PELABELAN *SUPER EDGE-GRACEFUL* PADA GRAF *FAN* DAN GRAF *MULTI-LEVEL WHEEL*

SKRIPSI

Oleh:
MOHAMMAD KHOLIL
0410940038-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2009

PELABELAN *SUPER EDGE-GRACEFUL* PADA GRAF *FAN* DAN GRAF *MULTI-LEVEL WHEEL*

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh:
MOHAMMAD KHOLIL
0410940038-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2009

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

PELABELAN *SUPER EDGE-GRACEFUL* PADA GRAF *FAN* *DAN GRAF MULTI-LEVEL WHEEL*

Oleh :

MOHAMMAD KHOLIL

0410940038-94

Setelah dipertahankan didepan Majelis Penguji
pada Tanggal: 19 Maret 2009
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang matematika

Pembimbing I	**Pembimbing II**
Drs. Marsudi, M.S	**Prof. Dr. Agus Widodo**
NIP.131 759 585	**NIP. 131 281 894**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Agus Suryanto, M.Sc
NIP. 132 126 049

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	**:**	**Mohammad Kholil**
NIM	**:**	**0410940038-94**
Jurusan	**:**	**Matematika**
Penulis Skripsi berjudul	**:**	**Pelabelan *Super Edge-Graceful* Pada Graf *Fan* dan *Graf Multi-Level Wheel***

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. **Isi dari Skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Skripsi ini.**
2. **Apabila dikemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya akan bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 19 Maret 2009
Yang menyatakan,

Mohammad Kholil
NIM. 0410940038-94

PELABELAN *SUPER EDGE-GRACEFUL* PADA GRAF *FAN* DAN GRAF *MULTI-LEVEL WHEEL*

ABSTRAK

Pelabelan *super edge-graceful* adalah salah satu bagian dari pelabelan graf. Sebuah graf G (*V*,*E*) dengan orde $|V| = p$ dan orde $|E| = q$ disebut *super edge-graceful* jika terdapat fungsi *f* yang bijektif dari *E* ke $\left\{0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm \frac{q-1}{2}\right\}$ untuk *q* ganjil dan dari *E* ke $\left\{\pm 1, \pm 2, \cdots, \pm \frac{q}{2}\right\}$ untuk q genap sedemikian sehingga fungsi pelabelan titik f^* yang didefinisikan dengan jumlah dari garis-garis yang *incident* dengan suatu titik pada graf adalah bijektif dari *V* ke $\left\{0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm \frac{p-1}{2}\right\}$ untuk *p* ganjil dan dari *V* ke $\left\{\pm 1, \pm 2, \cdots, \pm \frac{p}{2}\right\}$ untuk *p* genap.

Graf *fan* dan graf *multi-level wheel* merupakan dua jenis dari graf. Pada skripsi ini, ditunjukkan bahwa graf *fan* dan graf *multi-level wheel* adalah *super edge-graceful*.

Kata kunci: Pelabelan graf, *super edge-graceful*, graf *fan*, graf *multi-level wheel*.

SUPER EDGE-GRACEFUL LABELING OF _FAN_ GRAPHS AND _MULTI-LEVEL WHEEL_ GRAPHS

ABSTRACT

Super edge-graceful labeling is one type of graph labeling. A graph *G*(*V*,*E*) of order $|V| = p$ and $|E| = q$ is called *super edge-graceful* if there exist bijection *f* from *E* to $\left\{0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm \frac{q-1}{2}\right\}$ where *q* is odd and from *E* to $\left\{\pm 1, \pm 2, \cdots, \pm \frac{q}{2}\right\}$ where *q* is even such that the induced vertex labelling f^* defined by sum of edges which are incident with a vertex is a bijection from *V* to $\left\{0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm \frac{p-1}{2}\right\}$ where *p* is odd and from *V* to $\left\{\pm 1, \pm 2, \cdots, \pm \frac{p}{2}\right\}$ where *p* is even.

Fan graph and *multi-level wheel* graph are two classes of graph. This minor thesis shows that *fan* graph and *multi-level wheel* graph are *super edge-graceful*.

Keyword: graph labeling, *super edge-graceful*, *fan* graph, *multi level wheel* graph.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahi robbil 'alamin, puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan karunianya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul "**Pelabelan *Super-Edge-Graceful* Pada Graf *Fan* dan Graf *Multi-Level Wheel***".

Selama penyusunan Skripsi ini, penulis menyadari tidak terlepas dari bantuan, bimbingan dan dorongan serta do'a restu dari berbagai pihak. Oleh karena itu dalam kesempatan yang baik ini, penulis mengucapkan rasa hormat dan terima kasih yang tulus sedalam-dalamnya kepada :

1. Drs. Marsudi, MS dan Prof. Dr. Agus Widodo selaku pembimbing I dan pembimbing II yang telah memberikan motivasi, arahan dan bimbingan dengan sabar kepada penulis selama kuliah dan Penyusunan skripsi ini.
2. Dra. Trisilowati, MSc selaku pembimbing akademik yang telah memberikan arahan dan bimbingan kepada penulis selama kuliah.
3. Dr. Agus Suryanto, M.Sc selaku ketua jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Brawijaya Malang.
4. Dr. Wuryansari Muharini K.,M.Si selaku Ketua Program Studi Matematika Universitas Brawijaya Malang.
5. Ummi tersayang atas do'a dan kasih sayang yang tiada henti demi kesuksesan putranya, juga Kakak-kakak dan adikku tercinta yang telah memberikan motivasi, inspirasi, nasehat, do'a, pengorbanan serta dukungan selama ini.
6. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannnya Skripsi ini yang tidak bisa penulis sebutkan satu-persatu.

Menyadari adanya keterbatasan pengetahuan, referensi dan pengalaman dan demi penyempurnaan skripsi ini, penulis mengharapkan kritik dan saran yang sifatnya membangun. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis maupun semua pihak yang membutuhkan.

Malang, 29 Februari 2009

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

HALAMAN JUDUL.. i
LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI.. iii
LEMBAR PERNYATAAN v
ABSTRAK.. vii
ABSTRACT ix
KATA PENGANTAR xi
DAFTAR ISI xiii
DAFTAR GAMBAR xv
DAFTAR LAMPIRAN xvii
DAFTAR SIMBOL xix

BAB I PENDAHULUAN 1
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 2
1.3 Batasan Masalah 2
1.4 Tujuan.. 2

BAB II TINJAUAN PUSTAKA 3
2.1 Konsep Dasar Graf 3
2.2 Istilah-Istilah Pada Graf 7
2.3 Jenis-Jenis Graf 9
2.3.1 Graf Nol (*Null Graph*) 9
2.3.2 Graf Terhubung (*Connected Graph*) 9
2.3.3 Graf Lengkap (*Complete Graph*).......................................10
2.3.4 Graf Lintasan (*Path Graph*).. 10
2.3.5 Graf teratur (*Regular Graph*)... 11
2.3.6 Graf *Bipartite* dan *bigraph* lengkap (*Complete Bigraf*).. 11
2.3.7 Graf *Cycle* (*Cycle Graph*)... 12
2.3.8 *Plane Graph* dan *Planar Graph* 12
2.4 Operasi pada graf 13
2.5 Fungsi 15
2.6 Operasi Modulo 16
2.7 Pelabelan pada Graf 16
2.8 Pelabelan Graceful, Edge-Graceful dan Super
Edge-Graceful 17

BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN **21**
3.1 Pelabelan *super edge-graceful* pada graf *fan* 21
3.2 Pelabelan *super edge-graceful* pada graf *multi-level wheel* .. 43

BAB IV PENUTUP **53**
4.1 Kesimpulan.. 53
4.2 Saran.. 53

DAFTAR PUSTAKA **55**
LAMPIRAN-LAMPIRAN **57**

DAFTAR GAMBAR

Halaman
Gambar 2.1 Graf G dengan 4 titik dan 5 garis 3
Gambar 2.2 Graf sedehana dan graf ganda 4
Gambar 2.3 *u adjacent v*, e_1 *incident u* dan *v* 4
Gambar 2.4 e_1 *adjacent* e_2 5
Gambar 2.5 Graf ganda 5
Gambar 2.6 Graf berlabel 6
Gambar 2.7 *G* isomorfik *G'* 7
Gambar 2.8 Graf dengan *walk* 7
Gambar 2.9 *Walk*, *path*, bukan *path* dan bukan *walk* 8
Gambar 2.10 *Trail* 8
Gambar 2.11 *Circuit* 9
Gambar 2.12 Graf nol 9
Gambar 2.13 (a) Terhubung (b) Tidak terhubung 10
Gambar 2.14 Graf lengkap dan bukan graf lengkap 10
Gambar 2.15 Graf lintasan P_3 dan P_4 11
Gambar 2.16 Graf dengan derajat *r* 11
Gambar 2.17 Graf *bipartite* dan $K_{3,3}$ 12
Gambar 2.18 *n-cycle* 12
Gambar 2.19 Graf planar dan graf bidang 13
Gambar 2.20 Gabungan G_1 dan G_2 13
Gambar 2.21 Join G_1 dan G_2 14
Gambar 2.22 Graf *fan* F_9 14
Gambar 2.23 Graf *m-level wheel* 15
Gambar 2.24 Graf berbobot 16
Gambar 2.25 Pelabelan titik 16
Gambar 2.26 Pelabelan garis 17
Gambar 2.27 Pelabelan graceful pada graf K_2, K_3, dan K_4 17
Gambar 2.28 Pelabelan edge-graceful pada graf K_4 18
Gambar 2.29 (a) *super edge-graceful* pada C_5 (b) *edge-graceful* pada C_5 19
Gambar 3.1 Graf F_{11} 36
Gambar 3.2 Pelabelan *super edge-graceful* untuk F_{11} 39
Gambar 3.3 Graf F_9 39
Gambar 3.4 Pelabelan *super edge-graceful* untuk F_9 41

Gambar 3.5 Graf F_4 42
Gambar 3.6 Graf F_4 43
Gambar 3.7 Graf W_9 47
Gambar 3.8 Pelabelan *super edge-graceful* untuk W_9 49
Gambar 3.9 Graf 3-*level wheel* $W_{(2,8,6)}$ 49
Gambar 3.10 Pelabelan garis pada graf $W_{(2,8,6)}$ 51

DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

Lampiran 1 57
Lampiran 2 58
Lampiran 3 59

DAFTAR SIMBOL

$G(p,q)$	: Graf G dengan p titik dan q garis
$f(uv)$	: Pemetaan garis uv
$f^*(u)$	: Pemetaan titik u
p	: Banyaknya titik pada suatu graf
q	: Banyaknya garis pada suatu graf
P	: Himpunan label titik
Q	: Himpunan label garis
$V(G)$	: Himpunan titik dari graf G
$E(G)$	: Himpunan garis dari graf G
$deg(v)$	: Derajat titik v
P_n	: Graf *path* dengan n titik
$G \cong G'$	: G Isomorfik dengan G'
K_r	: Graf lengkap dengan r titik
$K_{m,n}$	: Graf *bipartite* dengan m titik dan n titik
C_n	: Graf *cycle* dengan n titik
$G_1 + G_2$	: Join antara G_1 dan G_2
$G_1 \cup G_2$	: Gabungan antara G_1 dan G_2
F_n	: Graf *fan* dengan n titik
W_{n+1}	: Graf *wheel* dengan $n+1$ titik
$W(n_1, n_2, \ldots, n_m)$	: Graf *multi-level wheel* dengan m cincin
$\mathbb{Z}$	: Himpunan bilangan bulat
$W(e)$	: bobot garis e
cp_{2n}	: *Spoke* pada graf *fan* dengan $2n$ garis
$p_i p_{i+1}$	: *path* pada graf *fan*

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang penting dan banyak manfaatnya untuk memecahkan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari. Teori graf diperkenalkan oleh Leonhard Euler (*graph dan digraph*) pada tahun 1736 ketika mendiskusikan apakah mungkin untuk melewati semua jembatan di kota konnisberg Rusia dalam sekali waktu. Publikasi dari masalah ini dan usulan solusinya dinamakan teori graf. Topik ini dipelajari oleh matematikawan seperti Thomas Pennyngthon, Krikman William dan Roman Hamilton. Pada permasalahan yang dialami oleh Euler, titik mempresentasikan lokasi atau suatu daerah dan garis mempresentasikan jembatan yang menghubungkan antar lokasi (Chartrand dan Oellermann, 1996).

Teori graf semakin banyak dikembangkan oleh para ahli matematika. Dengan menggunakan rumusan atau model dari teori graf yang tepat, suatu permasalahan dapat dilihat dan diamati lebih jelas sehingga memudahkan kita untuk menganalisanya. Salah satu contohnya yaitu pelabelan pada graf.

Pelabelan graf dalam teori graf adalah pemberian label pada titik, garis, atau titik dan garis. Pelabelan graf sudah banyak dikaji mulai tahun 60-an dan banyak dikembangkan oleh para ahli, salah satunya yaitu pelabelan *edge-graceful*.

Misal *G* (*p,q*)-graf dengan pasangan titik dan garis (*V,E*). *G* (*p,q*)-graf disebut *edge-graceful* jika terdapat pemetaan $f: E \to Q$ yang bijektif dan pemetaan $f^*: V \to P$ yang didefinisikan dengan $f^*(u) \equiv \sum_{uv \in E} f(uv)\ (mod\ p)$ dan f^* juga fungsi bijektif. f disebut pelabelan *edge-graceful* dari G.

Salah satu pengembangan dari pelabelan *edge-graceful* adalah pelabelan *super edge-graceful*. Berdasarkan latar belakang di atas, penulis akan melabelkan dua jenis graf yaitu graf *fan* dan graf *multi-level wheel* dengan menggunakan pelabelan *super edge-graceful*.

1.2 Rumusan Masalah

Latar belakang yang telah dijelaskan sebelumnya mendasari adanya rumusan masalah yang akan dibahas dalam penulisan skripsi ini, yaitu:

1. Bagaimana menentukan pelabelan *super edge-graceful* pada graf *fan*?
2. Bagaimana menentukan pelabelan *super edge-graceful* pada graf *multi-level wheel*?

1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah pada penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Graf yang akan dibahas adalah graf berhingga di mana jumlah titik dan garisnya berhingga, sederhana, tanpa *loop*, terhubung dan tak berarah.
2. Pelabelan yang akan dibahas hanya pelabelan *super edge-graceful*.

1.4 Tujuan

Adapun tujuan dari penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan pelabelan *super edge-graceful* pada graf *fan*.
2. Menentukan pelabelan *super edge-graceful* pada graf *multi-level wheel*.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Graf

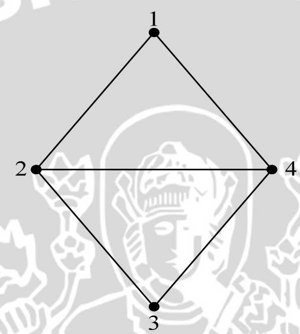
Konsep dasar graf yang digunakan pada penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut:

Definisi 2.1.1

Suatu graf G adalah pasangan himpunan $\big(V(G), E(G)\big)$ yang dinotasikan dalam bentuk $G = \{V(G), E(G)\}$ dengan $V(G)$ adalah himpunan berhingga yang tidak kosong dari titik-titik (*verteks*), sedangkan $E(G)$ adalah himpunan berhingga (boleh kosong) dari garis-garis (*edges*) (McHugh, 1990).

Contoh 2.1:

Graf G dengan pasangan himpunan $\big(V(G), E(G)\big)$ dengan $V(G)$ himpunan titik-titik dan $E(G)$ himpunan garis-garis sebagaimana terlihat pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Graf G dengan 4 titik dan 5 garis

Definisi 2.1.2

Gelung (*loop*) adalah suatu garis yang menghubungkan suatu titik dengan dirinya sendiri (Marsudi, 2006).

Definisi 2.1.3

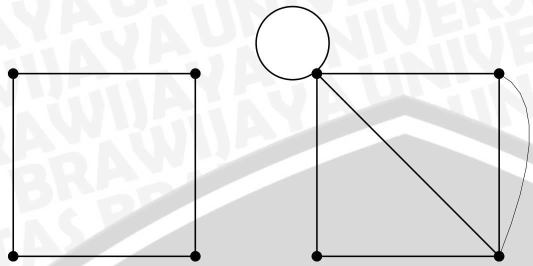
Garis ganda (*multi edge*) adalah dua garis atau lebih yang menghubungkan pasangan titik yang sama (Marsudi, 2006).

Definisi 2.1.4

Suatu graf yang tidak memiliki gelung (*loop*) dan garis-garis ganda disebut graf sederhana (*simple graph*), sedangkan graf ganda (*multi graph*) adalah graf yang memiliki suatu garis ganda yang menghubungkan dua titik yang sama atau mengandung satu atau lebih *loop* (Marsudi, 2006).

Contoh 2.2:

Graf sederhana (*simple graph*) dan graf ganda (*multi graph*) dengan satu *loop* ditunjukkan oleh Gambar 2.2.



(a) (b)

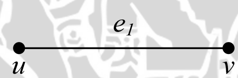
Gambar 2.2 (a) Graf sedehana dan (b) Graf ganda

Definisi 2.1.5

Jika $e = (uv)$ adalah garis dari graf *G*, maka dikatakan bahwa *u* dan *v* adalah berelasi (*adjacent*) di *G*, dan garis *e* tersebut dikatakan terhubung (*incident*) dengan *u* dan *incident* dengan *v* (Lipschutz dan Lipson, 2000).

Contoh 2.3:

Graf *G* dengan dengan titik *u* dan *v* serta garis e_1 sebagaimana pada Gambar 2.3, *u adjacent* dengan *v*, e_1 *incident* dengan *u* dan e_1 *incident* dengan *v*.



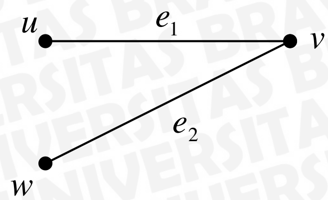
Gambar 2.3 *u adjacent v*, e_1 *incident u* dan *v*

Definisi 2.1.6

Dua garis e_1 dan e_2 pada graf *G* dikatakan *adjacent* jika kedua garis tersebut incident dengan satu titik persekutuan (Lipschutz dan Lipson, 2000).

Contoh 2.4:

Graf *G* dengan himpunan titik-titiknya *u, v,* dan *w* serta garis e_1 dan e_2 sebagaimana dikonstruksikan pada Gambar 2.4 di mana e_1 *adjacent* dengan e_2.



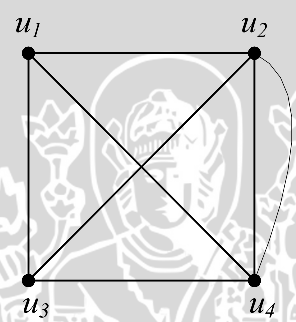
Gambar 2.4 e_1 *adjacent* e_2

Definisi 2.1.7

Derajat (*degree*) sebuah titik *v* pada sebuah graf *G* adalah jumlah garis yang *incident* dengan titik *v*, dengan kata lain jumlah garis yang memuat titik *v* sebagai titik ujung, yang dinotasikan dengan *deg(v)* (Lipschutz dan Lipson, 2000).

Contoh 2.5:

G graf ganda dengan himpunan titik-titiknya u_1, u_2, u_3 dan u_4 yang terlihat pada Gambar 2.5. Derajat masing-masing titik-titiknya adalah $deg(u_1) = 3$, $deg(u_2) = 4$, $deg(u_3) = 3$ dan $deg(u_4) = 4$.



Gambar 2.5 Graf *G*

Definisi 2.1.8

Derajat total dari graf G adalah jumlah derajat semua titik dalam graf *G* (Chartrand dan Zhang, 2005).

Teorema 2.1

Derajat total suatu graf selalu genap (Chartrand dan Zhang, 2005).

Bukti:

Misalkan G adalah suatu graf. Jika $E(G) = 0$ maka derajat total = 0, sehingga teorema terbukti. Sedangkan untuk G mempunyai n buah titik $v_1, v_2, \ldots, v_3$ untuk $n>0$ dan k buah garis $e_1, e_2, \ldots, e_k$ untuk $k>0$.

Ambil sembarang garis e_i, misalkan garis e_i menghubungkan v_i dengan v_j. maka e_i memberikan konstribusi masing-masing 1 ke perhitungan derajat v_i dan v_j (hal ini juga benar jika $v_i = v_j$ karena derajat suatu *loop* dihitung dua kali), sehingga e_i member konstribusi 2 ke perhitungan derajat total. Karena e_i dipilih sembarang, berarti semua garis dalam G memberi konstribusi 2 dalam perhitungan derajat total.

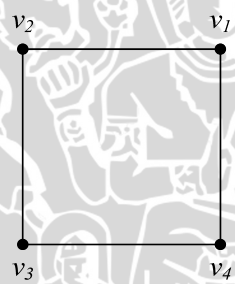
Dengan kata lain, derajat total G = dua kali jumlah garis dalam G. karena jumlah garis dalam G merupakan bilangan bulat, berarti derajat total G merupakan bilangan genap.

Definisi 2.1.9

Graf berlabel adalah suatu graf yang setiap titiknya diberi label yang tunggal (Chartrand dan Zhang, 2005).

Contoh 2.6:

G graf sederhana dengan 4 titik. Titik-titiknya masing-masing dilabeli dengan v_1, v_2, v_3 dan v_4 sebagaimana terlihat pada Gambar 2.6 di bawah ini.



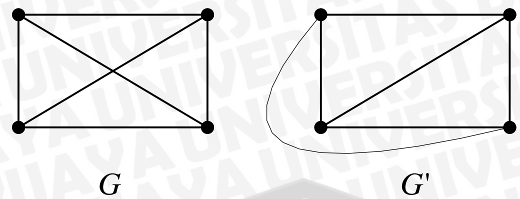
Gambar 2.6 Graf berlabel

Definisi 2.1.10

Misalkan $G = (V,E)$ dan $G' = (V',E')$ adalah dua graf. Graf G dan G' dikatakan *isomorfik* ($G \cong G'$) jika terdapat korespondensi satu-satu antara titik-titik di G dan G' sedemikian sehingga *adjacency* dipertahankan (Clark dan Holton, 1991).

Contoh 2.7:

Graf G dan G' adalah dua graf yang memuat 4 titik dan 6 garis sebagaimana tergambar pada Gambar 2.7, G dan G' *isomorfik*.



Gambar 2.7 $G \cong G'$

2.2 Istilah-istilah Pada Graf

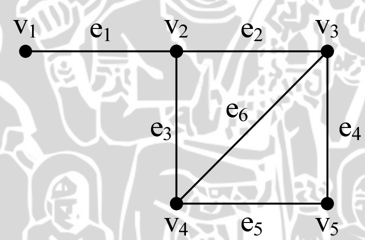
Definisi 2.2.1

Misalkan G adalah suatu graf. Suatu jalan (*walk*) di G adalah suatu barisan terdiri dari titik-titik dan garis-garis secara berselang-seling, diawali dan diakhiri dengan titik di mana setiap garisnya *incident* dengan dua titik terdekat pada deretan tersebut.

Walk dengan panjang n dari u ke v dituliskan sebagai berikut: u_0 e_1 u_1 e_2 u_2 … u_{n-1} e_n u_n dengan $u_0 = u$; $u_n = v$; u_{i-1} dan u_i adalah titik-titik ujung garis e_1 (Chartrand dan Zhang, 2005).

Contoh 2.8:

G graf dengan himpunan titik-titiknya v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 dan himpunan garis-garisnya e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6. Walk dari graf G adalah v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_6, v_4, e_5, v_5 sebagaimana terlihat pada Gambar 2.8.



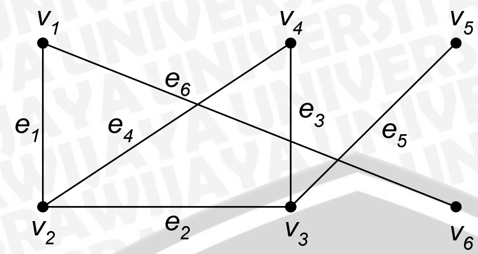
Gambar 2.8 Graf dengan *walk* v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_6, v_4, e_5, v_5

Definisi 2.2.2

Lintasan (*path*) dengan panjang n dari v ke w adalah *walk* dari v ke w yang semua titiknya berbeda. *Path* dari v ke w dituliskan sebagai $v = v_0$ e_1 v_1 e_2 v_2… v_{n-1} e_n v_n $= w$ (Chartrand dan Zhang, 2005).

Contoh 2.9:

G graf dengan himpunan titik-titiknya v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 dan himpunan garis-garisnya e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 yang diperlihatkan oleh Gambar 2.9.



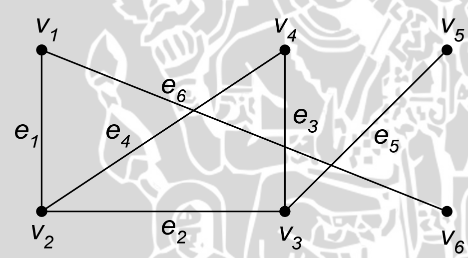
Gambar 2.9 (a) (v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3 , v_4, e_4, v_2, e_1, v_1, e_6, v_6) *walk* dari v_1 ke v_6 (b) $(v_2, e_4 v_4, e_3 v_3, e_5, v_5)$ *path* dan $(v_1, e_1 v_2, e_2 v_3, v_{6,} v_1)$ bukan *path* dan bukan *walk.*

Definisi 2.2.3

Tapak (*Trail*) adalah *walk* yang semua garisnya berlainan. Setiap *path* pasti *trail,* tapi setiap *trail* belum tentu *path* (Chartrand dan Zhang, 2005).

Contoh 2.10:

G graf dengan himpunan titik-titiknya v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 dan himpunan garis-garisnya e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 yang diperlihatkan oleh Gambar 2.10.



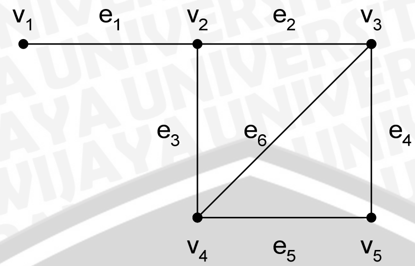
Gambar 2.10 v_1, e_1, v_2, e_4, v_4, e_3, v_3, e_2, v_2 merupakan *trail*.

Definisi 2.2.4

Circuit adalah *walk* tertutup yang titik-titiknya tidak muncul lebih dari satu kali, kecuali titik awal dan titik akhir (Chartrand dan Zhang, 2005).

Contoh 2.11:

G graf dengan himpunan titik-titiknya v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 dan himpunan garis-garisnya e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6. *circuit* dari graf *G* adalah v_2, v_4, v_5, v_3, v_2 sebagaimana terlihat pada Gambar 2.11.



Gambar 2.11 v_2, v_4, v_5, v_3, v_2 merupakan *circuit*

2.3 Jenis-Jenis Graf

2.3.1 Graf Nol (*Null Graph*)

Graf nol adalah suatu graf di mana himpunan garisnya kosong. Setiap titik dalam graf nol adalah titik terasing (titik dengan derajat nol) (Dieker dan Voxman, 1986).

Contoh 2.12:

Graf *G* dengan banyaknya titik 4 dan tidak memiliki garis sebagaimana terlihat pada Gambar 2.12. maka graf tersebut dinamakan graf nol (*null graph*).

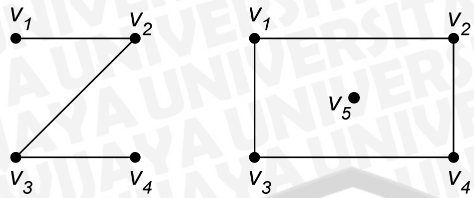
Gambar 2.12 Graf nol

2.3.2 Graf Terhubung (*Connected Graph*)

Sebuah graf G adalah terhubung jika setiap pasang dari titik di *G* adalah terhubung oleh suatu *path*. Jika sepasang titik tersebut tidak terhubung oleh *path* manapun maka graf tersebut disebut tak terhubung (*disconnected*) (Dieker dan Voxman, 1986).

Contoh 2.13:

Misalkan *G* dan *G'* adalah dua graf di mana jumlah titik pada graf *G* sebanyak 4 titik dan jumlah garisnya 3 (lihat Gambar 2.13 (a)) serta jumlah titik pada graf *G'* sebanyak 5 titik dan jumlah garisnya 4 (lihat Gambar 2.13 (b)). Maka graf G disebut graf terhubung (*connected graph*) sedankan graf G' disebut graf tak terhubung (*disconnected graph*).



(a) (b)

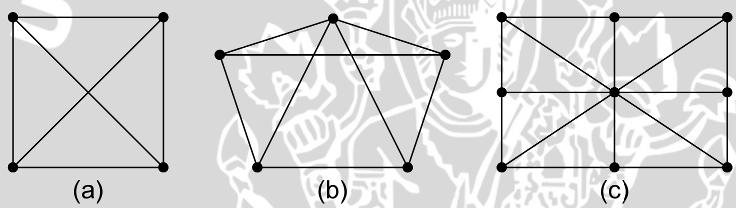
Gambar 2.13 (a) Terhubung (b) Tidak terhubung

2.3.3 Graf Lengkap (*Complete Graph*)

Suatu graf G disebut lengkap jika graf tersebut adalah graf sederhana dan setiap dua titiknya mempunyai garis yang menghubungkan dua titik tersebut, graf lengkap dengan r titik dinotasikan dengan K_r (lipschutz dan schiller, 1995).

Contoh 2.14:

Misalkan G graf dengan 4 titik (lihat Gambar 2.14 (a)), G' graf dengan 5 titik (lihat Gambar 2.14 (b)) dan G'' graf dengan 9 titik (lihat Gambar 2.14 (c)). Graf G disebut graf lengkap sedangkan graf G' dan G'' bukan graf lengkap.



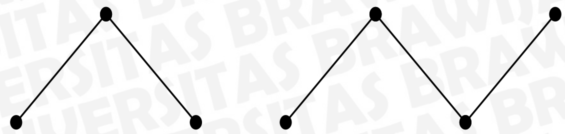
Gambar 2.14: (a) Merupakan graf lengkap (K_4), (b) dan (c) bukan merupakan graf lengkap

2.3.4 Graf Lintasan (*Path Graph*)

Graf lintasan adalah graf yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan yang terdiri dari n titik dinotasikan dengan P_n (Lipschutz dan Lipson, 2000).

Contoh 2.15:

G graf dengan jumlah titiknya 3 dan G' graf dengan jumlah titiknya 4 sebagaimana terlihat pada Gambar 2.15. G dan G' disebut graf lintasan (*path graph*).



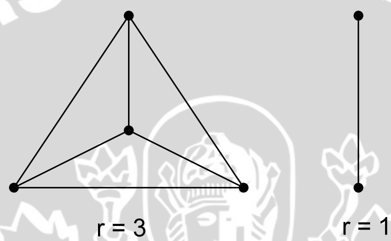
Gambar 2.15 Graf lintasan P_3 dan P_4

2.3.5 Graf Teratur (*Regular Graph*)

Suatu graf G disebut graf teratur (*regular graph*) jika semua titik di G mempunyai derajat yang sama. Jika setiap titik di G berderajat r, maka G dikatakan graf teratur berderajat r (Lipschutz dan Lipson, 2000).

Contoh 2.16:

Suatu graf G mempunyai n titik. Jika setiap titik pada graf G mempunyai derajat yang sama, maka graf tersebut disebut graf teratur. Pada Gambar 2.16 diilustrasikan graf teratur dengan 4 titik dan derajat pada tiap titiknya sama.



Gambar 2.16 Graf dengan derajat r

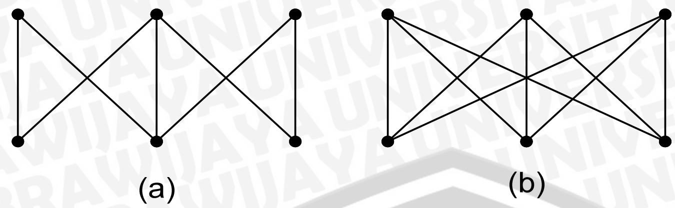
2.3.6 Graf *Bipartite* (*Bigraph*) dan *Bigraf* Lengkap (*Complete Bigraph*)

Sebuah graf G dikatakan *bipartite* jika himpunan titiknya V dapat dibagi ke dalam dua himpunan bagian saling asing M dan N, sedemikian sehingga setiap garis dari G menghubungkan sebuah titik dari M ke sebuah titik dari N.

Sedangkan graf *bipartite* lengkap adalah setiap titik M di hubungkan ke setiap titik dari N dan di nyatakan $K_{3,3.}$ m adalah jumlah titik di M dan n adalah jumlah titik di N (Lipschutz dan Lipson, 2000).

Contoh 2.17:

Misalkan diberikan dua graf seperti pada Gambar 2.17 (a) dan (b). maka graf pada Gambar 2.17 (a) disebut graf *bipartite* dan graf pada Gambar 2.17 (b) adalah graf *bipartite* lengkap.



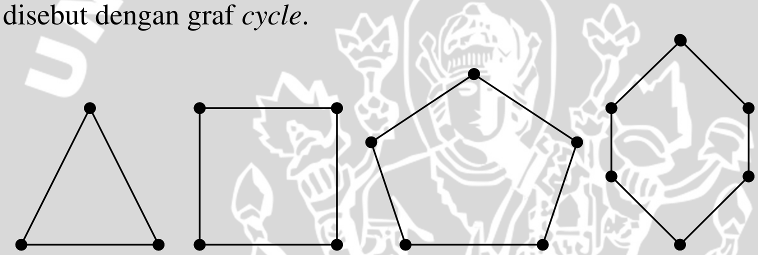
Gambar 2.17 (a) Graf *bipartite* dan (b) $K_{3,3}$

2.3.7 Graf *Cycle* (*Cycle Graph*)

Suatu graph disebut graph *cycle* jika titik dari sebuah graph G berorde $n \geq 3$ dapat dinotasikan dengan $v_1, v_2, \dots, v_n$ sedemikian sehingga garisnya adalah $v_1\, v_2, v_2\, v_3 \dots, v_{n-1}\, v_n$ dan $v_1\, v_n$. Graph *cycle* berorde $n \geq 3$ dinotasikan dengan C_n (Chartrand dan Oellermann, 1996).

Contoh 2.18:

Diberikan graf G yang tertutup (lihat Gambar 2.18). Maka graf G disebut dengan graf *cycle*.



Gambar 2.18 *n-cycle*

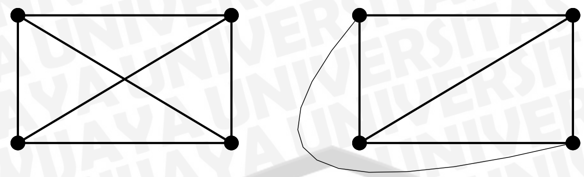
2.3.8 Graf Bidang (*Plane Graph*) dan Graf Sebidang (*Planar Graph*)

Sebuah graf yang digambar pada bidang datar sedemikian sehingga tidak ada garis-garis yang berpotongan disebut graf bidang (*plane graph*).

Graf sebidang (*planar graf*) adalah graf yang dapat dipancang pada bidang datar. Jadi, graf *planar* adalah graf yang *isomorfik* dengan graf bidang (Chartrand dan Oellermann, 1996).

Contoh 2.19:

Diberikan graf $G \cong G'$ sebagaimana terlihat pada Gambar 2.19. graf G (Gambar 2.19(a)) adalah graf sebidang (*planar graph*) dan graf *G'* (Gambar 2.19 (b)) adalah graf bidang (*plane graph*).



(a) (b)

Gambar 2.19 (a) Graf *planar* dan (b) Graf bidang

2.4 Operasi Pada Graf

Definisi 2.4.1

Misalkan $G_1=(V_1,E_1)$ dan $G_2=(V_2,E_2)$ di mana V_1 dan V_2 saling asing. Gabungan (*union*) dari G_1 dan G_2 dinotasikan $G = G_1 \cup G_2 = (V, E)$ adalah graf dengan himpunan titik $V = V_1 \cup V_2$ dan himpunan garis $E = E_1 \cup E_2$ (Rosen dan Kenneth, 1999).

Contoh 2.20:

Diberikan dua graf G_1 dan G_2 yang saling asing. Gabungan dari G_1 dan G_2 ($G_1 \cup G_2$) digambarkan pada Gambar 2.20 berikut.

G_1 G_2 $G = G_1 \cup G_2$

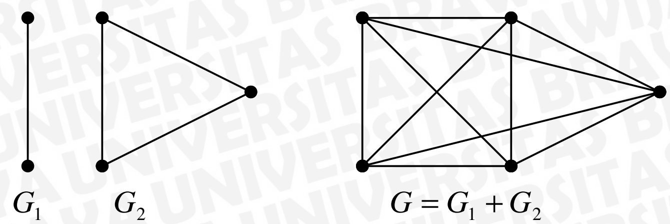
Gambar 2.20 Gabungan G_1 dan G_2

Definisi 2.4.2

Misalkan $G_1=(V_1,E_1)$ dan $G_2=(V_2,E_2)$, *Joint* dari G_1 dan G_2 dinotasikan $G = G_1 + G_2 = (V, E)$ adalah *union* dari graf $G = G_1 \cup G_2$ dan semua garis yang menghubungkan titik-titik di V_1 dan titik-titik di V_2 (Rosen dan Kenneth, 1999).

Contoh 2.21:

Diberikan dua graf G_1 dan G_2 yang saling asing. join dari G_1 dan G_2 ($G_1 + G_2$) digambarkan pada Gambar 2.21 berikut.



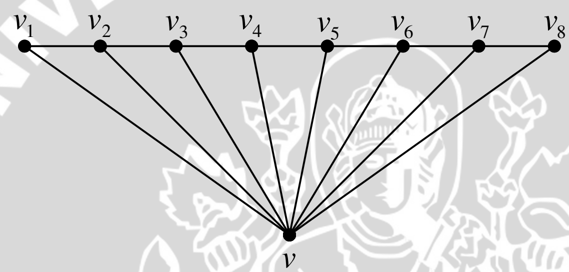
Gambar 2.21 Join G_1 dan G_2

Definisi 2.4.3

Graf *fan* (F_n) adalah join $K_1 + P_{n-1}$ di mana K_1 adalah graf lengkap dengan 1 titik dan P_{n-1} adalah graf lintasan dengan *n-1* titik. Titik pada K_1 disebut *core*, garis-garis yang *incident* dengan *core* disebut *spoke*. Graf *fan* F_n mempunyai *n* titik dan *2n-3* garis. (Shiu dan Lam, 2004).

Contoh 2.22:

Diberikan graf K_1 dan graf lintasan dengan 8 titik (P_8). Graf *fan* adalah join dari K_1 dan P_8 ($K_1 + P_8$). Gambar 2.22 berikut menggambarkan graf *fan* F_9.



Gambar 2.22 Graf *fan* F_9

Definisi 2.4.4

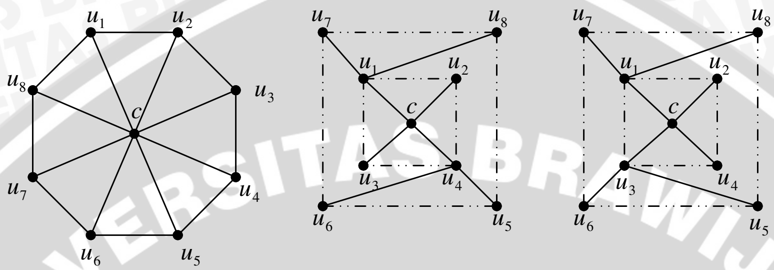
Untuk $n \geq 2$, graf $K_1 + C_n$ disebut graf *wheel* (*wheel graph*) berorde *n+1* dan dinotasikan W_{n+1}. Titik yang berasal dari K_1 disebut *core* dan dinotasikan dengan *c*. Garis cu_i, $1 \leq i \leq n$ disebut *spoke*. *cycle* disebut juga cincin dari wheel.

Graf *wheel* disebut *1-level* wheel. Graf *m-level wheel* adalah graf *wheel* yang mempunyai lebih dari satu cincin dan dinotasikan dengan $W(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ (Shiu dan Lam, 2004).

Untuk menggambar cincin kedua pada graf $W(n_1, n_2, \ldots, n_m)$, pilih 2 titik pada cincin pertama dan membagi titik-titik pada cincin kedua menjadi 2 himpunan titik. Kemudian salah satu dari 2 titik terpilih pada cincin pertama dijoinkan dengan salah satu himpunan titik pada cincin kedua. Joinkan 1 titik terpilih yang lain dengan himpunan titik yang lain pula. Demikian seterusnya hingga cincin ke-*m*.

Contoh 2.23:

Diberikan graf K_1 dan graf *cycle* dengan 8 titik. Join $K_1 + C_8$ disebut graf *wheel* (W_9) (lihat Gambar 2.23 (a)). Sedangkan pada Gambar 2.23 (b) dan (c) *cycle*nya dibagi menjadi dua level yaitu *cycle* pertama terdapat 4 titik dan *cycle* kedua terdapat 4 titik. Jika demikian maka disebut dengan graf *2-level wheel*.



(a) (b) (c)

Gambar 2.23 (a) Graf *1-level wheel*, (b) dan (c) Graf *2-level wheel*

2.5 Fungsi

Misalkan A dan B himpunan. Relasi biner f dari A ke B merupakan fungsi jika setiap elemen di dalam A dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam B. Himpunan A disebut daerah asal (*domain*) dari f dan himpunan B disebut daerah kawan (*codomain*) dari f. Jika f adalah fungsi dari A ke B, maka dapat ditulis:

$$f: A \rightarrow B.$$

Secara matematis, definisi fungsi dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f: A \rightarrow B \text{ Fungsi} \Leftrightarrow (\forall\, a_1, a_2 \in A)\ (\ a_1 = a_2 \Rightarrow f(a_1) = f(a_2)).$$

Fungsi $f: A \rightarrow B$ injektif jika dan hanya jika $(\forall f(a_1), f(a_2) \in A \quad fa1=fa2 \implies a1=a2$ atau dengan kontraposisi $\forall a1,a2 \in A$ $a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)$. Fungsi $f{:}A \rightarrow B$ surjektif (*onto*) jika dan hanya jika $(\forall a_2 \in B)(\exists a_1 \in A)\ f(a_1) = a_2$. Fungsi $f: A \rightarrow B$ bijektif (berkorespondensi satu-satu) jika dan hanya jika f adalah fungsi injektif dan fungsi surjektif (Munir, 2005).

2.6 Operasi Modulo

Misalkan m positif integer dan a integer. maka a *mod* m didefinisikan sebagai sisa dari hasil a dibagi m. Dengan kata lain, jika $a = qm + r$ dengan $r, q \in \mathbb{Z}$ dan jika $0 \leq r < m$ maka a *mod* m = r (Spring, 2008).

Contoh 2.24:

- $17\ mod 5 = 2 \Leftrightarrow 17 = 5(3) + 2$
- $-2\ mod 5 = 3 \Leftrightarrow -2 = 5(-1) + 3$

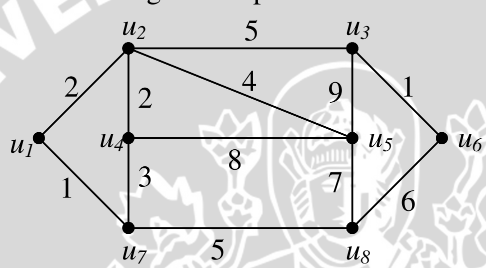
2.7 Pelabelan Pada Graf

Definisi 2.7.1

Graf bebobot (*weighted graph*) adalah graf yang mempunyai label atau bobot pada setiap garis-garisnya. Bobot dalam graf dinotasikan dengan $W(e)$ (Fletcher, et all 1991).

Contoh 2.25:

Misalkan graf G dengan 8 titik dan 12 garis. Masing-masing garisnya diberi bobot sebagaimana pada Gambar 2.24 berikut:



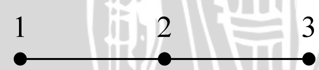
Gambar 2.24 Graf berbobot

Definisi 2.7.2

Pelabelan titik (*vertex labeling*) dari graf G adalah suatu fungsi $V(G) \rightarrow P$ di mana P adalah himpunan label untuk titik-titik (Harary, 1994).

Contoh 2.26:

Graf G dengan 3 titik dan 2 garis dan masing-masing titiknya terlabeli seperti pada Gambar 2.25.



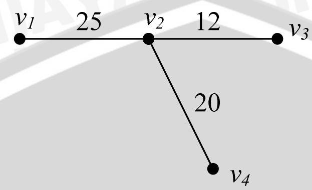
Gambar 2.25 Pelabelan titik

Definisi 2.7.3

Pelabelan garis (*edge labeling*) dari graf G adalah fungsi $E(G) \to Q$ di mana Q adalah himpunan label untuk garis-garisnya, pada umumnya angka-angka tersebut mewakili suatu jarak atau arus (Harary, 1994).

Contoh 2.27:

Graf G dengan 4 titik dan 3 garis dan masing-masing garisnya terlabeli seperti pada Gambar 2.26.



Gambar 2.26 Pelabelan garis

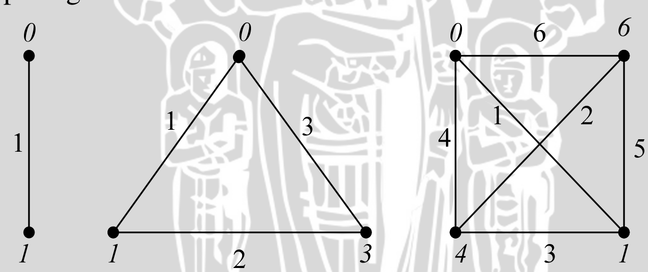
2.8 Pelabelan *Graceful*, *Edge-Graceful* dan *Super Edge-Graceful*

Definisi 2.8.1

Misal $G = (V,E)$ sebuah graf dengan p titik dan q garis. Pelabelan titik dari graf G adalah fungsi dari $V(G)$ ke P. Graf G disebut *graceful* jika terdapat fungsi injektif dari titik-titik di G ke himpunan $\{0, \ldots, p\}$, sedemikian sehingga masing-masing garis xy dilabeli dengan $|f(x) - f(y)|$ (lihat Gambar 2.27) (Shiu dan Lam, 2004).

Contoh 2.28:

Diberikan graf lengkap dan tiap titiknya dilabeli secara berlainan seperti pada gambar di bawah ini.



Gambar 2.27 Pelabelan *graceful* pada graf K_2, K_3, dan K_4

Definisi 2.8.2

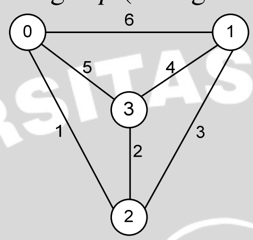
Misal G (p,q)-graf dengan himpunan pasangan titik dan garis (V,E). G (p,q)-graf disebut *edge-graceful* jika terdapat pemetaan bijektif $f: E \to \{1,2,\dots,q\}$ dan pemetaan bijektif $f^*: V \to \mathbb{Z}_p = \{0,1,\dots,p-1\}$ dengan

$$f^*(u) \equiv \sum_{uv \in E(G)} f(uv)\,(mod\ p)$$

(Shiu dan Lam, 2004).

Contoh 2.29:

Graf G adalah graf teratur berderajat 3. Garis-garis pada graf G dilabeli dengan $\{1,2,3,4,5,6\}$ dan titik-titik pada graf G dilabeli dengan menjumlahkan setiap garis yang *incident* dengan suatu titik pada graf dan di*mod*kan dengan p (lihat gambar 2.28).



Gambar 2.28 Pelabelan *edge-graceful* pada graf K_4

Definisi 2.8.3

Misalkan Himpunan P dan Q adalah himpunan label titik dan himpunan label garis dari graf G,

$$P = \begin{cases} \left\{-\frac{p}{2},\dots,-1,1,\dots,\frac{p}{2}\right\} & \text{jika p genap} \\ \left\{-\frac{p-1}{2},\dots,-1,0,1,\dots,\frac{p-1}{2}\right\} & \text{jika p ganjil} \end{cases}$$

dan

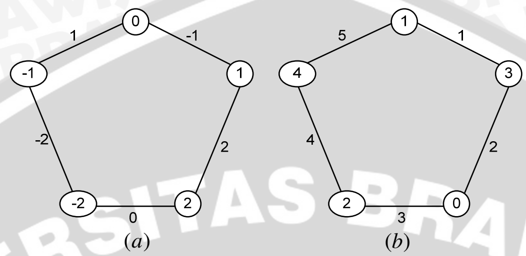
$$Q = \begin{cases} \left\{-\frac{q}{2},\dots,-1,1,\dots,\frac{q}{2}\right\} & \text{jika q genap} \\ \left\{-\frac{q-1}{2},\dots,-1,0,1,\dots,\frac{q-1}{2}\right\} & \text{jika q ganjil} \end{cases}$$

G (p,q)-graf disebut *super edge-graceful* jika terdapat pasangan pemetaan (f,f^*) sedemikian sehingga $f: E \to Q$ bijektif dan $f^*: V \to P$ juga bijektif yang didefinisikan dengan $f^*(u) \equiv \sum_{uv \in E(G)} f(uv)$. f adalah pelabelan *super edge-graceful* dari graf G (Shiu dan Lam, 2004).

Menurut Lee (2005), jika graf G adalah *super edge-graceful* dan $q = -1\ (mod\ p)$ untuk q genap dan $q = 0\ (mod\ p)$ untuk q ganjil, maka graf G juga *edge-graceful*.

Contoh 2.30:

Graf *cycle* dengan 5 titik (C_5) adalah graf *super edge-graceful* sebagaimana terlihat pada gambar 2.29 (a). Karena jumlah garis pada graf C_5 adalah 5 (q ganjil) maka 5 = 0 (mod 5) terpenuhi. Sehingga graf C_5 juga merupakan graf *edge-graceful* sebagaimana terlihat pada gambar 2.29 (b).



Gambar 2.29 (a) *super edge-graceful* pada C_5 dan (b) *edge-graceful* pada C_5

BAB III
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada pembahasan berikut akan ditunjukkan cara menentukan pelabelan *super edge-graceful* pada graf *fan* dan graf *multi-level wheel*.

3.1 Pelabelan *super edge-graceful* pada graf *fan*.

Teorema 3.1:
Setiap graf *fan* F_{2n+1} adalah *super edge-graceful* untuk $n \geq 1$

Bukti:

Pada graf *fan* F_{2n+1} himpunan titik-titik dan himpunan garis-garisnya sebagai berikut:

$$V = \{c, p_1, p_2, p_3, \cdots, p_{2n}\}$$

dan

$$E = \{cp_1, cp_2, cp_3, \cdots, cp_{2n}, p_1p_2, p_2p_3, \cdots, p_{2n-1}p_{2n}\}$$

Untuk graf F_n, jumlah titiknya adalah n dan jumlah garisnya adalah $2n - 3$. Jika F_{2n+1} maka jumlah titik (p) dan jumlah garisnya (q) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} p &= 2n + 1 \\ q &= 2(2n + 1) - 3 \\ &= 4n + 2 - 3 \\ &= 4n - 1 \end{aligned}$$

Sehingga dapat dikatakan bahwa graf F_{2n+1} selalu mempunyai jumlah titik dan jumlah garis yang ganjil.

Menurut definisi, jika jumlah titik dan jumlah garisnya ganjil maka himpunan label titik dan himpunan label garisya berturut-turut sebagai berikut:

$P = \left\{-\frac{p-1}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{p-1}{2}\right\}$,
Karena $p = 2n + 1$ maka $P = \{-n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n\}$

$Q = \left\{-\frac{q-1}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{q-1}{2}\right\}$,
Karena $q = 4n - 1$ maka $Q = \{-(2n - 1), \dots, -1, 0, 1, \dots, 2n - 1\}$.

Selanjutnya melabelkan garis-garis dan titik-titik pada graf *fan*. tiap-tiap garis pada graf *fan* F_{2n+1} dilabeli dengan himpunan label garis-garisnya di mana $f: E \rightarrow Q$ bijektif dan tiap-tiap titik pada graf *fan* dilabeli dengan himpunan label titik-titiknya dimana $f^*: V \to Q$ juga bijektif.

i. Untuk n ganjil

Pelabelan pada tiap-tiap garisnya dilakukan dengan 2 tahap, yaitu:

a. *spoke* yang pertama cp_1, cp_2, ..., cp_{n-1}, cp_n dilabeli dengan aturan fungsi berikut:

$$f(cp_i) = \begin{cases} i & \text{, untuk } i \text{ ganjil} \\ -i & \text{, untuk } i \text{ genap} \\ -n & \text{, untuk } i = n \end{cases}$$

untuk $i = 1, 2, \cdots, n$. Sehingga diperoleh label garis pada *spoke* sebagai berikut:

$i = 1 \to f(cp_1) = i = 1$

$i = 2 \to f(cp_2) = -i = -2$

$i = 3 \to f(cp_3) = i = 3$

$i = 4 \to f(cp_4) = -i = -4$

$\vdots$

$i = n - 2 \to f(cp_{n-2}) = i = n - 2$
$i = n - 1 \to f(cp_{n-1}) = -i = -(n - 1)$
$i = n \to f(cp_n) = -n.$

Didefinisikan $E' = \{cp_1, cp_2, cp_3, \cdots, cp_{2n}\}$ dan $Q' = \{\pm 1, \pm 2, \cdots, \pm n\}$. $f: E' \to Q'$ bijektif jika f injektif dan surjektif.

- Surjektif : $(\forall a \in Q')(\exists cp_i \in E') \ni f(cp_i) = a$
  - i ganjil
    Ambil sembarang $a \in Q'$.
    Akan dibuktikan $(\exists cp_i \in E') \ni f(cp_i) = a$.
    Berdasarkan definisi fungsi di atas $a = i$, sedemikian sehingga $f(cp_i) = i$
  - i genap
    Ambil sembarang $a \in Q'$.
    Akan dibuktikan $(\exists cp_i \in E') \ni f(cp_i) = a$.

Berdasarkan definisi fungsi di atas $a = -i$,
sedemikian sehingga $f(cp_i) = -i$

- $i = n$
  Ambil sembarang $a \in Q'$
  Akan dibuktikan $(\exists cp_i \in E') \ni f(cp_i) = a$
  Berdasarkan definisi fungsi di atas $a = -n$,
  sedemikian sehingga $f(cp_i) = -n$

➢ Injektif : $(\forall f(cp_i'), f(cp_i'') \in Q'), f(cp_i') = f(cp_i'') \Rightarrow cp_i' = cp_i''$.

- i ganjil
  Ambil sembarang $f(cp_i'), f(cp_i'') \in Q'$ dengan
  $f(cp_i') = f(cp_i'')$
  Akan dibuktikan $cp_i' = cp_i''$
  Berdasarkan definisi fungsi di atas $f(cp_i') = i$ dan
  $f(cp_i'') = i$, $f(cp_i') = f(cp_i'') = i$.
  Sehingga $cp_i' = cp_i''$
- i genap
  Ambil sembarang $f(cp_i'), f(cp_i'') \in Q'$ dengan
  $f(cp_i') = f(cp_i'')$
  Akan dibuktikan $cp_i' = cp_i''$
  Berdasarkan definisi fungsi di atas $f(cp_i') = -i$ dan
  $f(cp_i'') = -i$, $f(cp_i') = f(cp_i'') = -i$.
  Sehingga $cp_i' = cp_i''$.
- $i = n$
  Ambil sembarang $f(cp_i'), f(cp_i'') \in Q'$ dengan
  $f(cp_i') = f(cp_i'')$
  Akan dibuktikan $cp_i' = cp_i''$
  Berdasarkan definisi fungsi di atas $f(cp_i') = -n$
  dan $f(cp_i'') = -n$, $f(cp_i') = f(cp_i'') = -n$.

Sehingga $cp_i' = cp_i''$.

Untuk *spoke* yang lain yaitu cp_{n+1}, cp_{n+2}, …, cp_{2n-1}, cp_{2n} dilabeli secara '*skew-symmetrically*' dari label *spoke* yang telah diperoleh di atas, sehingga diperoleh masing-masing label garis-garisnya sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
&f(cp_{n+1}) = n \\
&f(cp_{n+2}) = n - 1 \\
&f(cp_{n+3}) = -(n - 2) \\
&f(cp_{n+4}) = n - 3 \\
&\quad \vdots \\
&f(cp_{2n-1}) = 2 \\
&f(cp_{2n}) = -1.
\end{aligned}
$$

b. Selanjutnya melabelkan *path,* garis-garis $p_1p_2, p_2p_3, \cdots, p_{n-1}p_n, p_np_{n+1}$ dilabeli dengan fungsi berikut:

$$
f(P_iP_{i+1}) = \begin{cases} 0 & \text{, untuk } i = n \\ -(n+i) & \text{, untuk } i \text{ ganjil} \\ n+i & \text{, untuk } i \text{ genap} \end{cases}
$$

untuk $i = 1, 2, \cdots, n$. Sehingga diperoleh label garis pada *path* sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
&i = 1 \to f(p_1p_2) = -(n+i) = -(n+1) \\
&i = 2 \to f(p_2p_3) = n + i = n + 2 \\
&i = 3 \to f(p_3p_4) = -(n+i) = -(n+3) \\
&i = 4 \to f(p_4p_5) = n + i = n + 4 \\
&\quad \vdots \\
&i = n-2 \to f(p_{n-2}p_{n-1}) = -(n+i) = -(2n-2) \\
&i = n-1 \to f(p_{n-1}p_n) = n + i = 2n - 1 \\
&i = n \to f(P_nP_{n+1}) = 0.
\end{aligned}
$$

Disefiniskan $E'' = \{p_1p_2, p_2p_3, \cdots, p_{2n-1}p_{2n}\}$ dan $Q'' = \{0, \pm(n+1), \pm(n+2), \cdots, \pm(2n-1)\}$. $f: E'' \to Q''$ bijektif jika *f* injektif dan surjektif.

- Surjektif : $(\forall a \in Q'')(\exists p_ip_{i+1} \in E'') \ni f(p_ip_{i+1}) = a$
  - *i* ganjil
    Ambil sembarang $a \in Q''$
    akan dibuktikan $\exists p_i p_{i+1} \in E'' \ni f(p_i p_{i+1}) = a$

berdasarkan definisi fungsi di atas a = -(n+i),
sedemikian sehingga $f(p_i p_{i+1}) = -(n+i)$

- i genap
  Ambil sembarang $a \in Q"$
  Akan dibuktikan $\exists p_i p_{i+1} \in E" \ni f(p_i p_{i+1}) = a$
  Berdasarkan definisi fungsi di atas $a = n+i$,
  sedemikian sehingga $f(p_i p_{i+1}) = n+i$
- $i = n$
  Ambil sembarang $a \in Q"$
  Akan dibuktikan $\exists p_i p_{i+1} \in E" \ni f(p_i p_{i+1}) = a$
  berdasarkan definisi fungsi di atas $a = 0$, sedemikian sehingga $f(p_i p_{i+1}) = 0$

➢ Injektif: $(\forall f(p_i p_{i+1}^{'}), f(p_i p_{i+1}") \in Q"), f(p_i p_{i+1}^{'}) = f(p_i p_{i+1}") \Rightarrow p_i p_{i+1}^{'} = p_i p_{i+1}"$.

- i ganjil
  Ambil sembarang $f(p_i p_{i+1}^{'}), f(p_i p_{i+1}") \in Q"$
  dengan $f(p_i p_{i+1}^{'}) = f(p_i p_{i+1}")$
  Akan dibuktikan $p_i p_{i+1}^{'} = p_i p_{i+1}"$
  Berdasarkan definisi fungsi di atas $f(p_i p_{i+1}^{'}) = -(n+i)$ dan $f(p_i p_{i+1}") = -(n+i)$, $f(p_i p_{i+1}^{'}) = f(p_i p_{i+1}") = -(n+i)$.
  Sehingga $p_i p_{i+1}^{'} = p_i p_{i+1}"$
- i genap
  Ambil sembarang $f(p_i p_{i+1}^{'}), f(p_i p_{i+1}") \in Q"$
  dengan $f(p_i p_{i+1}^{'}) = f(p_i p_{i+1}")$
  Akan dibuktikan $p_i p_{i+1}^{'} = p_i p_{i+1}"$
  Berdasarkan definisi fungsi di atas
  $f(p_i p_{i+1}^{'}) = n+i$ dan $f(p_i p_{i+1}") = n+i$,
  $f(p_i p_{i+1}^{'}) = f(p_i p_{i+1}") = n+i$.
  Sehingga $p_i p_{i+1}^{'} = p_i p_{i+1}"$.
- $i = n$
  Ambil sembarang $f(p_i p_{i+1}^{'}), f(p_i p_{i+1}") \in Q"$
  dengan $f(p_i p_{i+1}^{'}) = f(p_i p_{i+1}")$

Akan dibuktikan $p_i p'_{i+1} = p_i p_{i+1}"$

Berdasarkan definisi fungsi di atas $f\left(p_i p'_{i+1}\right) = 0$ dan $f(p_i p_{i+1}") = 0$, $f\left(p_i p'_{i+1}\right) = f(p_i p_{i+1}") = 0$.

Sehingga $p_i p'_{i+1} = p_i p_{i+1}"$.

Untuk garis-garis yang lain yaitu $p_{n+1}p_{n+2}, p_{n+2}p_{n+3}, \cdots, p_{2n-1}p_{2n}$ dilabeli secara '*skew-symmetrically*' dari label *path* yang telah diperoleh di atas, sehingga diperoleh masing-masing label garis-garisnya sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
&f(p_{n+1}p_{n+2}) = -(\,2n-1)\\
&f(p_{n+2}p_{n+3}) = 2n-2\\
&f(p_{n+3}p_{n+4}) = -(\,2n-3)\\
&f(p_{n+4}p_{n+5}) = 2n-4\\
&\quad\vdots\\
&f(p_{2n-2}p_{2n-1}) = -(\,n+2)\\
&f(p_{2n-1}p_{2n}) = n+1.
\end{aligned}$$

Karena $E' \cup E" = E$ dan $Q' \cup Q" = Q$ dan untuk setiap elemen dalam Q' memiliki tepat satu kawan di E' dan untuk setiap elemen dalam Q" memiliki tepat satu kawan di E", maka untuk setiap elemen dalam $Q = Q' \cup Q"$ memiliki tepat satu kawan di $E = E' \cup E"$. Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa fungsi $f: E \to Q$ satu-satu dan onto. Karena $f: E \to Q$ satu-satu dan onto maka jelas bahwa $f: E \to Q$ bijektif.

Setelah semua garis pada graf *fan* terlabeli, langkah selanjutnya melabelkan titik-titik pada graf *fan* sedemikian sehingga pelabelan titik-titiknya juga bijektif. Titik-titik pada graf *fan* F_{2n+1} dilabeli dengan himpunan label titik-titiknya di mana fungsi $f^*: V \to P$ yang didefinisikan $f^*(u) \equiv \sum_{uv \in E(G)} f(uv)$ dan diuraikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
f^*(p_0) &= f^*(c) \;\; = 0\\
f^*(p_1) &= 1 + \big(-(n+1)\big) = -n\\
f^*(p_n) &= (-n) + (2n-1) + 0 = n-1\\
f^*(p_i) &= (-1)^{i-1} i + (-1)^{i-1}(n+i-1) + (-1)^i (n+i)\\
&= (-1)^{i-1}(i-1) \text{ Untuk } i = 2, \ldots, n-1,
\end{aligned}$$

atau dapat ditulis dengan

$$f^*(p_i) = \begin{cases} 0 & , i = 0 \\ -n & , i = 1 \\ (-1)^{i-1}(i-1) & , i = 2, \cdots, n-1 \\ n-1 & , i = n \end{cases}$$

di mana $p_0 = c$ dan $f^*(p_i)$ juga fungsi bijektif, sehingga diperoleh himpunan label titik-titiknya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} & i = 0 \rightarrow f^*(p_0) = f(c) = 0 \\ & i = 1 \rightarrow f^*(p_1) = -n \\ & i = 2 \rightarrow f^*(p_2) = (-1)^{2-1}(2-1) = -1 \\ & i = 3 \rightarrow f^*(p_3) = (-1)^{3-1}(3-1) = 2 \\ & i = 4 \rightarrow f^*(p_4) = (-1)^{4-1}(4-1) = -3 \\ & i = 5 \rightarrow f^*(p_5) = (-1)^{5-1}(5-1) = 4 \\ & \quad \vdots \\ & i = n \rightarrow f^*(P_n) = n - 1. \end{aligned}$$

Sedangkan titik-titik yang lain yaitu untuk $i > n$ dilabeli secara *'skew-symmetrically'* dari pelabelan titik-titik $\{p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}, p_n\}$ yang sudah diperoleh.

$f^*: V \rightarrow P$ bijektif jika f^* injektif dan surjektif.

- Surjektif
  - *i = 0*
    Ambil sembarang $b \in P$
    Akan dibuktikan $\exists p_i \in V \ni f^*(p_i) = b$.
    Berdasarkan definisi fungsi di atas *b = 0* ,
    sedemikian sehingga $f^*(p_i) = 0$.
  - *i = 1*
    Ambil sembarang $b \in P$
    Akan dibuktikan $\exists p_i \in V \ni f^*(p_i) = b$.
    Berdasarkan definisi fungsi di atas *b = -n*,
    sedemikian sehingga $f^*(p_i) = -n$.
  - *i = 2, …, n-1*
    Ambil sembarang $b \in P$
    Akan dibuktikan $\exists p_i \in V \ni f^*(p_i) = b$.
    Berdasarkan definisi fungsi di atas $b = (-1)^{i-1}(i-1)$,
    sedemikian sehingga $f^*(p_i) = (-1)^{i-1}(i-1)$.

- $i = n$

  Ambil sembarang $b \in P$

  Akan dibuktikan $\exists p_i \in V \ni f^*(p_i) = b$.

  Berdasarkan definisi fungsi di atas $b = n\text{-}1$,

  sedemikian sehingga $f^*(p_i) = n - 1$.

➢ Injektif

- $i = 0$

  Ambil sembarang $f^*(p_i'), f^*(P_i") \in P \ni f^*(p_i') = f^*(P_i")$

  Akan dibuktikan $p_i' = p_i"$

  Berdasarkan definisi fungsi di atas

  $f^*(p_i') = 0$ dan $f^*(p_i") = 0$ maka $f^*(p_i') = f^*(p_i") = 0$,

  sehingga $p_i' = p_i"$.

- $i = 1$

  Ambil sembarang $f^*(p_i'), f^*(P_i") \in P$ dengan $f^*(p_i') = f^*(P_i")$

  Akan dibuktikan $p_i' = p_i"$

  Berdasarkan definisi fungsi di atas $f^*(p_i') = -n$ dan $f^*(p_i") = -n$ maka $f^*(p_i') = f^*(p_i") = -n$,

  sehingga $p_i' = p_i"$.

- $i = 2, \ldots, n\text{-}1$

  Ambil sembarang $f^*(p_i'), f^*(P_i") \in P$ dengan $f^*(p_i') = f^*(P_i")$

  Akan dibuktikan $p_i' = p_i"$

  Berdasarkan definisi fungsi di atas

  $f^*(p_i') = (-1)^{i-1}(i-1)$ dan $f^*(p_i") = (-1)^{i-1}(i-1)$ maka $f^*(p_i') = f^*(p_i") = (-1)^{i-1}(i-1)$,

  sehingga $p_i' = p_i"$.

- $i = n$

  Ambil sembarang $f^*(p_i'), f^*(P_i") \in P$ dengan $f^*(p_i') = f^*(P_i")$

  Akan dibuktikan $p_i' = p_i"$

  Berdasarkan definisi fungsi di atas $f^*(p_i') = n - 1$ dan $f^*(p_i") = n - 1$ maka $f^*(p_i') = f^*(p_i") = n - 1$,

  sehingga $p_i' = p_i"$.

Karena $f^*: V \to P$ injektif dan surjektif, maka $f^*: V \to P$ bijektif. Dengan demikian diketahui bahwa setiap anggota himpunan titik-titiknya mempunyai tepat satu label di himpunan label titik-titiknya.

ii. Untuk *n* genap

Pelabelan pada tiap-tiap garisnya dilakukan dengan 2 tahap, yaitu:

a. *spoke* yang pertama cp_1, cp_2, ..., cp_{n-1}, cp_n dilabeli dengan aturan fungsi berikut:

$$f(cp_i) = \begin{cases} i & \text{, untuk } i \text{ ganjil} \\ -i & \text{, untuk } i \text{ genap} \\ n & \text{, untuk } i = n \end{cases}$$

di mana $i = 1,2,\cdots,n$. Sehingga diperoleh label garis pada *spoke* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} &i = 1 \to f(cp_1) = i = 1 \\ &i = 2 \to f(cp_2) = -i = -2 \\ &i = 3 \to f(cp_3) = i = 3 \\ &i = 4 \to f(cp_4) = -i = -4 \\ &\quad \vdots \\ &i = n-2 \to f(cp_{n-2}) = -i = -(n-2) \\ &i = n-1 \to f(cp_{n-1}) = i = n-1 \\ &i = n \to f(cp_n) = n. \end{aligned}$$

Didefinisikan $E' = \{cp_1, cp_2, cp_3, \cdots, cp_{2n}\}$ dan $Q' = \{\pm 1, \pm 2, \cdots, \pm n\}$. $f: E' \to Q'$ bijektif jika f injektif dan surjektif.

- Surjektif : $(\forall a \in Q')(\exists cp_i \in E') \ni f(cp_i) = a$
  - *i* ganjil
    Ambil sembarang $a \in Q'$.
    Akan dibuktikan $(\exists cp_i \in E') \ni f(cp_i) = a$.
    Berdasarkan definisi fungsi di atas $a = i$, sedemikian sehingga $f(cp_i) = i$
  - *i* genap
    Ambil sembarang $a \in Q'$.
    Akan dibuktikan $(\exists cp_i \in E') \ni f(cp_i) = a$.

Berdasarkan definisi fungsi di atas a = -i,
sedemikian sehingga $f(cp_i) = -i$

- $i = n$
  Ambil sembarang $a \in Q'$
  Akan dibuktikan $(\exists cp_i \in E') \ni f(cp_i) = a$
  Berdasarkan definisi fungsi di atas a = n,
  sedemikian sehingga $f(cp_i) = n$

➢ Injektif : $(\forall f(cp_i'), f(cp_i'') \in Q'), f(cp_i') = f(cp_i'') \Rightarrow cp_i' = cp_i''$

- i ganjil
  Ambil sembarang $f(cp_i'), f(cp_i'') \in Q'$ dengan $f(cp_i') = f(cp_i'')$
  Akan dibuktikan $cp_i' = cp_i''$
  Berdasarkan definisi fungsi di atas $f(cp_i') = i$ dan $f(cp_i'') = i$, $f(cp_i') = f(cp_i'') = i$.
  Sehingga $cp_i' = cp_i''$
- i genap
  Ambil sembarang $f(cp_i'), f(cp_i'') \in Q'$ dengan $f(cp_i') = f(cp_i'')$
  Akan dibuktikan $cp_i' = cp_i''$
  Berdasarkan definisi fungsi di atas $f(cp_i') = -i$ dan $f(cp_i'') = -i$, $f(cp_i') = f(cp_i'') = -i$.
  Sehingga $cp_i' = cp_i''$.
- $i = n$
  Ambil sembarang $f(cp_i'), f(cp_i'') \in Q'$ dengan $f(cp_i') = f(cp_i'')$
  Akan dibuktikan $cp_i' = cp_i''$
  Berdasarkan definisi fungsi di atas $f(cp_i') = n$ dan $f(cp_i'') = n$, $f(cp_i') = f(cp_i'') = n$.

Sehingga $cp_i' = cp_i''$.

Untuk *spoke* yang lain yaitu cp_{n+1}, cp_{n+2}, …, cp_{2n-1}, cp_{2n} dilabeli secara '*skew-symmetrically*' dari label garis yang telah diperoleh di atas, sehingga diperoleh masing-masing label garis yang lain sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
&f(cp_{n+1}) = -n\\
&f(cp_{n+2}) = -(n-1)\\
&f(cp_{n+3}) = (n-2)\\
&f(cp_{n+4}) = -(n-3)\\
&\quad\vdots\\
&f(cp_{2n-1}) = 2\\
&f(cp_{2n}) = -1
\end{aligned}
$$

b. Selanjutnya melabelkan *path,* garis-garis $p_1p_2, p_2p_3, \cdots, p_{n-1}p_n$ dilabeli dengan aturan fungsi berikut:

$$f(P_iP_{i+1}) = \begin{cases} 0 & \text{, untuk } i = n \\ -(n+i) & \text{, untuk } i \text{ ganjil} \\ n+i & \text{, untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

di mana $i = 1,2,\cdots,n$. Sehingga diperoleh label garis pada *spoke* sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
&i = 1 \rightarrow f(p_1p_2) = -(n+i) = -(n+1)\\
&i = 2 \rightarrow f(p_2p_3) = n+i = n+2\\
&i = 3 \rightarrow f(p_3p_4) = -(n+i) = -(n+3)\\
&i = 4 \rightarrow f(p_4p_5) = n+i = n+4\\
&\quad\vdots\\
&i = n-2 \rightarrow f(p_{n-2}p_{n-1}) = n+i = 2n-2\\
&i = n-1 \rightarrow f(p_{n-1}p_n) = -(n+i) = -(2n-1)\\
&i = n \rightarrow f(p_{n-1}p_n) = 0.
\end{aligned}
$$

Disefiniskan $E'' = \{p_1p_2, p_2p_3, \cdots, p_{2n-1}p_{2n}\}$ dan $Q'' = \{0, \pm(n+1), \pm(n+2), \cdots, \pm(2n-1)\}$. $f: E'' \rightarrow Q''$ bijektif jika *f* injektif dan surjektif.

- Surjektif : $(\forall a \in Q'')(\exists p_ip_{i+1} \in E'') \ni f(p_ip_{i+1}) = a$
  - *i* ganjil
    Ambil sembarang $a \in Q''$
    akan dibuktikan $\exists p_i p_{i+1} \in E'' \ni f(p_i p_{i+1}) = a$

berdasarkan definisi fungsi di atas a = -(n+i),
sedemikian sehingga $f(p_i p_{i+1}) = -(n+i)$

- i genap
  Ambil sembarang $a \in Q"$
  Akan dibuktikan $\exists p_i p_{i+1} \in E" \ni f(p_i p_{i+1}) = a$
  Berdasarkan definisi fungsi di atas a = n+i,
  sedemikian sehingga $f(p_i p_{i+1}) = n+i$
- $i = n$
  Ambil sembarang $a \in Q"$
  Akan dibuktikan $\exists p_i p_{i+1} \in E" \ni f(p_i p_{i+1}) = a$
  berdasarkan definisi fungsi di atas a = 0, sedemikian sehingga $f(p_i p_{i+1}) = 0$

➢ Injektif: $(\forall f(p_i p_{i+1}'), f(p_i p_{i+1}") \in Q"), f(p_i p_{i+1}') = f(p_i p_{i+1}") \Rightarrow p_i p_{i+1}' = p_i p_{i+1}"$

- i ganjil
  Ambil sembarang $f(p_i p_{i+1}'), f(p_i p_{i+1}") \in Q"$
  dengan $f(p_i p_{i+1}') = f(p_i p_{i+1}")$
  Akan dibuktikan $p_i p_{i+1}' = p_i p_{i+1}"$
  Berdasarkan definisi fungsi di atas
  $f(p_i p_{i+1}') = -(n+i)$ dan $f(p_i p_{i+1}") = -(n+i)$,
  $f(p_i p_{i+1}') = f(p_i p_{i+1}") = -(n+i)$.
  Sehingga $p_i p_{i+1}' = p_i p_{i+1}"$
- i genap
  Ambil sembarang $f(p_i p_{i+1}'), f(p_i p_{i+1}") \in Q"$
  dengan $f(p_i p_{i+1}') = f(p_i p_{i+1}")$
  Akan dibuktikan $p_i p_{i+1}' = p_i p_{i+1}"$
  Berdasarkan definisi fungsi di atas
  $f(p_i p_{i+1}') = n+i$ dan $f(p_i p_{i+1}") = n+i$,
  $f(p_i p_{i+1}') = f(p_i p_{i+1}") = n+i$.
  Sehingga $p_i p_{i+1}' = p_i p_{i+1}"$.
- $i = n$
  Ambil sembarang $f(p_i p_{i+1}'), f(p_i p_{i+1}") \in Q"$
  dengan $f(p_i p_{i+1}') = f(p_i p_{i+1}")$
  Akan dibuktikan $p_i p_{i+1}' = p_i p_{i+1}"$

Berdasarkan definisi fungsi di atas $f(p_i p'_{i+1}) = 0$ dan $f(p_i p_{i+1}") = 0$, $f(p_i p'_{i+1}) = f(p_i p_{i+1}") = 0$. Sehingga $p_i p'_{i+1} = p_i p_{i+1}"$.

Untuk garis-garis yang lain yaitu $p_{n+1}p_{n+2}, p_{n+2}p_{n+3}, \cdots, p_{2n-1}p_{2n}$ dilabeli secara '*skew-symmetrically*' dari label garis *path* yang telah diperoleh di atas, sehingga diperoleh masing-masing label garis yang lain sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
&f(p_{n+1}p_{n+2}) = 2n - 1 \\
&f(p_{n+2}p_{n+3}) = -(2n - 2) \\
&f(p_{n+3}p_{n+4}) = 2n - 3 \\
&f(p_{n+4}p_{n+5}) = -(2n - 4) \\
&\qquad \vdots \\
&f(p_{2n-2}p_{2n-1}) = -(n + 2) \\
&f(p_{2n-1}p_{2n}) = n + 1
\end{aligned}
$$

Karena $E' \cup E" = E$ dan $Q' \cup Q" = Q$ dan untuk setiap elemen dalam Q' memiliki tepat satu kawan di E' dan untuk setiap elemen dalam Q" memiliki tepat satu kawan di E", maka untuk setiap elemen dalam $Q = Q' \cup Q"$ memiliki tepat satu kawan di $E = E' \cup E"$. Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa fungsi $f: E \to Q$ satu-satu dan onto. Karena $f: E \to Q$ satu-satu dan onto maka jelas bahwa $f: E \to Q$ bijektif.

Setelah semua garis pada graf *fan* terlabeli, langkah selanjutnya melabelkan titik-titik pada graf *fan.* titik-titik pada graf *fan* F_{2n+1} dilabeli dengan himpunan label titik-titiknya di mana fungsi $f^*: V \to P$ yang didefinisikan $f^*(u) \equiv \sum_{uv \in E(G)} f(uv)$ diuraikan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
f^*(c) &= 0 \\
f^*(p_1) &= 1 + \left(-(n + 1)\right) = -n \\
f^*(p_n) &= n + (-(2n - 1)) + 0 = -(n - 1) \\
f^*(p_i) &= (-1)^{i-1} i + (-1)^{i-1}(n + i - 1) + (-1)^i (n + i) \\
&= (-1)^{i-1}(i - 1) \text{ Untuk } i = 2, \ldots, n - 1,
\end{aligned}
$$

atau dapat ditulis dengan

$$f^*(p_i) = \begin{cases} 0 & , i = 0 \\ -n & , i = 1 \\ (-1)^{i-1}(i-1) & , i = 2, \cdots, n-1 \\ -(n-1) & , i = n \end{cases}$$

di mana $p_0 = c$ dan $f^*(p_i)$ juga fungsi bijektif, sehingga diperoleh himpunan label titik-titiknya sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
&i = 0 \rightarrow f^*(p_0) = f(c) = 0 \\
&i = 1 \rightarrow f^*(p_1) = -n \\
&i = 2 \rightarrow f^*(p_2) = (-1)^{2-1}(2-1) = -1 \\
&i = 3 \rightarrow f^*(p_3) = (-1)^{3-1}(3-1) = 2 \\
&i = 4 \rightarrow f^*(p_4) = (-1)^{4-1}(4-1) = -3 \\
&i = 5 \rightarrow f^*(p_5) = (-1)^{5-1}(5-1) = 4 \\
&\quad\vdots \\
&i = n \rightarrow f^*(P_n) = -(n-1).
\end{aligned}$$

Sedangkan titik-titik yang lain yaitu untuk $i > n$ dilabeli secara *'skew-symmetrically'* dari pelabelan titik-titik $\{p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}, p_n\}$ yang sudah didapatkan.

$f^*: V \rightarrow P$ bijektif jika f^* injektif dan surjektif.

- Surjektif
  - *i = 0*
    Ambil sembarang $b \in P$
    Akan dibuktikan $\exists p_i \in V \ni f^*(p_i) = b$.
    Berdasarkan definisi fungsi di atas *b = 0* ,
    sedemikian sehingga $f^*(p_i) = 0$.
  - *i = 1*
    Ambil sembarang $b \in P$
    Akan dibuktikan $\exists p_i \in V \ni f^*(p_i) = b$.
    Berdasarkan definisi fungsi di atas *b = -n*,
    sedemikian sehingga $f^*(p_i) = -n$.
  - *i = 2, …, n-1*
    Ambil sembarang $b \in P$
    Akan dibuktikan $\exists p_i \in V \ni f^*(p_i) = b$.
    Berdasarkan definisi fungsi di atas $b = (-1)^{i-1}(i-1)$,
    sedemikian sehingga $f^*(p_i) = (-1)^{i-1}(i-1)$.
  - *i = n*

Ambil sembarang $b \in P$

Akan dibuktikan $\exists p_i \in V \ \ni f^*(p_i) = b$.

Berdasarkan definisi fungsi di atas *b* = *n-1*,

sedemikian sehingga $f^*(p_i) = n - 1$.

- Injektif
  - *i = 0*

    Ambil sembarang $f^*(p_i'), f^*(P_i") \in P$ dengan $f^*(p_i') = f^*(P_i")$

    Akan dibuktikan $p_i' = p_i"$

    Berdasarkan definisi fungsi di atas $f^*(p_i') = 0$ dan $f^*(p_i") = 0$ maka $f^*(p_i') = f^*(p_i") = 0$,

    sehingga $p_i' = p_i"$.
  - *i = 1*

    Ambil sembarang $f^*(p_i'), f^*(P_i") \in P$ dengan$f^*(p_i') = f^*(P_i")$

    Akan dibuktikan $p_i' = P_i"$

    Berdasarkan definisi fungsi di atas $f^*(p_i') = -n$ dan $f^*(p_i") = -n$ maka $f^*(p_i') = f^*(p_i") = -n$,

    sehingga $p_i' = p_i"$.
  - *i = 2, …, n-1*

    Ambil sembarang $f^*(p_i'), f^*(P_i") \in P$ dengan$f^*(p_i') = f^*(P_i")$

    Akan dibuktikan $p_i' = p_i"$

    Berdasarkan definisi fungsi di atas $f^*(p_i') = (-1)^{i-1}(i-1)$ dan $f^*(p_i") = (-1)^{i-1}(i-1)$ maka $f^*(p_i') = f(p_i") = (-1)^{i-1}(i-1)$,

    sehingga $p_i' = p_i"$.
  - *i = n*

    Ambil sembarang $f^*(p_i'), f^*(P_i") \in P$ dengan$f^*(p_i') = f^*(P_i")$

    Akan dibuktikan $p_i' = p_i"$

    Berdasarkan definisi fungsi di atas $f^*(p_i') = n - 1$ dan $f^*(p_i") = n - 1$ maka $f^*(p_i') = f(p_i") = n - 1$, sehingga $p_i' = p_i"$.

Karena $f^*: V \to P$ injektif dan surjektif, maka $f^*: V \to P$ bijektif. Dengan demikian diketahui bahwa setiap anggota himpunan titik-titiknya mempunyai tepat satu label di himpunan label titik-titiknya.

Karena pasangan (f, f^*) pada graf *fan* F_{2n+1} keduanya sama-sama bijektif, maka *f* disebut pelabelan *super edge-graceful*.

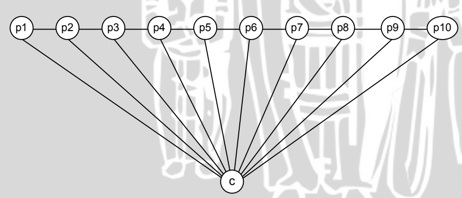
Langkah-langkah pelabelan *super edge-graceful* pada pada graf *fan* F_{2n+1} adalah sebagai berikut:

1. Mengkonstruksi graf *fan*
   a. Mengkonstruksi P_n secara horizontal dan K_1 di bawah P_n.
   b. Mengkonstruksi *spoke* (garis-garis yang *incident* antara K_1 dan P_n).
2. Tentukan jumlah titik-titik dan jumlah garis-garis pada graf F_{2n+1}.
3. Tentukan himpunan label titik-titik dan himpunan label garis-garis sesuai definisi.
4. Labeli garis-garis pada graf *fan* F_{2n+1} dengan fungsi $f: E \to Q$ bijektif.
5. Labeli titik-titik pada graf *fan* F_{2n+1} dengan fungsi $f^*: V \to P$ bijektif.
6. Graf *fan* F_{2n+1} memenuhi aturan *super edge-graceful*, maka *f* merupakan pelabelan *super edge-graceful* pada graf *fan*.

Bentuk skematis langkah-langkah pelabelan *super edge-graceful* pada graf *fan* F_{2n+1} dapat dilihat pada Lampiran 1.

Contoh 3.1:
Pelabelan *super edge-graceful* pada graf F_{11}.

Dapat diketahui jumlah titik pada Graf F_{11} adalah 11 dan jumlah garisnya adalah $2n - 3 = (2.(11)) - 3 = 22 - 3 = 19$ sebagaimana terlihat pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Graf F_{11}

Himpunan titik-titik dan himpunan garis-garisnya berturut-turut adalah sebagai berikut:

$V = \{c, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9, p_{10}\}$

$E = \{cp_1, cp_2, cp_3, cp_4, cp_5, cp_6, cp_7, cp_8, cp_9, cp_{10}, p_1p_2, p_2p_3, p_3p_4, p_4p_5, p_5p_6, p_6p_7, p_7p_8, p_8p_9, p_9p_{10}\}$.

$F_{2n+1} = F_{11} \rightarrow\ 2n + 1 = 11$

$n = 5$ (n ganjil)

p = 2n+1 = 2(5)+1 = 11

q = 4n-1 = 4(5)-1 = 19

Karena jumlah titik-titik dan garis-garisnya ganjil, maka himpunan label titik-titik dan himpunan label garis-garisnya adalah sebagai berikut:

$P = \left\{-\frac{p-1}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{p-1}{2}\right\}$

Karena *p = 11* maka $P = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5\}$, dan

$Q = \left\{-\frac{q-1}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{q-1}{2}\right\}$

Karena *q = 19* maka $Q = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6, \pm7, \pm8, \pm9\}$.

Pelabelan garisnya sebagai berikut:

1. *Spoke* pada graf F_{2n+1} dilabeli dengan $\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5\}$.
   spoke pertama $cp_1, cp_2, cp_3, cp_4, cp_5$ dilabeli sebagaimana berikut:

   $i = 1 \rightarrow f(cp_1) = i = 1$
   $i = 2 \rightarrow f(cp_2) = -i = -2$
   $i = 3 \rightarrow f(cp_3) = i = 3$
   $i = 4 \rightarrow f(cp_4) = -i = -4$
   $i = 5 = n \rightarrow f(cp_5) = -n = -5$

   Untuk *spoke* yang lain yaitu $cp_6, cp_7, cp_8, cp_9, cp_{10}$ dilabeli secara '*skew-symmetrically*' dari label *spoke* di atas sehingga masing-masing label *spoke* yang lain adalah sebagai berikut:

   $f(cp_6) = 5$
   $f(cp_7) = 4$
   $f(cp_8) = -3$
   $f(cp_9) = 2$
   $f(cp_{10}) = -1$

2. *Path* pada graf F_{2n+1} dilabeli dengan $\{0, \pm 6, \pm 7, \pm 8, \pm 9\}$.
   Path $p_1p_2, p_2p_3, p_3p_4, p_4p_5, p_5p_6$ dilabeli sebagaimana berikut:

$$i = 1 \rightarrow f(p_1p_2) = -(n + i) = -(5 + 1) = -6$$
$$i = 2 \rightarrow f(p_2p_3) = n + i = 5 + 2 = 7$$
$$i = 3 \rightarrow f(p_3p_4) = -(n + i) = -(5 + 3) = -8$$
$$i = 4 \rightarrow f(p_4p_5) = n + i = 5 = 4 = 9$$
$$i = 5 = n \rightarrow f(p_5p_6) = 0$$

   Untuk *path* yang lain yaitu $p_6p_7, p_7p_8, p_8p_9, p_9p_{10}$ dilabeli secara '*skew-symmetrically*' dari label *path* di atas sehingga masing-masing label *path* yang lain adalah sebagai berikut:

$$f(p_6p_7) = -9$$
$$f(p_7p_8) = 8$$
$$f(p_8p_9) = -7$$
$$f(p_9p_{10}) = 6$$

Dari pelabelan *spoke* dan *path* diatas diketahui bahwa *f* berkorespodensi satu-satu (bijektif).

Pelabelan titiknya adalah sebagaimana berikut:

$f^*: V \rightarrow P$ didefinisikan dengan:

$$f^*(p_i) = \begin{cases} 0 & , i = 0 \\ -n & , i = 1 \\ (-1)^{i-1}(i-1) & , i = 2, \cdots, n-1 \\ n-1 & , i = n \end{cases}$$

$$f^*(p_0) = f^*(c) = 0$$
$$f^*(p_1) = -n = -5$$
$$f^*(p_2) = (-1)^{2-1}(2-1) = (-1)^1(1) = -1$$
$$f^*(p_3) = (-1)^{3-1}(3-1) = (-1)^2(2) = 2$$
$$f^*(p_4) = (-1)^{4-1}(4-1) = (-1)^3(3) = -3$$
$$f^*(p_5) = f^*(p_n) = n - 1 = 5 - 1 = 4$$

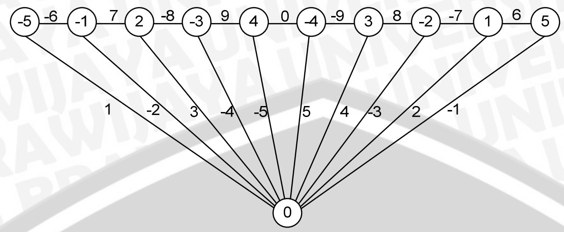
Untuk *i > 5*, titik-titiknya dilabeli secara '*skew-symmetrically*' dari bobot yang telah diperoleh pada titik-titik sebelumnya yaitu:

$$f^*(p_6) = -4$$
$$f^*(p_7) = 3$$
$$f^*(p_8) = -2$$
$$f^*(p_9) = 1$$
$$f^*(p_{10}) = 5.$$

Dari pelabelan titik-titiknya diatas, diketahui bahwa f^* berkorespondensi satu-satu (bijektif).

Sehingga F_{11} dapat dilabeli dengan aturan *super edge-graceful* sebagaimana terlihat pada Gambar 3.2.

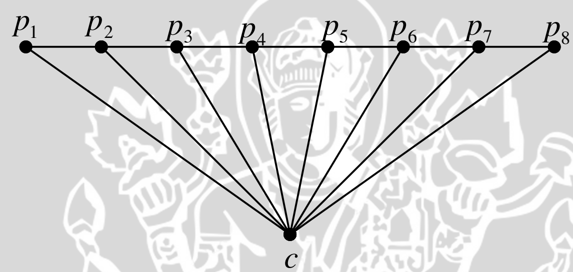
Jadi, f adalah pelabelan *super edge-graceful* dari graf *fan*.



Gambar 3.2 Pelabelan *super edge-graceful untuk* F_{11}

Contoh 3.2:
Pelabelan *super edge-graceful* pada F_9.

Dapat diketahui jumlah titik pada Graf F_9 adalah 9 dan jumlah garisnya adalah $2n - 3 = (2.(9)) - 3 = 18 - 3 = 15$ sebagaimana terlihat pada Gambar 3.3.



Gambar 3.3 Graf F_9

Himpunan titik-titik dan himpunan garis-garisnya berturut-turut adalah sebagai berikut:

$V = \{c, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8\}$

$E = \{cp_1, cp_2, cp_3, cp_4, cp_5, cp_6, cp_7, cp_8, p_1p_2, p_2p_3, p_3p_4, p_4p_5, p_5p_6, p_6p_7, p_7p_8\}$.

$F_{2n+1} = F_9 \rightarrow\ 2n + 1 = 9$

$n = 4$ (n genap)

$p = 2n+1 = 2(4)+1 = 9$

$q = 4n-1 = 4(4)-1 = 15$

Karena jumlah titik-titik dan garis-garisnya ganjil, maka himpunan label titik-titik dan himpunan label garis-garisnya adalah sebagai berikut:

$P = \left\{-\frac{p-1}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{p-1}{2}\right\}$
Karena $p = 9$ maka $P = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4\}$, dan

$Q = \left\{-\frac{q-1}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{q-1}{2}\right\}$
Karena $q = 15$ maka $Q = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 7\}$.

Pelabelan garisnya sebagai berikut:

1. *Spoke* pada graf F_9 dilabeli dengan $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4\}$.
   spoke pertama cp_1, cp_2, cp_3, cp_4 dilabeli sebagaimana berikut:

   $i = 1 \rightarrow f(cp_1) = i = 1$
   $i = 2 \rightarrow f(cp_2) = -i = -2$
   $i = 3 \rightarrow f(cp_3) = i = 3$
   $i = 4 = n \rightarrow f(cp_4) = n = 4$

   Untuk *spoke* yang lain yaitu cp_5, cp_6, cp_7, cp_8 dilabeli secara '*skew-symmetrically*' dari label yang telah diperoleh di atas. Sehingga diperoleh masing-masing label garisnya adalah:

   $f(cp_5) = -4$
   $f(cp_6) = -3$
   $f(cp_7) = 2$
   $f(cp_8) = -1$

2. *Path* pada graf F_9 dilabeli dengan $\{0, \pm 5, \pm 6, \pm 7\}$.
   Path $p_1p_2, p_2p_3, p_3p_4, p_4p_5$ dilabeli sebagaimana berikut:

   $i = 1 \rightarrow f(p_1p_2) = -(n + i) = -(4 + 1) = -5$
   $i = 2 \rightarrow f(p_2p_3) = n + i = 4 + 2 = 6$
   $i = 3 \rightarrow f(p_3p_4) = -(n + i) = -(4 + 3) = -7$
   $i = 4 = n \rightarrow f(p_4p_5) = 0$

   Untuk *path* yang lain yaitu $p_6p_7, p_7p_8, p_8p_9, p_9p_{10}$ dilabeli secara '*skew-symmetrically*' dari label *path* di atas sehingga masing-masing label *path* yang lain adalah sebagai berikut:

   $f(p_5p_6) = 7$
   $f(p_6p_7) = -6$
   $f(p_7p_8) = 5$

Dari pelabelan *spoke* dan *path* diatas, diketahui bahwa f berkoresponsi satu-satu (bijektif).

Pelabelan titiknya adalah sebagaimana berikut:

$f^*: V \rightarrow P$ didefinisikan dengan:

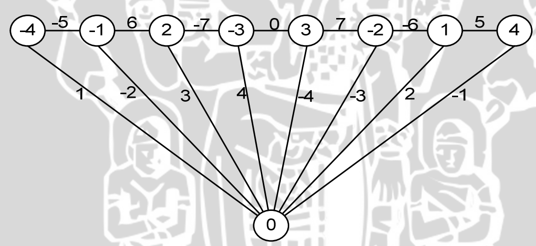
$$f^*(p_i) = \begin{cases} 0 & , i = c = 0 \\ -n & , i = 1 \\ (-1)^{i-1}(i-1) & , i = 2, \cdots, n-1 \\ -(n-1) & , i = n \end{cases}$$

$$f^*(p_0) = f^*(c) = 0$$
$$f^*(p_1) = -n = -4$$
$$f^*(p_2) = (-1)^{2-1}(2-1) = (-1)^1(1) = -1$$
$$f^*(p_3) = (-1)^{3-1}(3-1) = (-1)^2(2) = 2$$
$$f^*(p_4) = f^*(p_n) = -(n-1) = -3$$

Untuk *i > 4*, titik-titiknya dilabeli secara '*skew-symmetrically*' dari bobot yang telah diperoleh pada titik-titik sebelumnya, yaitu:

$$f^*(p_5) = 3$$
$$f^*(p_6) = -2$$
$$f^*(p_7) = 1$$
$$f^*(p_8) = 4.$$

Dari pelabelan titik-titiknya, diketahui bahwa f^* berkoresponsi satu-satu (bijektif).
Sehingga F_9 dapat dilabeli dengan aturan *super edge-graceful* sebagaimana terlihat pada Gambar 3.4.
Jadi, f adalah pelabelan *super edge-graceful* pada graf *fan*.

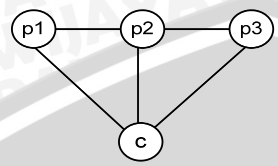


Gambar 3.4 pelabelan *super edge-graceful untuk* F_9

Proposisi 3.2:
Graf fan F_4 bukan *super edge-graceful*

Bukti:
F_4=F_{2n}.
Misalkan F_4 adalah pelabelan *super edge-graceful*.
Maka $f: E(F_4) \rightarrow Q$ bijektif sedemikian sehingga $f^*: V(F_4) \rightarrow P$ adalah bijektif.

Jumlah titik pada Graf F_4 adalah 4 dan jumlah garisnya adalah $2n - 3 = (2.(4)) - 3 = 8 - 3 = 5$ sebagaimana terlihat pada Gambar 3.5.



Gambar 3.5 graf F_4

Himpunan titik-titik dan himpunan garis-garisnya berturut-turut adalah sebagai berikut:
$V = \{c, p_1, p_2, p_3\}$
$E = \{cp_1, cp_2, cp_3, p_1p_2, p_2p_3\}$

$F_{2n} = F_4 \rightarrow 2n = 4$
$n = 2$
$p = 2n = 2(2) = 4$
$q = 4n\text{-}3 = 4(2)\text{-}3 = 5$

Karena jumlah titik-titiknya genap dan jumlah garis-garisnya ganjil, maka himpunan label titik-titik dan himpunan label garis-garisnya adalah sebagai berikut:

$P = \left\{-\frac{p}{2}, \dots, -1, 1, \dots, \frac{p}{2}\right\}$ maka $P = \{-2, -1, 1, 2\}$, dan
$Q = \left\{-\frac{q-1}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{q-1}{2}\right\}$ maka $Q = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Misalkan $f(cp_2) = 0$.

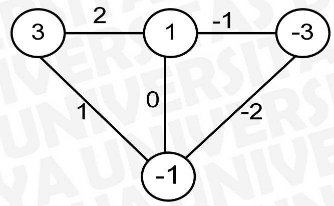
Tanpa mengurangi keumuman, asumsikan $f(p_1p_2) = 2$.

karena $f^*(p_2) \leq 2$ dan $f(cp_2) = 0$, maka $f(p_2p_3) < 0$.

Karena $f^*(p_2) \neq 0$ maka $f(p_2p_3) = -1$.

Karena $f^*(p_3) \neq 0$ maka $f(cp_3) \neq 1$.

Jadi $f(cp_3) = -2$ sehingga pelabelan titik-titiknya dapat diketahui sebagai berikut (lihat Gambar 3.6).



Gambar 3.6 graf F_4

Pada gambar 3.6 di atas, pada pelabelan titik-titiknya terdapat $f^*(p_3) = -3$ dan $f^*(p_3) = 3$ di mana $-3 \notin P$ dan $3 \notin P$, maka f^* tidak bijektif.

Misalkan $f(cp_2) \neq 0$.

Tanpa mengurangi keumuman, asumsikan $f(p_1p_2) = 0$, maka jelas bahwa $f^*(p_1) = f(cp_1)$.

Karena f^* bijektif, maka $f(cp_2) + f(cp_3) \neq 0$.

Karena f bijektif, maka $|f(cp_2)| \neq |f(cp_3)|$.

Karena f bijektif lagi, maka $|f(p_2p_3)| = |f(cp_2)|$ atau $|f(p_2p_3)| = |f(cp_3)|$. Ini menunjukkan bahwa $f^*(p_2) = 0$ atau $f^*(p_3) = 0$.

Hal ini tidak mungkin karena $0 \notin P$, maka f^* tidak bijektif.

Oleh karena itu, F_4 tidak dapat dilabeli dengan aturan *super edge-graceful*.
Jadi, F_4 bukan *super edge-graceful*.

Menurut Shiu dan Lam (2004), pelabelan *super edge-graceful* pada graf *fan* F_{2n} masih terbuka.

3.2 Pelabelan *super edge-graceful* pada graf *multi-level wheel*.

Teorema 3.3:
Untuk $n \geq 1$, W_{2n+1} adalah *super edge-graceful.*

Bukti:

Pada graf *wheel* W_{2n+1} ini, himpunan titik-titik dan himpunan garis-garisnya berturut-turut sebagai berikut:
$V = \{c, u_1, u_2, u_3, \cdots, u_{2n}\}$

$E = \{cu_1, cu_2, cu_3, \cdots, cu_{2n}, u_1u_2, u_2u_3, \cdots, u_{2n-1}u_{2n}, , u_{2n}u_1\}$.

Untuk graf W_{a+1}, jumlah titiknya adalah $a+1$ dan jumlah garisnya adalah $2a$. Jika W_{2n+1} maka jumlah titiknya adalah $2n+1$ dan jumlah garisnya adalah:

$$a+1 = 2n+1$$
$$a = 2n$$
$$2a = 2(2n)$$
$$= 4n$$

sehingga dapat diketahui bahwa jumlah titik-titik pada graf W_{2n+1} adalah ganjil dan jumlah gairs-garis pada graf W_{2n+1} adalah genap. Dari definisi *super edge-graceful*, himpunan label titik-titik pada graf yang jumlah titik-titiknya ganjil adalah

$$P = \left\{-\frac{p-1}{2}, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, \frac{p-1}{2}\right\}$$

dan himpunan label garis-garis pada graf yang jumlah garisnya genap adalah

$$Q = \left\{-\frac{q}{2}, \cdots, -1, 1, \cdots, \frac{q}{2}, \right\},$$

diketahui graf *wheel* W_{2n+1}
$p = 2n+1$, maka $P = \{-n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n\}$
$q = 4n$, maka $Q = \{-2n, \ldots, -1, 1, \ldots, 2n\}$.

Setelah himpunan label titik-titik dan himpunan label garis-garisnya diketahui, berikutnya melabelkan garis pada graf *wheel.* Fungsi pada pelabelan garis ini adalah $f: E \to Q$ dan f bijektif.

Pelabelan garis-garis pada graf *wheel* ini dibagi dua tahap, yaitu:

a. *Spoke* pada $cu_1, cu_2, \ldots, cu_{2n}$ dilabeli dengan $\{-1, 1, -2, 2, \ldots, -n, n\}$ searah jarum jam atau dapat dilabeli dengan fungsi $f(cu_{2i-1}) = -i$ dan $f(cu_{2i}) = i$, untuk $1 \leq i \leq n$.
$f: E \to Q$
$i = 1 \to f(cu_{2i-1}) = f(cu_1) = -1$, dan
$f(cu_{2i}) \quad = f(cu_2) = 1$
$i = 2 \to f(cu_{2i-1}) = f(cu_3) = -2$, dan
$f(cu_{2i}) \quad = f(cu_4) = 2$
$\vdots$
$i = n \to f(cu_{2i-1}) = f(cu_{2n-1}) = -n$, dan
$f(cu_{2i}) \quad = f(cu_{2n}) = n$.

b. Kemudian garis-garis pada *cycle* $u_{2n}u_1$, u_1u_2, …, $u_{2n-1}u_{2n}$ dilabeli dengan $\{n+1, -(n+1), \ldots, 2n, -2n\}$ searah jarum jam atau dapat dilabeli dengan fungsi $f(u_{2i-2}u_{2i-1}) = n+i$ dan $f(u_{2i-1}u_{2i}) = -(n+i)$, untuk $1 \le i \le n$. Pada pelabelan ini, dimisalkan $u_0 = u_{2n}$.

$i = 1 \rightarrow f(u_{2i-2}u_{2i-1}) = f(u_0u_1) = f(u_{2n}u_1) = n+1$, dan
$\qquad f(u_{2i-1}u_{2i}) \quad = f(u_1u_2) = -(n+1)$
$i = 2 \rightarrow f(u_{2i-2}u_{2i-1}) = f(u_2u_3) = n+2$, dan
$\qquad f(u_{2i-1}u_{2i}) \quad = f(u_1u_2) = -(n+2)$
$\vdots$
$i = n \rightarrow f(u_{2i-2}u_{2i-1}) = f(u_{2n-2}u_{2n-1}) = 2n$, dan
$\qquad f(u_{2i-1}u_{2i}) \quad = f(u_{2n-1}u_{2n}) \quad = -2n$

Setiap anggota dari himpunan garis-garisnya memiliki tepat satu label pada himpunan label garis-garisnya. Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa fungsi $f: E \rightarrow Q$ adalah fungsi satu-satu dan *onto* (berkorespondensi satu-satu). Karena $f: E \rightarrow Q$ adalah satu-satu dan *onto* maka jelas bahwa $f: E \rightarrow Q$ bijektif.

Langkah selanjutnya melabelkan titik-titik pada graf *wheel*. Fungsi pelabelan titiknya adalah $f^*: V \rightarrow P$ yang didefinisikan $f^*(u) \equiv \sum_{uv \in E(G)} f(uv)$.

Dari pelabelan *spoke* diatas dapat diketahui bahwa label *core* adalah nol, $f^*(c) = 0$. Dan titik yang lain dilabeli sebagaimana berikut:

Untuk $1 \le i \le n$, maka

$$\begin{aligned} f^*(u_{2i-1}) &= f(u_{2i-2}u_{2i-1}) + f(u_{2i-1}u_{2i}) + f(cu_{2i-1}) \\ &= n + i - (n+i) - i \\ &= -i \\ f^*(u_{2i-2}) &= f(u_{2i-3}u_{2i-2}) + f(u_{2i-2}u_{2i-1}) + f^*(cu_{2i-2}) \\ &= -(n+i-1) + (n+i) + (i-1) \\ &= i, \end{aligned}$$

sehingga diperoleh label dari setiap titik pada graf *wheel* sebagai berikut:

$i = 1 \rightarrow f^*(u_{2i-1}) = f^*(u_1) = -1$, dan
$\qquad f^*(u_{2i-2}) = f^*(u_0) = f^*(u_{2n}) = 1$
$i = 2 \rightarrow f^*(u_{2i-1}) = f^*(u_3) = -2$, dan
$\qquad f^*(u_{2i-2}) = f^*(u_2) = 2$
$i = 3 \rightarrow f^*(u_{2i-1}) = f^*(u_5) = -3$, dan
$\qquad f^*(u_{2i-2}) = f^*(u_4) = 3$

$\vdots$

$i = n \rightarrow f^*(u_{2i-1}) = f^*(u_{2n-1}) = -n$, dan

$f^*(u_{2i-2}) = f^*(u_{2n-2}) = n$.

Dari hasil di atas dapat diketahui bahwa setiap anggota dari himpunan titik-titik pada graf *wheel* mempunyai tepat satu anggota pada himpunan label titik-titiknya. Oleh karena itu, pelabelan pada titik-titik dikatakan satu-satu dan *onto*. Karena pelabelan titik-titiknya adalah satu-satu dan *onto*, maka f^* adalah bijektif.

Karena pasangan pemetaan (f, f^*) pada graf *wheel* W_{2n+1} keduanya sama-sama bijektif, maka f disebut pelabelan *super edge-graceful*.

Dari pembuktian di atas, dapat diketahui langkah-langkah pelabelan *super edge-graceful* pada graf *wheel* W_{2n+1} adalah sebagai berikut:

1. Mengkonstruksi graf *wheel*
   a. Mengkonstruksi C_n dan K_1 terletak di tengah *cycle*.
   b. Mengkonstruksi *spoke*.
2. Menentukan jumlah titik-titik dan jumlah garis-garis pada graf W_{2n+1}.
3. Menetukan himpunan label titik-titik dan himpunan label garis-garis sesuai dengan definisi.
4. Labeli garis-garis pada graf W_{2n+1} di mana f bijektif dengan dua tahap, yaitu:
   a. Labeli *spoke* dengan fungsi $f(cu_{2i-1}) = -i$ dan $f(cu_{2i}) = i$, untuk $1 \leq i \leq n$.
   b. Labeli *cycle* dengan fungsi $f(u_{2i-2}u_{2i-1}) = n + i$ dan $f(u_{2i-1}u_{2i}) = -(n+1)$, untuk $1 \leq i \leq n$.
5. Labeli titik-titik pada graf W_{2n+1} dengan fungsi

$$
\begin{aligned}
f^*(u_{2i-1}) &= f(u_{2i-2}u_{2i-1}) + f(u_{2i-1}u_{2i}) + f(cu_{2i-1}) \\
&= n + i - (n + i) - i \\
&= -i \\
f^*(u_{2i-2}) &= f(u_{2i-3}u_{2i-2}) + f(u_{2i-2}u_{2i-1}) + f^*(cu_{2i-2}) \\
&= -(n + i - 1) + (n + i) + (i - 1) \\
&= i
\end{aligned}
$$

Untuk $1 \leq i \leq n$ dan f^* bijektif.

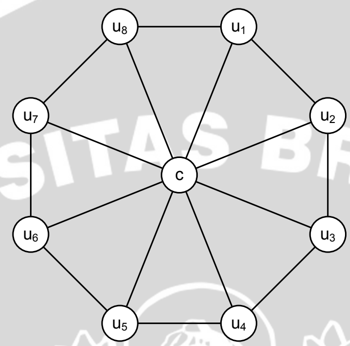
6. Graf *fan* W_{2n+1} memenuhi aturan *super edge-graceful*, maka f merupakan pelabelan *super edge-graceful* pada graf *Wheel*.

Bentuk skematis dari langkah-langkah pelabelan *super edge-graceful* pada graf W_{2n+1} dapat dilihat pada Lampiran 2.

Contoh 3.3:

Pelabelan *super edge-graceful* pada graf W_9.

Jumlah titik pada graf $W_9 = W_{8+1}$ adalah 9 dan jumlah garisnya adalah $2n = 2(8) = 16$ sebagaimana terlihat pada Gambar 3.7 di bawah.



Gambar 3.7 graf W_9

Himpunan titik-titik dan himpunan garis-garisnya berturut-turut adalah sebagai berikut:

$V = \{c, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}$

$E = \{cu_1, cu_2, cu_3, cu_4, cu_5, cu_6, cu_7, cu_8, u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, u_4u_5, u_5u_6, u_6u_7, u_7u_8, u_8u_1\}$.

$W_{2n+1} = W_9 \rightarrow\ 2n + 1 = 9$

$n = 4$

$p = 2n+1 = 2(4)+1 = 9$

$q = 4n = 4(4)= 16$

Karena jumlah titik-titiknya ganjil, maka himpunan label titik-titiknya adalah:

$P = \left\{-\frac{p-1}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{p-1}{2}\right\}$

Karena $p = 9$ maka $P = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4\}$

dan jumlah garis-garisnya genap, maka himpunan label garis-garisnya adalah:

$Q = \left\{-\frac{q}{2}, \dots, -1, 1, \dots, \frac{q}{2}\right\}$

Karena $q = 16$ maka $Q = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 8\}$.

Pelabelan garisnya sebagai berikut:

a. *Spoke* pada cu_1, cu_2, cu_3, cu_4, cu_5, cu_6, cu_7, cu_8 dilabeli dengan {*-1*,*1*, *-2*, *2*, *-3*, *3*, *-4*, *4*} searah jarum jam atau dapat dilabeli dengan fungsi $f(cu_{2i-1}) = -i$ dan $f(cu_{2i}) = i$, untuk $1 \leq i \leq 4$.

$f: E \to Q$

$i = 1 \to f(cu_{2i-1}) = f(cu_1) = -i = -1$, dan
$f(cu_{2i}) \quad = f(cu_2) = i \quad = 1$

$i = 2 \to f(cu_{2i-1}) = f(cu_3) = -i = -2$, dan
$f(cu_{2i}) \quad = f(cu_4) = i \quad = 2$

$i = 3 \to f(cu_{2i-1}) = f(cu_5) = -i = -3$, dan
$f(cu_{2i}) \quad = f(cu_6) = i \quad = 3$

$i = 4 \to f(cu_{2i-1}) = f(cu_7) = -n = -4$, dan
$f(cu_{2i}) \quad = f(cu_8) = n \quad = 4$

Sehingga diperoleh

$f^*(c) = 1 + 2 + 3 + 4 - (1 + 2 + 3 + 4) = 0$

b. Kemudian garis-garis pada *cycle* u_8u_1, u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, u_4u_5, u_5u_6, u_6u_7, u_7u_8 dilabeli dengan {*5*, *-5*, *6*, *-6*, *7*, *-7*, *8*, *-8*} searah jarum jam atau dapat dilabeli dengan fungsi $f(u_{2i-2}u_{2i-1}) = n + i$ dan $f(u_{2i-1}u_{2i}) = -(n + i)$, untuk $1 \leq i \leq 4$. Pada pelabelan ini, dimisalkan $u_0 = u_{2n}$.

$i = 1 \to f(u_{2i-2}u_{2i-1}) = f(u_0u_1) = f(u_{2n}u_1) = 5$, dan
$f(u_{2i-1}u_{2i}) \quad = f(u_1u_2) = -(n + 1) = -5$

$i = 2 \to f(u_{2i-2}u_{2i-1}) = f(u_2u_3) = n + 2 = 6$, dan
$f(u_{2i-1}u_{2i}) \quad = f(u_1u_2) = -(n + 2) = -6$

$i = 3 \to f(u_{2i-2}u_{2i-1}) = f(u_2u_3) = n + 3 = 7$, dan
$f(u_{2i-1}u_{2i}) \quad = f(u_1u_2) = -(n + 3) = -7$

$i = 4 \to f(u_{2i-2}u_{2i-1}) = f(u_{2n-2}u_{2n-1}) = 2n = 8$, dan
$f(u_{2i-1}u_{2i}) \quad = f(u_{2n-1}u_{2n}) = -2n = -8$

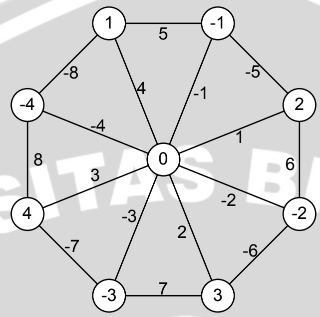
Karena f satu-satu dan *onto* (berkorespodensi satu-satu), maka Fungsi f bijektif.

Pelabelan titiknya adalah sebagaimana berikut:

$i = 1 \to f^*(u_{2i-1}) = f^*(u_1) = -1$, dan
$f^*(u_{2i-2}) = f^*(u_0) = f^*(u_8) = 1$

$$i = 2 \rightarrow f^*(u_{2i-1}) = f^*(u_3) = -2, \text{ dan}$$
$$f^*(u_{2i-2}) = f^*(u_2) = 2$$
$$i = 3 \rightarrow f^*(u_{2i-1}) = f^*(u_5) = -3, \text{ dan}$$
$$f^*(u_{2i-2}) = f^*(u_4) = 3$$
$$i = 4 \rightarrow f^*(u_{2i-1}) = f^*(u_{2n-1}) = -4, \text{ dan}$$
$$f^*(u_{2i-2}) = f^*(u_{2n-2}) = 4.$$

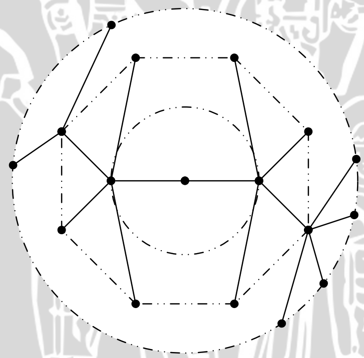
Karena f^* satu-satu dan *onto* maka f^* bijektif.
Sehingga W_9 dapat dilabeli dengan aturan *super edge-graceful* sebagaimana terlihat pada Gambar 3.8 berikut.
Jadi, *f* adalah pelabelan *super edge-graceful* pada graf *wheel*.



Gambar 3.8 Pelabelan *super edge-graceful* untuk W_9

Contoh 3.4:
Pelabelan *super edge-graceful pada* graf *3-level wheel* $W_{(2,\,8,\,6)}$.

Jumlah titik pada graf $W_{(2,\,8,\,6)} = W_{(2+8+6)\,+\,1} = W_{17}$ adalah 17 dan jumlah garisnya adalah $2n = 2(16) = 32$ sebagaimana terlihat pada Gambar 3.9 di bawah.


Gambar 3.9 Graf *3-level wheel* $W_{(2,8,6)}$

$W_{2n+1} = W_{17} \rightarrow\ 2n + 1 = 17$

$n = 8$

p = 2n+1 = 2(8)+1 = 17

q = 4n = 4(8)= 32

Karena jumlah titik-titiknya ganjil, maka himpunan label titik-titiknya adalah:

$P = \left\{-\frac{p-1}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{p-1}{2}\right\}$

Karena *p = 17* maka $P = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6, \pm7, \pm8\}$ dan jumlah garis-garisnya genap, maka himpunan label garis-garisnya adalah:

$Q = \left\{-\frac{q}{2}, \dots, -1, 1, \dots, \frac{q}{2}\right\}$

Karena *q = 32* maka $Q = \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6, \pm7, \pm8, \pm9,$

$\pm10, \pm11, \pm12, \pm13, \pm14, \pm15, \pm16\}$

Pelabelan garisnya sebagai berikut:

Pada graf $W_{(2,8,6)}$ ini terdapat 3 buah cincin dengan 16 *spoke* dan 16 garis pada cincin. Oleh karena itu, himpunan garis Q dipartisi menjadi dua barisan yaitu:

$S = \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6, \pm7, \pm8\}$ untuk himpunan label garis-garis pada *spoke*, dan

$R = \{\pm9,\ \pm10,\ \pm11,\ \pm12,\ \pm13,\ \pm14,\ \pm15,\ \pm16\}$ untuk himpunan label garis-garis pada cincin.

Karena graf $W_{(2,8,6)}$ adalah graf *3-multi level wheel*, maka himpunan *S* dan *R* dipartisi lagi menjadi tiga bagian yaitu sebagai berikut:

Level I: terdapat 2 *spoke* dan 2 garis pada cincin

$S_1 = \{-1,1\}$

$R_1 = \{9, -9\}$

Level II: terdapat 8 *spoke* dan 8 garis pada cincin

$S_2 = \{-2,2, -3,3, -4,4, -5,5\}$

$R_2 = \{10, -10,11, -11,12, -12,13, -13\}$

Level III: terdapat 6 *spoke* dan 6 garis pada cincin

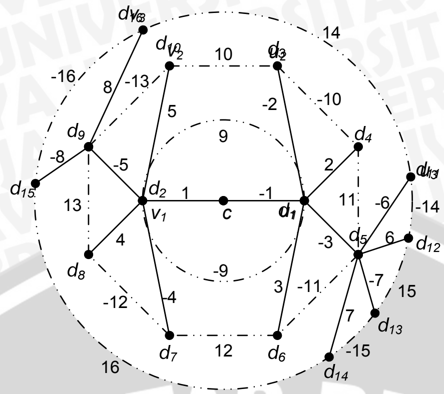
$S_3 = \{-6,6, -7,7, -8,8\}$

$R_3 = \{14, -14,15, -15,16, -16\}$

Selanjutnya dipilih sebuah *spoke* $e_i = u_i x_{i-1}$ dan $e_i' = v_i y_{i-1}$ di mana u_i dan v_i terletak pada cincin *i-th level*, x_{i-1} dan y_{i-1} terletak pada cincin *(i-1)-level* dan $x_0 =\ y_0$ adalah *core*.

Spoke i-th level dilabeli dengan himpunan barisan S_i searah jarum jam dimulai dari e_i di mana i = 1,2,3.

Setelah semua *spoke* terlabeli, selanjutnya garis-garis yang terletak pada cincin *i-th level* dilabeli dengan himpunan barisan R_i searah jarum jam dimulai dari u_iv_i, i = 1,2,3. Hingga semua garis pada graf $W_{(2,8,6)}$ terlabeli sebagaimana Gambar 3.10 berikut.



Gambar 3.10 Pelabelan garis pada graf $W_{(2,8,6)}$

Semua garis pada graf $W_{(2,8,6)}$ memiliki tepat satu label pada himpunan label garisnya. Sehingga f berkorespondensi satu-satu (bijektif).

Pada Gambar 3.10 di atas, dapat dihitung hasil dari pelabelan tiap-tiap titiknya. Misalkan himpunan titik-titiknya adalah $\{c, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8, d_9, d_{10}, d_{11}, d_{12}, d_{13}, d_{14}, d_{15}, d_{16}\}$,
maka pelabelannya adalah sebagai berikut:

$$f^*(c) = -1 + 1 = 0$$
$$f^*(d_1) = -1 + (-2) + 2 + (-3) + 3 + (-9) + 9 = -1$$
$$f^*(d_2) = 1 + (-4) + 4 + (-5) + 5 + (-9) + 9 = 1$$
$$f^*(d_3) = -2 + 10 + (-10) = -2$$
$$f^*(d_4) = 2 + 11 + (-10) = 3$$
$$f^*(d_5) = -3 + 6 + (-6) + 7 + (-7) + 11 + (-11) = -3$$
$$f^*(d_6) = 3 + 12 + (-11) = 4$$
$$f^*(d_7) = -4 + 12 + (-12) = -4$$
$$f^*(d_8) = 4 + 13 + (-12) = 5$$
$$f^*(d_9) = -5 + 8 + (-8) + 13 + (-13) = -5$$
$$f^*(d_{10}) = 5 + 10 + (-13) = 2$$
$$f^*(d_{11}) = -6 + 14 + (-14) = -6$$
$$f^*(d_{12}) = 6 + 15 + (-14) = 7$$
$$f^*(d_{13}) = -7 + 15 + (-15) = -7$$
$$f^*(d_{14}) = 7 + 16 + (-15) = 8$$

$f^*(d_{15}) = -8 + 16 + (-16) = -8$
$f^*(d_{16}) = 8 + 14 + (-16) = 6$

Titik-titik pada graf $W_{(2,8,6)}$ memiliki tepat satu label pada himpunan label titik-titiknya. Maka f^* bijektif.

Karena (f, f^*) keduanya bijektif, maka $W_{(2,8,6)}$ dapat dilabeli dengan aturan *super edge-graceful*.

Jadi, f adalah pelabelan *super edge-graceful* pada graf *multi-level wheel*.

Dari contoh di atas, dapat diketahui langkah-langkah pelabelan *super edge-graceful* pada graf *wheel* $W_{(2,8,6)}$ adalah sebagai berikut:

1. Mengkonstruksi graf $W_{(2,8,6)}$
2. Menentukan jumlah titik dan jumlah garis pada graf $W_{(2,8,6)}$.
3. Menentukan himpunan label titik-titik dan himpunan label garis-garis menurut definisi.
4. Labeli garis-garis pada graf $W_{(2,8,6)}$ yaitu dengan beberapa langkah:
   a. Partisi Q menjadi 2 barisan S dan R.
   b. S dan R dipartisi lagi masing-masing menjadi 3 partisi yaitu S_1, S_2, S_3 dan R_1, R_2, R_3.
   c. dipilih sebuah *spoke* $e_i = u_i x_{i-1}$ dan $e_i^{'} = v_i y_{i-1}$.
   d. Labeli *spoke i-th level* dengan himpunan barisan S_i searah jarum jam dimulai dari e_i di mana i = 1,2,3.
   e. Labeli garis-garis yang terletak pada cincin *i-th level* dengan himpunan barisan R_i searah jarum jam dimulai dari $u_i v_i$, i = 1,2,3.
5. Labeli titik-titik pada graf $W_{(2,8,6)}$ dengan menjumlahkan bobot dari garis-garis yang *incident* dengan tiap titik tertentu.
6. Graf $W_{(2,8,6)}$ dapat dilabeli dengan pelabelan *super edge-graceful*.

Bentuk skematis dari langkah-langkah pelabelan *super edge-graceful* pada graf $W_{(2,8,6)}$ dapat dilihat pada Lampiran 3.

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dalam Skripsi ini adalah:

1. Pelabelan *Super edge-graceful* pada graf *fan* F_{2n+1} dilakukan dengan melabelkan garis pada *spoke* dan garis pada *path* dengan fungsi $f: E \to Q$ adalah bijektif sedemikian sehingga pelabelan titik-titiknya juga bijektif.

   Graf *fan* F_{2n} tidak dapat dilabeli dengan aturan pelabelan *super edge-graceful*.
2. Pelabelan *super edge-graceful* pada graf *wheel* W_{2n+1} dilakukan dengan melabelkan garis pada *spoke* dengan fungsi $f(cu_{2i-1}) = -i$ dan $f(cu_{2i}) = i$ dan garis pada *cycle* dengan fungsi $f(u_{2i-2}u_{2i-1}) = n + i$ dan $f(u_{2i-1}u_{2i}) = -(n + i)$, untuk $1 \leq i \leq n$ di mana f bijektif sedemikian sehingga pelabelan titik-titiknya juga bijektif.

   Pelabelan *super edge-graceful* pada graf *multi-level wheel* $W_{(2,8,6)}$ dilakukan dengan melabelkan garis pada *spoke* dan *cycle* searah jarum jam dengan mempartisi garis pada masing-masing *spoke* dan *cycle* menjadi tiga sehingga pelabelan garisnya bijektif, demikian pula dengan pelabelan titik-titiknya harus bijektif.

4.2 Saran

Skripsi ini hanya membahas pelabelan *super edge-graceful* pada graf *fan* dan graf *multi-level wheel*. Bagi mahasiswa yang berminat dalam bidang ini, diharapkan untuk mengkaji pelabelan ini pada graf *path*, graf *Euler*, graf *actinia* dan lain-lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Chartrand, and R.O. Oellermann. 1996. *Applied and Algorithmic Graph Theory*. Mc Graw-Hill Inc. New York.

Chartrand, and Zhang, P.. 2005. *Introduction To Graph Theory.* Mc Graw-Hill Inc. New York.

Cichacz, S., Froncek, D. dan Xu, W.. 2008. *Super Edge-Graceful Paths*. http://www.math.wvu.edu.pdf. Tanggal akses: 13 Juli 2008.

Clark, J., and D.A. Holton. 1991. *A First Look at Graph Theory*. World Scientific Publishing Company. Singapore.

Dieker, P.F., and W.L. Voxman. 1986. *Discrete Mahematics*. Hacourt Brace jovanovich. New York.

Fletcher, P., H. Joyle, and C.W. Patty. 1991. *Foundatios of Discrete Mathematics*. Pws-Kent Publishing Company. Buston.

Harary, F.. 1994. *Graph Theory*. Addison-weley Publishing Company Inc.

Johnsonbaugh, R.. 1984. *Discrete Mathematics*. MacMillan Publishing Company. New York.

Lee, S-M., wang, L. dan Year, E.M.. 2005. *On Super Edge-Graceful Eulerian Graphs*. http://emmanuelyera.com/d2.pdf. Tanggal akses: 13 Juli 2008.

Lee, S-M. 2005. *How to label a graph edge-gracefully and super edge-gracefully*. Department of Computer Science, San Jose State University. http://math.wba.icon.edu/pl.pdf. Tanggal akses: 11 Maret 2009.

Lipschutz, S., and M.L. Lipson. 2000. *Solved Problem Discrete Mathematics*. McGraw Hill Inc. New York.

Lipschutz, S., and J.J. Schiller. 1995. *Finite Mathematics* Second Edition. McGraw Hill Inc. New York.

Marsudi. 2006. *Buku Diktat Mata Kuliah Teori Graf*. FMIPA Universitas Brawijaya. Malang.

McHugh A.J. 1990. *Algoritmic Graph Theory*. Prentice-Hall Inc. London.

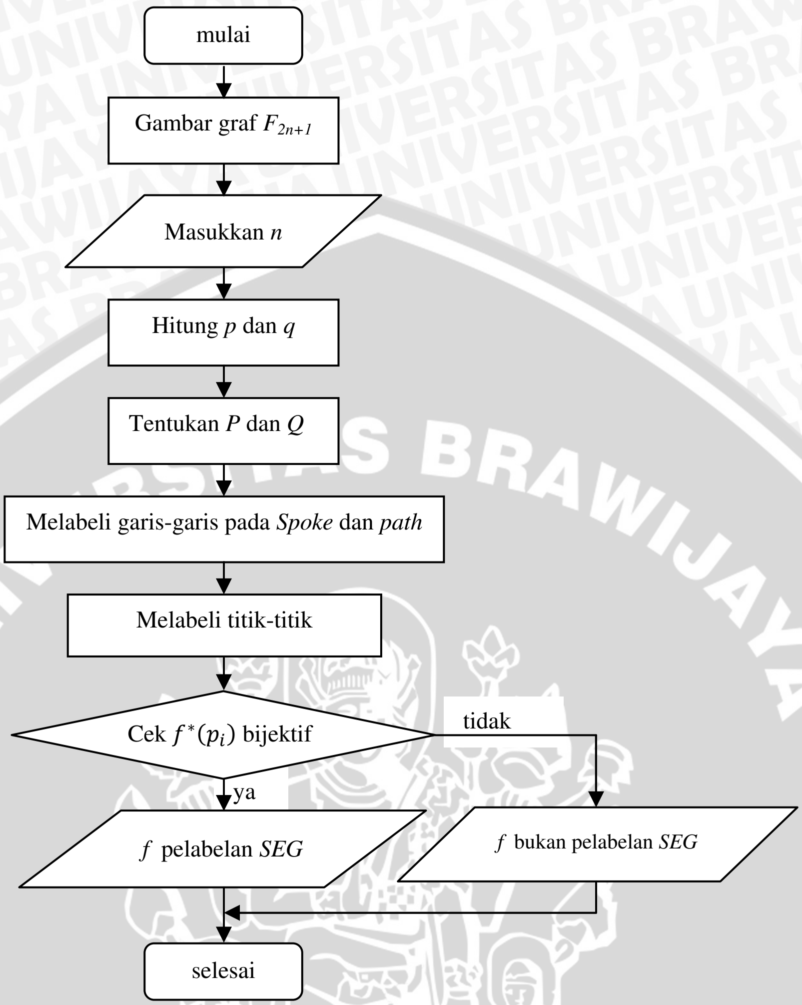
Munir, R. 2005. *Matematika Diskrit,* edisi ketiga. Informatika. Bandung.

Rosen and Kenneth H.. 1999. *Discrete Mahematics and its Application*. McGraw Hill.

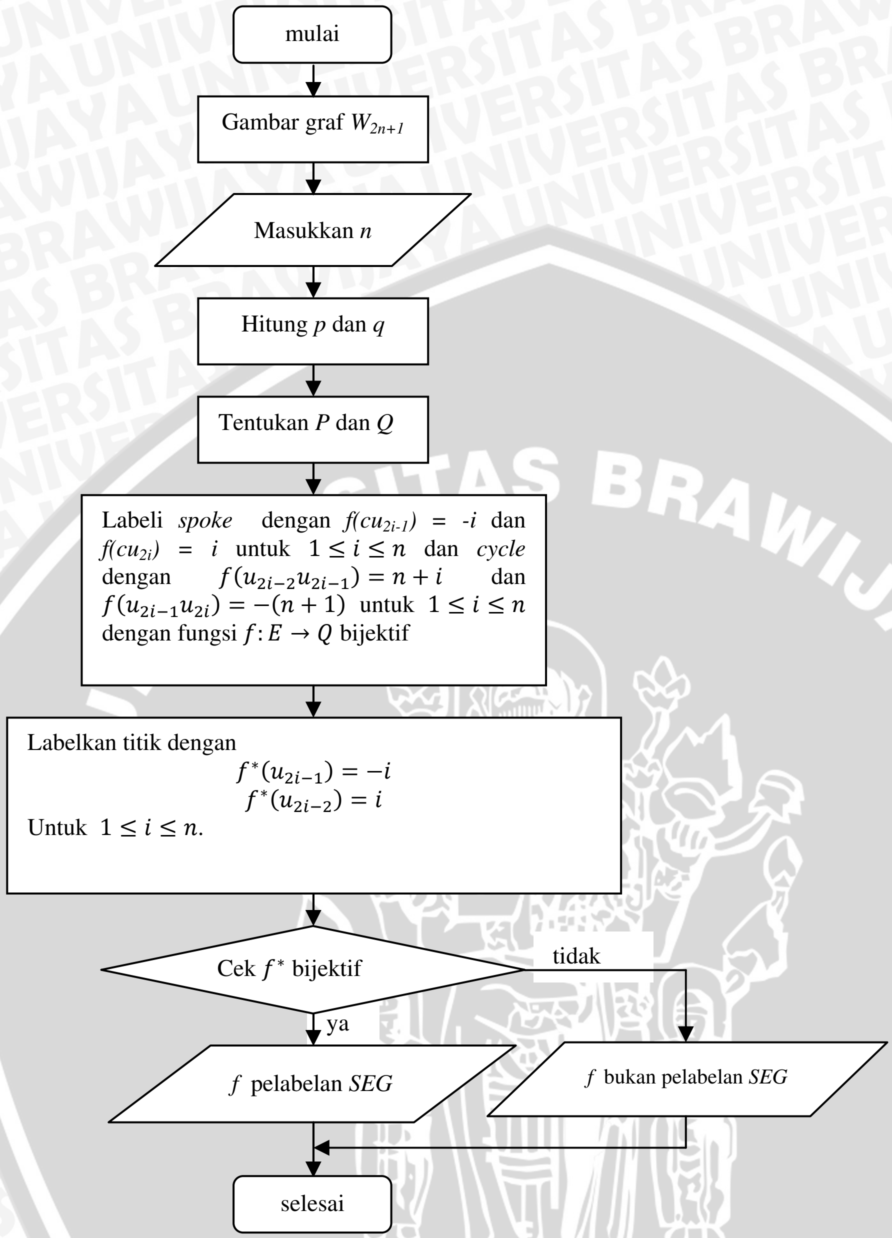
Shiu, W.C., dan Lam, P.C.B.. 2004. *Super-edge-graceful labelings of multi-level wheel graphs, fan graphs and actinia graphs*. http://math.hkbu.edu/hk.pdf. tanggal akses: 13 Juli 2008.

Spring. 2008. *Congruences.* Math 422. Csusm Aitken. http://math.tulane.edu/~dcomm.pdf. tanggal akses: 10 Nopember 2008.

Lampiran 1. Pelabelan *super edge-graceful* (SEG) pada graf *fan* F_{2n+1} dapat disusun dalam diagram alir sebagai berikut:



Lampiran 2. pelabelan *super edge-graceful* (SEG) pada graf W_{2n+1} dapat disusun dalam diagram alir sebagai berikut:



Lampiran 3. pelabelan *super edge-graceful* (SEG) pada graf $W_{(n_1,n_2,n_3)}$ dapat disusun dalam diagram alir sebagai berikut: