^*) \\ (y - y^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(x, y) \\ \eta_2(x, y) \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Matriks  $J^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} \end{bmatrix}$  disebut matriks Jacobi pada

titik  $(x^*, y^*)$ .

Jika dimisalkan  $u = x - x^*$ ,  $v = y - y^*$ , maka persamaan (2.5) juga dapat ditulis sebagai  $\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = J^* \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(x, y) \\ \eta_2(x, y) \end{bmatrix}$ . Jika  $\bar{w} = (u, v)^T$  dan  $\bar{\eta} = (\eta_1(x, y), \eta_2(x, y))^T$ , maka persamaan (2.5) dapat ditulis juga dalam bentuk  $\frac{d\bar{w}}{dt} = J^* \bar{w} + \bar{\eta}$ . Ketika  $(x, y) \rightarrow (x^*, y^*)$  nilai  $\bar{w}$  menjadi sangat kecil dan nilai  $\|\bar{\eta}\| \ll \|\bar{w}\|$ . Oleh karena itu,  $\bar{\eta}$  dapat diabaikan, sehingga sistem nonlinear dapat didekati oleh sistem baru  $\frac{d\bar{w}}{dt} = J^* \bar{w}$ . Sistem baru tersebut dinamakan sistem hampiran. Setelah diperoleh sistem hampiran, jenis kestabilan titik kesetimbangan ditentukan menggunakan nilai eigen  $J^*$  yaitu  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$ . Jenis kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.1) dapat dilihat pada Tabel 2.2.

**Tabel 2.2.** Jenis kestabilan sistem hampiran.

Nilai Eigen	Jenis Kestabilan	
$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	tidak stabil	
$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	stabil asimtotik	
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	tidak stabil	
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	tidak stabil	
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	stabil asimtotik	
$\lambda_1, \lambda_2 = a \pm ib$	$a > 0$	tidak stabil
	$a < 0$	stabil asimtotik
	$a = 0$	tidak dapat ditentukan

(Boyce dan DiPrima, 2001).

### Definisi 2.1

Titik kesetimbangan sistem (2.2) disebut titik kesetimbangan hiperbolik, jika matriks  $A$  tidak mempunyai nilai eigen sama dengan nol pada bagian realnya

(Perko, 2001).

### Definisi 2.2

Jenis kestabilan dari titik kesetimbangan hiperbolik yaitu

1. *hyperbolic sink* atau stabil hiperbolik jika bagian real dari semua nilai eigen  $J^*$  bernilai negatif,
2. *hyperbolic saddle* jika bagian real dari salah satu nilai eigen  $J^*$  bernilai positif,
3. *hyperbolic source* atau tidak stabil hiperbolik jika bukan merupakan (1) dan (2)

(Chicone, 1999).

### Teorema 2.2

Dimisalkan

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= y + Q(x, y)\end{aligned}\tag{2.6}$$

mempunyai nilai eigen  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 \neq 0$  dan titik pusat adalah titik kritis yang terpencil untuk sistem (2.6). Jika  $y = \phi(x)$  adalah solusi persamaan  $y + Q(x, y) = 0$  pada persekitaran titik pusat dan jika ekspansi dari fungsi  $\psi(x) = P(x, \phi(x))$  pada persekitaran  $x = 0$  mempunyai bentuk  $\psi(x) = a_m x^m + \dots$  dimana  $m \geq 2$  dan  $a_m \neq 0$ . Jika  $m$  genap, maka titik pusat adalah *saddle-node*

(Perko, 2001).

Contoh (*saddle-node*):

Diketahui sistem

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -x^2 \\ \frac{dy}{dt} &= -y.\end{aligned}\tag{2.7}$$

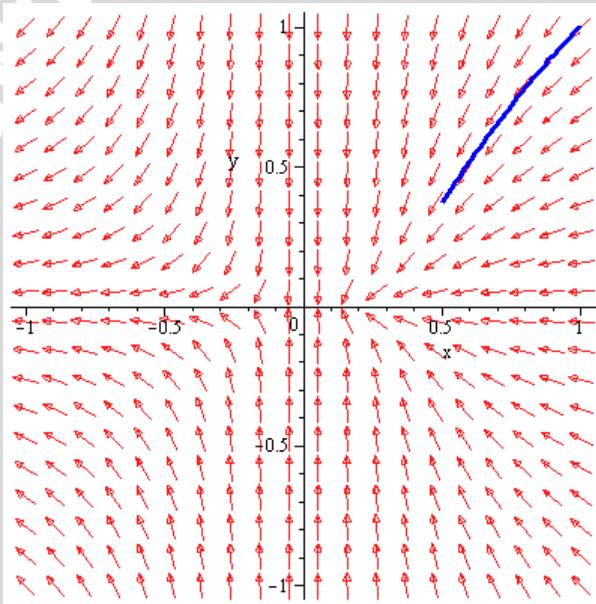
Titik (0,0) adalah titik kritis sistem (2.7). Matriks Jacobi sistem (2.7) adalah

$$J = \begin{bmatrix} -2x & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

dan matriks Jacobi sistem (2.7) di titik (0,0) yaitu

$$J_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

dengan nilai eigen  $\lambda_1 = 0$  dan  $\lambda_2 = -1$ . Sistem (2.7) berbentuk seperti sistem (2.6) dengan  $P(x, y) = -x^2$  dan  $Q(x, y) = -2y$  karena persamaan  $\frac{dy}{dt} = -y$  dapat ditulis menjadi  $\frac{dy}{dt} = y - 2y$ . Dari sistem (2.7) dapat diketahui bahwa  $a_m = -1$  dan  $m = 2$ , sehingga sesuai dengan Teorema 2.2, titik  $(0, 0)$  adalah *saddle-node*. Potret fase sistem (2.7) ditunjukkan oleh Gambar 2.5.



**Gambar 2.1.** *Saddle-node* pada titik pusat.

## 2.6. Orbit Periodik

Dimisalkan sistem otonomus

$$\vec{\dot{x}} = f_i(\vec{x}) \tag{2.8}$$

dimana  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ,

$$\vec{\dot{x}} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix}$$

dengan  $f_i \in C^1(E)$  dimana  $C^1(E) = \{f_i : E \rightarrow \mathbb{R}^n \mid f_i(x)$  mempunyai turunan parsial pertama yang kontinu,  $\forall x \in E \subset \mathbb{R}^n\}$ . Untuk  $x \in E$ , fungsi  $\phi(x_0, t) : \mathbb{R}^n \rightarrow E$  menggambarkan kurva atau orbit solusi sistem (2.8) melalui titik  $x_0$  pada  $E$

(Perko, 2001).

### Definisi 2.3

Orbit periodik sistem (2.8) adalah grafik solusi sistem (2.8) yang berupa kurva tertutup, yang bukan merupakan titik kesetimbangan sistem (2.8)

(Perko, 2001).

#### 2.6.1. Kriteria Dulac

Kriteria Dulac adalah cara untuk menunjukkan bahwa tidak mungkin ada orbit periodik dalam beberapa wilayah ruang fase. Misalkan diketahui lintasan sistem persamaan diferensial (2.1) dan diberikan sebuah daerah  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , jika dapat ditemukan fungsi *smooth*  $h(x, y)$  sedemikian sehingga

$$\frac{\partial}{\partial x}(hf) + \frac{\partial}{\partial y}(hg) \neq 0 \quad (2.9)$$

untuk semua  $x, y \in \Omega$  maka tidak terdapat orbit periodik yang terkandung sepenuhnya dalam  $\Omega$  dan  $h(x, y)$  disebut sebagai fungsi Dulac.

Contoh:

Akan ditunjukkan bahwa tidak terdapat orbit periodik dalam model ekologi berikut.

$$\frac{dx}{dt} = x(A - ax + by) = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(B - cy + dx) = g(x, y)$$

dimana  $a, c > 0$ . Jika dipilih  $h(x, y) = (xy)^{-1}$  maka

$$\begin{pmatrix} hf(x, y) \\ hg(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A}{y} - a\left(\frac{x}{y}\right) + b \\ \frac{B}{x} - c\left(\frac{y}{x}\right) + d \end{pmatrix}$$

dan

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{A}{y} - a\left(\frac{x}{y}\right) + b \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{B}{x} - c\left(\frac{y}{x}\right) + d \right] = -\frac{a}{y} - \frac{c}{x}.$$

Karena  $a, c > 0$  maka tidak ada orbit periodik di wilayah  $x, y > 0$ , karena nilainya selalu negatif

(Robinson, 2004).

## 2.6.2. Teorema Poincare-Bendixson

### Definisi 2.4

Perhatikan sistem (2.1). Misalkan  $\Gamma(X_0, t)$  adalah orbit solusi yang bergantung pada waktu  $t$  dengan syarat awal  $X_0 = (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$ . Selain itu,  $\Gamma^+(X_0, t)$  adalah orbit positif yang menunjukkan bagian dari orbit solusi dimana  $t \geq t_0$  dan  $\Gamma^-(X_0, t)$  adalah orbit negatif yang menunjukkan bagian dari orbit solusi dimana  $t \leq t_0$

(Flores, 2011).

### Definisi 2.5

Jika solusi sistem (2.1) terbatas, maka orbit negatif (positifnya) mendekati anggota himpunan titik limit saat  $t \rightarrow -\infty$  ( $t \rightarrow \infty$ ).  $\alpha$ -limit set atau  $\alpha(X_0)$  adalah himpunan titik-titik dalam bidang yang didekati oleh orbit negatif ( $\Gamma^-(X_0, t)$ ) saat  $t \rightarrow -\infty$ . Sedangkan  $\omega$ -

*limit set* atau  $\omega(X_0)$  adalah himpunan titik-titik dalam bidang yang didekati oleh orbit positif ( $\Gamma^+(X_0, t)$ ) saat  $t \rightarrow \infty$ .

(Flores, 2011).

### **Teorema 2.3**

Misalkan  $\Gamma^+(X_0, t)$  orbit positif sistem (2.1) yang berada di daerah tertutup dan terbatas di bidang. Misalkan  $\omega$ -*limit set* tidak memuat titik kesetimbangan, maka berlaku salah satu pernyataan berikut:

1.  $\Gamma^+(X_0, t)$  adalah orbit periodik ( $\Gamma^+(X_0, t) = \omega(X_0)$ ), atau
2.  $\omega$ -*limit set*,  $\omega(X_0)$ , adalah orbit periodik

(Flores, 2011).

### **Teorema 2.4**

Misalkan  $\Gamma^+(X_0, t)$  orbit positif sistem (2.1) berada di daerah  $B$  yang tertutup dan terbatas di bidang. Misalkan pula  $B$  hanya memuat sejumlah hingga titik kesetimbangan, maka  $\omega$ -*limit set* merupakan satu dari tiga bentuk berikut:

1.  $\omega(X_0)$  adalah titik kesetimbangan
2.  $\omega(X_0)$  adalah orbit periodik
3.  $\omega(X_0)$  memuat sejumlah hingga titik kesetimbangan dan sekumpulan orbit-orbit  $\Gamma_i$  dimana  $\alpha$ -*limit set* dan  $\omega$ -*limit set* memuat satu titik kesetimbangan tersebut untuk setiap orbit  $\Gamma_i$ .

(Flores, 2011).

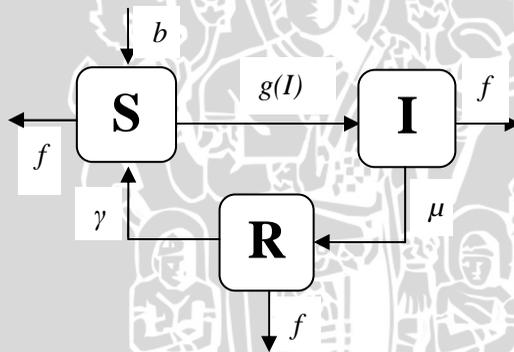
UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN

### 3.1. Konstruksi Model

Model epidemik penyakit yang dibahas dalam skripsi ini adalah model epidemik SIRS. Model epidemik ini membagi populasi menjadi tiga kelas subpopulasi, yaitu *susceptible* ( $S$ ), *infectious* ( $I$ ), dan *removed* ( $R$ ). Kelas *susceptible* merupakan kelompok individu yang rentan terhadap penyakit atau kelompok individu yang sehat tetapi mempunyai kemungkinan untuk tertular penyakit, kelas *infectious* merupakan kelompok individu yang terinfeksi atau menderita suatu penyakit dan dapat menularkan penyakit ke individu lain, dan kelas *removed* merupakan kelompok individu yang sembuh dari suatu penyakit. Model epidemik SIRS tersebut digambarkan dalam model kompartemen berikut ini.



**Gambar 3.1.** Model kompartemen dari model epidemik SIRS.

#### 3.1.1. Laju Perubahan Individu Rentan (*Susceptible*)

Laju perubahan individu rentan ( $S$ ) terhadap waktu dipengaruhi oleh  $b, f, g(I)$  kelas  $S$ , dan  $\gamma$  kelas  $R$ .

$b$  menyatakan tingkat perekrutan individu, yaitu banyaknya individu yang masuk atau menempati kelas  $S$ . Tingkat perekrutan individu ini meliputi kelahiran dan migrasi. Semua individu yang baru lahir atau berasal dari migrasi dianggap sehat dan belum terinfeksi penyakit sehingga masuk ke kelas  $S$ . Oleh karena itu, laju

perubahan individu rentan berbanding lurus dengan tingkat perekrutan individu, yaitu

$$\frac{dS(t)}{dt} = b \quad (3.1a)$$

dengan  $b > 0$ .

Banyaknya individu rentan dapat berkurang disebabkan oleh kematian alami individu kelas  $S$ , yaitu kematian yang bukan disebabkan oleh infeksi penyakit, sehingga laju perubahan individu rentan berbanding lurus dengan berkurangnya individu kelas  $S$  karena kematian alami, yaitu

$$\frac{dS(t)}{dt} = -fS(t) \quad (3.1b)$$

dengan  $f$  menyatakan tingkat kematian alami individu.

Infeksi penyakit dapat terjadi karena adanya kontak langsung antara individu rentan dan individu terinfeksi. Jika individu rentan melakukan kontak langsung dengan individu terinfeksi, maka individu rentan akan terinfeksi penyakit sehingga jumlah individu kelas  $S$  akan berkurang. Kontak langsung dalam model ini dinyatakan dengan tingkat kejadian infeksi penyakit ( $g(I)$ ), sehingga laju perubahan individu rentan berbanding lurus dengan berkurangnya individu kelas  $S$  karena terinfeksi penyakit yaitu

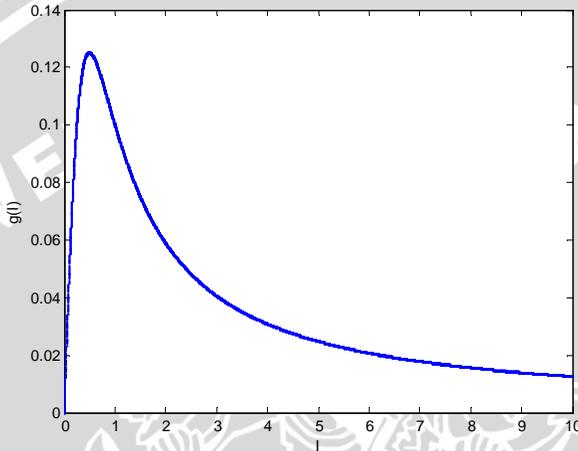
$$\frac{dS(t)}{dt} = -g(I)S(t). \quad (3.1c)$$

Pada umumnya, ketika di dalam populasi sedang terjadi wabah penyakit dan jumlah individu terinfeksi semakin bertambah banyak, maka akan terjadi perubahan perilaku karena adanya pengaruh psikologis atau penghambatan individu. Hal ini penting karena jumlah kontak yang efektif antara individu terinfeksi dan individu rentan menurun pada tingkat infeksi tinggi, yang disebabkan oleh karantina individu terinfeksi atau tindakan perlindungan oleh setiap individu rentan. Jika tingkat kejadian infeksi penyakit dimodelkan oleh fungsi berikut

$$g(I) = \frac{kI}{1 + \alpha I^2} \quad (3.1d)$$

dimana  $kI$  mengukur kekuatan infeksi penyakit dan  $1/(1 + \alpha I^2)$  menggambarkan pengaruh psikologis perubahan perilaku individu rentan terhadap penyebaran penyakit pada saat jumlah individu

terinfeksi meningkat. Tingkat kejadian infeksi ini disebut tingkat kejadian infeksi nonmonoton karena tingkat kejadian infeksi meningkat ketika jumlah individu terinfeksi kecil dan menurun ketika jumlah individu terinfeksi besar, yang ditunjukkan oleh Gambar 3.2.



**Gambar 3.2.** Fungsi kejadian infeksi nonmonoton  $g(I)$ .

$\gamma$  menyatakan tingkat kesembuhan individu yang kehilangan kekebalan tubuh yaitu banyaknya individu yang sembuh dari infeksi penyakit tetapi kehilangan kekebalan tubuh sehingga kembali rentan terhadap penyakit. Tingkat kesembuhan individu tersebut menyebabkan jumlah individu rentan kelas  $S$  bertambah, sehingga laju perubahan individu rentan berbanding lurus dengan individu kelas  $R$  yang sembuh dari penyakit dan kehilangan kekebalan tubuh, yaitu

$$\frac{dS(t)}{dt} = \gamma R(t) \quad (3.1e)$$

dengan  $\gamma > 0$ .

Berdasarkan persamaan (3.1a) sampai (3.1e), diperoleh laju perubahan individu rentan pada kelas  $S$  terhadap waktu, yaitu

$$\frac{dS(t)}{dt} = b - fS(t) - \frac{kI(t)}{1 + \alpha(I(t))^2} S(t) + \gamma R(t). \quad (3.1)$$

### 3.1.2. Laju Perubahan Individu Terinfeksi (*Infectious*)

Laju perubahan individu terinfeksi kelas  $I$  terhadap waktu dipengaruhi oleh tingkat kejadian infeksi penyakit kelas  $S$ , tingkat kematian alami kelas  $I$  dan  $\mu$  kelas  $I$ .

Jumlah individu terinfeksi dapat bertambah jika terdapat individu rentan yang terinfeksi penyakit karena melakukan kontak langsung dengan individu terinfeksi atau karena adanya tingkat kejadian infeksi penyakit. Oleh karena itu, laju perubahan individu terinfeksi berbanding lurus dengan individu kelas  $S$  yang terinfeksi penyakit atau karena adanya tingkat kejadian infeksi penyakit, yaitu

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{kI(t)}{1 + \alpha(I(t))^2} S(t). \quad (3.2a)$$

Banyaknya individu terinfeksi dapat berkurang disebabkan oleh kematian alami individu kelas  $I$ , sehingga laju perubahan individu terinfeksi berbanding lurus dengan berkurangnya individu kelas  $I$  karena kematian alami, yaitu

$$\frac{dI(t)}{dt} = -fI(t). \quad (3.2b)$$

$\mu$  menyatakan tingkat kesembuhan alami individu yaitu banyaknya individu sembuh secara alami dari infeksi penyakit tetapi bukan karena adanya tindakan pencegahan seperti pengobatan. Jika terdapat individu terinfeksi sembuh secara alami, maka menyebabkan berkurangnya jumlah individu terinfeksi kelas  $I$ . Laju perubahan individu terinfeksi berbanding lurus dengan berkurangnya individu kelas  $I$  karena kesembuhan alami, yaitu

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\mu I(t) \quad (3.2c)$$

dengan  $\mu > 0$ .

Berdasarkan persamaan (3.2a) sampai (3.2c), diperoleh laju perubahan individu terinfeksi pada kelas  $I$  terhadap waktu, yaitu

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{kI(t)}{1 + \alpha I(t)^2} S(t) - (f + \mu)I(t). \quad (3.2)$$

### 3.1.3. Laju Perubahan Individu Sembuh (*Removed*)

Laju perubahan individu sembuh kelas  $R$  terhadap waktu dipengaruhi oleh tingkat kesembuhan alami individu kelas  $I$ , tingkat kematian alami kelas  $R$ , dan tingkat kesembuhan alami individu kelas  $R$ .

Jika terdapat individu terinfeksi sembuh secara alami dari infeksi penyakit, maka menyebabkan bertambahnya jumlah individu sembuh pada kelas  $R$ , sehingga laju perubahan individu sembuh berbanding lurus dengan individu kelas  $I$  karena kesembuhan alami, yaitu

$$\frac{dR(t)}{dt} = \mu I(t). \quad (3.3a)$$

Banyaknya individu sembuh dapat berkurang karena kematian alami, sehingga laju perubahan individu sembuh berbanding lurus dengan berkurangnya individu kelas  $R$  karena kematian alami, yaitu

$$\frac{dR(t)}{dt} = -fR(t). \quad (3.3b)$$

Banyaknya individu sembuh juga dapat berkurang karena tingkat kesembuhan individu yang kehilangan kekebalan tubuh dan kembali rentan terhadap penyakit, sehingga laju perubahan individu sembuh berbanding lurus dengan berkurangnya individu kelas  $R$  karena kesembuhan individu yang kehilangan kekebalan tubuh, yaitu

$$\frac{dR(t)}{dt} = -\gamma R(t). \quad (3.3c)$$

Berdasarkan persamaan (3.3a) sampai (3.3c), diperoleh laju perubahan individu sembuh pada kelas  $R$  terhadap waktu, yaitu

$$\frac{dR(t)}{dt} = \mu I(t) - (f + \gamma)R(t). \quad (3.3)$$

Secara ringkas model epidemik SIRS dengan tingkat kejadian infeksi nonmonoton berdasarkan persamaan (3.1), (3.2), dan (3.3) dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= b - fS(t) - \frac{kI(t)}{1 + \alpha I(t)^2} S(t) + \gamma R(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \frac{kI(t)}{1 + \alpha I(t)^2} S(t) - (f + \mu)I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \mu I(t) - (f + \gamma)R(t),\end{aligned}\tag{3.4}$$

dimana

$S(t)$  : jumlah individu yang rentan pada waktu  $t$

$I(t)$  : jumlah individu yang terinfeksi pada waktu  $t$

$R(t)$  : jumlah individu yang sembuh pada waktu  $t$

$b$  : tingkat perekrutan individu

$f$  : tingkat kematian alami individu

$\mu$  : tingkat kesembuhan alami individu

$\gamma$  : tingkat kesembuhan individu yang kehilangan kekebalan tubuh

$k$  : konstanta proporsionalitas (infeksi)

$\alpha$  : parameter yang mengukur pengaruh psikologis atau penghambatan terhadap infeksi penyakit

Dalam skripsi ini dibahas analisis global model epidemik SIRS dengan tingkat kejadian infeksi nonmonoton, yaitu sistem (3.4). Sesuai dengan makna biologi pada setiap komponen  $S(t)$ ,  $I(t)$ , dan  $R(t)$ , akan dibahas model pada oktan pertama dari  $\mathbb{R}^3$ . Pertama, akan dicari titik kesetimbangan sistem (3.4) dan selanjutnya titik kesetimbangan tersebut dianalisis.

### 3.2. Titik Kesetimbangan

Berdasarkan uraian pada Subbab 2.3, titik kesetimbangan sistem (3.4) dapat diperoleh dengan cara sebagai berikut

$$b - fS - \frac{kSI}{1 + \alpha I^2} + \gamma R = 0,\tag{3.5a}$$

$$\frac{kIS}{1 + \alpha I^2} - (f + \mu)I = 0 \Rightarrow \left[ \frac{kS}{1 + \alpha I^2} - (f + \mu) \right] I = 0,\tag{3.5b}$$

$$\mu I - (f + \gamma)R = 0.\tag{3.5c}$$

Karena ruas kanan persamaan (3.5a) dan (3.5c) sama dengan nol, maka persamaan (3.5a) dan (3.5c) dapat dituliskan menjadi

$$b - fS - \frac{kSI}{1 + \alpha I^2} + \gamma R = 0$$

$$fS + \frac{kSI}{1 + \alpha I^2} = b + \gamma R$$

$$S \left( f + \frac{kI}{1 + \alpha I^2} \right) = b + \gamma R$$

$$S = \frac{b + \gamma R}{f + \frac{kI}{1 + \alpha I^2}}$$

$$S = \frac{(b + \gamma R)(1 + \alpha I^2)}{f(1 + \alpha I^2) + kI} \quad (3.6)$$

dan

$$\mu I - (f + \gamma)R = 0$$

$$R = \frac{\mu I}{f + \gamma} \quad (3.7)$$

Jika persamaan (3.6) dan (3.7) disubstitusikan ke persamaan (3.5b), maka diperoleh

$$\left[ \frac{kS}{1 + \alpha I^2} - (f + \mu) \right] I = 0$$

$$\left[ \frac{k}{1 + \alpha I^2} \frac{(b + \gamma R)(1 + \alpha I^2)}{f(1 + \alpha I^2) + kI} - (f + \mu) \right] I = 0$$

$$\left[ \frac{k(b + \gamma R)}{f(1 + \alpha I^2) + kI} - (f + \mu) \right] I = 0$$

$$\left[ k(b + \gamma R) - (f + \mu)(f(1 + \alpha I^2) + kI) \right] I = 0$$

$$\left[ k \left( b + \gamma \frac{\mu I}{f + \gamma} \right) - (f + \mu)(f(1 + \alpha I^2) + kI) \right] I = 0$$

$$\left[ kb + kI \frac{\gamma \mu}{f + \gamma} - f(f + \mu)(1 + \alpha I^2) - kI(f + \mu) \right] I = 0$$

$$\left[ kb + kI \frac{\mu}{f + \gamma} - f(f + \mu) - \alpha f(f + \mu)I^2 - kI(f + \mu) \right] I = 0$$

$$\left\{ -\alpha f(f + \mu)I^2 - \left[ (f + \mu) - \frac{\mu}{f + \gamma} \right] kI - f(f + \mu) + kb \right\} I = 0$$

$$\left[ \alpha f(f + \mu)I^2 + \left( f + \mu - \frac{\mu}{f + \gamma} \right) kI + (f(f + \mu) - kb) \right] I = 0.$$

Jika kedua ruas dikalikan dengan  $\frac{1}{f(f + \mu)}$ , maka dapat diperoleh persamaan berikut

$$\left[ \alpha I^2 + \left( f + \mu - \frac{\mu}{f + \gamma} \right) \frac{k}{f(f + \mu)} I + \left( 1 - \frac{kb}{f(f + \mu)} \right) \right] I = 0. \quad (3.8)$$

Dengan memisalkan

$$R_0 = \frac{kb}{f(f + \mu)}, \quad (3.9)$$

persamaan (3.8) dapat dituliskan menjadi

$$\left[ \alpha I^2 + \frac{k \left( f + \mu - \frac{\mu}{f + \gamma} \right)}{f(f + \mu)} I + (1 - R_0) \right] I = 0. \quad (3.10)$$

Berikut akan ditentukan solusi persamaan (3.10) berdasarkan nilai  $R_0$ .

- $R_0 = 1$

Untuk  $R_0 = 1$ , persamaan (3.10) dapat dituliskan menjadi

$$\left[ \alpha I^2 + \left( f + \mu - \frac{\mu}{f + \gamma} \right) \frac{k}{f(f + \mu)} I \right] I = 0$$

$$I^2 \left[ \alpha I + \frac{k \left( f + \mu - \frac{\mu}{f + \gamma} \right)}{f(f + \mu)} \right] = 0 \quad (3.11)$$

dan diperoleh dua solusi  $I$  sebagai berikut

$$I_{1,1} = I_{1,2} = 0 \text{ atau } I_{1,3} = -\frac{k\left(f + \mu - \frac{\eta\mu}{f + \gamma}\right)}{\alpha f(f + \mu)} < 0$$

jika  $f + \mu > \frac{\eta\mu}{f + \gamma}$ .

- $R_0 < 1$

Untuk  $R_0 < 1$ , berarti nilai  $(1 - R_0) > 0$  atau dapat dituliskan dengan  $(1 - R_0)^2 > 0$  sehingga persamaan (3.10) dapat dituliskan menjadi

$$\left[ \alpha I^2 + \frac{k\left(f + \mu - \frac{\eta\mu}{f + \gamma}\right)}{f(f + \mu)} I + (1 - R_0)^2 \right] I = 0. \quad (3.12)$$

Dari persamaan (3.12) diperoleh

$$I = 0 \text{ atau } \alpha I^2 + \frac{k\left(f + \mu - \frac{\eta\mu}{f + \gamma}\right)}{f(f + \mu)} I + (1 - R_0)^2 = 0,$$

sehingga persamaan (3.12) mempunyai tiga solusi  $I$  yaitu

$$I_{2,1} = 0$$

atau

$$I_{2,2,2,3} = \frac{-\frac{k\left(f + \mu - \frac{\eta\mu}{f + \gamma}\right)}{f(f + \mu)} \pm \sqrt{\frac{k^2\left(f + \mu - \frac{\eta\mu}{f + \gamma}\right)^2}{f^2(f + \mu)^2} - 4\alpha(1 - R_0)^2}}{2\alpha}.$$

Dapat dilihat bahwa

$$I_{2,2} = \frac{-\frac{k\left(f + \mu - \frac{\eta\mu}{f + \gamma}\right)}{f(f + \mu)} + \sqrt{\frac{k^2\left(f + \mu - \frac{\eta\mu}{f + \gamma}\right)^2}{f^2(f + \mu)^2} - 4\alpha(1 - R_0)^2}}{2\alpha} < 0,$$

dan

$$I_{2,3} = \frac{k \left( f + \mu - \frac{\gamma \mu}{f + \gamma} \right)}{f(f + \mu)} - \sqrt{\frac{k^2 \left( f + \mu - \frac{\gamma \mu}{f + \gamma} \right)^2}{f^2(f + \mu)^2} - 4\alpha(1 - R_0)^2} < 0$$

karena

$$\sqrt{\frac{k^2 \left( f + \mu - \frac{\gamma \mu}{f + \gamma} \right)^2}{f^2(f + \mu)^2} - 4\alpha(1 - R_0)^2} < \frac{k \left( f + \mu - \frac{\gamma \mu}{f + \gamma} \right)}{f(f + \mu)}$$

- $R_0 > 1$

Untuk  $R_0 > 1$ , berarti nilai  $(1 - R_0) < 0$  dengan menggunakan persamaan (3.10) diperoleh dua persamaan berikut

$$I = 0 \text{ atau } \alpha I^2 + \frac{k \left( f + \mu - \frac{\gamma \mu}{f + \gamma} \right)}{f(f + \mu)} I + (1 - R_0) = 0,$$

dan dapat diperoleh solusi  $I$  sebagai berikut

$$I_{3,1} = 0$$

atau

$$I_{3,2,3,3} = \frac{k \left( f + \mu - \frac{\gamma \mu}{f + \gamma} \right)}{f(f + \mu)} \pm \sqrt{\frac{k^2 \left( f + \mu - \frac{\gamma \mu}{f + \gamma} \right)^2}{f^2(f + \mu)^2} - 4\alpha(1 - R_0)}$$

$$I_{3,2,3,3} =$$

$$\frac{k \left( f + \mu - \frac{\gamma \mu}{f + \gamma} \right)}{f(f + \mu)} \pm \sqrt{\frac{k^2 \left( f + \mu - \frac{\gamma \mu}{f + \gamma} \right)^2}{f^2(f + \mu)^2} - \frac{4\alpha f^2(f + \mu)^2(1 - R_0)}{f^2(f + \mu)^2}}$$

$$I_{3.2.3.3} = \frac{1}{f(f+\mu)} \frac{-k \left( f + \mu - \frac{\mathcal{M}}{f+\gamma} \right) \pm \sqrt{k^2 \left( f + \mu - \frac{\mathcal{M}}{f+\gamma} \right)^2 - 4\alpha f^2 (f+\mu)^2 (1-R_0)}}{2\alpha}$$

$$I_{3.2.3.3} = \frac{-k \left( f + \mu - \frac{\mathcal{M}}{f+\gamma} \right) \pm \sqrt{k^2 \left( f + \mu - \frac{\mathcal{M}}{f+\gamma} \right)^2 - 4\alpha f^2 (f+\mu)^2 (1-R_0)}}{2\alpha f(f+\mu)}$$

Jika  $R_0 > 1$  atau  $1-R_0 < 0$  atau juga bisa ditulis  $-(1-R_0)^2 < 0$ , maka

$$\begin{aligned} \sqrt{k^2 \left( f + \mu - \frac{\mathcal{M}}{f+\gamma} \right)^2 + 4\alpha f^2 (f+\mu)^2 (1-R_0)^2} &> k \left( f + \mu - \frac{\mathcal{M}}{f+\gamma} \right) \\ k^2 \left( f + \mu - \frac{\mathcal{M}}{f+\gamma} \right)^2 + 4\alpha f^2 (f+\mu)^2 (1-R_0)^2 &> k^2 \left( f + \mu - \frac{\mathcal{M}}{f+\gamma} \right)^2 \\ &> 0, \end{aligned}$$

sehingga dapat dilihat bahwa

$$I_{3.2} = \frac{-k \left( f + \mu - \frac{\mathcal{M}}{f+\gamma} \right) + \sqrt{k^2 \left( f + \mu - \frac{\mathcal{M}}{f+\gamma} \right)^2 - 4\alpha f^2 (f+\mu)^2 (1-R_0)}}{2\alpha f(f+\mu)} > 0$$

atau

$$I_{3.3} = \frac{-k \left( f + \mu - \frac{\mathcal{M}}{f+\gamma} \right) - \sqrt{k^2 \left( f + \mu - \frac{\mathcal{M}}{f+\gamma} \right)^2 - 4\alpha f^2 (f+\mu)^2 (1-R_0)}}{2\alpha f(f+\mu)} < 0.$$

### 3.2.1. Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Berdasarkan uraian sebelumnya, dapat diketahui bahwa untuk setiap nilai parameter  $R_0$ , terdapat solusi  $I = 0$ . Jika  $I = 0$  disubstitusikan ke persamaan (3.6) dan (3.7), maka diperoleh  $R = 0$  dan

$S = \frac{b}{f}$ . Nilai  $S$ ,  $I$ , dan  $R$  disebut titik kesetimbangan bebas penyakit,

yaitu suatu kondisi dimana tidak ada penyakit yang menyerang atau tidak ada individu yang terserang penyakit ( $I = 0$ ). Jadi, untuk setiap nilai parameter  $R_0$ , sistem (3.4) memiliki titik kesetimbangan bebas penyakit, yaitu  $E_0 = (b/f, 0, 0)$ .

### 3.2.2. Titik Kesetimbangan Endemik

Untuk  $R_0 \leq 1$ , selain  $I = 0$  tidak ada kesetimbangan positif karena semua nilai  $I$  negatif ( $I < 0$ ). Sebaliknya, untuk  $R_0 > 1$ , selain  $I = 0$  diperoleh solusi  $I$  yang bernilai positif ( $I > 0$ ). Hal ini menunjukkan bahwa terdapat individu yang terinfeksi penyakit dalam suatu populasi, sehingga ada titik kesetimbangan positif  $E^* = (S^*, I^*, R^*)$  pada sistem (3.4) yang disebut kesetimbangan endemik, yaitu suatu kondisi dimana penyakit selalu ada dalam populasi atau selalu ada individu yang terserang penyakit. Adapun solusi  $I$  yang dimaksud adalah

$$I = \frac{-k \left( f + \mu - \frac{\mu}{f + \gamma} \right) + \sqrt{k^2 \left( f + \mu - \frac{\mu}{f + \gamma} \right)^2 - 4\alpha f^2 (f + \mu)^2 (1 - R_0)}}{2\alpha f (f + \mu)}. \quad (3.13)$$

Dengan menjumlahkan persamaan (3.5a) dan (3.5b), dapat diperoleh

$$\begin{aligned} b - fS - (f + \mu)I + \gamma R &= 0 \\ fS &= b - (f + \mu)I + \gamma R \\ S &= \frac{1}{f} (b - (f + \mu)I + \gamma R). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Dari persamaan (3.7) diketahui  $R = \frac{\mu I}{f + \gamma}$ . Jika persamaan (3.7)

disubstitusikan ke persamaan (3.14), maka persamaan (3.14) dapat dituliskan menjadi

$$S = \frac{1}{f} \left( b - (f + \mu)I + \frac{\mu I}{f + \gamma} \right)$$

$$S = \frac{1}{f} \left( b - \left( f + \mu - \frac{\mu}{f + \gamma} \right) I \right). \quad (3.15)$$

Jadi, berdasarkan persamaan (3.7), (3.14), dan (3.15) diperoleh titik kesetimbangan endemik  $E^* = (S^*, I^*, R^*)$  sebagai berikut

$$S^* = \frac{1}{f} \left[ b - \left( f + \mu - \frac{\mu}{f + \gamma} \right) I^* \right],$$

$$I^* = \frac{-k \left( f + \mu - \frac{\mu}{f + \gamma} \right) + \sqrt{\Delta}}{2\alpha f (f + \mu)}, \quad (3.16)$$

$$R^* = \frac{\mu}{f + \gamma} I^*,$$

dimana

$$\Delta = k^2 \left( f + \mu - \frac{\mu}{f + \gamma} \right)^2 - 4\alpha f^2 (f + \mu)^2 [1 - R_0].$$

Sebelum menunjukkan kestabilan titik kesetimbangan, akan ditunjukkan terlebih dahulu bahwa sistem (3.4) mempunyai solusi yang hanya berada pada oktan pertama yang ditunjukkan dengan lemma berikut.

**Lemma 3.1** Bidang  $S + I + R = \frac{b}{f}$  adalah sebuah permukaan invarian sistem (3.4) yang menarik (*attracting*) pada oktan pertama.

**Bukti.** Diketahui tiga persamaan dalam sistem (3.4) dan dimisalkan  $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$ , maka

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{dS(t)}{dt} + \frac{dI(t)}{dt} + \frac{dR(t)}{dt}$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = b - fS - \frac{kSI}{1 + \alpha I^2} + \gamma R + \frac{kSI}{1 + \alpha I^2} - (f + \mu) + \mu I - (d + \gamma)R$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = b - fS - fI - fR$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = b - f(S + I + R)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = b - fN(t). \quad (3.17)$$

Untuk sebarang nilai  $t$ , jelas bahwa  $N(t) = \frac{b}{f}$  adalah solusi persamaan (3.17). Untuk setiap  $N(0) \geq 0$ , solusi umum persamaan (3.17) adalah

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= b - fN(t) \\ \int \frac{dN(t)}{(b - fN(t))} &= \int dt \\ -\frac{1}{f} \ln(b - fN(t)) &= t + C_1 \\ \ln(b - fN(t)) &= -f(t + C_1) \\ b - fN(t) &= e^{-f(t+C_1)} \\ b - fN(t) &= e^{-ft} \cdot e^{-fC_1} \\ b - fN(t) &= e^{-ft} \cdot C \\ b - fN(t) &= Ce^{-ft} \\ fN(t) &= b - Ce^{-ft} \\ N(t) &= \frac{1}{f}(b - Ce^{-ft}). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Ketika  $t = 0$  dapat diperoleh

$$N(0) = \frac{1}{f}(b - C)$$

$$fN(0) = b - C$$

$$C = b - fN(0),$$

sehingga persamaan (3.18) dapat dituliskan menjadi

$$N(t) = \frac{1}{f} \left[ b - (b - fN(0)) e^{-ft} \right]. \quad (3.19)$$

Adapun nilai limit dari  $N(t)$  yaitu

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{f} \left[ b - (b - fN(0)) e^{-ft} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{f} \left[ b - \frac{b - fN(0)}{e^{ft}} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{b}{f} - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{b - fN(0)}{fe^{ft}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{b}{f} - 0 \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{b}{f} = \frac{b}{f} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Jadi  $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{b}{f}$ .

Jelas bahwa limit sistem (3.4) ada pada bidang  $S + I + R = \frac{b}{f}$ ,

sehingga solusi  $S + I + R$  akan selalu menuju  $\frac{b}{f}$ . Oleh karena itu,  $S$

dapat dinyatakan dalam bentuk  $S = \frac{b}{f} - I - R$  dan sistem (3.4) dapat

direduksi menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{kIS}{1 + \alpha I^2} - (f + \mu)I \\ &= \frac{kI}{1 + \alpha I^2} \left( \frac{b}{f} - I - R \right) - (f + \mu)I \triangleq P(I, R) \\ \frac{dR}{dt} &= \mu I - (f + \gamma)R \triangleq Q(I, R). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa sistem (3.21) tidak memiliki orbit periodik yang ditunjukkan dengan teorema berikut. Jika

terdapat kondisi setimbang positif dan titik kesetimbangan stabil asimtotik lokal, maka sesuai dengan Teorema Poincare-Bendixon dapat ditunjukkan bahwa solusi atau titik kesetimbangan sistem (3.21) stabil global karena sistem tidak memiliki orbit periodik.

**Teorema 3.2** Sistem (3.21) tidak memiliki orbit periodik.

**Bukti.** Diketahui sistem (3.21) untuk  $I > 0$  dan  $R > 0$  dan didefinisikan fungsi Dulac

$$D(I, R) = \frac{1 + \alpha I^2}{kI}.$$

Jika masing-masing persamaan pada sistem (3.21) dikalikan dengan fungsi  $D$ , maka diperoleh

$$\begin{aligned} DP &= \frac{1 + \alpha I^2}{kI} \left( \frac{kI}{1 + \alpha I^2} \left( \frac{b}{f} - I - R \right) - (f + \mu)I \right) \\ &= \frac{b}{f} - I - R - \frac{(1 + \alpha I^2)(f + \mu)}{k} \\ &= \frac{b}{f} - I - R - \frac{(f + \mu)}{k} - \frac{(f + \mu)\alpha I^2}{k} \\ DQ &= \frac{1 + \alpha I^2}{kI} (\mu I - (f + \gamma)R) \\ &= \frac{(1 + \alpha I^2)\mu}{k} - \frac{(1 + \alpha I^2)(f + \gamma)R}{kI}. \end{aligned}$$

Sesuai dengan kriteria Dulac pada Subbab 2.6.1, sistem (3.21) tidak memiliki orbit periodik jika  $\frac{\partial(DP)}{\partial I} + \frac{\partial(DQ)}{\partial R} \neq 0$ , yaitu

$$\begin{aligned} \frac{\partial(DP)}{\partial I} + \frac{\partial(DQ)}{\partial R} &= \frac{\partial}{\partial I} \left( \frac{b}{f} - I - R - \frac{(f + \mu)}{k} - \frac{(f + \mu)\alpha I^2}{k} \right) + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{(1 + \alpha I^2)\mu}{k} - \frac{(1 + \alpha I^2)(f + \gamma)R}{kI} \right) \\ \frac{\partial(DP)}{\partial I} + \frac{\partial(DQ)}{\partial R} &= -1 - \frac{2\alpha(f + \mu)}{k} I - \frac{1 + \alpha I^2}{kI} (f + \gamma)R \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(DP)}{\partial I} + \frac{\partial(DQ)}{\partial R} = - \left( 1 + \frac{2\alpha(f + \mu)}{k} I + \frac{1 + \alpha I^2}{kI} (f + \gamma) R \right) < 0.$$

Jadi, terbukti bahwa sistem (3.21) tidak memiliki orbit periodik.

### 3.3. Kestabilan Titik Kesetimbangan

Untuk mempelajari sifat-sifat titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0$  dan titik kesetimbangan endemik  $E^*$  dengan lebih mudah, dimisalkan

$$\begin{aligned} x &= \frac{k}{f + \gamma} I \Rightarrow I = \frac{f + \gamma}{k} x \\ y &= \frac{k}{f + \gamma} R \Rightarrow R = \frac{f + \gamma}{k} y \\ \tau &= (f + \gamma)t \Rightarrow t = \frac{\tau}{f + \gamma} \end{aligned} \quad (3.22)$$

sehingga sistem (3.21) dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{kI}{1 + \alpha I^2} \left( \frac{b}{f} - I - R \right) - (f + \mu)I \\ \frac{d\left(\frac{f + \gamma}{k} x\right)}{d\left(\frac{\tau}{f + \gamma}\right)} &= \frac{k\left(\frac{f + \gamma}{k} x\right)}{1 + \alpha\left(\frac{f + \gamma}{k} x\right)^2} \left( \frac{b}{f} - \left(\frac{f + \gamma}{k} x\right) - \left(\frac{f + \gamma}{k} y\right) \right) - \\ &\quad (f + \mu)\left(\frac{f + \gamma}{k} x\right) \\ \left(\frac{f + \gamma}{k}\right) dx &= \frac{(f + \gamma)x}{1 + \frac{\alpha(f + \gamma)^2}{k^2} x^2} \left( \frac{b}{f} - \frac{(f + \gamma)}{k} x - \frac{(f + \gamma)}{k} y \right) \\ \left(\frac{1}{f + \gamma}\right) d\tau &= \frac{-(f + \mu)(f + \gamma)}{k} x \end{aligned}$$

$$\frac{(f + \gamma)^2}{k} \frac{dx}{d\tau} = \frac{(f + \gamma)^2 x}{k \left( 1 + \frac{\alpha(f + \gamma)^2}{k^2} x^2 \right)} \left( \frac{kb}{f(f + \gamma)} - x - y \right) - \frac{(f + \mu)(f + \gamma)}{k} x$$

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{x}{1 + \frac{\alpha(f + \gamma)^2}{k^2} x^2} \left( \frac{kb}{f(f + \gamma)} - x - y \right) - \frac{(f + \mu)}{(f + \gamma)} x \quad (3.23)$$

dan

$$\frac{dR}{dt} = \mu I - (f + \gamma)R$$

$$\frac{d\left(\frac{f + \gamma}{k} y\right)}{d\left(\frac{\tau}{f + \gamma}\right)} = \mu \left( \frac{f + \gamma}{k} x \right) - (f + \gamma) \left( \frac{f + \gamma}{k} y \right)$$

$$\frac{\left(\frac{f + \gamma}{k}\right) dy}{\left(\frac{1}{f + \gamma}\right) d\tau} = \frac{\mu(f + \gamma)}{k} x - \frac{(f + \gamma)^2}{k} y$$

$$\frac{(f + \gamma)^2}{k} \frac{dy}{d\tau} = \frac{\mu(f + \gamma)}{k} x - \frac{(f + \gamma)^2}{k} y$$

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{\mu}{f + \gamma} x - y. \quad (3.24)$$

Dari persamaan (3.23) dan (3.24) diperoleh sistem baru

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{x}{1 + px^2} (A - x - y) - mx,$$

$$\frac{dy}{d\tau} = qx - y \quad (3.25)$$

dimana

$$p = \frac{\alpha(f + \gamma)^2}{k^2}, A = \frac{kb}{f(f + \gamma)}, m = \frac{f + \mu}{f + \gamma}, q = \frac{\mu}{f + \gamma}.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa titik kesetimbangan (0,0) sistem (3.25) adalah titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0$  pada sistem (3.4), serta titik kesetimbangan positif  $(x^*, y^*)$  sistem (3.25) adalah titik kesetimbangan endemik  $E^*$  pada sistem (3.4) jika dan hanya jika  $m - A < 0$ .

Sesuai dengan uraian pada Subbab 2.3, titik kesetimbangan sistem (3.25) dapat dicari dengan cara

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{x}{1 + px^2} (A - x - y) - mx = 0$$

$$\frac{x(A - x - y) - mx(1 + px^2)}{1 + px^2} = 0$$

$$\frac{x(A - y) - x^2 - mx - mpx^3}{1 + px^2} = 0$$

$$x(A - y - m) - x^2 - mpx^3 = 0$$

$$mpx^3 + x^2 - x(A - y - m) = 0$$

$$x(mpx^2 + x - A + y + m) = 0. \quad (3.26)$$

Dari persamaan (3.26) dapat diperoleh

$$x = 0 \quad (3.27)$$

atau

$$mpx^2 + x - A + y + m = 0 \Rightarrow mpx^2 + x + y + m - A = 0 \quad (3.28)$$

dan

$$\frac{dy}{d\tau} = qx - y = 0$$

$$qx - y = 0$$

$$y = qx. \quad (3.29)$$

Jika persamaan (3.29) disubstitusikan ke persamaan (3.28), maka diperoleh

$$mpx^2 + x + qx + m - A = 0$$

$$mpx^2 + (1 + q)x + m - A = 0. \quad (3.30)$$

Solusi persamaan (3.30) adalah

$$x_{1,2} = \frac{-(1+q) \pm \sqrt{(1+q)^2 - 4mp(m-A)}}{2mp}. \quad (3.31)$$

Jika  $m - A < 0$  maka

$$x_1 = \frac{-(1+q) + \sqrt{(1+q)^2 - 4mp(m-A)}}{2mp} > 0 \quad (3.32)$$

dan

$$x_2 = \frac{-(1+q) - \sqrt{(1+q)^2 - 4mp(m-A)}}{2mp} < 0 \quad (3.33)$$

karena

$$\sqrt{(1+q)^2 - 4mp(m-A)} > (1+q).$$

Dari persamaan (3.26) diperoleh solusi  $x=0$  (lihat persamaan (3.27)), sehingga dapat diperoleh  $y=0$  yang menyebabkan  $I=0$ , sehingga titik kesetimbangan  $(0,0)$  adalah titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0$  pada sistem (3.4). Sedangkan untuk solusi  $x$  yang tidak nol seperti pada persamaan (3.30), dipilih nilai  $x$  yang positif, yaitu persamaan (3.32), karena  $x$  merupakan variabel yang menggambarkan jumlah individu yang terinfeksi penyakit, sehingga diperoleh titik kesetimbangan endemik  $E^* = (x^*, y^*)$ , yaitu

$$x^* = \frac{-(1+q) + \sqrt{(1+q)^2 - 4mp(m-A)}}{2mp}, y^* = qx^*. \quad (3.34)$$

Karena  $x^* = \frac{k}{f+\gamma} I^*$  dan  $y^* = \frac{k}{f+\gamma} R^*$  (lihat persamaan (3.22)) maka titik kesetimbangan positif  $(x^*, y^*)$  sistem (3.25) adalah titik kesetimbangan endemik  $E^*$  pada sistem (3.4).

Selanjutnya akan dibuktikan jika diketahui titik kesetimbangan endemik (3.34) maka  $m - A < 0$ .

Dari (3.34) diketahui bahwa

$$x^* = \frac{-(1+q) + \sqrt{(1+q)^2 - 4mp(m-A)}}{2mp},$$

jika kedua ruas dikalikan dengan  $2mp$ , maka dapat diperoleh

$$2mpx^* = -(1+q) + \sqrt{(1+q)^2 - 4mp(m-A)}$$

$$2mpx^* + (1+q) = \sqrt{(1+q)^2 - 4mp(m-A)}. \quad (3.35)$$

Jika kedua ruas dikuadratkan, maka persamaan (3.35) dapat dituliskan menjadi

$$4m^2 p^2 x^{*2} + 4mp(1+q)x^* + (1+q)^2 = (1+q)^2 - 4mp(m-A)$$

$$4m^2 p^2 x^{*2} + 4mp(1+q)x^* + 4mp(m-A) = 0. \quad (3.36)$$

Persamaan (3.36) dapat disederhanakan menjadi

$$mpx^{*2} + (1+q)x^* + m - A = 0$$

$$m - A = -mpx^{*2} - (1+q)x^*$$

$$m - A = -\left(mpx^{*2} + (1+q)x^*\right). \quad (3.37)$$

Karena nilai  $mpx^{*2} + (1+q)x^* > 0$  maka  $m - A < 0$ .

Jadi, terbukti bahwa titik kesetimbangan positif  $(x^*, y^*)$  sistem (3.25) adalah titik kesetimbangan endemik  $E^*$  pada sistem (3.4) jika dan hanya jika  $m - A < 0$ .

### 3.3.1. Kestabilan Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Sesuai dengan uraian pada Subbab 2.5, kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit ditentukan oleh matriks Jacobi sistem (3.25) yaitu

$$J = \begin{bmatrix} \frac{dF_1}{dx} & \frac{dF_1}{dy} \\ \frac{dF_2}{dx} & \frac{dF_2}{dy} \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

Jika

$$F_1 = \frac{dx}{d\tau} = \frac{x}{1+px^2} (A - x - y) - mx$$

$$= \frac{Ax}{1+px^2} - \frac{x^2}{1+px^2} - \frac{xy}{1+px^2} - mx \quad (3.39a)$$

$$F_2 = \frac{dy}{d\tau} = qx - y, \quad (3.39b)$$

maka dapat diperoleh

$$\frac{dF_1}{dx} = \frac{A - m - y - x - mpx^2}{1 + px^2} - \frac{2Apx^2 - px^3 - 2px^2y + x}{(1 + px^2)^2}. \quad (3.40)$$

Karena  $y = qx$  (lihat persamaan (3.29)), persamaan (3.40) dapat dituliskan menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dF_1}{dx} &= \frac{A - m - qx - x - mpx^2}{1 + px^2} - \frac{2Apx^2 - px^3 - 2pqx^3 + x}{(1 + px^2)^2} \\ &= \frac{-(mpx^2 + (1+q)x + m - A)}{1 + px^2} + \frac{x(px^2 + 2pqx^2 - 2Apx - 1)}{(1 + px^2)^2} \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\frac{dF_1}{dy} = -\frac{x}{1 + px^2} \quad (3.42)$$

$$\frac{dF_2}{dx} = q \quad (3.43)$$

$$\frac{dF_2}{dy} = -1 \quad (3.44)$$

Matriks Jacobi sistem (3.25) di titik kesetimbangan bebas penyakit  $(0, 0)$  adalah

$$J_0 = \begin{bmatrix} A - m & 0 \\ q & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

Determinan matriks  $J_0$  yaitu

$$\begin{vmatrix} A - m - \lambda & 0 \\ q & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (A - m - \lambda)(-1 - \lambda) = 0$$

dengan nilai eigen  $\lambda_1 = -1$  atau  $\lambda_2 = A - m$ .

Jika  $A - m < 0$  atau  $m - A > 0$ , maka diperoleh nilai eigen  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  negatif dan jenis kestabilannya adalah *hyperbolic sink* atau *stable hyperbolic node*, sedangkan jika  $A - m > 0$  atau  $m - A < 0$ , maka diperoleh nilai eigen  $\lambda_1$  negatif dan  $\lambda_2$  positif dan jenis kestabilannya adalah *hyperbolic saddle*.

Jika  $A - m = 0$ , maka diperoleh nilai eigen  $\lambda_1 = -1$  dan  $\lambda_2 = 0$ . Untuk mempelajari kestabilan titik kesetimbangan  $(0,0)$  dengan  $A - m = 0$ , pertama diperhatikan sistem (3.25), yaitu

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \frac{x}{1+px^2} (A-x-y) - mx \\ &= \frac{x(A-x-y) - mx - mpx^3}{1+px^2} \\ &= \frac{x(A-m-y) - x^2 - mpx^3}{1+px^2}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Karena  $A - m = 0$ , persamaan (3.46) dapat dituliskan menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \frac{-xy - x^2 - mpx^3}{1+px^2} \\ \frac{dx}{d\tau} &= \frac{-x^2 - xy - mpx^3}{1+px^2}. \end{aligned}$$

Di sekitar titik  $(0,0)$ ,  $\frac{1}{1+px^2}$  dapat didekati dengan deret Mac Laurin, yaitu

$$\frac{1}{1+px^2} = 1 - px^2 + \frac{2}{3}p^2x^4 - \frac{3}{5}p^3x^6 + \dots,$$

sehingga

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \left(1 - px^2 + \frac{2}{3}p^2x^4 - \frac{3}{5}p^3x^6 + \dots\right) (-x^2 - xy - mpx^3) \\ &= -x^2 - xy - mpx^3 + (-x^2 - xy - mpx^3) \left(-px^2 + \frac{2}{3}p^2x^4 - \frac{3}{5}p^3x^6 + \dots\right) \\ &= -x^2 - xy - mpx^3 + px^4 + px^3y + mp^2x^5 - \frac{2}{3}p^2x^6 - \dots \end{aligned}$$

Dengan demikian sistem (3.25) di sekitar titik  $(0,0)$  dapat didekati oleh

$$\frac{dx}{d\tau} = -x^2 - xy + O((x, y)^3) \quad (3.47)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = qx - y$$

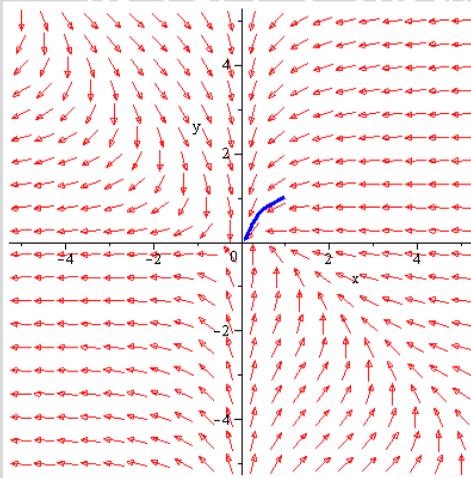
Jadi, jika  $A - m = 0$ , maka terdapat persekitaran kecil  $N_0$  dari  $(0, 0)$  sehingga dinamika sistem (3.25) setara dengan sistem (3.47). Sistem (3.47) mempunyai bentuk seperti sistem (2.7) dengan

$$P(x, y) = -x^2 - xy + O((x, y)^3)$$

dan

$$Q(x, y) = qx - 2y.$$

Berdasarkan Teorema 2.2, diketahui bahwa jenis kestabilan titik  $(0, 0)$  sistem (3.47) adalah *saddle-node*. Potret fase sistem (3.47) ditunjukkan oleh Gambar 3.3. Berdasarkan Gambar 3.3, dapat dilihat bahwa medan arah pada oktan pertama menuju ke titik  $(0, 0)$  sehingga titik  $(0, 0)$  sistem (3.47) adalah titik yang stabil pada oktan pertama untuk nilai parameter  $q = 0.3$ .



**Gambar 3.3.** Potret fase sistem (3.47).

Dari persamaan (3.25) diketahui bahwa

$$m = \frac{f + \mu}{f + \gamma} \Rightarrow f + \mu = m(f + \gamma)$$

dan

$$A = \frac{kb}{f(f + \gamma)} \Rightarrow kb = Af(f + \gamma).$$

Jika  $R_0$  dikaitkan dengan parameter  $m$  dan  $A$ , maka diperoleh  $R_0$  sebagai berikut

$$R_0 = \frac{kb}{f(f + \mu)} = \frac{Af(f + \gamma)}{fm(f + \gamma)} = \frac{A}{m}. \quad (3.48)$$

Oleh karena itu, untuk  $m - A > 0$  atau  $m > A$ , diperoleh  $R_0 < 1$  sedangkan untuk  $m - A < 0$  atau  $m < A$ , diperoleh  $R_0 > 1$  dan untuk  $m - A = 0$  atau  $m = A$ , diperoleh  $R_0 = 1$ .

Jenis kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit (0,0) sistem (3.25) dituliskan secara ringkas dalam Teorema 3.3 berikut.

**Teorema 3.3** Titik kesetimbangan bebas penyakit (0,0) sistem (3.25) adalah

- (i) *stable hyperbolic node* jika  $m - A > 0$  atau  $R_0 < 1$ ,
- (ii) *saddle-node* jika  $m - A = 0$  atau  $R_0 = 1$ ,
- (iii) *hyperbolic saddle* jika  $m - A < 0$  atau  $R_0 > 1$ .

### 3.3.2. Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik

Untuk  $m - A < 0$  atau  $R_0 > 1$ , akan dibahas jenis kestabilan titik kesetimbangan endemik  $(x^*, y^*)$ . Matriks Jacobi sistem (3.25) pada titik kesetimbangan endemik ditunjukkan oleh persamaan (3.41) sampai (3.44) dan jika diketahui  $mpx^2 + (1+q)x + m - A = 0$  (lihat persamaan (3.30)), maka matriks Jacobi sistem (3.25) di titik  $(x^*, y^*)$  adalah

$$J_1 = \begin{bmatrix} \frac{x^* (px^{*2} + 2pqx^{*2} - 2Ap x^* - 1)}{(1 + px^{*2})^2} & \frac{-x^*}{1 + px^{*2}} \\ q & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

Dari matriks  $J_1$  diperoleh

$$\begin{aligned}
\det(J_1) &= -\frac{x^*(px^{*2} + 2pqx^{*2} - 2Ap x^* - 1)}{(1 + px^{*2})^2} + \frac{qx^*}{1 + px^{*2}} \\
&= \frac{(-px^{*3} - 2pqx^{*3} + 2Ap x^{*2} + x^*) + qx^* + pqx^{*3}}{(1 + px^{*2})^2} \\
&= \frac{-px^{*3} - pqx^{*3} + 2Ap x^{*2} + x^* + qx^*}{(1 + px^{*2})^2} \\
&= \frac{-(1+q)px^{*3} + 2Ap x^{*2} + (1+q)x^*}{(1 + px^{*2})^2} \\
&= \frac{x^*(1+q + 2Ap x^* - (1+q)px^{*2})}{(1 + px^{*2})^2} \tag{3.50}
\end{aligned}$$

dan tanda  $\det(J_1)$  ditentukan oleh

$$S_1 = 1 + q + 2Ap x^* - (1+q)px^{*2} \tag{3.51}$$

Berdasarkan persamaan (3.30), dapat diketahui bahwa

$$x^{*2} = \frac{-(1+q)x^* - m + A}{mp} \tag{3.52}$$

Jika (3.52) disubstitusikan ke persamaan (3.51), maka diperoleh

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1 + q + 2Ap x^* - (1+q)px^{*2} \\
S_1 &= 1 + q + 2Ap x^* - (1+q)p \left( \frac{-(1+q)x^* - m + A}{mp} \right) \\
S_1 &= 1 + q + 2Ap x^* + \frac{(1+q)^2 x^* + (1+q)m - (1+q)A}{m}
\end{aligned}$$

dan jika kedua ruas dikalikan dengan  $m$ , maka diperoleh

$$\begin{aligned}
mS_1 &= (1+q)m + 2Amp x^* + (1+q)^2 x^* + (1+q)m - (1+q)A \\
&= 2Amp x^* + (1+q)^2 x^* + 2(1+q)m - (1+q)A \\
&= 2Amp x^* + (1+q)^2 x^* + (1+q)(2m - A) \\
&= (2Amp + (1+q)^2) x^* + (1+q)(2m - A)
\end{aligned}$$

$$mS_1 = 2Amp + (1+q)^2 \left[ x^* + \frac{(1+q)(2m-A)}{2Amp + (1+q)^2} \right]. \quad (3.53)$$

Dengan mengganti

$$x^* = \frac{-(1+q) + \Delta_1}{2mp}, \quad \text{dimana } \Delta_1 = \sqrt{(1+q)^2 - 4mp(m-A)},$$

ke dalam persamaan (3.53), dapat diperoleh

$$mS_1 = -\frac{\Delta_1}{2mp} \left( (1+q)\Delta_1 - 2Amp - (1+q)^2 \right). \quad (3.54)$$

Jika kedua ruas dikalikan dengan  $\frac{1}{m}$ , maka persamaan (3.54) dapat dituliskan menjadi

$$\begin{aligned} S_1 &= -\frac{\Delta_1}{2m^2 p} \left( (1+q)\Delta_1 - 2Amp - (1+q)^2 \right) \\ S_1 &= \frac{(1+q)\Delta_1}{2m^2 p} \left( -\Delta_1 + \frac{2Amp}{1+q} + (1+q) \right) \\ &= \frac{(1+q)\Delta_1}{2m^2 p} \left( 1+q + \frac{2Amp}{1+q} - \Delta_1 \right). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Karena

$$\begin{aligned} \left( 1+q + \frac{2mpA}{1+q} \right)^2 - \Delta_1^2 &= (1+q)^2 + \frac{4m^2 p^2 A^2}{(1+q)^2} - \left( (1+q)^2 - 4m^2 p \right) \\ &= \frac{4m^2 p^2 A^2}{(1+q)^2} + 4m^2 p > 0, \end{aligned}$$

maka  $S_1 > 0$  sehingga  $\det(J_1) > 0$  dan berdasarkan Teorema 2.1, titik  $(x^*, y^*)$  adalah sebuah *node* atau *focus* atau *center*.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa untuk  $m-A < 0$  ada titik kesetimbangan endemik  $(x^*, y^*)$  sistem (3.25) yang stabil, yang ditunjukkan dengan teorema berikut.

**Teorema 3.4** Misalkan  $m-A < 0$ , maka ada titik kesetimbangan endemik  $(x^*, y^*)$  sistem (3.25) yang stabil.

**Bukti.** Berdasarkan Teorema 2.1 kondisi 2 dan 3, kestabilan titik kesetimbangan ditentukan oleh trace matriks Jacobinya. Oleh karena itu, untuk sistem (3.25) kestabilan  $(x^*, y^*)$  ditentukan oleh  $tr(J_1)$ , yaitu

$$\begin{aligned}
 tr(J_1) &= J_{11} + J_{22} \\
 &= \frac{x^* (px^{*2} + 2pqx^{*2} - 2Ap x^* - 1)}{(1 + px^{*2})^2} - 1 \\
 &= \frac{x^* (px^{*2} + 2pqx^{*2} - 2Ap x^* - 1) - (1 + px^{*2})^2}{(1 + px^{*2})^2} \\
 &= \frac{px^{*3} + 2pqx^{*3} - 2Ap x^{*2} - x^* - 1 - 2px^{*2} - p^2 x^{*4}}{(1 + px^{*2})^2} \\
 tr(J_1) &= \frac{-p^2 x^{*4} + (1 + 2q)px^{*3} - 2(1 + A)px^{*2} - x^* - 1}{(1 + px^{*2})^2} \quad (3.56)
 \end{aligned}$$

dan nilai  $tr(J_1)$  ditentukan oleh

$$S_2 = -p^2 x^{*4} + (1 + 2q)px^{*3} - 2(1 + A)px^{*2} - x^* - 1. \quad (3.57)$$

Akan ditunjukkan bahwa  $S_2 \neq 0$ . Sebagai bukti, yaitu dengan mensubstitusikan persamaan (3.52) ke persamaan (3.57) dapat diperoleh

$$\begin{aligned}
 S_2 &= -p^2 x^{*4} + (1 + 2q)px^{*3} - 2(1 + A)px^{*2} - x^* - 1 \\
 &= x^{*2} \left( -p^2 x^{*2} + (1 + 2q)px^* - 2(1 + A)p \right) - x^* - 1 \\
 &= \left( -\frac{(1 + q)x^* + (m - A)}{mp} \right) \left( -p^2 \left( -\frac{(1 + q)x^* + (m - A)}{mp} \right) \right) + \\
 &\quad \left( -\frac{(1 + q)x^* + (m - A)}{mp} \right) \left( (1 + 2q)px^* - 2(1 + A)p \right) - x^* - 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_2 &= -p^2 \frac{\left((1+q)x^* + (m-A)\right)^2}{m^2 p^2} + (1+2q)px^* \left(-\frac{(1+q)x^*}{mp}\right) + \\
&\quad (1+2q)px^* \left(-\frac{(m-A)}{mp}\right) - 2(1+A)p \left(-\frac{(1+q)x^* + (m-A)}{mp}\right) - \\
&\quad x^* - 1 \\
&= \frac{-(1+q)^2 x^{*2} - 2(1+q)(m-A)x^* - (m-A)^2}{m^2} + \\
&\quad \frac{-(1+q)(1+2q)x^{*2} - (1+2q)(m-A)x^*}{m} + \\
&\quad \frac{2(1+q)(1+A)x^* + 2(1+A)(m-A)}{m} - x^* - 1. \tag{3.58}
\end{aligned}$$

Jika persamaan (3.58) dikalikan dengan  $m^2$ , maka diperoleh

$$\begin{aligned}
m^2 S_2 &= -(1+q)^2 x^{*2} - 2(1+q)(m-A)x^* - (m-A)^2 - \\
&\quad (1+q)(1+2q)mx^{*2} - (1+2q)(m-A)mx^* + \\
&\quad 2(1+q)(1+A)mx^* + 2(1+A)(m-A)m - m^2 x^* - m^2 \\
&= -\left[(1+q)^2 + (1+q)(1+2q)m\right] x^{*2} + \\
&\quad \left[-2(1+q)(m-A) - (1+2q)(m-A)m + \right. \\
&\quad \left. 2(1+q)(1+A)m - m^2\right] x^* + \\
&\quad \left[-(m-A)^2 + 2(1+A)(m-A)m - m^2\right] \\
&= -\left[(1+q)^2 + (1+q)(1+2q)m\right] \left(-\frac{(1+q)x^* + (m-A)}{mp}\right) + \\
&\quad \left[-2(1+q)m + 2(1+q)A + -(1+2q)m^2 + \right. \\
&\quad \left. (1+2q)Am + 2(1+q)m + 2(1+q)Am - m^2\right] x^* + \\
&\quad \left[-((m-A) - 2(1+A)m)(m-A) - m^2\right]
\end{aligned}$$

$$m^2 S_2 = \frac{\left[ (1+q)^3 x^* + (1+q)^2 (m-A) + (1+q)^2 (1+2q)mx^* + (1+q)(1+2q)(m^2 - Am) \right]}{mp} + \left[ 2(1+q)A - (2+2q)m^2 + (3+4q)Am \right] x^* + \left[ -(-m-A-2Am)(m-A) - m^2 \right]. \quad (3.59)$$

Selanjutnya persamaan (3.59) dikalikan dengan  $mp$ , sehingga persamaan (3.59) menjadi

$$m^3 p S_2 = (B_1 A + B_2) x^* + (B_3 A + B_4) \quad (3.60)$$

dimana

$$\begin{aligned} B_1 &= mp(2 + 3m + 2q + 4mq), \\ B_2 &= (1+q) \left[ (1+q)^2 + m(1+q)(1+2q) - 2m^3 p \right], \\ B_3 &= -(1+q)^2 - m(1+q)(1+2q) + 2m^3 p, \\ B_4 &= m \left[ (1+q)^2 + m(1+q)(1+2q) - p(1+2m)A^2 \right]. \end{aligned}$$

Ketika  $m-A < 0$ , diketahui bahwa  $B_1 A + B_2 > 0$  (bukti pada Lampiran 3).

Untuk menunjukkan bahwa  $S_2 \neq 0$ , dimisalkan

$$\xi = mp x^{*2} + (1+q)x^* + m - A$$

dan mengalikan  $(B_1 A + B_2)^2$  dengan  $\xi$  sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} (B_1 A + B_2)^2 \xi &= (B_1 A + B_2)^2 \left[ mp x^{*2} + (1+q)x^* + m - A \right] \\ &= (B_1 A + B_2)^2 mp x^{*2} + (B_1 A + B_2)^2 (1+q)x^* + (B_1 A + B_2)^2 (m - A). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Berdasarkan persamaan (3.60), dapat diperoleh

$$x^* = \frac{m^3 p S_2 - (B_3 A + B_4)}{(B_1 A + B_2)}. \quad (3.62)$$

Jika persamaan (3.62) disubstitusikan ke persamaan (3.61), maka persamaan (3.61) dapat dituliskan menjadi

$$(B_1 A + B_2)^2 \xi = m^3 p S_2 P + S_3. \quad (3.63)$$

dimana  $P$  adalah polinomial dari  $x^*$  yaitu

$$P = mp(B_1A + B_2)x^* - mp(B_3A + B_4) + (1+q)(B_1A + B_2) \quad (3.64)$$

dan

$$S_3 = mp(B_3A + B_4)^2 - (1+q)(B_1A + B_2)(B_3A + B_4) + (B_1A + B_2)^2(m - A). \quad (3.65)$$

Berdasarkan pembahasan sebelumnya, diketahui bahwa  $B_1A + B_2 > 0$  dan untuk mengetahui nilai  $S_3$  akan diselidiki nilai  $B_3A + B_4$ , yaitu

$$\begin{aligned} B_3A + B_4 &= \left[ -(1+q)^2 - m(1+q)(1+2q) + 2m^3p \right] A + \\ &\quad m \left[ (1+q)^2 + m(1+q)(1+2q) - p(1+2m)A^2 \right] \\ &= -A \left[ (1+q)^2 + m(1+q)(1+2q) - 2m^3p \right] + \\ &\quad m \left[ (1+q)^2 + m(1+q)(1+2q) - p(1+2m)A^2 \right] \\ &= (m - A) \left[ (1+q)^2 + m(1+q)(1+2q) \right] + \\ &\quad 2Am^3p - A^2mp(1+2m) \\ &= (m - A) \left[ (1+q)^2 + m(1+q)(1+2q) \right] + \\ &\quad 2Am^3p - A^2mp - 2A^2m^2p \\ &= (m - A) \left[ (1+q)^2 + m(1+q)(1+2q) \right] + \\ &\quad 2Am^2p(m - A) - A^2mp \\ B_3A + B_4 &= (m - A) \left[ (1+q)^2 + m(1+q)(1+2q) + 2Am^2p \right] - A^2mp. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Dari persamaan (3.66) dapat diketahui bahwa nilai  $B_3A + B_4$  tergantung pada nilai  $m - A$ .

Diasumsikan bahwa  $S_2 = 0$ . Karena  $\xi = 0$  maka  $S_3 = 0$ . Namun ketika  $m - A < 0$ , diperoleh  $S_3 > 0$  (dengan mensubstitusikan persamaan (3.66) ke persamaan (3.65)). Oleh karena itu,  $S_2 \neq 0$  untuk setiap nilai positif dari parameter  $p$ ,  $q$ , dan  $A$  sehingga  $tr(J_1) \neq 0$ .

Jadi, jika  $m - A < 0$  maka tidak mengubah kestabilan  $(x^*, y^*)$ . Jika diambil  $m = 1$ ,  $A = 2$ ,  $p = 1$ ,  $q = 1$ , maka  $x^* = -1 + \sqrt{2}$ ,  $y^* = -1 + \sqrt{2}$ ,  $tr(J_1) = -1.64645 < 0$ . Dengan kontinuitas  $tr(J_1)$  pada parameter, diketahui bahwa  $tr(J_1) < 0$  untuk  $m - A < 0$ .

Jadi, untuk  $m - A < 0$  diketahui bahwa  $R_0 > 1$  karena  $R_0 = \frac{A}{m}$  (lihat persamaan (3.48)) diperoleh nilai  $\det(J_1) > 0$  dan  $tr(J_1) < 0$ . Sesuai dengan Teorema 2.1 kondisi 2 dan 3, dapat disimpulkan bahwa jenis kestabilan titik kesetimbangan endemik  $(x^*, y^*)$  adalah stabil, namun karena sistem (3.21) tidak memiliki orbit periodik (lihat Teorema 3.2) maka titik kesetimbangan endemik  $(x^*, y^*)$  stabil secara global.

Berdasarkan uraian Teorema 3.2, Teorema 3.3, dan Teorema 3.4, sistem dinamik (3.4) mempunyai sifat-sifat seperti pada Teorema 3.5.

**Teorema 3.5** Jika  $R_0$  didefinisikan oleh (3.48) maka diperoleh hasil sebagai berikut:

1. Jika  $R_0 < 1$ , maka sistem (3.4) memiliki titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0 = (b/f, 0, 0)$  yang stabil secara global pada oktan pertama.
2. Jika  $R_0 = 1$ , maka sistem (3.4) memiliki titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0 = (b/f, 0, 0)$  dengan jenis kestabilan *saddle-node*.
3. Jika  $R_0 > 1$ , maka sistem (3.4) memiliki dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0 = (b/f, 0, 0)$  dan titik kesetimbangan endemik  $E^* = (S^*, I^*, R^*)$ . Titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0$  tidak stabil dan titik kesetimbangan endemik  $E^*$  adalah stabil secara global pada oktan pertama.

### 3.4. Angka Reproduksi Dasar

Dari analisis kestabilan titik kesetimbangan, dapat disimpulkan bahwa pada saat  $R_0 \leq 1$ , populasi terbebas dari penyakit, sedangkan pada saat  $R_0 > 1$ , terjadi wabah penyakit dalam suatu populasi. Dengan demikian,  $R_0$  disebut sebagai angka reproduksi dasar, yaitu suatu angka yang mempengaruhi adanya penyebaran penyakit dalam suatu populasi.

### 3.5. Simulasi Numerik

Dalam skripsi ini dibahas model epidemik SIRS dengan mempertimbangkan tingkat kejadian infeksi nonmonoton yang didefinisikan oleh fungsi  $g(I) = kI/(1 + \alpha I^2)$ . Tingkat kejadian infeksi nonmonoton adalah tingkat kejadian infeksi penyakit yang meningkat ketika jumlah individu terinfeksi kecil dan menurun ketika jumlah individu terinfeksi besar. Tingkat kejadian tersebut dapat digunakan untuk menafsirkan pengaruh psikologis masyarakat terhadap penyebaran penyakit, yaitu banyaknya kontak yang efektif antara individu terinfeksi dan individu rentan menurun pada tingkat infeksi yang tinggi, karena karantina individu terinfeksi atau tindakan perlindungan oleh individu rentan. Sebagai contoh, yaitu wabah penyakit SARS (*Severe Acute Respiratory Syndrom*) memiliki pengaruh psikologis pada masyarakat umum.

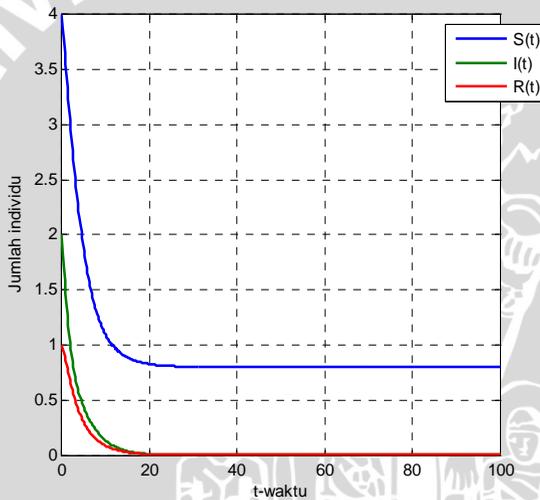
Setelah melakukan analisis global model epidemik SIRS dengan tingkat kejadian infeksi nonmonoton dan mempelajari keberadaan dan kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik, dilakukan simulasi numerik model epidemik SIRS yang ditunjukkan oleh sistem (3.4) dengan metode Runge Kutta orde empat menggunakan *software* Matlab 7.0.

#### 3.5.1. Simulasi Numerik untuk $R_0 \leq 1$

Berdasarkan pembahasan sebelumnya, ketika  $R_0 \leq 1$  sistem (3.4) memiliki titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0 = (b/f, 0, 0)$  yang stabil. Berikut ini dilakukan simulasi numerik untuk titik kesetimbangan ketika  $R_0 < 1$  dan  $R_0 = 1$ .

### 3.5.1.1. Simulasi Numerik untuk $R_0 < 1$

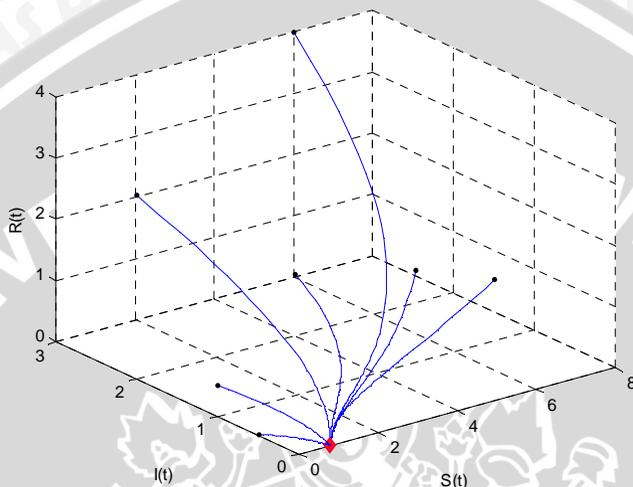
Untuk  $R_0 < 1$ , diperoleh satu titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit. Dalam simulasi ini digunakan parameter  $b=0.2$ ,  $f=0.25$ ,  $k=0.2$ ,  $\alpha=4.0$ ,  $\gamma=0.3$ , dan  $\mu=0.2$  sehingga diperoleh  $R_0=0.36 < 1$  dan titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0=(0.8,0,0)$ . Grafik pada Gambar 3.4 menunjukkan bahwa simulasi numerik konvergen ke  $E_0$ , yang menunjukkan bahwa titik kesetimbangan  $E_0$  adalah stabil, sehingga tidak ada infeksi penyakit.



**Gambar 3.4.** Grafik  $S$ ,  $I$ , dan  $R$  terhadap  $t$  hasil simulasi numerik untuk  $R_0=0.36 < 1$ .  $(S, I, R)$  menuju titik  $E_0 = (0.8, 0, 0)$ .

Berdasarkan Gambar 3.5, untuk beberapa syarat awal yang berbeda, semua orbit pada oktan pertama tertarik ke titik kesetimbangan bebas penyakit. Jadi, titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0$  untuk  $R_0 < 1$  stabil secara global pada oktan pertama sesuai dengan hasil analisis pada pembahasan sebelumnya.

Jika  $S$ ,  $I$ , dan  $R$  dijumlahkan, maka diperoleh hasil yang mendekati nilai limitnya yaitu  $b/f = 0.2/0.25 = 0.8$  sesuai dengan Lemma 3.1.

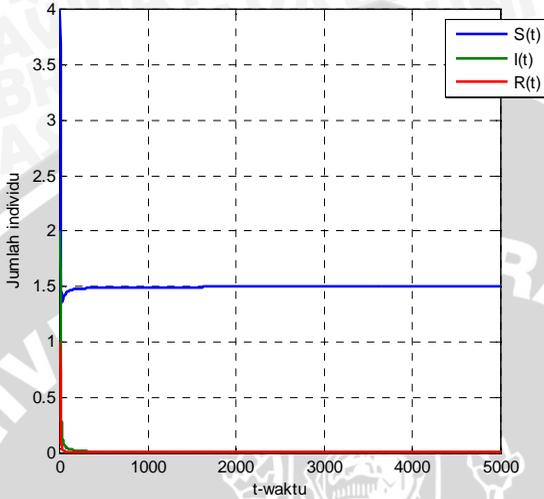


**Gambar 3.5.** Potret phase  $(S, I, R)$  untuk  $R_0 = 0.36 < 1$ , dengan beberapa nilai awal yang berbeda. Semua orbit menuju titik  $E_0 = (0.8, 0, 0)$ .

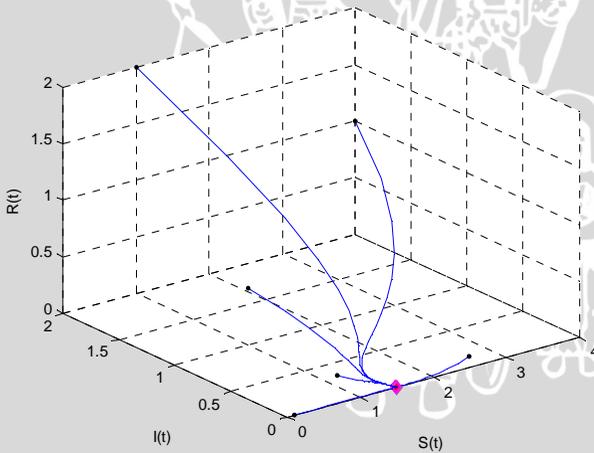
### 3.5.1.2. Simulasi Numerik untuk $R_0 = 1$

Untuk  $R_0 = 1$ , diperoleh satu titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit. Dalam simulasi ini digunakan parameter  $b = 0.3$ ,  $f = 0.2$ ,  $k = 0.2$ ,  $\alpha = 4.0$ ,  $\gamma = 0.3$ , dan  $\mu = 0.1$  sehingga diperoleh  $R_0 = 1$  dan titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0 = (1.5, 0, 0)$ . Grafik pada Gambar 3.6 menunjukkan bahwa simulasi numerik konvergen ke  $E_0$ , yang menunjukkan bahwa titik kesetimbangan  $E_0$  adalah stabil, sehingga tidak ada infeksi penyakit.

Berdasarkan Gambar 3.7, untuk beberapa syarat awal yang berbeda, semua orbit pada oktan pertama tertarik ke titik kesetimbangan bebas penyakit. Jadi, titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0$  untuk  $R_0 = 1$  stabil secara global pada oktan pertama dengan parameter-parameter tersebut.



**Gambar 3.6.** Grafik  $S$ ,  $I$ , dan  $R$  terhadap  $t$  hasil simulasi numerik untuk  $R_0 = 1$ .  $(S, I, R)$  menuju titik  $E_0 = (1.5, 0, 0)$ .

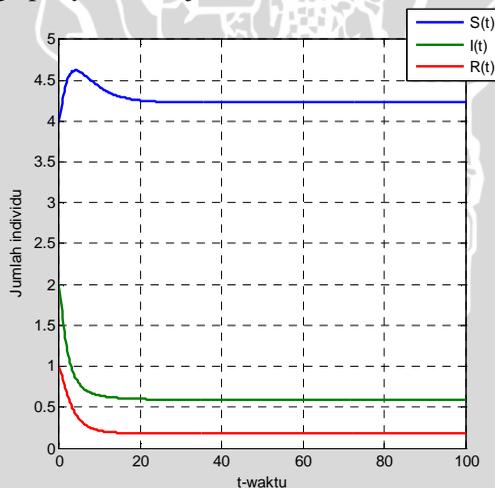


**Gambar 3.7.** Potret phase  $(S, I, R)$  untuk  $R_0 = 1$ , dengan beberapa nilai awal yang berbeda. Semua orbit menuju  $E_0 = (1.5, 0, 0)$ .

Jika  $S$ ,  $I$ , dan  $R$  dijumlahkan, maka diperoleh hasil yang mendekati nilai limitnya yaitu  $b/f = 0.3/0.2 = 1.5$  sesuai dengan Lemma 3.1.

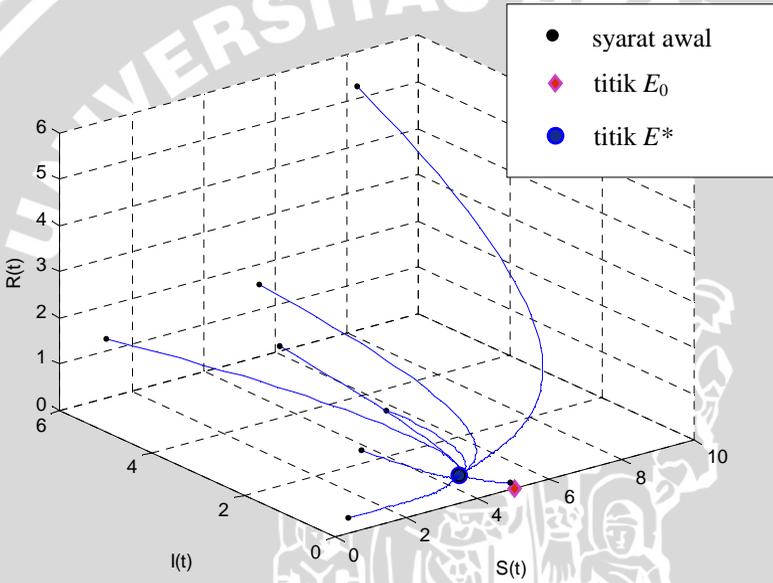
### 3.5.2. Simulasi Numerik untuk $R_0 > 1$

Untuk  $R_0 > 1$ , sistem (3.4) memiliki dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0 = (b/f, 0, 0)$  dan titik kesetimbangan endemik  $E^* = (S^*, I^*, R^*)$ . Berikut adalah simulasi numerik untuk  $R_0 > 1$  menggunakan parameter  $b = 1.0$ ,  $f = 0.2$ ,  $k = 0.2$ ,  $\alpha = 4.0$ ,  $\gamma = 0.3$ , dan  $\mu = 0.15$  sehingga diperoleh  $R_0 = 2.86 > 1$ , titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0 = (5.0, 0, 0)$  untuk syarat awal  $S \geq 0, I = 0, R \geq 0$ , dan titik kesetimbangan endemik  $E^* = (4.2267, 0.5948, 0.1784)$  untuk syarat awal  $S \geq 0, I \neq 0, R \geq 0$ . Untuk syarat awal  $S \geq 0, I \neq 0, R \geq 0$ , grafik pada Gambar 3.8 menunjukkan bahwa simulasi numerik konvergen ke  $E^*$ , yang menunjukkan bahwa titik kesetimbangan endemik  $E^*$  stabil, sehingga penyakit menjadi endemik.



**Gambar 3.8.** Grafik  $S$ ,  $I$ , dan  $R$  terhadap  $t$  hasil simulasi numerik untuk  $R_0 = 2.86 > 1$ , dengan syarat awal  $(4, 2, 1)$ .  $(S, I, R)$  menuju titik  $E^* = (4.2267, 0.5948, 0.1784)$ .

Berdasarkan Gambar 3.9, dapat dilihat bahwa untuk beberapa syarat awal yang berbeda, semua orbit pada oktan pertama tertarik ke titik kesetimbangan endemik. Jika diambil titik yang dekat dengan titik kesetimbangan bebas penyakit, yaitu  $(5.0, 0.1, 0.1)$ , maka orbit tertarik ke titik kesetimbangan endemik  $E^*$ . Hal ini membuktikan bahwa titik kesetimbangan endemik stabil secara global pada oktan pertama, sedangkan titik kesetimbangan bebas penyakit tidak stabil sesuai dengan hasil analisis pada pembahasan sebelumnya.

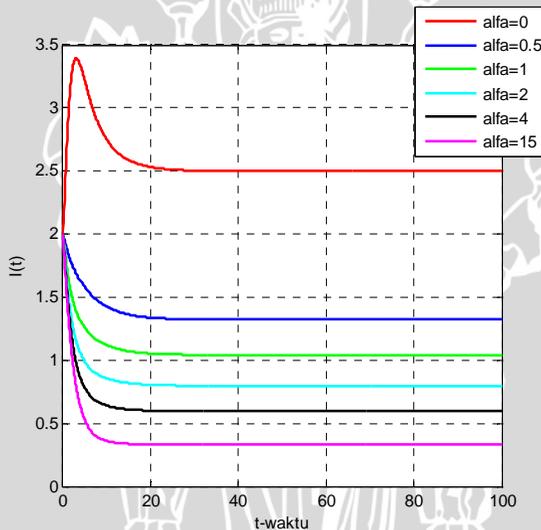


**Gambar 3.9.** Potret phase  $(S, I, R)$  untuk  $R_0 = 2.86 > 1$ , dengan beberapa nilai awal yang berbeda. Semua orbit menuju ke  $E^* = (4.2267, 0.5948, 0.1784)$ , bahkan untuk titik yang dekat dengan titik  $E_0 = (5.0, 0, 0)$ .

Jika nilai  $S$ ,  $I$ , dan  $R$  pada titik kesetimbangan bebas penyakit atau pada titik kesetimbangan endemik dijumlahkan maka hasilnya mendekati nilai limitnya yaitu  $b/f = 1/0.2 = 5$  sesuai dengan Lemma 3.1.

### 3.5.3. Simulasi Numerik untuk Pengaruh Parameter $\alpha$ pada Individu Terinfeksi

Untuk mengetahui pengaruh parameter  $\alpha$  pada individu terinfeksi, berikut dilakukan simulasi numerik menggunakan parameter  $b=1.0$ ,  $f=0.2$ ,  $k=0.2$ ,  $\gamma=0.3$ , dan  $\mu=0.15$  dengan nilai awal  $I=2$  dan beberapa nilai parameter  $\alpha$  yang berbeda yaitu 0, 0.5, 1, 2, 4, dan 15. Dari Gambar 3.10, dapat dilihat bahwa untuk  $\alpha=0$  jumlah individu terinfeksi awalnya meningkat kemudian turun dan konstan menuju nilai tertentu, sehingga jumlah individu terinfeksi tidak pernah habis. Akan tetapi, jika nilai  $\alpha$  positif dan  $\alpha \neq 0$ , maka jumlah individu terinfeksi menurun. Untuk nilai  $\alpha$  yang semakin besar (menuju tak hingga), menyebabkan jumlah individu terinfeksi semakin menurun (menuju nol).



Gambar 3.10. Variasi  $I^*$  untuk beberapa nilai parameter  $\alpha$ .

### 3.6. Interpretasi Hasil

Berdasarkan simulasi sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa untuk  $R_0 \leq 1$  titik kesetimbangan bebas penyakit stabil secara global pada oktan pertama (lihat Gambar 3.5 dan Gambar 3.7) dan untuk  $R_0 > 1$ , titik kesetimbangan bebas penyakit tidak stabil dan titik

kesetimbangan endemik stabil secara global pada oktan pertama (lihat Gambar 3.9). Secara Biologi, hal ini menunjukkan bahwa jika konstanta proporsionalitas (infeksi) atau tingkat perekrutan penduduk cukup besar, tingkat perpindahan penduduk (tingkat kematian individu ditambah tingkat kesembuhan individu) cukup kecil, dan  $R_0 > 1$ , maka penyakit terus berlanjut. Di sisi lain, jika konstanta proporsionalitas (infeksi) atau tingkat perekrutan penduduk cukup kecil, tingkat perpindahan penduduk cukup besar, dan  $R_0 < 1$ , maka tidak ada infeksi penyakit. Di lain pihak, jika konstanta proporsionalitas (infeksi) atau tingkat perekrutan penduduk sama dengan tingkat perpindahan penduduk, yaitu cukup kecil, dan  $R_0 = 1$ , maka tidak ada infeksi penyakit. Tindakan pengendalian dan kebijakan, seperti pemeriksaan perbatasan, pemakaian masker, karantina, dan isolasi, telah terbukti membantu mengurangi tingkat infeksi penyakit dan pemberantasan SARS.

Parameter  $\alpha$  menggambarkan pengaruh psikologis masyarakat terhadap infeksi penyakit pada saat individu terinfeksi meningkat. Meskipun jumlah  $R_0$  tidak bergantung pada  $\alpha$  secara eksplisit, simulasi numerik menunjukkan bahwa ketika penyakit tersebut mewabah, nilai  $I^*$  menurun dengan meningkatnya  $\alpha$  (lihat Gambar 3.10). Sesuai dengan keadaan setimbang (3.16), dapat dilihat bahwa  $I^*$  mendekati nol ketika  $\alpha$  menuju tak berhingga.

## BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN

### 4.1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut

1. Dengan menggunakan model kompartemen, diperoleh model epidemik SIRS dengan tingkat kejadian infeksi nonmonoton yang merupakan sistem otonomus nonlinear dengan tiga variabel tak bebas  $S$ ,  $I$ , dan  $R$ , dan variabel bebas  $t$  dengan beberapa parameter yang mempengaruhi infeksi penyakit, seperti tingkat perekrutan, kematian alami, kekuatan infeksi, kesembuhan alami, dan pengaruh psikologis individu terhadap penyakit.
2. Model epidemik SIRS dengan tingkat kejadian infeksi nonmonoton mempunyai dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Berdasarkan hasil analisis, titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil global jika  $R_0 < 1$ , *saddle-node* jika  $R_0 = 1$ , dan tidak stabil jika  $R_0 > 1$ , sedangkan titik kesetimbangan endemik stabil global jika  $R_0 > 1$ .

### 4.2. Saran

Pada skripsi ini, dibahas model epidemik SIRS dengan tingkat kejadian infeksi nonmonoton yang dibatasi adanya migrasi hanya pada kelas  $S$  dan hanya mempertimbangkan parameter  $\alpha$  sebagai pengaruh psikologis perubahan perilaku individu rentan terhadap infeksi yang semakin besar. Untuk penelitian berikutnya disarankan meneliti adanya migrasi tidak hanya pada kelas  $S$  tetapi juga pada kelas lain, misalnya kelas  $I$ . Selain itu, disarankan meneliti pengaruh lain dalam tingkat kejadian infeksi nonmonoton, misalnya pengaruh pengobatan terhadap infeksi penyakit dengan memberikan imunisasi.

Dalam skripsi ini juga tidak dibahas dengan rinci mengenai jenis kestabilan *saddle-node*, sehingga untuk penelitian selanjutnya dapat dibahas mengenai jenis kestabilan *saddle-node* tersebut.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## DAFTAR PUSTAKA

- Boyce, W.E. dan R.C. DiPrima. 2001. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Seventh edition, John Willey & Sons, Inc. United State of America.
- Capasso, V. dan G. Serio. 1978. A Generalization of the Kermack-McKendrick Deterministic Epidemic Model, *Mathematical Biosciences*, No.42, 43-61.
- Chicone, C. 1999. *Ordinary Differential Equations with Applications*. Springer-Verlag. New York.
- Flores, J.D. 2011. *Mathematical Modeling*. Department of Mathematical Sciences. The University of South Dakota.
- Hethcote, H.W. dan P.V.D. Driessche. 1990. Some Epidemiological Models with Nonlinear Incidence, DMS-528-IR.
- Perko, L. 2001. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Third edition, Springer-Verlag. New York.
- Robinson, J.C. 2004. *An Introduction to Ordinary Differential Equations*. Cambridge University Press. New York.
- Xiao, D. dan S. Ruan. 2007. Global Analysis of an Epidemic Model with Nonmonotone Incidence Rate, *Mathematical Biosciences*, No.208, 419-429.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## LAMPIRAN

### Lampiran 1. Penjabaran Persamaan (3.39a) Menjadi Persamaan (3.40)

$$\begin{aligned}
 \frac{dF_1}{dx} &= \frac{A(1+px^2) - Ax(2px)}{(1+px^2)^2} - \frac{2x(1+px^2) - x^2(2px)}{(1+px^2)^2} - \\
 &\quad \frac{y(1+px^2) - xy(2px)}{(1+px^2)^2} - m \\
 &= \frac{A}{1+px^2} - \frac{2Apx^2}{(1+px^2)^2} - \frac{2x}{1+px^2} + \frac{2px^3}{(1+px^2)^2} - \frac{y}{1+px^2} + \\
 &\quad \frac{2px^2y}{(1+px^2)^2} - m \\
 &= \frac{A-2x-y}{1+px^2} - \frac{2Apx^2-2px^3-2px^2y}{(1+px^2)^2} - m \\
 &= \frac{A-2x-y-m-mpx^2}{1+px^2} - \frac{2Apx^2-2px^3-2px^2y}{(1+px^2)^2} \\
 &= \frac{A-m-y-2x-mpx^2}{1+px^2} - \frac{2Apx^2-2px^3-2px^2y}{(1+px^2)^2} \\
 &= \frac{A-m-y-x-mpx^2}{1+px^2} - \frac{2Apx^2-2px^3-2px^2y}{(1+px^2)^2} - \frac{x}{1+px^2} \\
 &= \frac{A-m-y-x-mpx^2}{1+px^2} - \frac{2Apx^2-2px^3-2px^2y+x+px^3}{(1+px^2)^2} \\
 \frac{dF_1}{dx} &= \frac{A-m-y-x-mpx^2}{1+px^2} - \frac{2Apx^2-px^3-2px^2y+x}{(1+px^2)^2}. \quad (3.40)
 \end{aligned}$$

**Lampiran 2.** Penjabaran Persamaan (3.53) Menjadi Persamaan (3.54)

$$\begin{aligned}
 mS_1 &= 2Amp + (1+q)^2 \left[ x^* + \frac{(1+q)(2m-A)}{2Amp + (1+q)^2} \right] \\
 &= 2Amp + (1+q)^2 \left[ \frac{-(1+q) + \Delta_1}{2mp} + \frac{(1+q)(2m-A)}{2Amp + (1+q)^2} \right] \\
 &= \frac{(2Amp + (1+q)^2)(-(1+q) + \Delta_1)}{2mp} + (1+q)(2m-A) \\
 &= \frac{-2(1+q)Amp - (1+q)^3 + (2Amp + (1+q)^2)\Delta_1}{2mp} + \\
 &\quad 2(1+q)m - (1+q)A \\
 &= \frac{-2(1+q)Amp - (1+q)^3 + (2Amp + (1+q)^2)\Delta_1}{2mp} \\
 &\quad + \frac{4(1+q)m^2p - 2(1+q)Amp}{2mp} \\
 &= \frac{-4(1+q)Amp - (1+q)^3 + (2Amp + (1+q)^2)\Delta_1}{2mp} + \frac{4(1+q)m^2p}{2mp} \\
 &= \frac{-(1+q)[4Amp - 4m^2p + (1+q)^2] + (2Amp + (1+q)^2)\Delta_1}{2mp} \\
 &= \frac{-(1+q)[(1+q)^2 - 4mp(m-A)] + (2Amp + (1+q)^2)\Delta_1}{2mp} \\
 &= \frac{-(1+q)\Delta_1^2 + (2Amp + (1+q)^2)\Delta_1}{2mp} \\
 mS_1 &= -\frac{\Delta_1}{2mp} \left( (1+q)\Delta_1 - 2Amp - (1+q)^2 \right). \tag{3.54}
 \end{aligned}$$

**Lampiran 3.** Penjabaran Persamaan (3.59) Menjadi Persamaan (3.60)

$$\begin{aligned}
 m^3 p S_2 &= (1+q)^3 x^* + (1+q)^2(m-A) + (1+q)(1+2q)(m^2 - Am) + \\
 &\quad (1+q)^2(1+2q)mx^* + \left[ \frac{2(1+q)Amp - (2+2q)m^3 p + (3+4q)Am^2 p}{(1+q)^3 + (1+q)^2(1+2q)m} \right] x^* \\
 &\quad + \left[ \frac{-(-m-A-2Am)(m^2 p - Amp) - m^3 p}{(1+q)^2(m-A) + (1+q)(1+2q)(m^2 - Am)} \right] \\
 &= \left[ \frac{2(1+q)Amp - 2(1+q)m^3 p + (3+4q)Am^2 p + (-m-A-2Am)(m^2 p - Amp) - m^3 p}{(1+q)^3 + (1+q)^2(1+2q)m} \right] x^* + \\
 &= \left[ \frac{2(1+q)Amp - 2(1+q)m^3 p + (3+4q)Am^2 p + m^3 p + Am^2 p + 2Am^3 p - Am^2 p - A^2 mp - 2A^2 m^2 p - m^3 p + (1+q)^2 m - (1+q)^2 A + (1+q)(1+2q)m^2 - (1+q)(1+2q)Am}{(1+q)^3 + (1+q)^2(1+2q)m} \right] x^* + \\
 &= \left[ \frac{(2(1+q)Amp + (3+4q)Am^2 p) + (2Am^3 p - (1+q)^2 A - (1+q)(1+2q)Am) + ((1+q)^2 m + (1+q)(1+2q)m^2 - A^2 mp - 2A^2 m^2 p)}{(1+q)((1+q)^2 + (1+q)(1+2q)m - 2m^3 p)} \right] x^* + \\
 &= \left[ \frac{A(- (1+q)^2 - (1+q)(1+2q)m + 2m^3 p) + m((1+q)^2 + (1+q)(1+2q)m - A^2 p(1+2m))}{(1+q)((1+q)^2 + (1+q)(1+2q)m - 2m^3 p)} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \begin{array}{l} mp(2+3m+2q+4mq)A + \\ (1+q)\left((1+q)^2 + (1+q)(1+2q)m - 2m^3p\right) \end{array} \right] x^* + \\
&\left[ \begin{array}{l} \left(- (1+q)^2 - m(1+q)(1+2q) + 2m^3p\right)A + \\ m\left((1+q)^2 + m(1+q)(1+2q) - p(1+2m)A^2\right) \end{array} \right] \\
m^3 p S_2 &= (B_1 A + B_2) x^* + (B_3 A + B_4) \quad (3.60)
\end{aligned}$$



**Lampiran 4.** Pembuktian  $B_1A + B_2 > 0$  Ketika  $m - A < 0$

Berdasarkan persamaan (3.30) diperoleh

$$A = m + (1 + q)x + mpx^2$$

sehingga

$$\begin{aligned} B_1A + B_2 &= mp(2 + 3m + 2q + 4mq)A + \\ &\quad (1 + q) \left[ (1 + q)^2 + m(1 + q)(1 + 2q) - 2m^3 p \right] \\ &= mp(2 + 3m + 2q + 4mq) \left( m + (1 + q)x + mpx^2 \right) + \\ &\quad (1 + q) \left[ (1 + q)^2 + m(1 + q)(1 + 2q) - 2m^3 p \right] \\ &= (2 + 3m + 2q + 4mq) \left( m^2 p + (1 + q)mpx + m^2 p^2 x^2 \right) + \\ &\quad (1 + q) \left[ (1 + q)^2 + m(1 + q)(1 + 2q) - 2m^3 p \right] \\ &= (2 + 3m + 2q + 4mq)m^2 p + \\ &\quad (2 + 3m + 2q + 4mq) \left[ (1 + q)mpx + m^2 p^2 x^2 \right] + \\ &\quad (1 + q) \left[ (1 + q)^2 + m(1 + q)(1 + 2q) - 2m^3 p \right] \\ &= (2 + m + 2q + 2mq + 2m + 2mq)m^2 p + \\ &\quad (2 + 3m + 2q + 4mq) \left[ (1 + q)mpx + m^2 p^2 x^2 \right] + \\ &\quad (1 + q) \left[ (1 + q)^2 + m(1 + q)(1 + 2q) - 2m^3 p \right] \\ &= (2 + m + 2q + 2mq)m^2 p + (2m + 2mq)m^2 p + \\ &\quad (2 + 3m + 2q + 4mq) \left[ (1 + q)mpx + m^2 p^2 x^2 \right] + \\ &\quad (1 + q) \left[ (1 + q)^2 + m(1 + q)(1 + 2q) - 2m^3 p \right] \\ &= (2 + m + 2q + 2mq)m^2 p + 2(1 + q)m^3 p + \\ &\quad (2 + 3m + 2q + 4mq) \left[ (1 + q)mpx + m^2 p^2 x^2 \right] + \\ &\quad (1 + q) \left[ (1 + q)^2 + m(1 + q)(1 + 2q) \right] - 2(1 + q)m^3 p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_1A + B_2 &= (2 + m + 2q + 2mq)m^2p + \\
 & (2 + 3m + 2q + 4mq) \left[ (1 + q)m^2px + m^2p^2x^2 \right] + \\
 & (1 + q) \left[ (1 + q)^2 + m(1 + q)(1 + 2q) \right] > 0.
 \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa  $B_1A + B_2 > 0$ .

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



**Lampiran 5.** Penjabaran Persamaan (3.61) Menjadi Persamaan (3.63) dengan Menggunakan Persamaan (3.62)

$$\begin{aligned}
 (B_1A + B_2)^2 \xi &= (B_1A + B_2)^2 mp \left( \frac{m^3 pS_2 - (B_3A + B_4)}{(B_1A + B_2)} \right)^2 + \\
 &\quad (B_1A + B_2)^2 (1+q) \left( \frac{m^3 pS_2 - (B_3A + B_4)}{(B_1A + B_2)} \right) + \\
 &\quad (B_1A + B_2)^2 (m - A) \\
 &= (B_1A + B_2)^2 mp \frac{(m^3 pS_2 - (B_3A + B_4))^2}{(B_1A + B_2)^2} + \\
 &\quad (B_1A + B_2)^2 (1+q) \frac{(m^3 pS_2 - (B_3A + B_4))}{(B_1A + B_2)} + \\
 &\quad (B_1A + B_2)^2 (m - A) \\
 &= mp \left( m^3 pS_2 - (B_3A + B_4) \right)^2 + \\
 &\quad (B_1A + B_2)(1+q) \left( m^3 pS_2 - (B_3A + B_4) \right) + \\
 &\quad (B_1A + B_2)^2 (m - A) \\
 &= mp \left( (m^3 pS_2)^2 - 2m^3 pS_2 (B_3A + B_4) + (B_3A + B_4)^2 \right) + \\
 &\quad m^3 pS_2 (1+q)(B_1A + B_2) - (1+q)(B_1A + B_2)(B_3A + B_4) + \\
 &\quad (B_1A + B_2)^2 (m - A) \\
 &= mp(m^3 pS_2)^2 - 2m^4 p^2 S_2 (B_3A + B_4) + mp(B_3A + B_4)^2 + \\
 &\quad m^3 pS_2 (1+q)(B_1A + B_2) - (1+q)(B_1A + B_2)(B_3A + B_4) + \\
 &\quad (B_1A + B_2)^2 (m - A) \\
 &= m^3 pS_2 \left[ \frac{mp(m^3 pS_2) - 2mp(B_3A + B_4) +}{(1+q)(B_1A + B_2)} \right] + \\
 &\quad \left[ \frac{mp(B_3A + B_4)^2 - (1+q)(B_1A + B_2)(B_3A + B_4) +}{(B_1A + B_2)^2 (m - A)} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(B_1A + B_2)^2 \xi &= m^3 p S_2 \left[ \begin{aligned} &mp((B_1A + B_2)x^* + (B_3A + B_4)) - \\ &2mp(B_3A + B_4) + (1+q)(B_1A + B_2) \end{aligned} \right] + \\
&\left[ \begin{aligned} &mp(B_3A + B_4)^2 - (1+q)(B_1A + B_2)(B_3A + B_4) + \\ &(B_1A + B_2)^2(m - A) \end{aligned} \right] \\
&= m^3 p S_2 \left[ \begin{aligned} &mp(B_1A + B_2)x^* - mp(B_3A + B_4) + \\ &(1+q)(B_1A + B_2) \end{aligned} \right] + \\
&\left[ \begin{aligned} &mp(B_3A + B_4)^2 - (1+q)(B_1A + B_2)(B_3A + B_4) + \\ &(B_1A + B_2)^2(m - A) \end{aligned} \right] \\
(B_1A + B_2)^2 \xi &= m^3 p S_2 P + S_3. \tag{3.63}
\end{aligned}$$



**Lampiran 6.** *Listing Program* untuk Simulasi Numerik Titik Kesetimbangan pada Model Epidemik SIRS dengan Metode Runge Kutta Orde Empat Menggunakan *Software* Matlab 7.0

```

function dy=SIR(t,y);

b = 1;
f = 0.2;
k = 0.2;
alfa = 4;
gamma = 0.3;
miu = 0.15;

dy(1)=b-f*y(1)-
      k*y(1)*y(2)/(1+alfa*y(2)*y(2))+gamma*y(3);
dy(2)=k*y(1)*y(2)/(1+alfa*y(2)*y(2))-(f+miu)*y(2);
dy(3)=miu*y(2)-(f+gamma)*y(3);

function [T,Z]=rks4(SIR,a,b,Za,M)
h=(b-a)/M;
T=zeros(1,M+1);
Z=zeros(M+1,length(Za));
T=a:h:b;
Z(1,:)=Za;
for j=1:M
    k1=h*feval(SIR,T(j),Z(j,:));
    k2=h*feval(SIR,T(j)+h/2,Z(j,:)+k1/2);
    k3=h*feval(SIR,T(j)+h/2,Z(j,:)+k2/2);
    k4=h*feval(SIR,T(j)+h,Z(j,:)+k3);
    Z(j+1,:)=Z(j,:)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
end;

[t y]=rks4('SIR',0,100,[4 2 1],500)
figure(1);
plot(t,y,'linewidth',1.5);
hold on;

xlabel('t-waktu');
ylabel('Jumlah individu');
grid on
axis square

```

```
legend('S(t)', 'I(t)', 'R(t)');  
figure(2);  
plot3(y(:,1),y(:,2),y(:,3));  
hold on  
plot3(y(1,1),y(1,2),y(1,3),'k.');
```

```
plot3(y(500,1),y(500,2),y(500,3),'*r');  
hold off  
hold on  
xlabel('S(t)');  
ylabel('I(t)');  
zlabel('R(t)');  
grid on
```

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

