

**MODEL MATEMATIKA FERMENTASI ASAM LAKTAT
DENGAN SUBSTRAT LAKTOSA DAN
SUBSTRAT MOLASE**

SKRIPSI

Oleh :
NIA ASTRIE YANTI
0510940044-94



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2009**

**MODEL MATEMATIKA FERMENTASI ASAM LAKTAT
DENGAN SUBSTRAT LAKTOSA DAN
SUBSTRAT MOLASE**

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh :

NIA ASTRIE YANTI

0510940044-94



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2009**

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

**MODEL MATEMATIKA FERMENTASI ASAM LAKTAT
DENGAN SUBSTRAT LAKTOSA DAN
SUBSTRAT MOLASE**

Oleh:

NIA ASTRIE YANTI

0510940044-94

**Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 9 Februari 2009
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar Sarjana
Sains dalam bidang Matematika**

Pembimbing I

Pembimbing II

Dr. Agus Suryanto, MSc

NIP. 132 126 049

Dr. Wuryansari M.K., MSi

NIP. 132 048 784

**Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya**

Dr. Agus Suryanto, MSc

NIP. 132 126 049

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Nia Astrie Yanti
NIM : 0510940044
Jurusan : Matematika
Penulis skripsi berjudul : Model Matematika Fermentasi Asam
Laktat dengan Substrat Laktosa dan
Substrat Molase

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. Isi skripsi yang saya buat benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka skripsi ini.
2. Apabila di kemudian hari ternyata skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 9 Februari 2009
Yang menyatakan,

(Nia Astrie Yanti)
NIM. 0510940044

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



MODEL MATEMATIKA FERMENTASI ASAM LAKTAT DENGAN SUBSTRAT LAKTOSA DAN SUBSTRAT MOLASE

ABSTRAK

Pada skripsi ini dibahas konstruksi dua model matematika fermentasi satu tahap produksi asam laktat menggunakan dua substrat yang berbeda. Model pertama menggunakan substrat laktosa dan model ke dua menggunakan substrat molase. Fermentasi asam laktat dimodelkan dalam bentuk sistem persamaan diferensial biasa non-linier dengan tiga variabel, yaitu konsentrasi substrat (laktosa atau molase), konsentrasi biomassa dan konsentrasi produk (asam laktat). Proses fermentasi satu tahap dipengaruhi adanya keterbatasan konsentrasi substrat, hambatan oleh substrat dan hambatan oleh produk. Hambatan oleh produk pada model pertama terjadi secara linier, sedangkan pada model ke dua terjadi secara ekponensial. Pada kedua model dilakukan simulasi numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dengan beberapa nilai awal. Berdasarkan hasil simulasi, terlihat bahwa ketika tercapai laju konsumsi maksimum, konsentrasi biomassa, konsentrasi substrat dan konsentrasi asam laktat konstan. Secara kualitatif, solusi numerik model pertama sesuai dengan data percobaan. Untuk konsentrasi awal substrat yang terlalu besar, model pertama belum memuaskan, karena simulasi numerik memberikan hasil yang berbeda dari data percobaan. Solusi numerik model ke dua sesuai dengan data percobaan baik secara kualitatif maupun kuantitatif.

Kata kunci : fermentasi asam laktat, laktosa, molase, metode Runge-Kutta orde empat.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



MATHEMATICAL MODEL OF LACTIC ACID FERMENTATION WITH SUBSTRATE LACTOSE AND SUBSTRATE MOLASSES

ABSTRACT

In this final project, two mathematical models of batch culture lactic acid fermentation with two different substrates are constructed. The first model uses substrate lactose and the second model uses substrate molasses. Lactic acid fermentation is modelled by non-linear differential equation system of three variables, namely substrate (lactose or molasses) concentration, biomass concentration and product (lactic acid) concentration. Batch culture of lactic acid fermentation is affected by limitation of substrate concentration, substrate inhibition and product inhibition. Product inhibition in the first model occurs linearly, but in the second model occurs exponentially. Numerical simulations by using fourth order Runge-Kutta method is performed for both models by choosing some initial states. According to our simulations, when maximum consumption rate is reached, the substrates concentration, biomass concentration and lactic acid concentration remain constant. Qualitatively, numerical solutions of the first model agree with experimental data. When initial substrate concentration is too high, the first model is not satisfied, because the numerical simulation gives different results compared to experimental data. Numerical solutions of the second model agree very well with experiment data both qualitatively and quantitatively.

Keywords : lactic acid fermentation, lactose, molasses, the fourth order of Runge-Kutta method.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan bimbingan dan petunjuk-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik dan lancar. Shalawat serta salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW sebagai suri tauladan bagi penulis.

Banyak pihak yang telah memberikan dukungan baik moral maupun spiritual secara langsung maupun tidak langsung dalam penyelesaian skripsi ini. Penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Dr. Agus Suryanto, MSc selaku pembimbing I sekaligus Ketua Jurusan Matematika atas segala bimbingan dan motivasi yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini.
2. Dr. Wuryansari M.K., MSi selaku pembimbing II sekaligus Ketua Program Studi Matematika atas segala bimbingan dan motivasi yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini.
3. Dra. Endang Wahyu H, MSi selaku dosen pembimbing akademik atas segala bimbingan dan motivasi yang telah diberikan.
4. Bapak & ibu dosen Jurusan Matematika atas segala ilmu yang telah diberikan.
5. Suprayogi, STP dan Mas'ud, STP atas segala masukan mengenai fermentasi yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini.
6. Kedua orang tuaku tercinta, saudara-saudaraku tersayang, atas doa, kasih sayang dan dukungan yang telah diberikan.
7. Teman-teman seperjuangan mahasiswa Matematika 2005 atas kebersamaannya selama ini.
8. Seluruh staf dan karyawan Fakultas MIPA Universitas Brawijaya atas kerjasama baik yang telah diberikan.
9. Serta semua pihak yang tidak bisa disebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa tidak ada sesuatu yang sempurna. Penulis dengan senang hati menerima segala masukan, saran dan kritik yang membangun lewat email penulis nea_cuex@telkom.net. Akhir kata, semoga skripsi ini dapat memberi sumbangan bagi dunia sains Indonesia, khususnya di bidang pemodelan matematika.

Malang, 9 Februari 2009

Penulis

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGESAHAN	iii
HALAMAN PERNYATAAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR TABEL	xv
DAFTAR GAMBAR	xvii
DAFTAR LAMPIRAN	xix
DAFTAR SIMBOL	xxi
 BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Perumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan Penelitian	3
 BAB II TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 Persamaan Diferensial	5
2.2 Mekanisme Michaelis-Menten	6
2.3 Metode Runge-Kutta	8
2.4 Fermentasi Asam Laktat	9
2.5 Fermentasi Sistem Tertutup/Satu Tahap (<i>Batch Culture</i>)	10
2.6 Fermentasi Terendam (<i>Submerged</i>)	10
2.7 Biomassa	11
2.8 Molase	11
2.9 Model Luedeking-Piret	11
2.10 Model Hambatan <i>Non-Competitive</i>	12
 BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN	
3.1 Formulasi Model	13
3.1.1 Fermentasi Asam Laktat dengan Substrat Laktosa dan Bakteri <i>Lactococcus lactis</i> NZ133	13

3.1.2 Fermentasi Asam Laktat dengan Substrat Molase dan Bakteri <i>Enterococcus Faecalis RKY1</i>	18
3.2 Penyelesaian Numerik Model Fermentasi Asam Laktat dengan Metode Runge-Kutta	20
3.3 Hasil Simulasi dan Pembahasan	27
3.3.1 Simulasi Model Fermentasi Asam Laktat dengan Substrat Laktosa	24
3.3.2 Simulasi Model Fermentasi Asam Laktat dengan Substrat Molase	29
BAB IV PENUTUP	
4.1 Kesimpulan	35
4.2 Saran	35
DAFTAR PUSTAKA	37
LAMPIRAN	39



DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 3.1 Syarat Awal Model Fermentasi Asam Laktat dengan Substrat Laktosa	25
Tabel 3.2 Nilai Parameter Model Fermentasi Asam Laktat dengan Substrat Laktosa	25
Tabel 3.3 Syarat Awal Model Fermentasi Asam Laktat dengan Substrat Molase	29
Tabel 3.4 Nilai Parameter Model Fermentasi Asam Laktat dengan Substrat Molase	30



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1 Laju reaksi enzim terhadap konsentrasi substrat	7
Gambar 3.1 <i>Flowchart</i> untuk mencari solusi sistem persamaan diferensial pada model pertama dan model ke dua ..	22
Gambar 3.2 <i>Flowchart</i> metode Runge-Kutta orde empat	24
Gambar 3.3 Solusi numerik untuk $X(t)$, $S(t)$ dan $P(t)$ dari model pertama dengan $S_0=20$ g/lit	26
Gambar 3.4 Solusi numerik untuk $X(t)$, $S(t)$ dan $P(t)$ dari model pertama dengan $S_0=40$ g/lit	26
Gambar 3.5 Solusi numerik untuk $X(t)$, $S(t)$ dan $P(t)$ dari model pertama dengan $S_0=60$ g/lit	27
Gambar 3.6 Solusi numerik untuk $X(t)$, $S(t)$ dan $P(t)$ dari model pertama dengan $S_0=80$ g/lit	28
Gambar 3.7 Solusi numerik untuk $X(t)$, $S(t)$ dan $P(t)$ dari model pertama dengan $S_0=100$ g/lit	28
Gambar 3.8 Solusi numerik untuk $X(t)$, $S(t)$ dan $P(t)$ dari model ke dua dengan $S_0=68$ g/lit	30
Gambar 3.9 Solusi numerik untuk $X(t)$, $S(t)$ dan $P(t)$ dari model ke dua dengan $S_0=102$ g/lit	31
Gambar 3.10 Solusi numerik untuk $X(t)$, $S(t)$ dan $P(t)$ dari model ke dua dengan $S_0=136$ g/lit	31
Gambar 3.11 Solusi numerik untuk $X(t)$, $S(t)$ dan $P(t)$ dari model ke dua dengan $S_0=170$ g/lit	32
Gambar 3.12 Solusi numerik untuk $X(t)$, $S(t)$ dan $P(t)$ dari model pertama dan model ke dua dengan $S_0=40$ g/lit dan $X_0=0.3$ g/lit	33

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1. Penurunan Persamaan (2.4)	39
Lampiran 2. Data Percobaan	41
Lampiran 3. <i>Listing Program</i>	47

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR SIMBOL

<u>Simbol</u>	<u>Keterangan</u>
X	konsentrasi biomassa (g/l)
S	konsentrasi substrat (g/l)
P	konsentrasi produk (g/l)
X_0	konsentrasi awal biomassa (g/l)
S_0	konsentrasi awal substrat (g/l)
P_0	konsentrasi awal produk (g/l)
t	waktu fermentasi (jam)
α	konstanta <i>growth associated</i> (g produk/g substrat)
β	konstanta <i>non-growth associated</i> (g produk/g substrat.jam)
μ	laju spesifik maksimum (jam ⁻¹)
μ_{\max}	laju spesifik pertumbuhan sel maksimum (jam ⁻¹)
$q_{s,\max}$	laju spesifik konsumsi substrat maksimum (g produk.g substrat ⁻¹ .jam ⁻¹)
$q_{p,\max}$	laju spesifik produksi asam laktat maksimum (g produk.g substrat ⁻¹ .jam ⁻¹)
K_d	koefisien kematian sel (jam ⁻¹)
K_{sx}	konstanta batasan substrat untuk pertumbuhan biomassa (g/l)
K_{ss}	konstanta batasan substrat untuk konsumsi substrat (g/l)
K_{sp}	konstanta batasan substrat untuk produksi asam laktat (g/l)
K_{ix}	konstanta hambatan oleh substrat untuk pertumbuhan biomassa (g/l)
K_{is}	konstanta hambatan oleh substrat untuk konsumsi substrat (g/l)
K_{ip}	konstanta hambatan oleh substrat untuk produksi asam laktat (g/l)
K_{px}	konstanta hambatan oleh produk untuk pertumbuhan biomassa (g/l)
K_{ps}	konstanta hambatan oleh produk untuk konsumsi substrat (g/l)
K_{pp}	konstanta hambatan oleh produk untuk produksi asam laktat (g/l)
P_{ix}	konsentrasi asam laktat sebelum adanya hambatan oleh produk untuk pertumbuhan biomassa (g/l)

- P_{is} konsentrasi asam laktat sebelum adanya hambatan oleh produk untuk konsumsi substrat (g/l)
- P_{ip} konsentrasi asam laktat sebelum adanya hambatan oleh produk untuk produksi asam laktat (g/l)
- P_{mx} konsentrasi maksimum asam laktat untuk pertumbuhan biomassa (g/l)
- P_{ms} konsentrasi maksimum asam laktat untuk konsumsi substrat (g/l)
- P_{mp} konsentrasi maksimum asam laktat untuk produksi asam laktat (g/l)



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Asam laktat banyak digunakan dalam industri makanan, industri minuman dan industri farmasi. Hampir 90% dari asam laktat yang diproduksi di seluruh dunia diproses melalui fermentasi bakteri dan sisanya (10%) diproduksi melalui sintesa kimia (Anjana dan Kumar, 2008). Sintesa kimia dari asam laktat selalu menghasilkan campuran asam laktat, yang tentunya sangat tidak menguntungkan. Hal inilah yang menyebabkan produksi asam laktat melalui fermentasi lebih efisien daripada produksi melalui sintetik kimia. Produksi asam laktat melalui fermentasi dari sumber-sumber yang dapat diperbarui mencakup hidrolisis bahan mentah menjadi gula, fermentasi gula menjadi asam laktat, pemisahan bakteri dan bahan-bahan padat dari cairan dan pemurnian asam laktat (Hidayat, dkk, 2006). Pada skripsi ini yang dibahas adalah proses fermentasi gula menjadi asam laktat dengan media fermentasi berupa fermentasi terendam.

Berbagai jenis sumber daya alam (SDA) yang dapat diperbarui seperti hemiselulosa, selulosa dan pati merupakan senyawa yang melimpah di alam dan ramah lingkungan karena tidak mengeluarkan CO₂ ke atmosfer. Jika dihidrolisis, senyawa-senyawa tersebut akan menghasilkan gula yang dapat difermentasi oleh sejumlah bakteri sehingga dapat digunakan sebagai bahan mentah (substrat) dalam fermentasi asam laktat. Hemiselulosa berbeda dari selulosa maupun pati karena hemiselulosa mengandung pentosa yang dapat menghasilkan produk sampingan, seperti asetat dan etanol. Adanya produk sampingan ini menyebabkan asam laktat yang dihasilkan bukan merupakan asam laktat murni.

Harga asam laktat sangat dipengaruhi oleh harga bahan mentahnya. Penggunaan substrat alami, seperti glukosa dan laktosa, tidak ekonomis karena harganya yang mahal. Meskipun demikian, proses fermentasi pada umumnya lebih banyak menggunakan substrat alami dengan pertimbangan bahwa substrat alami tidak memerlukan proses hidrolisis untuk menghasilkan gula. Polisakarida alami, seperti pati dan selulosa membutuhkan proses hidrolisis untuk menghasilkan gula, sehingga tidak efisien. Limbah pertanian atau

hasil hutan mempunyai potensi yang bagus sebagai bahan mentah bagi fermentasi produksi asam laktat. Harga asam laktat dapat berkurang secara signifikan jika dimungkinkan untuk menggunakan bahan mentah dari limbah pertanian, seperti molase. Karbohidrat dalam molase sudah berbentuk gula sehingga telah siap untuk difermentasi tanpa dihidrolisis terlebih dahulu.

Pada skripsi ini dibahas dua model matematika fermentasi satu tahap produksi asam laktat. Model pertama menggunakan substrat alami laktosa dan model ke dua menggunakan substrat alternatif lain yang lebih ekonomis, yaitu molase. Kedua model tersebut memiliki karakteristik yang berbeda. Bakteri yang digunakan disesuaikan dengan substrat yang difermentasi. Bakteri *Lactococcus Lactis NZ133* digunakan untuk fermentasi substrat laktosa, sedangkan bakteri *Enterococcus Faecalis RKY1* digunakan untuk fermentasi substrat molase. Harga kedua bakteri ini hampir sama, yaitu sekitar 75 ribu per tabung reaksi. Ada tiga variabel yang digunakan pada kedua model tersebut, yaitu konsentrasi substrat (laktosa atau molase), konsentrasi biomassa dan konsentrasi produk (asam laktat). Tiga faktor yang berpengaruh pada proses fermentasi satu tahap adalah adanya keterbatasan substrat, hambatan oleh substrat dan hambatan oleh produk. Perbedaan yang paling signifikan dari model pertama dan model ke dua yaitu pada model pertama hambatan oleh produk terjadi secara linier, sedangkan pada model ke dua hambatan oleh produk terjadi secara ekponensial. Perbedaan ini dikarenakan produksi asam laktat dengan substrat molase lebih cepat daripada produksi asam laktat dengan substrat laktosa. Gula molase merupakan gula monosakarida, sedangkan gula laktosa merupakan gula disakarida.

Model matematika yang dibentuk menyatakan laju pertumbuhan biomassa, laju konsumsi substrat dan laju produksi asam laktat. Model matematika tersebut berupa sistem persamaan diferensial biasa non-linier. Solusi numerik sistem persamaan diferensial tersebut dicari dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat. Selanjutnya, solusi numerik tersebut dibandingkan dengan data percobaan, dengan tujuan untuk melihat apakah model matematika yang dibentuk sesuai dengan kondisi nyatanya.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, pokok permasalahan yang dibahas dalam skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana formulasi model matematika fermentasi asam laktat menggunakan substrat laktosa?
2. Bagaimana formulasi model matematika fermentasi asam laktat menggunakan substrat molase?
3. Bagaimana solusi numerik kedua model tersebut?
4. Bagaimana hasil perbandingan solusi numerik model matematika dengan data percobaan?

1.3 Batasan Masalah

Penulisan skripsi ini difokuskan pada pembahasan dengan beberapa batasan masalah, yaitu

1. fermentasi yang dikaji merupakan fermentasi tertutup/satu tahap (*batch culture*), yaitu hanya terjadi satu kali pemberian substrat,
2. parameter yang digunakan diperoleh dari penelitian sebelumnya.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penulisan skripsi ini adalah untuk

1. merumuskan model matematika fermentasi asam laktat menggunakan substrat laktosa,
2. merumuskan model matematika fermentasi asam laktat menggunakan substrat molase,
3. menentukan solusi numerik kedua model tersebut,
4. membandingkan solusi numerik model matematika dengan data percobaan.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial

Definisi 2.1

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat satu turunan atau lebih dari suatu fungsi yang tidak diketahui. Persamaan diferensial dikatakan mempunyai orde (tingkat) n jika turunan tertinggi yang terdapat dalam persamaan diferensial tersebut adalah turunan ke n . Suatu persamaan diferensial disebut mempunyai derajat k jika turunan tertinggi dalam persamaan diferensial itu berderajat k (Edwards dan Penney, 2001).

Definisi 2.2

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang memuat turunan biasa dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebasnya (Boyce dan DiPrima, 2005).

Persamaan diferensial biasa linier orde n dengan variabel tak bebas y dan variabel bebas x adalah persamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x) y = f(x), \quad (2.1)$$

dengan $a_0(x) \neq 0$. Pada persamaan (2.1), $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ disebut koefisien persamaan diferensial dan $f(x)$ disebut bagian tak homogen. Persamaan diferensial tersebut dikatakan homogen jika $f(x) = 0$ (Finizio dan Ladas, 1982).

Definisi 2.3

Persamaan diferensial biasa non-linier adalah persamaan diferensial biasa yang variabel tak bebas atau turunannya berderajat lebih dari satu dan atau terdapat perkalian antara variabel tak bebas dan turunannya (Ross, 1984).

Definisi 2.4

Sistem persamaan diferensial biasa berdimensi n adalah suatu sistem yang terdiri dari n persamaan diferensial biasa dan n fungsi yang tidak diketahui, dengan n merupakan bilangan bulat

positif ≥ 2 . Bentuk umum sistem persamaan diferensial biasa dengan n fungsi yang tidak diketahui adalah

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= X_1(x_1, x_2, \dots, x_n; t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= X_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t), \end{aligned} \tag{2.2}$$

dengan X_i adalah fungsi dari $n+1$ variabel, untuk $i = 1, 2, \dots, n$ (Birkhoff dan Rota, 1989).

2.2 Mekanisme Michaelis-Menten

Mekanisme Michaelis-Menten adalah mekanisme sederhana tentang kinetika enzim. Menurut mekanisme ini, substrat S dikombinasikan dengan molekul enzim E membentuk kompleks enzim-substrat ES . Kemudian senyawa kompleks ES mengalami dua kemungkinan penguraian yaitu menjadi E dan S kembali atau menghasilkan E dan produk P (Lehninger, 1997).

Skema reaksi enzim diberikan sebagai



Reaksi enzim tersebut dimodelkan dalam sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= k_{-1}c - k_1se \\ \frac{de}{dt} &= (k_{-1} + k_2)c - k_1se \\ \frac{dc}{dt} &= k_1se - (k_{-1} + k_2)c \\ \frac{dp}{dt} &= k_2c, \end{aligned} \tag{2.3}$$

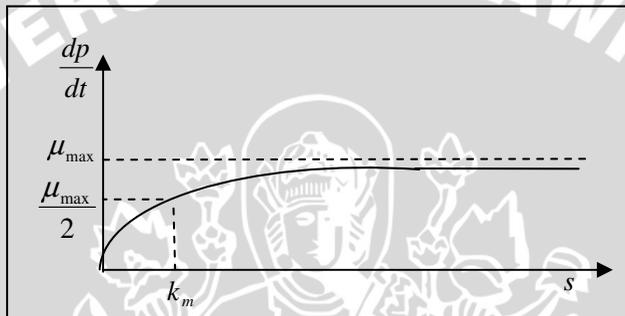
dengan

- $e = [E](t)$ = konsentrasi enzim pada saat t
- $s = [S](t)$ = konsentrasi substrat pada saat t
- $c = [ES](t)$ = konsentrasi kompleks enzim-substrat pada saat t
- $p = [P](t)$ = konsentrasi produk pada saat t .

Dalam keadaan setimbang, yaitu ketika kecepatan pembentukan ES sama dengan kecepatan penguraian ES , diperoleh

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\mu_{\max} s}{k_m + s}. \quad (2.4)$$

Penurunan persamaan (2.4) diberikan pada Lampiran 1. Persamaan (2.4) dikenal sebagai persamaan Michaelis-Menten. Grafik yang menunjukkan hubungan antara laju reaksi enzim dan konsentrasi substrat menurut Michaelis-Menten disajikan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Laju reaksi enzim terhadap konsentrasi substrat

Persamaan Michaelis-Menten seringkali digunakan untuk menjelaskan laju pertumbuhan suatu organisme ketika laju pertumbuhannya bergantung pada konsentrasi nutrisi dan mencapai kondisi jenuh pada saat konsentrasi nutrisi cukup melimpah. Misalkan konsentrasi nutrisi adalah s , maka laju pertumbuhan $r(s)$ dinyatakan secara matematis oleh persamaan

$$r(s) = \frac{\mu_{\max} s}{k_m + s}, s \geq 0, \quad (2.5)$$

dengan μ_{\max} dan k_m adalah konstanta positif. Persamaan (2.5) dikenal sebagai **fungsi pertumbuhan Monod**.

Untuk konsentrasi s yang sangat besar, laju $r(s)$ akan mendekati nilai jenuh μ_{\max} yang merupakan laju pertumbuhan maksimal. Ketika $s = k_m$ maka $r(s) = \mu_{\max} / 2$, sehingga k_m disebut sebagai konstanta setengah saturasi (*half-saturation constant*) atau sering pula disebut sebagai tetapan Michaelis-Menten (Neurasher, 2000).

2.3 Metode Runge-Kutta

Metode Runge-Kutta merupakan metode numerik satu langkah, karena metode tersebut hanya memerlukan satu titik sebelumnya untuk menghitung nilai yang baru. Metode Runge-Kutta yang sering digunakan adalah metode Runge-Kutta orde empat.

Solusi numerik masalah syarat awal $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ dapat ditentukan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dengan rumus rekursif

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= t_n + h \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (2.6)$$

dengan h adalah ukuran langkah dan

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_n, x_n) \\ k_2 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= hf(t_n + h, x_n + k_3). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Misalkan $x_1(t), \dots, x_m(t)$ adalah solusi sistem m persamaan orde satu

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_m) \\ x_2'(t) &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_m) \\ &\vdots \\ x_m'(t) &= f_m(t, x_1, x_2, \dots, x_m), \end{aligned} \quad (2.8)$$

yang memenuhi syarat awal

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \quad \dots, \quad x_m(t_0) = x_m^0.$$

Misalkan $x_{n,i}$ merupakan taksiran $x_i(t_n)$ untuk $i = 1, 2, \dots, m$ dan $t_n = t_0 + nh$ untuk $n = 0, 1, \dots$, maka rumus rekursif metode Runge-Kutta orde empat untuk sistem persamaan diperoleh dari rumus persamaan (2.6) dan persamaan (2.7) dengan mengubah x_n, k_1, k_2, k_3, k_4 dalam bentuk vektor yaitu $x_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,m})$, $k_1 = (k_{1,1}, \dots, k_{1,m})$, $k_2 = (k_{2,1}, \dots, k_{2,m})$ dan seterusnya.

Oleh karena itu bentuk umum metode Runge-Kutta orde empat untuk sistem persamaan adalah

$$\begin{aligned}
 t_{n+1} &= t_n + h \\
 x_{n+1,i} &= x_{n,i} + \frac{1}{6}(k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i}),
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

dengan h adalah ukuran langkah dan

$$\begin{aligned}
 k_{1,i} &= hf_i(t_n, x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,m}) \\
 k_{2,i} &= hf_i\left(t_n + \frac{h}{2}, x_{n,1} + \frac{k_{1,1}}{2}, x_{n,2} + \frac{k_{1,2}}{2}, \dots, x_{n,m} + \frac{k_{1,m}}{2}\right) \\
 k_{3,i} &= hf_i\left(t_n + \frac{h}{2}, x_{n,1} + \frac{k_{2,1}}{2}, x_{n,2} + \frac{k_{2,2}}{2}, \dots, x_{n,m} + \frac{k_{2,m}}{2}\right) \\
 k_{4,i} &= hf_i(t_n + h, x_{n,1} + k_{3,1}, x_{n,2} + k_{3,2}, \dots, x_{n,m} + k_{3,m}),
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$

dengan $i = 1, 2, \dots, m$ (Nagie dan Saff, 1993).

2.4 Fermentasi Asam Laktat

Asam laktat murni tidak berbau, tidak berwarna dan bersifat higroskopis pada suhu kamar. Pada keadaan tidak murni asam laktat berwarna kekuningan karena mengandung pigmen karoten. Sifat fisik asam laktat antara lain adalah memiliki bobot jenis 1.249, bobot molekul 90.08, titik beku 16.8°C dan titik didih 122°C pada tekanan 14 mmHg. Sifat kimia asam laktat antara lain dapat larut dalam eter, alkohol, gliserin dan air, namun tidak larut dalam kloroform, eter disulfida dan karbon disulfida.

Asam laktat digunakan secara luas dalam industri kimia, antara lain dalam industri makanan dan minuman (asam laktat berkadar 50-80%), industri farmasi (berkadar 85-90%), dan industri kulit.

Reaksi kimia pembuatan asam laktat dari gula adalah



Produksi asam laktat secara fermentasi dari sumber-sumber yang dapat diperbarui mencakup hidrolisis bahan mentah menjadi gula, fermentasi gula menjadi asam laktat, pemisahan bakteri dan bahan-bahan padat dari cairan dan pemurnian asam laktat (Hidayat, dkk, 2006).

2.5 Fermentasi Sistem Tertutup/Satu Tahap (*Batch culture*)

Pada fermentasi sistem tertutup, setelah inokulasi tidak dilakukan lagi penambahan medium ke dalam fermentor, kecuali pemberian oksigen (udara steril), antibiuh dan asam/basa untuk mengatur pH. Oleh karena itu, semakin lama waktu fermentasi, laju pertumbuhan spesifik mikroba semakin menurun sampai akhirnya berhenti. Penurunan dan berhentinya pertumbuhan disebabkan oleh berkurangnya nutrien-nutrien esensial dalam medium, atau terjadinya akumulasi autoksin yang mempengaruhi laju pertumbuhan, atau kombinasi keduanya. Dengan demikian pada fermentasi sistem tertutup, jumlah sel pada fase stasioner merupakan jumlah sel maksimum.

Selama fase pertumbuhan eksponensial peningkatan jumlah sel mikroba dapat dijelaskan melalui persamaan (Rohan, 1992)

$$\frac{dX}{dt} = \mu X, \text{ yang setelah diintegrasikan menghasilkan } X_t = X_0 e^{\lambda t},$$

dengan

X_0 = jumlah mikroba awal (sel/lit atau g/lit)

X_t = jumlah mikroba setelah waktu t (sel/lit atau g/lit)

t = waktu pengamatan (jam)

μ = laju spesifik pertumbuhan mikroba (jam^{-1}).

2.6 Fermentasi Terendam (*Submerged*)

Medium cair memiliki beberapa kelebihan dibandingkan dengan medium padat, yaitu

1. jenis dan konsentrasi komponen-komponen medium dapat diatur sesuai dengan yang diinginkan,
2. dapat memberikan kondisi yang optimal untuk pertumbuhan,
3. pemakaian medium lebih efisien.

Medium cair digunakan pada fermentasi permukaan dan fermentasi terendam. Fermentasi permukaan medium cair merupakan metode fermentasi yang sejak lama digunakan untuk memproduksi berbagai produk fermentasi, misalnya produksi asam asetat secara tradisional. Fermentasi permukaan medium cair ini mulai ditinggalkan sejak fermentasi terendam terbukti lebih efisien, khususnya dalam memproduksi produk-produk fermentasi yang

bernilai ekonomis lebih tinggi dan menghendaki sterilitas yang tinggi, seperti misalnya produksi antibiotika (Rohan, 1992).

2.7 Biomassa

Pertumbuhan mikroorganisme tunggal dalam lingkungan yang sesuai dengan semua kebutuhan nutrisinya tersedia tak terbatas dan kondisi fisikokimianya dibuat konstan merupakan sistem yang mudah untuk analisa. Mikrobia menggunakan nutrisi pertumbuhan melalui serangkaian biosintesa sehingga dihasilkan bahan sel baru yang disebut biomassa. Organisme akan mengalami peningkatan ukuran dan setelah periode waktu tertentu ukuran biomassa menjadi dua kali lipat dari ukuran semula, karena terjadi pembelahan sel. Masing-masing organisme akan mengulangi proses pembelahan sel dan ketika generasi kedua tercapai, populasi akan mengandung empat individu. Pada organisme uniseluler, pertumbuhan merupakan proses peningkatan jumlah individu dan biomassa. Untuk organisme multiseluler, pertumbuhan merupakan peningkatan jumlah sel dalam individu dan biomassa (Hidayat, dkk, 2006).

2.8 Molase

Molase adalah limbah industri gula. Molase tebu kaya akan biotin, asam pantotenat, fosfor, sulfur dan sedikit mengandung nitrogen organik. Molase mengandung 62% gula yang terdiri dari sukrosa 32%, glukosa 14% dan fruktosa 16%. Karbohidrat dalam molase telah siap untuk difermentasi tanpa dihidrolisis terlebih dahulu karena sudah berbentuk gula (Hidayat, dkk, 2006).

2.9 Model Luedeking-Piret

Model Luedeking-Piret digunakan untuk produksi *growth-associated* dan *non-growth associated* pada proses fermentasi. Model ini menjelaskan bahwa laju konsentrasi produk untuk *growth associated* berbanding lurus dengan laju konsentrasi biomassa dan dipengaruhi oleh konstanta *growth associated*. Laju konsentrasi produk untuk *growth associated* dinyatakan secara matematis oleh persamaan

$$\frac{dP}{dt} = \alpha \frac{dX}{dt} . \quad (2.11)$$

Laju konsentrasi produk untuk *non-growth associated* berbanding lurus dengan konsentrasi biomassa dan dipengaruhi oleh konstanta *non-growth associated*. Laju konsentrasi produk untuk *non-growth associated* dinyatakan secara matematis oleh persamaan

$$\frac{dP}{dt} = \beta X , \quad (2.12)$$

sehingga diperoleh laju konsentrasi produk seluruhnya (Luedeking dan Piret, 1959)

$$\frac{dP}{dt} = \alpha \frac{dX}{dt} + \beta X , \quad (2.13)$$

dengan

X = konsentrasi biomassa (g/l)

P = konsentrasi produk (g/l)

α = konstanta *growth associated* (g produk/g substrat)

β = konstanta *non-growth associated* (g produk.g substrat⁻¹.jam⁻¹).

2.10 Model Hambatan *Non-Competitive*

Kecepatan maksimum enzim setelah adanya hambatan dipengaruhi oleh konstanta hambatan, kecepatan maksimum enzim sebelum adanya hambatan dan konsentrasi penghambat. Semakin besar konsentrasi penghambat maka kecepatan maksimum enzim setelah adanya hambatan semakin kecil. Kecepatan maksimum enzim setelah adanya hambatan berbanding terbalik terhadap jumlah konstanta hambatan dan konsentrasi penghambat.

Menurut Goncalves, dkk (1991), persamaan hambatan *non-competitive* diberikan sebagai

$$V_{\max inh} = V_{\max} \times \frac{K_i}{K_i + I} , \quad (2.14)$$

dengan

I = konsentrasi dari penghambat (g/l)

K_i = konstanta hambatan (g/l)

V_{\max} = kecepatan maksimum enzim sebelum adanya hambatan

$V_{\max inh}$ = kecepatan maksimum enzim setelah adanya hambatan.

BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Formulasi Model

3.1.1 Fermentasi Asam Laktat dengan Substrat Laktosa dan Bakteri *Lactococcus lactis* NZ133

Misalkan $X(t)$, $S(t)$ dan $P(t)$ berturut-turut menyatakan konsentrasi biomassa, konsentrasi substrat (laktosa) dan konsentrasi produk (asam laktat) pada saat t . Menurut Boonmee, dkk (2003), laju konsentrasi ketiga variabel tersebut diperoleh dengan asumsi

1. Laju pertumbuhan biomassa dapat dipandang sebagai perubahan konsentrasinya terhadap waktu. Laju pertumbuhan biomassa terjadi akibat aktifitas proliferasi (pembelahan diri) yang dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dX(t)}{dt} = \mu X(t), \quad (3.1)$$

dengan μ menyatakan koefisien/laju proliferasi.

2. Aktifitas proliferasi dipicu oleh adanya substrat. Semakin banyak jumlah substrat, proliferasi akan semakin banyak dilakukan. Laju proliferasi sel diasumsikan mengikuti fungsi pertumbuhan Monod seperti pada persamaan (2.5) dan dapat ditulis sebagai

$$\mu = \frac{\mu_{\max} S(t)}{K_m + S(t)}, \quad (3.2)$$

dengan μ_{\max} menyatakan laju proliferasi maksimum dan K_m adalah konstanta setengah saturasi pada proses proliferasi. Untuk konsentrasi S yang sangat besar, laju μ akan mendekati nilai jenuh μ_{\max} yang merupakan laju pertumbuhan maksimal. Ketika konsentrasi $S = 0$, laju $\mu = 0$, yaitu kondisi dimana biomassa tidak diproduksi lagi.

3. Semakin lama jumlah substrat akan semakin berkurang karena terus dikonsumsi oleh bakteri. Laju proliferasi biomassa dipengaruhi oleh keterbatasan jumlah substrat, sehingga konstanta setengah saturasi dapat digantikan dengan konstanta batasan substrat untuk pertumbuhan biomassa, K_{sx} , yaitu

$$\mu = \frac{\mu_{\max} S(t)}{K_{sx} + S(t)}. \quad (3.3)$$

Substitusi persamaan (3.3) ke persamaan (3.1) menghasilkan

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{\mu_{\max} S(t) X(t)}{K_{sx} + S(t)}. \quad (3.4)$$

4. Pada konsentrasi yang tinggi, substrat juga dapat menghambat aktifitas enzim. Konsentrasi yang tinggi dari substrat dapat mengikat cairan pada sel yang menyebabkan sel kehilangan banyak air (*lysis*) dan akhirnya mati. Laju pertumbuhan biomassa juga dipengaruhi oleh adanya hambatan oleh substrat. Diasumsikan bahwa hambatan karena tingginya konsentrasi substrat mengikuti model hambatan *non-competitive* seperti pada persamaan (2.14), sehingga laju pertumbuhan biomassa setelah adanya hambatan oleh substrat adalah

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{\mu_{\max} S(t) X(t)}{K_{sx} + S(t)} \times \frac{K_{ix}}{K_{ix} + S(t)}, \quad (3.5)$$

dengan K_{ix} menyatakan konstanta hambatan oleh substrat untuk pertumbuhan biomassa.

5. Konsentrasi asam laktat yang terlalu tinggi juga dapat membahayakan kelangsungan hidup bakteri. Asam laktat yang terlalu asam dapat membuat bakteri menjadi keracunan dan akhirnya mati. Laju pertumbuhan biomassa juga dipengaruhi oleh adanya hambatan oleh produk. Hambatan karena tingginya konsentrasi produk terjadi secara linier. Laju pertumbuhan biomassa setelah adanya hambatan oleh produk adalah

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{\mu_{\max} S(t) X(t)}{K_{sx} + S(t)} \times \frac{K_{ix}}{K_{ix} + S(t)} \times \frac{P_{mx} - P(t)}{P_{mx} - P_{ix}}, \quad (3.6)$$

dengan P_{ix} menyatakan konsentrasi asam laktat sebelum adanya hambatan oleh produk untuk pertumbuhan biomassa sedangkan P_{mx} menyatakan konsentrasi maksimum asam laktat untuk pertumbuhan biomassa. Hambatan terjadi ketika konsentrasi P melebihi konsentrasi P_{mx} .

6. Laju konsumsi substrat (laktosa) dapat dipandang sebagai perubahan konsentrasinya terhadap waktu. Konsumsi substrat dilakukan oleh bakteri untuk menghasilkan bahan sel baru yang disebut biomassa. Dengan demikian, laju konsumsi substrat

sebanding dengan laju pertumbuhan biomassa. Semakin banyak jumlah biomassa, laju konsumsi substratnya juga semakin tinggi. Semakin tinggi laju konsumsi substrat, jumlah substrat akan semakin cepat berkurang. Jadi laju konsumsi substrat dipengaruhi oleh keterbatasan jumlah substrat, sehingga diperoleh

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\frac{q_{s,\max} S(t) X(t)}{K_{ss} + S(t)}, \quad (3.7)$$

dengan $q_{s,\max}$ menyatakan laju spesifik maksimum konsumsi substrat dan K_{ss} menyatakan konstanta batasan substrat untuk konsumsi substrat.

7. Laju konsumsi substrat juga dipengaruhi oleh adanya hambatan oleh substrat. Konsentrasi substrat yang tinggi menyebabkan bakteri mati, sehingga laju konsumsi substrat akan menurun. Laju konsumsi substrat setelah adanya hambatan oleh substrat adalah

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\frac{q_{s,\max} S(t) X(t)}{K_{ss} + S(t)} \times \frac{K_{is}}{K_{is} + S(t)}, \quad (3.8)$$

dengan K_{is} menyatakan konstanta hambatan oleh substrat untuk konsumsi substrat.

8. Laju konsumsi substrat juga dipengaruhi oleh adanya hambatan oleh produk. Konsentrasi produk yang tinggi menyebabkan bakteri mati, sehingga laju konsumsi substrat akan menurun. Laju konsumsi substrat setelah adanya hambatan oleh produk adalah

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\frac{q_{s,\max} S(t) X(t)}{K_{ss} + S(t)} \times \frac{K_{is}}{K_{is} + S(t)} \times \frac{P_{ms} - P(t)}{P_{ms} - P_{is}}, \quad (3.9)$$

dengan P_{is} menyatakan konsentrasi asam laktat sebelum adanya hambatan oleh produk untuk konsumsi substrat sedangkan P_{ms} menyatakan konsentrasi maksimum asam laktat untuk konsumsi substrat.

9. Laju produksi asam laktat dapat dipandang sebagai perubahan konsentrasinya terhadap waktu. Laju produksi asam laktat meliputi *growth associated* dan *non-growth associated*. Diasumsikan laju produksi asam laktat mengikuti model Luedeking-Piret seperti pada persamaan (2.13).

a. *Growth Associated.*

Laju produksi asam laktat berbanding lurus dengan laju pertumbuhan biomassa dan dipengaruhi oleh konstanta *growth associated* (α). Laju produksi asam laktat untuk *growth associated* adalah

$$\frac{dP(t)}{dt} = \alpha \frac{dX(t)}{dt}. \quad (3.10)$$

Konstanta *growth associated* (α) berkaitan dengan perubahan konsentrasi biomassa.

b. *Non-growth Associated.*

Laju produksi asam laktat berbanding lurus dengan konsentrasi biomassa dan dipengaruhi oleh konstanta *non-growth associated* (β). Laju produksi asam laktat untuk *non-growth associated* adalah

$$\frac{dP(t)}{dt} = \beta X(t). \quad (3.11)$$

Konstanta *non-growth associated* (β) berkaitan dengan konsentrasi biomassa.

Karena biomassa selalu mengalami proliferasi, maka konstanta *non-growth associated* dapat digantikan dengan koefisien/laju proliferasi. Koefisien/laju proliferasi diasumsikan mengikuti fungsi pertumbuhan Monod yang diberikan pada persamaan (2.5), sehingga

$$\beta = \frac{q_{p,\max} S(t)}{K_{sp} + S(t)}, \quad (3.12)$$

dengan $q_{p,\max}$ menyatakan laju spesifik maksimum produksi asam laktat dan K_{sp} adalah konstanta batasan substrat untuk produksi asam laktat. Substitusi persamaan (3.12) ke persamaan (3.11) menghasilkan

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{q_{p,\max} S(t) X(t)}{K_{sp} + S(t)}. \quad (3.13)$$

Laju produksi asam laktat untuk *non-growth associated* dipengaruhi oleh adanya hambatan oleh substrat, sehingga laju produksi asam laktat untuk *non-growth associated* setelah adanya hambatan oleh substrat adalah

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{q_{p,\max}S(t)X(t)}{K_{sp} + S(t)} \times \frac{K_{ip}}{K_{ip} + S(t)}, \quad (3.14)$$

dengan K_{ip} menyatakan konstanta hambatan oleh substrat untuk produksi asam laktat.

Laju produksi asam laktat untuk *non-growth associated* juga dipengaruhi oleh adanya hambatan oleh produk, sehingga diperoleh laju produksi asam laktat untuk *non-growth associated* setelah adanya hambatan oleh produk adalah

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{q_{p,\max}S(t)X(t)}{K_{sp} + S(t)} \times \frac{K_{ip}}{K_{ip} + S(t)} \times \frac{P_{mp} - P(t)}{P_{mp} - P_{ip}}, \quad (3.15)$$

dengan P_{ip} menyatakan konsentrasi asam laktat sebelum adanya hambatan oleh produk untuk produksi asam laktat sedangkan P_{mp} menyatakan konsentrasi maksimum asam laktat untuk produksi asam laktat. Hambatan terjadi ketika konsentrasi P melebihi konsentrasi P_{mp} .

Jadi laju produksi asam laktat untuk *growth associated* dan *non-growth associated* adalah

$$\frac{dP(t)}{dt} = \alpha \frac{dX(t)}{dt} + \left[\frac{q_{p,\max}S(t)X(t)}{K_{sp} + S(t)} \times \frac{K_{ip}}{K_{ip} + S(t)} \times \frac{P_{mp} - P(t)}{P_{mp} - P_{ip}} \right]. \quad (3.16)$$

Dengan demikian, laju pertumbuhan biomassa, laju konsumsi laktosa dan laju produksi asam laktat pada model pertama memenuhi sistem persamaan diferensial biasa non-linier

$$\begin{aligned} \frac{dX(t)}{dt} &= \frac{\mu_{\max}S(t)X(t)}{K_{sx} + S(t)} \times \frac{K_{ix}}{K_{ix} + S(t)} \times \frac{P_{mx} - P(t)}{P_{mx} - P_{ix}} \\ \frac{dS(t)}{dt} &= -\frac{q_{s,\max}S(t)X(t)}{K_{ss} + S(t)} \times \frac{K_{is}}{K_{is} + S(t)} \times \frac{P_{ms} - P(t)}{P_{ms} - P_{is}} \\ \frac{dP(t)}{dt} &= \alpha \frac{dX(t)}{dt} + \left[\frac{q_{p,\max}S(t)X(t)}{K_{sp} + S(t)} \times \frac{K_{ip}}{K_{ip} + S(t)} \times \frac{P_{mp} - P(t)}{P_{mp} - P_{ip}} \right] \end{aligned} \quad (3.17)$$

3.1.2 Fermentasi Asam Laktat dengan Substrat Molase dan Bakteri *Enterococcus Faecalis* RKYI

Molase merupakan limbah tanaman tebu yang masih mengandung gula. Molase mempunyai potensi yang bagus sebagai bahan mentah dari fermentasi asam laktat karena harganya yang sangat murah, selain itu karbohidrat dalam molase juga telah siap untuk difermentasi tanpa dihidrolisis terlebih dahulu karena sudah berbentuk gula.

Model pertama dimodifikasi dengan mempertimbangkan aspek berikut ini.

1. Pada model ke dua koefisien kematian sel tidak diabaikan.
2. Hambatan karena tingginya konsentrasi produk terjadi secara eksponensial (dengan konstanta hambatan K_p). Adanya perbedaan ini dikarenakan produksi asam laktat dengan substrat molase lebih cepat daripada produksi asam laktat dengan substrat laktosa.

Misalkan $X(t)$, $S(t)$ dan $P(t)$ berturut-turut menyatakan konsentrasi biomassa, konsentrasi substrat (gula) dan konsentrasi produk (asam laktat) pada saat t . Menurut Anjana dan Kumar (2008), analog dengan formulasi model pertama, laju pertumbuhan biomassa dipengaruhi oleh keterbatasan jumlah substrat, yaitu

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{\mu_{\max} S(t) X(t)}{K_{sx} + S(t)} \quad (3.18)$$

dan laju pertumbuhan biomassa setelah adanya hambatan oleh substrat adalah

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{\mu_{\max} S(t) X(t)}{K_{sx} + S(t)} \times \frac{K_{ix}}{K_{ix} + S(t)} \quad (3.19)$$

Laju pertumbuhan biomassa juga dipengaruhi oleh adanya hambatan oleh produk. Hambatan karena tingginya konsentrasi produk diasumsikan terjadi secara eksponensial. Laju pertumbuhan biomassa setelah adanya hambatan oleh produk adalah

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{\mu_{\max} S(t) X(t)}{K_{sx} + S(t)} \times \frac{K_{ix}}{K_{ix} + S(t)} \times e^{\frac{-P(t)}{K_{px}}}, \quad (3.20)$$

dengan K_{px} menyatakan konstanta hambatan oleh produk untuk pertumbuhan biomassa.

Sel bakteri memiliki masa hidup yang terbatas. Jika

dimisalkan laju kematian konstan adalah K_d maka laju pertumbuhan biomassa akibat kematian alami adalah

$$\frac{dX(t)}{dt} = -K_d X(t), \quad (3.21)$$

sehingga laju pertumbuhan biomassa dilihat dari perubahan konsentrasinya terhadap waktu adalah

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{\mu_{\max} S(t) X(t)}{K_{sx} + S(t)} \times \frac{K_{ix}}{K_{ix} + S(t)} \times e^{\frac{-P(t)}{K_{pv}}} - K_d X(t). \quad (3.22)$$

Dengan cara yang sama, diperoleh laju konsumsi substrat (gula) yang dipengaruhi oleh keterbatasan jumlah substrat, setelah adanya hambatan oleh substrat dan hambatan oleh produk dilihat dari perubahan konsentrasinya terhadap waktu adalah

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\frac{q_{s,\max} S(t) X(t)}{K_{ss} + S(t)} \times \frac{K_{is}}{K_{is} + S(t)} \times e^{\frac{-P(t)}{K_{ps}}}, \quad (3.23)$$

dengan K_{ps} menyatakan konstanta hambatan oleh produk untuk konsumsi substrat.

Selanjutnya laju produksi asam laktat yang dipengaruhi oleh keterbatasan jumlah substrat, setelah hambatan oleh substrat dan hambatan oleh produk dilihat dari perubahan konsentrasinya terhadap waktu adalah

$$\frac{dP(t)}{dt} = \alpha \frac{dX(t)}{dt} + \left[\frac{q_{p,\max} S(t) X(t)}{K_{sp} + S(t)} \times \frac{K_{ip}}{K_{ip} + S(t)} \times e^{\frac{-P(t)}{K_{pp}}} \right], \quad (3.24)$$

dengan K_{pp} menyatakan konstanta hambatan oleh produk untuk produksi asam laktat.

Dengan demikian laju pertumbuhan biomassa, laju konsumsi gula, dan laju produksi asam laktat pada model ke dua memenuhi sistem persamaan diferensial biasa non-linier

$$\begin{aligned}
 \frac{dX(t)}{dt} &= \frac{\mu_{\max} S(t)X(t)}{K_{sx} + S(t)} \times \frac{K_{ix}}{K_{ix} + S(t)} \times e^{\frac{-P(t)}{K_{px}}} - K_d X(t) \\
 \frac{dS(t)}{dt} &= -\frac{q_{s,\max} S(t)X(t)}{K_{ss} + S(t)} \times \frac{K_{is}}{K_{is} + S(t)} \times e^{\frac{-P(t)}{K_{ps}}} \\
 \frac{dP(t)}{dt} &= \alpha \frac{dX(t)}{dt} + \left[\frac{q_{p,\max} S(t)X(t)}{K_{sp} + S(t)} \times \frac{K_{ip}}{K_{ip} + S(t)} \times e^{\frac{-P(t)}{K_{pp}}} \right]
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

3.2 Penyelesaian Numerik Model Fermentasi Asam Laktat dengan Metode Runge-Kutta

Solusi numerik sistem persamaan (3.17) dan (3.25) dicari pada selang waktu $[0, t_{maks}]$. Mula-mula selang waktu tersebut didiskritisasi menjadi $n+1$ titik. Antara satu titik dengan yang lainnya memiliki ukuran langkah yang sama yaitu h . Besarnya h dihitung dengan rumus t_{maks}/n . Dari diskritisasi ini diperoleh titik-titik pada domain waktu yaitu $t_j = t_1, t_2, \dots, t_{n+1}$. Selanjutnya untuk setiap titik dilakukan perhitungan nilai $X(t_j)$, $S(t_j)$ dan $P(t_j)$ yang masing-masing merupakan taksiran bagi $X(t)$, $S(t)$, $P(t)$.

Algoritma metode Runge-Kutta orde empat untuk menyelesaikan model pertama dan model ke dua adalah

Input : t_0 (batas bawah dari interval waktu)

t_{maks} (batas atas dari interval waktu)

X_0 (syarat awal untuk X)

S_0 (syarat awal untuk S)

P_0 (syarat awal untuk P)

Output : X_j (taksiran nilai X pada waktu t_j)

S_j (taksiran nilai S pada waktu t_j)

P_j (taksiran nilai P pada waktu t_j)

Langkah-langkah :

1. $n = 100 * t_{maks}$

2. $h = t_{maks}/n$

3. {inisialisasi syarat awal}

$X_1 = X_0, S_1 = S_0, P_1 = P_0, t_1 = t_0$

4. untuk $j = 1, \dots, n$ lakukan metode Runge-Kutta dari langkah (4) sampai dengan (9)

5. untuk $r = 1, 2, 3$ hitung

6. untuk $r = 1, 2, 3$ hitung

$$k_{1,r} = hf_r(t_j, X_j, S_j, P_j)$$
7. untuk $r = 1, 2, 3$ hitung

$$k_{2,r} = hf_r(t_j + h/2, X_j + k_{1,1}/2, S_j + k_{1,2}/2, P_j + k_{1,3}/2)$$
8. untuk $r = 1, 2, 3$ hitung

$$k_{3,r} = hf_r(t_j + h/2, X_j + k_{2,1}/2, S_j + k_{2,2}/2, P_j + k_{2,3}/2)$$
9. memperbarui nilai X_j, S_j, P_j , dan t_j

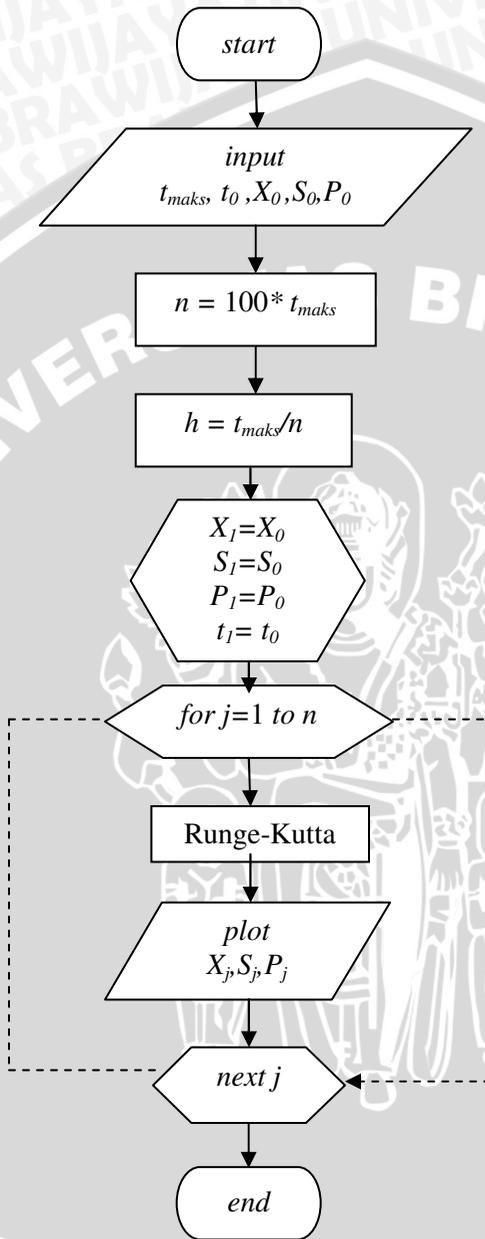
$$X_{j+1} = X_j + (k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1})/6$$

$$S_{j+1} = S_j + (k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2})/6$$

$$P_{j+1} = P_j + (k_{1,3} + 2k_{2,3} + 2k_{3,3} + k_{4,3})/6$$

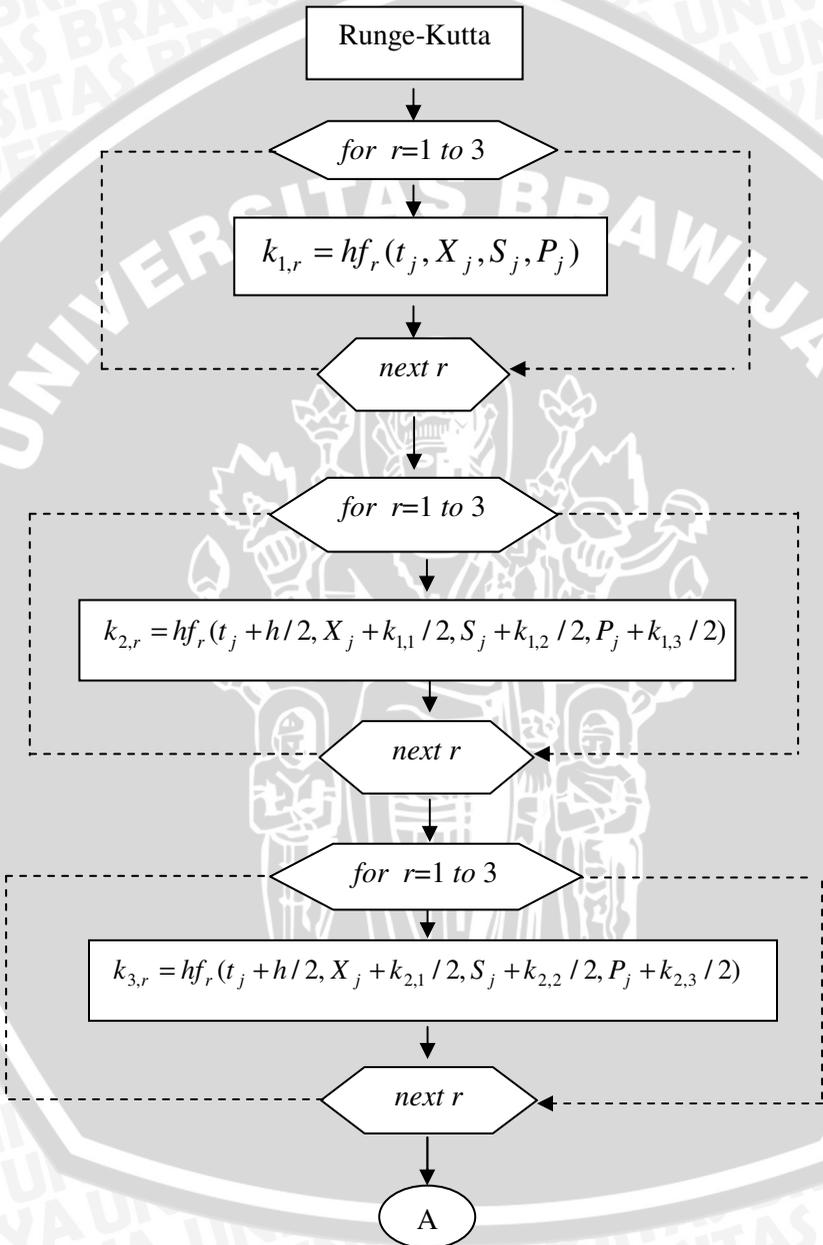
$$t_{j+1} = t_j + h$$
10. plot X_j, S_j, P_j
11. selesai

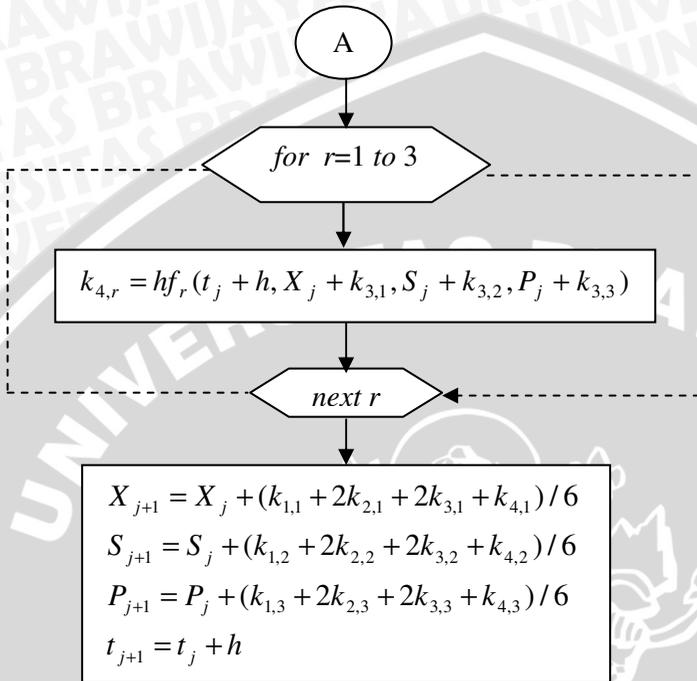
Flowchart skema numerik untuk menyelesaikan model pertama dan model ke dua diberikan pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Flowchart untuk mencari solusi sistem persamaan diferensial pada model pertama dan model ke dua

Flowchart metode Runge-Kutta orde empat untuk menyelesaikan model pertama dan model ke dua adalah





Gambar 3.2 Flowchart metode Runge-Kutta orde empat

3.3 Hasil Simulasi dan Pembahasan

3.3.1 Simulasi Model Fermentasi Asam Laktat dengan Substrat Laktosa

Nilai syarat awal dan parameter yang digunakan pada model pertama diberikan pada Tabel 3.1 dan Tabel 3.2.

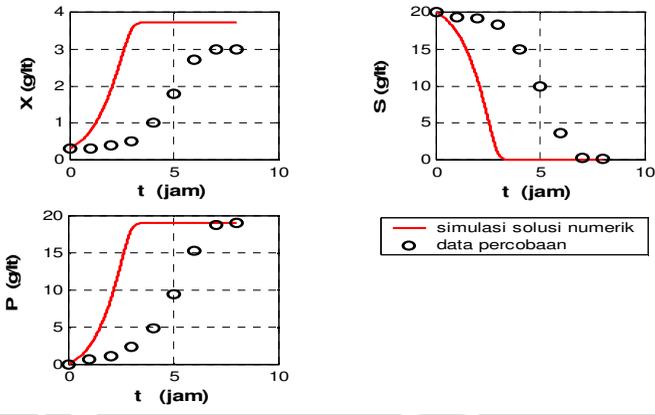
Tabel 3.1 Syarat Awal Model Fermentasi Asam Laktat dengan Substrat Laktosa

Konsentrasi awal laktosa (S_o)	Konsentrasi awal biomassa (X_o)	Konsentrasi awal asam laktat (P_o)
20 g/l	0.3 g/l	0
40 g/l	0.3 g/l	0
60 g/l	0.3 g/l	0
80 g/l	0.3 g/l	0
100 g/l	0.3 g/l	0

Tabel 3.2 Nilai Parameter Model Fermentasi Asam Laktat dengan Substrat Laktosa

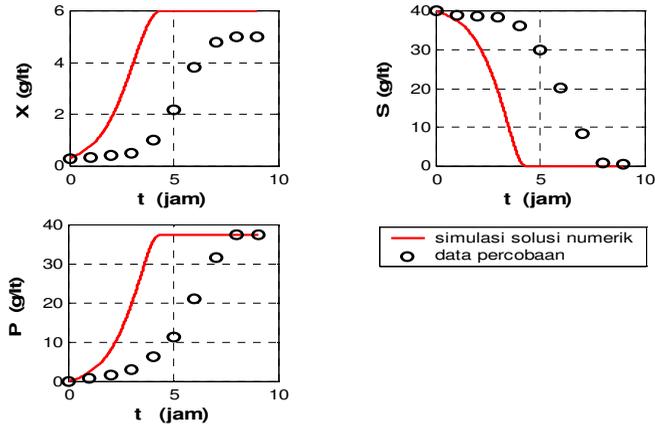
Model pertumbuhan biomassa	
μ_{max} (jam ⁻¹)	1.10
K_{ix} (g/l)	304
K_{sx} (g/l)	1.32
P_{ix} (g/l)	1.39
P_{mx} (g/l)	49.9
Model konsumsi gula	
$q_{s,max}$ (g produk.g substrat ⁻¹ .jam ⁻¹)	3.42
K_{is} (g/l)	140
K_{ss} (g/l)	2.05
P_{is} (g/l)	47.1
P_{ms} (g/l)	95.5
Model produksi asam laktat	
α (g produk/g substrat)	0.39
$q_{p,max}$ (g produk.g substrat ⁻¹ .jam ⁻¹)	3.02
K_{ip} (g/l)	140
K_{sp} (g/l)	2.05
P_{ip} (g/l)	47.1
P_{mp} (g/l)	95.5

Pada simulasi yang pertama dicari solusi numerik dengan menggunakan $S_o=20$ g/l. Hasil simulasi dapat dilihat pada Gambar 3.3.



Gambar 3.3 Solusi numerik untuk $X(t)$, $S(t)$ dan $P(t)$ dari model pertama dengan $S_0=20$ g/l

Selanjutnya digunakan $S_0=40$ g/l, seperti terlihat pada Gambar 3.4.



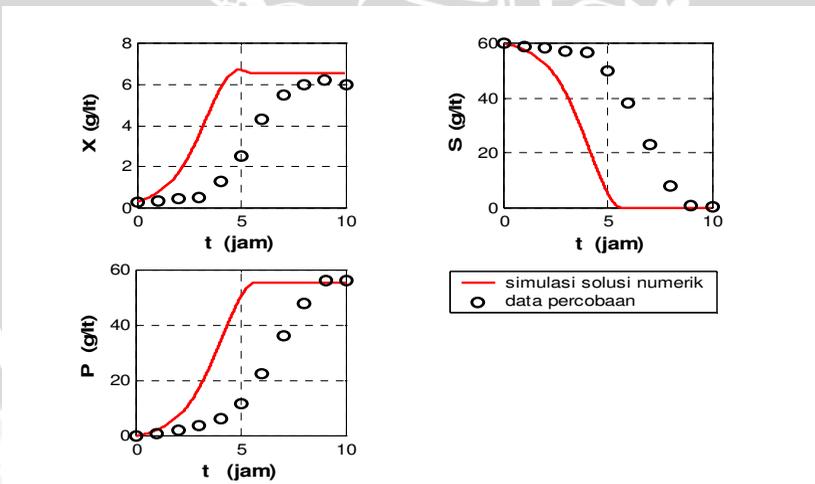
Gambar 3.4 Solusi numerik untuk $X(t)$, $S(t)$ dan $P(t)$ dari model pertama dengan $S_0=40$ g/l

Berdasarkan Gambar 3.3 dan Gambar 3.4 dapat dilihat bahwa ada lima karakteristik solusi numerik model sistem fermentasi asam laktat satu tahap dengan substrat laktosa, yaitu

1. pada saat t yang kecil, laju konsumsi substrat masih kecil, karena di awal proses jumlah sel bakteri juga masih sedikit. Akibatnya,

- laju pertumbuhan biomassa lambat dan laju produksi asam laktat juga lambat. Hal ini dapat dilihat dari grafik kenaikan $X(t)$ dan $P(t)$ serta grafik penurunan $S(t)$ yang masih lambat,
2. semakin besar waktu t , laju konsumsi substrat semakin besar, karena jumlah sel bakteri juga semakin banyak. Akibatnya, laju pertumbuhan biomassa besar dan laju produksi asam laktat juga besar. Hal ini dapat dilihat dari grafik kenaikan $X(t)$ dan $P(t)$ serta grafik penurunan $S(t)$ lebih cepat,
 3. ketika tercapai laju konsumsi maksimum, maka nilai $X(t)$, $S(t)$ dan $P(t)$ konstan (tercapai saturasi). Dalam keadaan ini tidak ada biomassa baru yang dihasilkan dan tidak ada pula asam laktat baru yang diproduksi. Besarnya konsentrasi asam laktat yang dihasilkan mendekati besarnya konsentrasi awal laktosa yang digunakan,
 4. untuk konsentrasi awal laktosa yang masih kecil terlihat bahwa tidak ada grafik penurunan $X(t)$ sebelum grafik $X(t)$ mencapai saturasi, artinya tidak ada pengaruh hambatan oleh produk,
 5. perbedaan besarnya konsentrasi awal substrat membedakan pada lamanya proses mencapai saturasi.

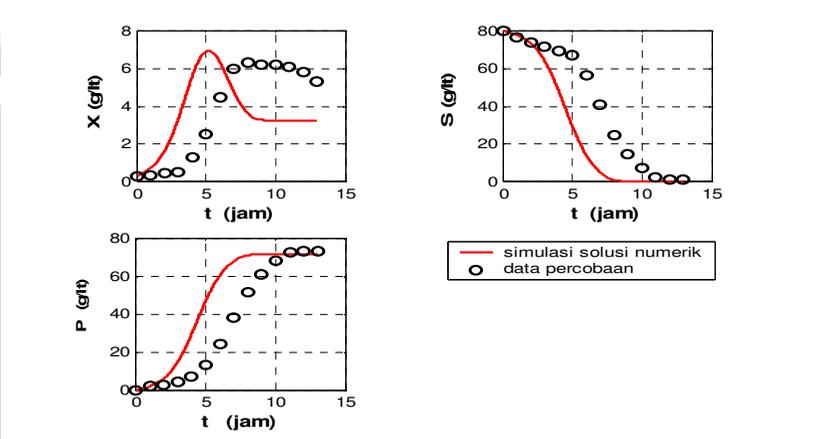
Pada simulasi yang ke tiga dicari solusi numerik dengan menggunakan $S_0=60$ g/l. Hasil simulasi dapat dilihat pada Gambar 3.5.



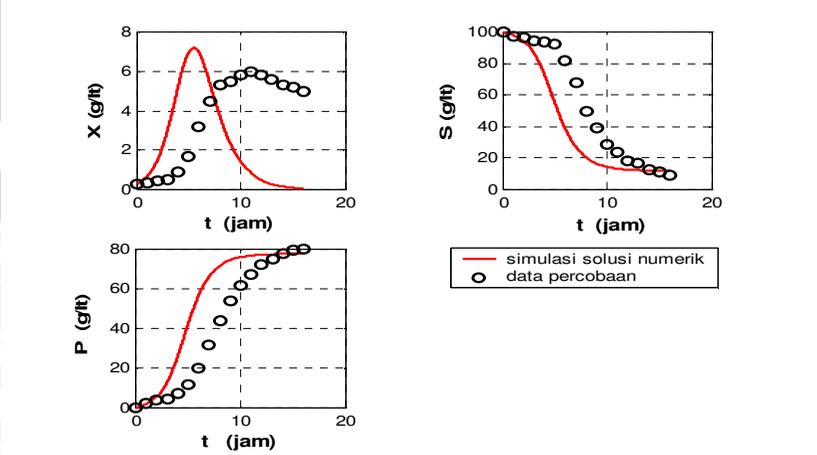
Gambar 3.5 Solusi numerik untuk $X(t)$, $S(t)$ dan $P(t)$ dari model pertama dengan $S_0=60$ g/l

Berdasarkan Gambar 3.5 dapat dilihat bahwa ada sedikit penurunan grafik $X(t)$ sebelum grafik $X(t)$ mencapai saturasi, artinya ada pengaruh produk penghambat yang membunuh bakteri. Hal ini dikarenakan konsentrasi awal substrat cukup tinggi dan konsentrasi asam laktat yang dihasilkan juga cukup tinggi.

Selanjutnya dilakukan simulasi dengan menggunakan $S_0=80$ g/lit dan $S_0=100$ g/lit, seperti terlihat pada Gambar 3.6 dan Gambar 3.7



Gambar 3.6 Solusi numerik untuk $X(t)$, $S(t)$ dan $P(t)$ dari model pertama dengan $S_0=80$ g/lit



Gambar 3.7 Solusi numerik untuk $X(t)$, $S(t)$ dan $P(t)$ dari model pertama dengan $S_0=100$ g/lit

Berdasarkan Gambar 3.6 dan Gambar 3.7 dapat dilihat bahwa grafik penurunan $X(t)$ sebelum grafik $X(t)$ mencapai saturasi semakin besar dengan semakin besarnya konsentrasi awal laktosa. Artinya dengan semakin besarnya konsentrasi awal laktosa, maka pengaruh produk penghambat yang membunuh bakteri juga semakin besar. Pada keadaan ini perilaku solusi numerik sangat jauh berbeda dengan data percobaan. Dapat dikatakan bahwa model matematika yang dibentuk masih belum sesuai untuk konsentrasi awal laktosa yang terlalu tinggi. Namun, secara kualitatif, hasil solusi numerik model pertama sesuai dengan data percobaan.

3.3.2 Simulasi Model Fermentasi Asam Laktat dengan Substrat Molase

Nilai syarat awal dan parameter yang digunakan pada model ke dua diberikan pada Tabel 3.3 dan Tabel 3.4

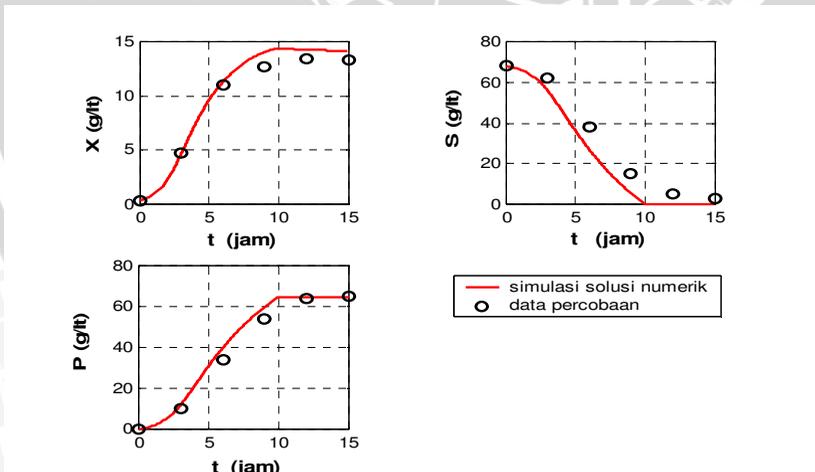
Tabel 3.3 Syarat Awal Model Fermentasi Asam Laktat dengan Substrat Molase

Konsentrasi awal gula (S_o)	Konsentrasi awal biomassa (X_o)	Konsentrasi awal asam laktat (P_o)
68 g/l	0.3 g/l	0
102g/l	0.3 g/l	0
136 g/l	0.3 g/l	0
170 g/l	0.3 g/l	0

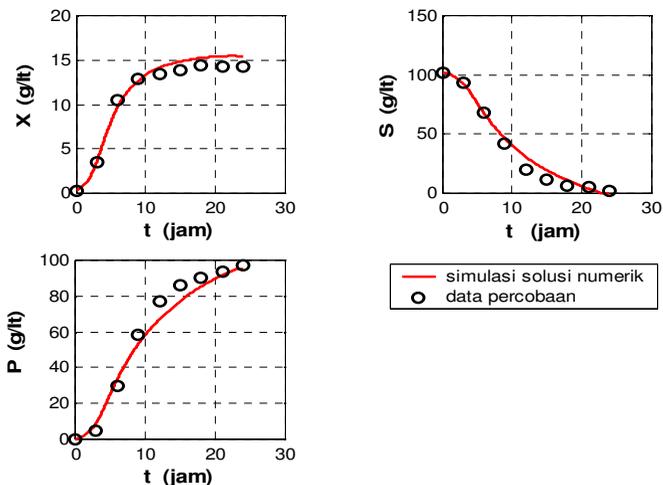
Tabel 3.4 Nilai Parameter Model Fermentasi Asam Laktat dengan Substrat Molase

Model pertumbuhan biomassa	
μ_{max} (jam ⁻¹)	1.6
K_{ix} (g/l)	167.46
K_{sx} (g/l)	0.89
K_{px} (g/l)	17.07
K_d (jam ⁻¹)	0.00318
Model konsumsi gula	
$q_{s,max}$ (g produk.g substrat ⁻¹ .jam ⁻¹)	3.33
K_{is} (g/l)	303.17
K_{ss} (g/l)	0.1
K_{ps} (g/l)	29.17
Model produksi asam laktat	
α (g produk/g substrat)	0.26
$q_{p,max}$ (g produk.g substrat ⁻¹ .jam ⁻¹)	3.00
K_{ip} (g/l)	303.17
K_{sp} (g/l)	0.1
K_{pp} (g/l)	29.17

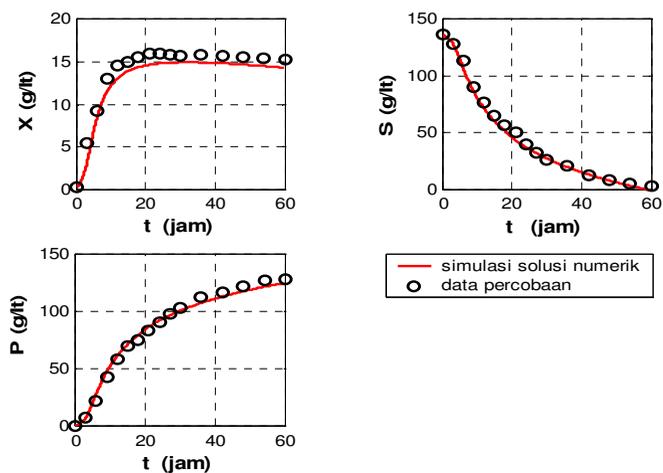
Hasil simulasi numerik model ke dua diberikan pada Gambar 3.8-3.11.



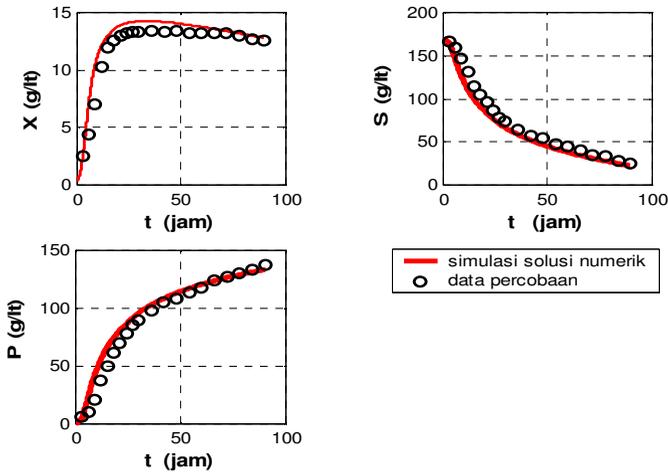
Gambar 3.8 Solusi numerik untuk $X(t)$, $S(t)$ dan $P(t)$ dari model ke dua dengan $S_0=68$ g/l



Gambar 3.9 Solusi numerik untuk $X(t)$, $S(t)$ dan $P(t)$ dari model ke dua dengan $S_0=102$ g/lt



Gambar 3.10 Solusi numerik untuk $X(t)$, $S(t)$ dan $P(t)$ dari model ke dua dengan $S_0=136$ g/lt



Gambar 3.11 Solusi numerik untuk $X(t)$, $S(t)$ dan $P(t)$ dari model ke dua dengan $S_0=170$ g/l

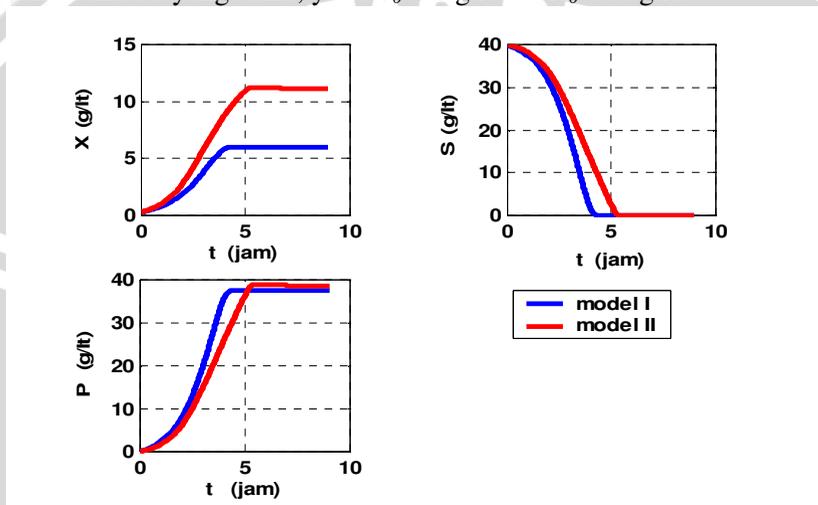
Berdasarkan Gambar 3.8-3.11 dapat dilihat bahwa ada lima karakteristik dari solusi numerik model sistem fermentasi asam laktat satu tahap dengan substrat molase, yaitu

1. semakin besar waktu t , laju konsumsi substrat semakin besar, karena jumlah sel bakteri juga semakin banyak. Akibatnya, laju pertumbuhan biomassa besar dan laju produksi asam laktat juga besar. Hal ini dapat dilihat dari grafik kenaikan $X(t)$ dan $P(t)$ serta grafik penurunan $S(t)$ yang semakin cepat,
2. ketika tercapai laju konsumsi maksimum, maka nilai $X(t)$, $S(t)$ dan $P(t)$ konstan. Dalam keadaan ini tidak ada biomassa baru yang dihasilkan dan tidak ada pula asam laktat baru yang diproduksi (tercapai saturasi). Besarnya konsentrasi asam laktat yang dihasilkan mendekati besarnya konsentrasi awal gula yang digunakan,
3. secara kualitatif dan kuantitatif, perilaku grafik solusi numerik sama dengan perilaku data percobaan untuk semua nilai awal S_0 . Artinya model yang dibentuk sudah sesuai dengan kondisi nyatanya,
4. adanya koefisien K_d memberikan perbedaan pada grafik $X(t)$ untuk konsentrasi awal substrat yang besar. Pada model pertama, tidak ada penurunan grafik $X(t)$ setelah tercapai saturasi,

sedangkan pada model ke dua ada penurunan grafik $X(t)$ setelah tercapai saturasi,

5. perbedaan besarnya konsentrasi awal substrat membedakan pada lamanya proses mencapai saturasi.

Perbedaan model pertama dan model ke dua dapat dilihat pada Gambar 3.12. Pada kasus ini diberikan nilai konsentrasi awal substrat dan biomassa yang sama, yaitu $S_0=40$ g/l dan $X_0=0.3$ g/l.



Gambar 3.12 Solusi numerik untuk $X(t)$, $S(t)$ dan $P(t)$ dari model pertama dan model ke dua dengan $S_0=40$ g/l dan $X_0=0.3$ g/l

Perbedaan karakteristik gula menyebabkan laju biomassa pada model ke dua lebih cepat daripada laju biomassa pada model pertama. Laju biomassa yang cepat menyebabkan laju produksi asam laktat juga cepat. Dengan demikian, hambatan oleh produk pada model kedua lebih cepat daripada hambatan oleh produk pada model pertama.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan skripsi ini dapat disimpulkan hal-hal berikut.

1. Model matematika fermentasi satu tahap produksi asam laktat menggunakan substrat laktosa dan substrat molase merupakan sistem persamaan diferensial biasa non-linier. Hambatan oleh produk untuk fermentasi dengan substrat laktosa terjadi secara linier, sedangkan untuk fermentasi dengan substrat molase terjadi secara ekponensial.
2. Dalam skripsi ini telah dibangun suatu program untuk menentukan solusi numerik model matematika fermentasi satu tahap produksi asam laktat menggunakan substrat laktosa dan substrat molase dengan metode Runge-Kutta orde empat. *Software* yang digunakan adalah Matlab 5.3.
3. Secara kualitatif, solusi numerik model pertama sesuai dengan data percobaan. Model pertama belum sesuai untuk konsentrasi awal substrat yang terlalu besar. Solusi numerik model ke dua sesuai dengan data percobaan baik secara kualitatif maupun kuantitatif. Model ke dua sesuai untuk semua konsentrasi awal substrat yang diberikan.

4.2 Saran

Pada penelitian selanjutnya ada beberapa hal yang dapat dikembangkan dari skripsi ini, yaitu

1. membandingkan hasil fermentasi menggunakan substrat glukosa dan substrat molase, keduanya merupakan gula monosakarida,
2. menentukan model matematika untuk fermentasi yang kontinu (*continous culture*),
3. melakukan estimasi parameter untuk menentukan nilai optimum parameter yang paling sesuai,
4. perlu ada perbaikan model, khususnya pada model pertama.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR PUSTAKA

- Anjana, D.N dan S. Kumar. 2008. Kinetic Modeling of Lactic Acid Production from Molasses using *Enterococcus Faecalis* RKY1. *Biochemical Engineering Journal*. p : 277-284.
- Birkhoff, G dan G.C. Rota. 1989. *Ordinary Diferential Equations*. John Willey&Sons Inc. Canada.
- Boonmee, M, N. Leksawasdi, W. Bridge, dan P.L. Rogers. 2003. Batch and Continous Culture of *Lactococcuc Lactis* NZ133 : experimental data and model development. *Biochemical Engineering Journal*. p : 127-135.
- Boyce, W.E dan R.C. DiPrima. 2005. *Elementary Diferential Equations and Boundary Value Problems Eight Edition*. John Willey&Sons Inc. USA.
- Edwards, C.H dan D.E. Penney. 2001. *Diferential Equation and Linear Algebra*. Prentice Hall Inc. New Jersey.
- Finizio, N dan G. Ladas. 1982. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Erlangga. Jakarta.
- Goncalves, L.M.D, A.M.R.B. Xavier, J.S. Almeida, dan M.J.T. Carrondo. 1991. Concomitant Substrate and Product Inhibition Kinetics in Lactic Acid Production. *Enzyme Microbiol Technology*. p : 314-319.
- Hidayat, N, M.C. Padaga, dan S. Suhartini. 2006. *Mikrobiologi Industri*. Andi Offset. Yogyakarta.
- Lehninger, A.L. 1997. *Dasar-dasar Biokimia*, terjemahan Maggy T. Erlangga. Jakarta .
- Luedeking, R dan E.L. Piret. 1959. A Kinetic Study of the Lactic Acid Fermentation. *Biochemistry Microbiol*. p : 393-412.

Nagie, R.K dan E.B. Saff. 1993. *Fundamental of Diferential Equations and Boundary Value Problems*. Addison-Wesley Publishing Company. USA.

Neurasher, C. 2000. *Calculus for Biology and Medicine*. Pearson Education International. New Jersey.

Rohan, A. 1992. *Teknologi Fermentasi*. Arcani. Jakarta.

Ross, S.L. 1984. *Diferential Equation*. John Willey&Sons. USA.



LAMPIRAN

Lampiran 1. Penurunan Persamaan (2.4)

Skema reaksi enzim diberikan sebagai



Reaksi enzim tersebut dimodelkan dalam sistem persamaan diferensial

$$\frac{ds}{dt} = k_{-1}c - k_1se$$

$$\frac{de}{dt} = (k_{-1} + k_2)c - k_1se$$

$$\frac{dc}{dt} = k_1se - (k_{-1} + k_2)c$$

$$\frac{dp}{dt} = k_2c,$$

(1)

dengan

$$e = [E](t) \quad = \text{konsentrasi enzim pada saat } t$$

$$s = [S](t) \quad = \text{konsentrasi substrat pada saat } t$$

$$c = [ES](t) \quad = \text{konsentrasi kompleks enzim-substrat pada saat } t$$

$$p = [P](t) \quad = \text{konsentrasi produk pada saat } t.$$

Misalkan e_t menyatakan konsentrasi enzim total yaitu jumlah enzim bebas E dan enzim terikat ES maka

$$e_t = e + c$$

$$e = e_t - c.$$

Ketika sistem reaksi berada dalam keadaan setimbang, maka kecepatan pembentukan ES sama dengan kecepatan penguraian ES , sehingga

$$\frac{dc}{dt} = 0$$

$$k_1se = (k_{-1} + k_2)c$$

$$k_1(e_t - c)s = (k_{-1} + k_2)c$$

$$k_1e_t s - k_1cs = (k_{-1} + k_2)c$$

$$k_1e_t s = (k_1s + k_{-1} + k_2)c$$

$$c = \frac{k_1e_t s}{k_1s + k_{-1} + k_2}$$

$$c = \frac{e_t s}{s + (k_{-1} + k_2)/k_1} \quad (2)$$

Substitusi persamaan (2) ke $\frac{dp}{dt} = k_2c$ menghasilkan

$$\frac{dp}{dt} = \frac{k_2e_t s}{s + (k_{-1} + k_2)/k_1} \quad (3)$$

Jika konsentrasi substrat cukup besar sehingga semua enzim terikat oleh substrat dalam bentuk kompleks ES , maka diperoleh

$\frac{dp}{dt}$ yang maksimum yaitu k_2e_t . Laju maksimum reaksi enzim dinotasikan dengan

$$\mu_{\max} = k_2e_t \quad (4)$$

Dengan memisalkan $k_m = \frac{k_{-1} + k_2}{k_1}$ dan mensubstitusikan persamaan (4) ke dalam persamaan (3) dihasilkan

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\mu_{\max} s}{k_m + s} \quad (\text{Lehninger, 1997}).$$

Lampiran 2. Data Percobaan

DATA PERCOBAAN MODEL PERTAMA

Konsentrasi Biomassa

Waktu Fermentasi (jam)	$S_0 = 20$ g/Lt Konsentrasi (g/Lt)	$S_0 = 40$ g/Lt Konsentrasi (g/Lt)	$S_0 = 60$ g/Lt Konsentrasi (g/Lt)	$S_0 = 80$ g/Lt Konsentrasi (g/Lt)	$S_0 = 100$ g/Lt Konsentrasi (g/Lt)
0	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
1	0.32	0.32	0.34	0.34	0.35
2	0.4	0.42	0.44	0.44	0.45
3	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
4	1	1	1.3	1.3	0.9
5	1.8	2.2	2.5	2.5	1.7
6	2.7	3.8	4.3	4.5	3.2
7	3	4.8	5.5	6	4.5
8	3	5	6	6.3	5.3
9	-	5	6.2	6.2	5.5
10	-	-	6	6.2	5.8
11	-	-	-	6	6
12	-	-	-	5.8	5.8
13	-	-	-	5.3	5.6
14	-	-	-	-	5.3
15	-	-	-	-	5.2
16	-	-	-	-	5

Konsentrasi Laktosa

Waktu Fermentasi (jam)	$S_0 = 20$ g/Lt Konsentrasi (g/Lt)	$S_0 = 40$ g/Lt Konsentrasi (g/Lt)	$S_0 = 60$ g/Lt Konsentrasi (g/Lt)	$S_0 = 80$ g/Lt Konsentrasi (g/Lt)	$S_0 = 100$ g/Lt Konsentrasi (g/Lt)
0	20	40	60	80	100
1	19.3	38.8	58.9	76.4	97.5
2	19.1	38.6	58.2	74.1	96.5
3	18.3	38.4	57.2	71.7	94.5
4	15	36	56.6	69.2	94
5	10	29.8	49.8	67	92
6	3.6	20.2	38.3	56.4	82
7	0.3	8.4	23	41	67.5
8	0.2	0.8	8.1	24.7	49.5
9	-	0.6	0.8	14.8	39
10	-	-	0.6	7.2	29
11	-	-	-	2.4	23.5
12	-	-	-	1.2	18
13	-	-	-	1	16.5
14	-	-	-	-	12.5
15	-	-	-	-	11.5
16	-	-	-	-	9

Konsentrasi Asam Laktat

Waktu Fermentasi (jam)	$S_0 = 20$ g/l Konsentrasi (g/l)	$S_0 = 40$ g/l Konsentrasi (g/l)	$S_0 = 60$ g/l Konsentrasi (g/l)	$S_0 = 80$ g/l Konsentrasi (g/l)	$S_0 = 100$ g/l Konsentrasi (g/l)
0	0	0	0	0	0
1	0.7	0.8	1	2	2.3
2	1.1	1.8	2	2.8	3.8
3	2.4	3	3.9	4.7	4.5
4	4.8	6.4	6.3	7.1	7.5
5	9.5	11.4	11.8	13.2	11.8
6	15.3	21.2	22.3	24.5	20
7	18.8	31.6	36.1	38.6	31.5
8	19	37.6	48	51.7	44
9	-	37.6	56.4	61.1	54
10	-	-	56.2	68.2	61.5
11	-	-	-	73	67
12	-	-	-	73.4	72
13	-	-	-	73.4	75
14	-	-	-	-	78
15	-	-	-	-	79.5
16	-	-	-	-	80

DATA PERCOBAAN MODEL KE DUA

Konsentrasi Biomassa

Waktu Fermentasi (jam)	$S_0 = 68$ g/Lt Konsentrasi (g/Lt)	$S_0 = 102$ g/Lt Konsentrasi (g/Lt)	$S_0 = 136$ g/Lt Konsentrasi (g/Lt)	$S_0 = 170$ g/Lt Konsentrasi (g/Lt)
0	0.3	0.3	0.3	0.3
3	4.7	3.5	5.5	2.5
6	11	10.5	9.2	4.4
9	12.7	12.8	13	7
12	13.4	13.4	14.5	10.3
15	13.3	13.8	15	12
18	-	14.4	15.5	12.6
21	-	14.3	16	13
24	-	14.2	16	13.2
27	-	-	15.8	13.3
30	-	-	15.7	13.3
36	-	-	15.8	13.4
42	-	-	15.6	13.3
48	-	-	15.5	13.4
54	-	-	15.4	13.2
60	-	-	15.3	13.2
66	-	-	-	13.2
72	-	-	-	13.2
78	-	-	-	13
84	-	-	-	12.7
90	-	-	-	12.6

Konsentrasi Gula

Waktu Fermentasi (jam)	S ₀ = 68 g/Lt Konsentrasi (g/Lt)	S ₀ = 102 g/Lt Konsentrasi (g/Lt)	S ₀ = 136 g/Lt Konsentrasi (g/Lt)	S ₀ = 170 g/Lt Konsentrasi (g/Lt)
0	68	102	136	170
3	62	93	128	167
6	38	68	113	160
9	15	42	90	147
12	5	20	77	132
15	3	12	65	115
18	-	6	57	105
21	-	5	50	96
24	-	2	40	87
27	-	-	32	78
30	-	-	26	74
36	-	-	21	65
42	-	-	13	57
48	-	-	8	54
54	-	-	5	47
60	-	-	3	45
66	-	-	-	40
72	-	-	-	35
78	-	-	-	33
84	-	-	-	28
90	-	-	-	25

Konsentrasi Asam Laktat

Waktu Fermentasi (jam)	S ₀ = 68 g/l Konsentrasi (g/l)	S ₀ = 102 g/l Konsentrasi (g/l)	S ₀ = 136 g/l Konsentrasi (g/l)	S ₀ = 170 g/l Konsentrasi (g/l)
0	0	0	0	0
3	10	5	7	6
6	34	30	22	10
9	54	58	43	21
12	64	77	58	37
15	65	86	70	50
18	-	90	75	61
21	-	94	83	70
24	-	97	91	78
27	-	-	98	85
30	-	-	103	90
36	-	-	112	98
42	-	-	117	105
48	-	-	122	108
54	-	-	127	114
60	-	-	128	118
66	-	-	-	124
72	-	-	-	127
78	-	-	-	130
84	-	-	-	133
90	-	-	-	137

Lampiran 3. Listing Program

Model Pertama

function dX=f1(t,X,S,P)

MiuMax=1.10;

Ksx=1.32;

Kix=304;

Pmx=49.9;

Pix=1.39;

$dX = \text{MiuMax} * S * X / (Ksx + S) * Kix / (Kix + S) * (Pmx - P) / (Pmx - Pix);$

function dS=f2(t,X,S,P)

QsMax=3.42;

Kss=2.05;

Kis=140;

Pms=95.5;

Pis=47.1;

$dS = -QsMax * S * X / (Kss + S) * Kis / (Kis + S) * (Pms - P) / (Pms - Pis);$

function dP=f3(t,X,S,P)

Alfa=0.39;

QpMax=3.02;

Ksp=2.05;

Kip=140;

Pmp=95.5;

Pip=47.1;

MiuMax=1.10;

Ksx=1.32;

Kix=304;

Pmx=49.9;

Pix=1.39;

$dP = [\text{Alfa} * \text{MiuMax} * S * X / (Ksx + S) * Kix / (Kix + S) * (Pmx - P) / (Pmx - Pix)] + [QpMax * S * X / (Ksp + S) * Kip / (Kip + S) * (Pmp - P) / (Pmp - Pip)];$

function [T,X,S,P]=modell(t,x,s,p)

% syarat awal data 1

x=0.3;

s=20;

p=0;

t=0;

tmax=8;

% syarat awal data 2

$x=0.3;$

$s=40;$

$p=0;$

$t=0;$

$tmax=9;$

% syarat awal data 3

$x=0.3;$

$s=60;$

$p=0;$

$t=0;$

$tmax=10;$

% syarat awal data 4

$x=0.3;$

$s=80;$

$p=0;$

$t=0;$

$tmax=13;$

% syarat awal data 5

$x=0.3;$

$s=100;$

$p=0;$

$t=0;$

$tmax=16;$

$T=t;$

$X=x;$

$S=s;$

$P=p;$

$n=100*tmax;$

$h=tmax/n;$

for $j=1:n$

$k11=h*f1(t,x,s,p);$

$k12=h*f2(t,x,s,p);$

$k13=h*f3(t,x,s,p);$

$k21=h*f1(t+h/2,x+k11/2,s+k12/2,p+k13/2);$

$k22=h*f2(t+h/2,x+k11/2,s+k12/2,p+k13/2);$



```

k23=h*f3(t+h/2,x+k11/2,s+k12/2,p+k13/2);
k31=h*f1(t+h/2,x+k21/2,s+k22/2,p+k23/2);
k32=h*f2(t+h/2,x+k21/2,s+k22/2,p+k23/2);
k33=h*f3(t+h/2,x+k21/2,s+k22/2,p+k23/2);
k41=h*f1(t+h,x+k31,s+k32,p+k33);
k42=h*f2(t+h,x+k31,s+k32,p+k33);
k43=h*f3(t+h,x+k31,s+k32,p+k33);
x=x+(k11+2*k21+2*k31+k41)/6;
s=s+(k12+2*k22+2*k32+k42)/6;
p=p+(k13+2*k23+2*k33+k43)/6;
t=t+h;

```

```

T=[T,t];
X=[X,x];
S=[S,s];
P=[P,p];

```

```
end
```

```
% data percobaan 1
```

```

te = [0 1 2 3 4 5 6 7 8];
xe = [0.3 0.32 0.4 0.5 1 1.8 2.7 3 3];
se = [20 19.3 19.1 18.3 15 10 3.6 0.3 0.2];
pe = [0 0.7 1.1 2.4 4.8 9.5 15.3 18.8 19];

```

```
% data percobaan 2
```

```

te = [0 1 2 3 4 5 6 7 8 9];
xe = [0.3 0.32 0.42 0.5 1 2.2 3.8 4.8 5 5];
se = [40 38.8 38.6 38.4 36 29.8 20.2 8.4 0.8 0.6];
pe = [0 0.8 1.8 3 6.4 11.4 21.2 31.6 37.6 37.6];

```

```
% data percobaan 3
```

```

te = [0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10];
xe = [0.3 0.34 0.44 0.5 1.3 2.5 4.3 5.5 6 6.2 6];
se = [60 58.9 58.2 57.2 56.6 49.8 38.3 23 8.1 0.8 0.6];
pe = [0 1 2 3.9 6.3 11.8 22.3 36.1 48 56.4 56.2];

```

```
% data percobaan 4
```

```

te = [0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13];
xe = [0.3 0.34 0.44 0.5 1.3 2.5 4.5 6 6.3 6.2 6.2 6.1 5.8 5.3];
se = [80 76.4 74.1 71.7 69.2 67 56.4 41 24.7 14.8 7.2 2.4 1.2 1];
pe = [0 2 2.8 4.7 7.1 13.2 24.5 38.6 51.7 61.1 68.2 73 73.4 73.4];

```

```
% data percobaan 5
```

```
te = [0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16];
```

```

xe = [0.3 0.35 0.45 0.5 0.9 1.7 3.2 4.5 5.3 5.5 5.8 6 5.8 5.6 5.3 5.2 5];
se = [100 97.5 96.5 94.5 94 92 82 67.5 49.5 39 29 23.5 18 16.5 12.5
11.5 9];
pe = [0 2.3 3.8 4.5 7.5 11.8 20 31.5 44 54 61.5 67 72 75 78 79.5 80];

```

```

fprintf('\ t x s p \n');
fprintf('-----\n');
fprintf('%4.4f %8.10f %10.10f %12.10f\n',[T;X;S;P]);
figure(1);

```

```

subplot(2,2,1);
plot(T,X,'g');
hold on; plot(te,xe,'o'); hold off;
xlabel('T (jam)');
ylabel('X (g/lt)');
grid on
axis square

```

```

subplot(2,2,2);
plot(T,S,'g');
hold on; plot(te,se,'o'); hold off;
xlabel('T (jam)');
ylabel('S (g/lt)');
grid on
axis square

```

```

subplot(2,2,3);
plot(T,P,'g');
hold on; plot(te,pe,'o'); hold off;
xlabel('T (jam)');
ylabel('P (g/lt)');
grid on
axis square

```



Model Ke Dua

function dX=g1(t,X,S,P)

MiuMax=1.6;

Ksx=0.89;

Kix=167.46;

Kpx=17.07;

Kd=0.00318;

$dX=[\text{MiuMax} * S * X / (\text{Ksx} + S) * \text{Kix} / (\text{Kix} + S) * \exp(-P/\text{Kpx})] - \text{Kd} * X;$

function dS=g2(t,X,S,P)

QsMax=3.33;

Kss=0.1;

Kis=303.17;

Kps=29.17;

$dS=-\text{QsMax} * S * X / (\text{Kss} + S) * \text{Kis} / (\text{Kis} + S) * \exp(-P/\text{Kps});$

function dP=g3(t,X,S,P)

Alfa=0.26;

QpMax=3.00;

Ksp=0.1;

Kip=303.17;

Kpp=29.17;

MiuMax=1.6;

Ksx=0.89;

Kix=167.46;

Kpx=17.07;

Kd=0.00318;

$dP=[\text{Alfa} * \text{MiuMax} * S * X / (\text{Ksx} + S) * \text{Kix} / (\text{Kix} + S) * \exp(-P/\text{Kpx})] -$

$\text{Kd} * X + [\text{QpMax} * S * X / (\text{Ksp} + S) * \text{Kip} / (\text{Kip} + S) * \exp(-P/\text{Kpp})];$

function [T,X,S,P]=modell(t,x,s,p)

% syarat awal data 1

x=0.3;

s=68;

p=0;

t=0;

tmax=15;

% syarat awal data 2

x=0.3;

s=102;

p=0;

t=0;
tmax=24;
% syarat awal data 3

x=0.3;
s=136;
p=0;
t=0;
tmax=60;

% syarat awal data 4

x=0.3;
s=170;
p=0;
t=0;
tmax=90;

T=t;
X=x;
S=s;
P=p;

n=100*tmax;
h=tmax/n;

for j=1:n
k11=h*g1(t,x,s,p);
k12=h*g2(t,x,s,p);
k13=h*g3(t,x,s,p);
k21=h*g1(t+h/2,x+k11/2,s+k12/2,p+k13/2);
k22=h*g2(t+h/2,x+k11/2,s+k12/2,p+k13/2);
k23=h*g3(t+h/2,x+k11/2,s+k12/2,p+k13/2);
k31=h*g1(t+h/2,x+k21/2,s+k22/2,p+k23/2);
k32=h*g2(t+h/2,x+k21/2,s+k22/2,p+k23/2);
k33=h*g3(t+h/2,x+k21/2,s+k22/2,p+k23/2);
k41=h*g1(t+h,x+k31,s+k32,p+k33);
k42=h*g2(t+h,x+k31,s+k32,p+k33);
k43=h*g3(t+h,x+k31,s+k32,p+k33);
x=x+(k11+2*k21+2*k31+k41)/6;
s=s+(k12+2*k22+2*k32+k42)/6;
p=p+(k13+2*k23+2*k33+k43)/6;

```

t=t+h;

T=[T,t];
X=[X,x];
S=[S,s];
P=[P,p];
end
% data percobaan 1
te = [0 3 6 9 12 15];
xe = [0.3 4.7 11 12.7 13.4 13.3];
se = [68 62 38 15 5 3];
pe = [0 10 34 54 64 65];
% data percobaan 2
te = [0 3 6 9 12 15 18 21 24];
xe = [0.3 3.5 10.5 12.8 13.4 13.8 14.4 14.3 14.2];
se = [102 93 68 42 20 12 6 5 2];
pe = [0 5 30 58 77 86 90 94 97];
% data percobaan 3
te = [0 3 6 9 12 15 18 21 24 27 30 36 42 48 54 60];
xe = [0.3 5.5 9.2 13 14.5 15 15.5 16 16 15.8 15.7 15.8 15.6 15.5 15.4
15.3];
se = [136 128 113 90 77 65 57 50 40 32 26 21 13 8 5 3];
pe = [0 7 22 43 58 70 75 83 91 98 103 112 117 122 127 128];
% data percobaan 4
te = [3 6 9 12 15 18 21 24 27 30 36 42 48 54 60 66 72 78 84 90];
xe = [2.5 4.4 7 10.3 12 12.6 13 13.2 13.3 13.3 13.4 13.3 13.4 13.2
13.2 13.2 13.2 13 12.7 12.6];
se = [167 160 147 132 115 105 96 87 78 74 65 57 54 47 45 40 35 33
28 25];
pe = [6 10 21 37 50 61 70 78 85 90 98 105 108 114 118 124 127 130
133 137];

fprintf('\ t x s p \n');
fprintf('-----\n');
fprintf('%4.4f %8.10f %10.10f %12.10f\n',[T;X;S;P]);
figure(1);

subplot(2,2,1);
plot(T,X,'g');

```

```
hold on; plot(te,xe,'o'); hold off;  
xlabel('T (jam)');  
ylabel('X (g/lt)');  
grid on  
axis square
```

```
subplot(2,2,2);  
plot(T,S,'g');  
hold on; plot(te,se,'o'); hold off;  
xlabel('T (jam)');  
ylabel('S (g/lt)');  
grid on  
axis square
```

```
subplot(2,2,3);  
plot(T,P,'g');  
hold on; plot(te,pe,'o'); hold off;  
xlabel('T (jam)');  
ylabel('P (g/lt)');  
grid on  
axis square
```

