PERHITUNGAN FAKTOR PERSEKUTUAN TERBESAR (FPB) DARI POLINOMIAL BIVARIAT DENGAN TRANSFORMASI FOURIER DISKRIT

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang matematika

Oleh :
LISA KURNIASARI
0310940033-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2009

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

PERHITUNGAN FAKTOR PERSEKUTUAN TERBESAR (FPB) DARI POLINOMIAL BIVARIAT DENGAN TRANSFORMASI FOURIER DISKRIT

Oleh:
LISA KURNIASARI
0310940033-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 30 Juli 2009
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang matematika

Pembimbing I	Pembimbing II
Dra. Ari Andari, MS	**Syaiful Anam, SSi., MT**
NIP. 131 652 679	**NIP. 132 300 237**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Agus Suryanto, MSc
NIP. 132 126 049

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	**:**	**Lisa Kurniasari**
NIM	**:**	**0310940033**
Jurusan	**:**	**Matematika**
Penulis skripsi berjudul	**:**	**Perhitungan Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) Dari Polinomial Bivariat Dengan Transformasi Fourier Diskrit**

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. **Isi dari skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis pada daftar pustaka dalam skripsi ini.**
2. **Apabila di kemudian hari ternyata skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya akan bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 30 Juli 2009
Yang menyatakan,

(Lisa Kurniasari)
NIM. 0310940033

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillah, puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala rahmat dan kasih sayang-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Perhitungan Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) Dari Polinomial Bivariat Dengan Transformasi Fourier Diskrit". Sholawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW beserta keluarga, sahabat, tabi'in, tabi'at, dan ummat yang selalu istiqomah di jalan Allah SWT.

Skripsi ini disusun dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang Matematika.

Tidak lupa penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Dra. Ari Andari, MS selaku Dosen Pembimbing I dan Bapak Syaiful Anam, SSi., MT selaku Dosen Pembimbing II atas segala ilmu, masukan, motivasi, dan bimbingannya selama penyusunan skripsi ini.
2. Dr. Agus Suryanto, MSc dan Dr. Wuryansari Muharini K., MSi selaku Ketua Jurusan Matematika dan Ketua Program Studi Matematika.
3. Drs. Noor Hidayat, MSi selaku penasehat akademik atas nasehat dan saran selama penulis menempuh studi.
4. Dra. Trisilowati, MSc, Dr. Abdul Rouf A., MSc, dan Dr. Agus Suryanto, MSc selaku Dosen Penguji yang telah banyak memberikan masukan, saran, dan kritik untuk kesempurnaan skripsi ini.
5. Seluruh Dosen Matematika atas segala ilmu yang telah diberikan dan staf Tata Usaha Jurursan Matematika atas segala bantuannya selama penulis menempuh studi.
6. Ayah dan Ibu tercinta serta kakak-kakak, atas segala doa, kasih sayang, dukungan, dan motivasi yang telah diberikan dengan tulus.
7. Semua teman-teman Matematika angkatan 2003 atas segala dukungan dan semangatnya.
8. Semua teman-teman kos di 259 atas persaudaraan, doa, semangat, dukungan, dan bantuannya.

9. Serta semua pihak yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu, terima kasih banyak.

Penulis menyadari bahwa skripsi masih banyak kekurangan yang perlu disempurnakan. Oleh karena itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun dalam upaya peningkatan kualitas skripsi ini.

Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi penulis khususnya dan semua pihak pada umumnya.

Wassalamu’alaikum Wr. Wb.

Malang,30 Juli 2009

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

PERHITUNGAN FAKTOR PERSEKUTUAN TERBESAR (FPB) DARI POLINOMIAL BIVARIAT DENGAN TRANSFORMASI FOURIER DISKRIT

ABSTRAK

Polinomial bivariat atau polinomial dua variabel bukanlah ring Euclid (*non Euclidean rings*), yaitu ring polinomial yang tidak memenuhi algoritma pembagian dan algoritma Euclid sehingga kesulitan dalam mencari faktor persekutuan terbesar (FPB) yang sebenarnya. Salah satu metode yang digunakan untuk menghitung pendekatan FPB dari polinomial bivariat adalah transformasi Fourier diskrit sehingga diperoleh FPB yang mendekati FPB yang sebenarnya.

Kata kunci: faktor persekutuan terbesar (FPB), interpolasi, transformasi Fourier diskrit, polinomial dua variabel.

DETERMINATION OF GREATEST COMMON DIVISOR (GCD) FROM BIVARIATE POLYNOMIALS USING DISCRETE FOURIER TRANSFORM (DFT)

ABSTRACT

Since bivariate polynomial do not satisfy division algorithm and Euclid algorithm then they are non Euclidean rings, so it is difficult to determine its real greatest common divisor (GCD). One of the methods which can be used to determine GCD of bivariate polynomials is discrete fourier transform to get GCD which is close to its real GCD.

Keywords: greatest common divisor (GCD), discrete Fourier transform (DFT), bivariate polynomials

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Faktor persekutuan terbesar (FPB) atau sering juga disebut *greatest common divisor* (GCD) banyak digunakan dalam kriptografi (Menezez, et al, 1996) dan perbaikan gambar (Pillai dan Liang, 2004). FPB dua bilangan bulat biasanya dapat dihitung dengan menggunakan algoritma pembagian dan algoritma Euclid. Begitu juga dengan polinomial univariat (satu variabel) bisa dihitung dengan algoritma pembagian dan algoritma Euclid. Tapi pada polinomial bivariat maupun multivariat perhitungan FPB tidak bisa memakai algoritma pembagian ataupun algoritma Euclid, karena struktur dalam ring polinomial bivariat maupun multivariat berbeda strukturnya dengan ring polinomial univariat (satu variabel) yaitu bukan ring Euclid (*non Euclidean rings*). *Non Euclidean rings* adalah ring polinomial yang tidak memuat algoritma pembagian dan algoritma Euclid. Oleh karena itu terdapat kesulitan dalam menemukan FPB yang sebenarnya dari himpunan polinomial, sehingga diperlukan metode untuk mendapatkan pendekatan FPB yang dicari.

Salah satu metode yang telah dikembangkan adalah transformasi Fourier diskrit. Dari metode tersebut hanya dapat dihasilkan pendekatan FPB tetapi bukan FPB yang sebenarnya.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam skripsi ini adalah bagaimana mengaplikasikan transformasi Fourier diskrit pada algoritma pendekatan FPB dari polinomial bivariat.

1.3 Batasan Masalah

Dalam pembahasan, FPB yang dihitung hanya dari dua polinomial.

1.4 Tujuan

Tujuan dari skripsi ini adalah mengaplikasikan transformasi Fourier diskrit pada algoritma pendekatan FPB dari polinomial bivariat.

1.5 Manfaat

Manfaat dari penulisan skripsi ini adalah sebagai salah satu alternatif metode untuk menyelesaikan pencarian pendekatan FPB dari polinomial bivariat (polinomial dua variabel).

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan dasar teori untuk membantu memahami masalah yang akan dibahas dan juga digunakan sebagai acuan dalam pembahasan.

2.1 Grup

Sebuah himpunan tak kosong G disebut grup terhadap suatu operasi biner $\bullet$ jika untuk setiap $a,b,c \in G$ berlaku:

1. Tertutup : $a \bullet b \in G$
2. Assosiatif : $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$
3. Mempunyai elemen identitas : $\exists e \in G \ni a \bullet e = e \bullet a = a$
4. Mempunyai invers : $\forall a \in G\, \exists a^{-1} \in G \ni a \bullet a^{-1} = a^{-1} \bullet a = e$

Jika grup G mempunyai sifat komutatif yaitu $a \bullet b = b \bullet a, \forall a,b \in G$, maka $(G,\bullet)$ disebut grup komutatif.

(Dummit, 2002)

2.2 Ring

Ring adalah salah satu struktur aljabar yang di dalamnya terdapat 2 operasi biner, yaitu operasi penjumlahan dan pergandaan.

Definisi 2.2.1 Diberikan himpunan $R \neq \phi$. $(R,+,*)$ disebut ring jika $\forall a,b,c \in R$ memenuhi:

I. Terhadap penjumlahan, R adalah suatu grup komutatif.
II. Terhadap pergandaan
   1. $a * b \in R$.
   2. $(a * b) * c = a * (b * c)$.
III. Hukum distributif:
   $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$.
   $(b + c) * a = (b * a) + (c * a)$.

(Arifin, 2000)

Definisi 2.2.2 Ring R disebut ring komutatif jika terhadap pergandaan berlaku komutatif ($a,b \in R$ maka $a * b = b * a$).

(Dummit, 1999)

Definisi 2.2.3 Ring R disebut ring dengan elemen identitas jika terdapat e untuk semua $a \in R$ sedemikian sehingga $a * e = e * a = a$.

(Whitelaw, 1995)

Definisi 2.2.4 R adalah ring komutatif. Suatu elemen yang bukan nol $a \in R$ disebut pembagi nol, bila ada elemen yang bukan nol $b \in R$ sedemikian sehingga $a \cdot b = 0$.

(Wahyudin, 1989)

Definisi 2.2.5 Ring komutatif R dengan identitas $1 \neq 0$ disebut daerah integral jika R tidak mempunyai pembagi nol.

(Dummit, 1999)

2.3 Field

Suatu daerah integral dimana setiap anggota tak nol di dalamnya mempunyai invers terhadap pergandaan disebut *field* yang didefinisikan sebagai berikut ini.

Definisi 2.3.1 Misalkan $F \neq \phi$. F disebut *field* jika:

1. F ring komutatif.
2. F mempuyai elemen satuan.
3. $\forall a \in F - \{0\}, \exists a^{-1} \in F$ sedemikian sehingga $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

(Whitelaw, 1995)

Teorema 2.3.1 Setiap field adalah daerah integral.

Bukti:

Misalkan F suatu *field*. Ambil $x, y \in F - \{0\}$ sehingga $x \neq 0, y \neq 0$. Karena berlaku sifat tertutup terhadap pergandaan maka $xy \neq 0$. Jadi F tidak memuat pembagi nol sejati. Jadi setiap *field* adalah daerah integral ($F = DI$).

(Whitelaw, 1995)

2.4 Polinomial

Definisi 2.4.1 Polinomial adalah jumlah dari satu atau lebih monomial yang mempunyai derajat berbeda yang dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$$

dimana $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ adalah koefisien polinomial, $n \geq 0$ adalah bilangan bulat positif dan x adalah variabel.

(Sullivan, 1989)

Definisi 2.4.2 Fungsi polinomial derajat n adalah fungsi dengan bentuk:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$$

dimana $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ adalah bilangan real, $a_n \neq 0$ dan n adalah bilangan bulat positif.

(Sullivan, 1989)

Definisi 2.4.3 Jika $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$, $a_n \neq 0$ maka $f(x)$ dikatakan berderajat n dan dinotasikan dengan $\deg f(x) = n$.

(Fraleigh, 1994)

Definisi 2.4.4 Polinomial bivariat adalah polinomial dengan dua variabel yang diekspresikan dalam bentuk:

$$p(x, y) = \sum_{i}^{m} \sum_{j}^{n} a_{i,j} x^i y^j \ , \quad i = 0,1, \cdots, m, \quad j = 0,1, \cdots, n.$$

(www.math-wolfram.com)

Definisi 2.4.5 Misalkan R ring komutatif dengan elemen identitas. Ring polinomial $R[x]$ dengan variabel x dan koefisien-koefisiennya dari ring R, adalah himpunan semua bentuk $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$, dimana n bilangan bulat tidak negatif dan setiap a_i adalah elemen di R.

(Dummit, 1999)

Definisi 2.4.6 Diketahui suatu polinomial berbentuk $f(x) = a_n x_n + a_{n-1} x_{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 x^0$ adalah monik jika $a_n = 1$.

(Bhattacharya, 1990)

Teorema 2.4.1 (Algoritma Pembagian). Jika F field dan $f(x), g(x) \in F[x]$, $f(x), g(x) \neq 0$, maka terdapat dengan tunggal hasil bagi $q(x)$ dan sisa pembagian $r(x)$ sedemikan sehingga $f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$, $q(x)$ dan $r(x) \in F[x]$ dimana $r(x) = 0$ atau $\deg r(x) < \deg g(x)$.

Bukti:

Ambil sebarang $f(x), g(x) \in F[x]$, $f(x), g(x) \neq 0$. Misalkan

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m, \quad a_m \neq 0 \Rightarrow \deg f(x) = m$$

dan $g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n, \quad b_n \neq 0 \Rightarrow \deg g(x) = n$.

Terdapat 2 kasus yaitu:

1. Jika $m < n$ maka $\deg f(x) < \deg g(x)$ sehingga

   $$f(x) = 0 \cdot g(x) + r(x),$$

   dimana $\deg r(x) < \deg g(x)$. Jadi

   $$q(x) = 0 \text{ dan } r(x) = f(x),$$

   dengan $\deg r(x) < \deg g(x)$.
2. Jika $m \geq n$, maka $\deg f(x) \geq \deg g(x)$ (dibuktikan dengan induksi):

i. Jika $m = n = 0$, maka $f(x)$ dan $g(x)$ adalah polinomial konstan sehingga $f(x) = a_m$ dan $g(x) = b_m$.

Jadi,

$$a_m = q(x) \cdot b_n + r(x).$$

Karena $q(x) = \dfrac{a_m}{b_n}$ maka $r(x) = 0$ atau $\deg r(x) < \deg(x)$.

ii. Misalkan teorema benar untuk suatu polinomial yang berderajat kurang dari m. Maka

$$f(x) = \left(\frac{a_m x^m}{b_n x^n}\right) \cdot g(x) + f_1(x).$$

Karena $f_1(x) \in F[x]$,

$$f_1(x) = q_1(x) \cdot g(x) + r(x),$$

dimana $\deg r(x) < \deg g(x)$.

Sehingga diperoleh

$$f(x) = (a_m b_n^{-1} x^{m-n}) \cdot g(x) + (q_1(x) \cdot g(x) + r(x)),$$

dengan $\deg r(x) < \deg g(x)$. Jadi,

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x),$$

dengan $q(x) = a_m b_n^{-1} x^{m-n} + q_1(x)$ dan $\deg r(x) < \deg g(x)$.

Jadi, teorema terpenuhi untuk $m \geq n$.

Akan ditunjukkan $q(x)$ dan $r(x)$ tunggal. Andaikan terdapat polinomial lain $q'(x) \neq 0$ atau $\deg r'(x) < \deg g(x)$, maka

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$$

$$f(x) = q'(x) \cdot g(x) + r'(x),$$

sedemikian sehingga

$$q(x) \cdot g(x) + r(x) = q'(x) \cdot g(x) + r'(x)$$

$$[q(x) - q'(x)] \cdot g(x) = r'(x) - r(x).$$

Terdapat 2 kemungkinan:

- $q(x) - q'(x) = 0$ dan $r'(x) - r(x) = 0$, atau $q(x) = q'(x)$ dan $r'(x) = r(x)$.
- $q(x) - q'(x) \neq 0$ dan $r'(x) - r(x) \neq 0$, terdapat 2 kasus yaitu:

1. $\deg[q(x)-q'(x)]\cdot g(x) \geq n$ (karena $q(x)-q'(x) \neq 0$ dan $\deg g(x) = n$).
2. $\deg[r'(x)-r(x)] < n$ (karena $\deg r(x) < n$ dan $\deg r'(x) < n$).

Padahal $[q(x)-q'(x)]\cdot g(x) = r'(x) - r(x)$, sehingga tidak mungkin terjadi. Maka,

$$q(x)-q'(x) = 0 \text{ dan } r'(x)-r(x) = 0.$$

Jadi, terbukti $q(x) = q'(x)$ dan $r'(x) = r(x)$ ($q(x)$ dan $r(x)$ tunggal).

(Raisinghania & Anggarwal, 1980)

Teorema 2.4.2 (Teorema Sisa). Sisa pembagian polinomial $f(x)$ oleh $(x-\alpha)$ dalam $F[x]$ adalah $f(\alpha)$.

Bukti:

Menurut algoritma pembagian, terdapat $q(x), r(x) \in F[x]$ sedemikian sehingga $f(x) = q(x)\cdot g(x) + r(x)$, dimana $r(x) = 0$ atau $\deg r(x) < \deg g(x)$. Karena $g(x) = (x-\alpha)$ dan $\deg(x-\alpha) = 1$ maka $\deg r(x) < 1$, sehingga $\deg r(x) = 0$, yaitu sisanya adalah suatu konstanta $r_0 \in F$ yang dapat ditulis dalam bentuk

$$f(x) = q(x)\cdot g(x) + r_0.$$

Bila disubsitusikan $x = \alpha$, diperoleh hasil

$$f(\alpha) = q(x)\cdot(\alpha-\alpha) + r_0$$

$$f(\alpha) = r_0.$$

(Wahyudin, 1989)

Teorema 2.4.3 (Teorema Faktor). Untuk polinomial $P(x) \in F[x]$ dan α bilangan kompleks, maka $P(\alpha) = 0$ bila dan hanya bila $(x - 1)$ adalah faktor dari $P(x)$.

Bukti:

($\Leftarrow$) Diketahui $P(\alpha)=0$. Dengan Teorema Sisa diperoleh

$$P(x)=Q(x)\cdot(x-\alpha)+0,$$

sehingga $r(x)=0$. Dengan kata lain $(x-\alpha)$ adalah faktor dari $P(x)$, untuk sebarang $Q(x)\in F[x]$.

($\Rightarrow$) Misalkan $(x-\alpha)$ adalah faktor dari $P(x)$ maka $P(x)=Q(x)\cdot(x-\alpha)$, $Q(x)\in F[x]$. Dengan algoritma pembagian, $P(x)$ dapat dituliskan dalam bentuk $P(x)=Q(x)\cdot(x-\alpha)+r(x)$. Diketahui bahwa $(x-\alpha)$ adalah faktor dari $P(x)$, maka sisa pembagiannya adalah $r=0$ sehingga $P(\alpha)=0$.

(Hall, 2000).

2.5 Faktor Persekutuan Terbesar (FPB)

Definisi 2.5.1 Misal $P_1,P_2\in F[x]$. P_2 membagi P_1, jika terdapat $Q\in F[x]$ sedemikian sehingga $P_1 = P_2Q$.

(www.mathrefesher.com)

Definisi 2.5.2 FPB dari polinomial P_1,P_2 adalah $D\in F[x]$ yang memenuhi:

1. Jika D membagi P_1 dan P_2, maka $D|P_1$ dan $D|P_2$.
2. Jika S adalah polinomial yang membagi P_1 dan P_2, maka $S|D$.

(www.mathrefresher.com)

Contoh 2.5.1 Untuk menentukan FPB dari polinomial x^2+7x+6 dan x^2-5x-6 adalah dengan memfaktorkan terlebih dahulu kedua polinomial tersebut, yaitu

$$x^2+7x+6=(x+6)(x+1),$$

$$x^2-5x-6=(x+1)(x-6).$$

Terlihat $(x+1)\,|\,x^2+7x+6$ dan $(x+1)\,|\,x^2-5x-6$, maka FPB $(x^2+7x+6, x^2-5x-6)=(x+1)$.

Definisi 2.5.3 Jika 1 adalah FPB dari polinomial P_1, P_2 maka P_1, P_2 dikatakan polinomial prima relatif (*relative prime*) atau juga sering disebut *coprime*.

(www.mathrefresher.com)

Teorema 2.5.1 (Algoritma Euclid). Jika ada 2 polinomial P_1, P_2 maka terdapat tepat satu FPB.

Bukti:

Misal $P_1, P_2 \in F[x]$, $P_2 \neq 0$ dan $\deg P_1(x) > \deg P_2(x)$. Untuk menghitung FPB dari polinomial $P_1(x)$ dan $P_2(x)$ digunakan algoritma Euclid yang diselesaikan dengan iterasi:

1. Dengan menggunakan algoritma pembagian untuk menemukan $Q_1(x), R_1(x) \in F[x]$ dengan $\deg R_1(x) < \deg P_2(x)$ sedemikian sehingga
$$P_1(x) = Q_1(x) \cdot P_2(x) + R_1(x).$$
2. Jika $R_1(x) = 0$ maka iterasi berhenti. Sehingga $P_2(x)$ adalah FPB dari $P_1(x)$ dan $P_2(x)$.
3. Jika $R_1(x) \neq 0$ maka $P_1(x)$ diganti dengan $P_2(x)$ dan $P_2(x)$ diganti dengan $R_1(x)$ dan dilanjutkan ke langkah 2.

$$\begin{aligned}
&P_1(x) = Q_1(x) \cdot P_2(x) + R_1(x),\\
&P_2(x) = Q_2(x) \cdot R_1(x) + R_2(x),\\
&R_1(x) = Q_3(x) \cdot R_2(x) + R_3(x),\\
&\vdots\\
&R_{n-2}(x) = Q_n(x) \cdot R_{n-1}(x) + R_n(x),\\
&R_{n-1}(x) = Q_{n+1}(x) \cdot R_n(x) + R_{n+1}(x).
\end{aligned}$$

Jika $R_{n+1}(x)=0$ maka $R(x)$ adalah FPB dari P_1 dan P_2. Algoritma ini berakhir karena pada setiap iterasi $\deg R_1(x), \deg R_2(x), \cdots, \deg R_n(x), \deg R_{n+1}(x)$ selalu berkurang.

(www.mathrefresher.com)

Contoh 2.5.2 FPB dari polinomial x^2+7x+6 dan x^2-5x-6 adalah

$$x^2+7x+6=(1)(x^2-5x-6)+(x+1)12,$$

$$(x^2-5x-6)=(x-6)(x+1)+0.$$

Maka FPB $(x^2+7x+6, x^2-5x-6)=(x+1)$.

Definisi 2.5.4 (Ring Euclid). Suatu ring R disebut ring Euclid bila dan hanya bila dipenuhi syarat-syarat:

1. Komutatif.
2. Tidak memuat pembagi nol sejati.
3. Ada suatu fungsi g dari $R-\{0\}$ ke himpunan bilangan-bilangan bulat non negatif sedemikian sehingga $g(ab)\geq g(a)$. Dengan kata lain, $\forall\, a\in R,\, a\neq 0$, dapat didefinisikan bilangan bulat non negatif $g(a)$, apabila $a\neq 0, b\neq 0$ maka $g(ab)\geq g(a)$.
4. Di dalam R terdapat algoritma pembagian, yaitu untuk setiap $a,b\in R,\, a\neq 0$, berlaku:

   $$b=q\cdot a+p$$

   dimana $p=0$ atau $\deg(p)<\deg(a)$.

(Soehakso, 1990)

2.6 Transformasi Fourier Diskrit

Transformasi Fourier diskrit adalah salah satu bentuk spesifik dari analisis Fourier (*Fourier analysis*). Sebelumnya akan didefinisikan terlebih dahulu deret Fourier (*Fourier series*).

Definisi 2.6.1 Jika $f(x)$ periodik dengan periode 2π dan terintegral pada $[-\pi,\pi]$ maka

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx \right)$$

adalah derer Fourier (*Fourier series*) dengan koefisien-koefisiennya adalah

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt\, dt,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt\, dt.$$

(Soehardjo, 2001)

Definisi 2.6.2 Transformasi Fourier dari fungsi $f(t)$, $\infty \le t \le \infty$ dapat diekspresikan dalam bentuk:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-I\,\omega\,t} dt$$

dan invers dari $F(\omega)$ adalah

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{I\,\omega\,t} d\omega$$

(Demanis, 2007)

Definisi 2.6.3 Misal $X_k, k = 0,1,\cdots, N-1$ himpunan bilangan kompleks,

$$\tilde{X}_k = \sum_{r=0}^{N-1} X_r\, e^{-2\pi\, I\, k\, r\, /\, N} \qquad , r = 0,1,\cdots, N-1$$

$$= \sum_{r=0}^{N-1} X_r\, W^{-k\,r} \qquad (2.6.6)$$

dimana $W = e^{2\pi I/N}$ disebut transformasi Fourier diskrit dari barisan $\{X_k\}$. Sedangkan invers dari transformasi Fourier diskrit adalah:

$$X_r = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} \tilde{X}_k W^{k\,r}, \qquad (2.6.7)$$

$k = 0,1,\cdots,N-1$. Persamaan (2.6.6) dan (2.6.7) sering disebut sebagai pasangan transformasi Fourier diskrit (*DFT pair*).

(Ralston, 1978)

Dengan menggunakan kesamaan Euler, pasangan transformasi Fourier diskrit pada persamaan (2.6.6) dan (2.6.7) dapat ditulis dalam bentuk

$$\tilde{X}_r = \sum_{k=0}^{N-1}\left[X_k \cos(2\pi\, k\, r/N) - I\, X_k \sin(2\pi\, k\, r/N)\right] \quad (2.6.8)$$

$$X_k = \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1}\left[\tilde{X}_k \cos(2\pi\, k\, r/N) + I\, \tilde{X}_k \sin(2\pi\, k\, r/N)\right] (2.6.9)$$

(Munir, 2004)

Pada fungsi diskrit dua variabel, persamaan transformasi Fourier diskritnya adalah

$$\tilde{X}(r_1,r_2) = \sum_{k_1=0}^{M_1}\sum_{k_1=0}^{M_2} X(k_1,k_2)\, W_1^{-k_1 r_1}\, W_2^{-k_2 r_2}, \quad (2.6.10)$$

$$X(k_1,k_2) = \frac{1}{R}\sum_{r_1=0}^{M_1}\sum_{r_2=0}^{M_2} \tilde{X}(r_1,r_2)\, W_1^{-k_1 r_1}\, W_2^{-k_2 r_2} \quad (2.6.11)$$

dimana $W_i = e^{2\pi\, I/M_i+1}$, $\forall i = 1,2$, $R = (M_1+1)(M_2+1)$ dan I adalah unit imajiner.

(Tzekis, 2007)

14

BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab ini diberikan definisi yang berkaitan dengan polinomial bivariat. Selanjutnya diberikan langkah-langkah perhitungan faktor persekutuan terbesar (FPB) dari polinomial bivariat melalui transformasi Fourier diskrit. Untuk memperjelas pembahasan perhitungan faktor persekutuan terbesar (FPB) dari polinomial bivariat, diberikan langkah-langkah pendekatan FPB dan contoh.

3.1 Perhitungan Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) Dari Polinomial Bivariat Melalui Transformasi Fourier Diskrit

Definisi 3.1.1 Misal R adalah himpunan bilangan real, $R[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ adalah himpunan polinomial dengan koefisien real di dalam n variabel $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Polinomial dengan koefisien real dan n variabel $x_1, x_2, \cdots, x_n$ disebut polinomial nD.

(McInerney, 1999)

Definisi 3.1.2 Misal $F[x] = F[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ dinotasikan sebagai ring polinomial atas field F dengan n variabel. Elemen dari field F diambil dari bilangan real atau bilangan kompleks.

1. $F_1(x), F_2(x), \cdots, F_k(x) \in F[x]$ disebut koprime faktor (*factor coprime*) jika tidak terdapat faktor pembagi dari $F_1(x), F_2(x), \cdots, F_k(x)$.
2. $F_1(x), F_2(x), \cdots, F_k(x) \in F[x]$ disebut koprime akar (*zero coprime*) jika tidak terdapat akar dalam polinomial $F_1(x), F_2(x), \cdots, F_k(x) \in F[x]$.

(McInerney,1999)

Dalam skripsi ini pembahasan hanya dibatasi untuk polinomial $2D$ atau polinomial bivariat yaitu polinomial dengan koefisien real dengan dua variabel, x dan y. Polinomial-polinomial tersebut dinyatakan sebagai $p_i(x,y) \in F[x,y]$.

Misalkan barisan terbatas $X(k_1,k_2)$ dan $\tilde{X}(r_1,r_2)$, dimana $k_1 = 0,1,\cdots,M_1$, $k_2 = 0,1,\cdots,M_2$ dan $r_1 = 0,1,\cdots,M_1$, $r_2 = 0,1,\cdots,M_2$. Pasangan transformasi Fourier diskrit dari $X(k_1,k_2)$ dan $\tilde{X}(r_1,r_2)$ adalah

$$\begin{aligned}\tilde{X}(r_1,r_2) &= \sum_{k_1=0}^{M_1}\sum_{k_2=0}^{M_2} X(k_1,k_2) W_1^{-k_1 r_1} W_2^{-k_2 r_2} \qquad (3.1.1)\\ &= \sum_{k_1=0}^{M_1}\Big(X(k_1,0)W_1^{-k_1 r_1}W_2^{0\cdot r_2} + X(k_1,1)W_1^{-1\cdot r_2} + \\ &\quad \cdots + X(k_1,M_2)W_1^{-k_1 r_1}W_2^{-M_2 r_2}\Big)\\ &= X(0,0)W_1^{0\cdot r_1}W_2^{0\cdot r_2} + X(0,1)W_1^{0\cdot r_1}W_2^{-1\cdot r_2} + \cdots\\ &\quad + X(0,M_2)W_1^{0\cdot r_1}W_2^{-M_2 r_2} + X(1,0)W_1^{-1\cdot r_1}W_2^{0\cdot r_2}\\ &\quad + \cdots + X(M_1,M_2)W_1^{-M_1 r_1}W_2^{-M_2 r_2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X(k_1,k_2) &= \frac{1}{R}\sum_{r_1=0}^{M_1}\sum_{r_2=0}^{M_2}\tilde{X}(r_1,r_2)W_1^{k_1 r_1}W_2^{k_2 r_2} \qquad (3.1.2)\\ &= \frac{1}{R}\sum_{r_1=0}^{M_1}\Big(\tilde{X}(r_1,0)W_1^{k_1 r_1}W_2^{k_2\cdot 0} + \cdots\\ &\quad + \tilde{X}(r_1,M_2)W_1^{k_1 r_1}W_2^{k_2\cdot M_2}\Big)\\ &= \frac{1}{R}\Big(\tilde{X}(0,0)W_1^{k_1\cdot 0}W_2^{k_2\cdot 0} + \cdots\\ &\quad + \tilde{X}(0,M_2)W_1^{k_1\cdot 0}W_2^{k_2\cdot M_2} + \cdots\\ &\quad + \tilde{X}(1,0)W_1^{k_1\cdot 1}W_2^{k_2\cdot 0} + \cdots\\ &\quad + \tilde{X}(1,M_2)W_1^{k_1\cdot 1}W_2^{k_2\cdot M_2} + \cdots\\ &\quad + \tilde{X}(M_1,M_2)W_1^{k_1 M_1}W_2^{k_2 M_2}\Big),\end{aligned}$$

dimana $W_i = e^{\frac{2\pi I}{M_i+1}}$, $\forall i = 1,2$ dan $R = (M_1+1)(M_2+1)$ dan I adalah bilangan imajiner. $\tilde{X}(r_1, r_2)$ adalah transformasi fourier diskrit dan $X(k_1, k_2)$ adalah invers dari transformasi fourier diskrit.

Misalkan terdapat n polinomial $p_i(x,y) \in F[x,y]$, $i = 0,1,\cdots,n-1$. Polinomial ini dapat ditulis dalam bentuk

$$p_i(x,y) = \sum_{m=0}^{M_1}\sum_{j=0}^{M_2} p_i x^m y^j \tag{3.1.3}$$

dimana M_1 dan M_2 adalah derajat terbesar dari x dan y dalam $p_i(x,y)$, FPB dari $p_i(x,y)$ adalah $\overline{p}(x,y)$ yang dituliskan sebagai berikut:

$$\overline{p}(x,y) = \sum_{k_1=0}^{\tilde{b}_1}\sum_{k_2=0}^{\tilde{b}_2}(\overline{p}_{k_1,k_2})(x^{k_1}y^{k_2}) \tag{3.1.4}$$

dimana derajat terbesar untuk variabel x dan y adalah:

$$\begin{aligned}\deg_x(\overline{p}(x,y)) &= \tilde{b}_1 \\ &= \left(\leq \min_{i=0,1,\cdots,n-1}\{\deg_x(p_i(x,y))\}\right)\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

$$\begin{aligned}\deg_y(\overline{p}(x,y)) &= \tilde{b}_2 \\ &= \left(\leq \min_{i=0,1,\cdots,n-1}\{\deg_y(p_i(x,y))\}\right).\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

$\overline{p}_{k_1,k_2}$ dalam persamaan (3.1.4) adalah koefisien dari FPB yang dicari dengan menggunakan invers transformasi Fourier diskrit yang dijelaskan pada pembahasan selanjutnya. Banyaknya titik interpolasi dihitung dengan menggunakan:

$$R = (\overline{b}_1+1)(\overline{b}_2+1) \tag{3.1.7}$$

dengan titik interpolasinya adalah:

$$u_i(r_j) = W_i^{r_j}, \tag{3.1.8}$$

$$i = 1,2 \text{ dan } r_j = 0,1,\cdots,\tilde{b}_i,$$

dimana $W_i = e^{\frac{2\pi I}{b_i+1}}$. Untuk mendapatkan koefisien $\overline{p}_{k_1,k_2}$ langkah-langkah yang dilakukan adalah:

a. Menentukan FPB dari polinomial $p_i(x, u_2(r_2))$, $i = 0,1,\cdots,n-1$ yaitu $\overline{p}_{r_2}(x, u_2(r_2))$, $r_2 = 0,1,\cdots,\tilde{b}_2$.

b. Kemudian dengan mensubsitusikan $u_1(r_1)$, $r_1 = 0,1,\cdots,\tilde{b}_1$ ke dalam polinomial $\overline{p}_{r_2}(x, u_{r_2}(r_2))$ dan $u_2(r_2)$ ke dalam polinomial $\overline{p}_{r_1}(u_{r_1}(r_1), y)$ didapatkan polinomial

$$\overline{p}_{r_1,r_2} = \overline{p}(u_1(r_1), u_{r_2}(r_2)) \qquad (3.1.9)$$

Dari persamaan (3.1.4) dan (3.1.9) didapatkan

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_{r_1,r_2} &= \sum_{k_1=0}^{\tilde{b}_1}\sum_{k_2=0}^{\tilde{b}_2}\left(\overline{p}_{k_1,k_2}\right)\left(W_1^{-r_1k_1}W_2^{-r_2k_2}\right) \\
&= \sum_{l_1}^{\tilde{b}_1}\Big(\left(\overline{p}_{k_1,0}\right)W_1^{-r_1k_1}W_2^{0\cdot k_2} \\
&\quad + \left(\overline{p}_{k_1,1}\right)W_1^{-r_1k_1}W_2^{-r_2\cdot 1} + \cdots + \left(\overline{p}_{k_1,b_2}\right)W_1^{-r_1k_1}W_2^{-r_2\tilde{b}_2}\Big) \\
&= \left(\overline{p}_{0,0}\right)W_1^{-r_1\cdot 0}W_2^{-r_2\cdot 0} + \cdots \\
&\quad + \left(\overline{p}_{0,\tilde{b}_2}\right)W_1^{-r_1\cdot 0}W_2^{-r_2\tilde{b}_2} + \cdots \\
&\quad + \left(\overline{p}_{1,0}\right)W_1^{-r_1\cdot 1}W_2^{-r_2\cdot 0} + \cdots \\
&\quad + \left(\overline{p}_{1,\tilde{b}_2}\right)W_1^{-r_1\cdot 1}W_2^{-r_2\tilde{b}_2} + \cdots \\
&\quad + \left(\overline{p}_{\tilde{b}_1,\tilde{b}_2}\right)W_1^{-r_1\tilde{b}_1}W_2^{-r_2\tilde{b}_2}.
\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (3.1.1) dan (3.1.2), $\tilde{p}_{r_1,r_2}$ merupakan transformasi Fourier diskrit sehingga polinomial $\overline{p}_{k_1,k_2}$ merupakan invers dari $\tilde{p}_{r_1,r_2}$. Jadi polinomial $\tilde{p}_{r_1,r_2}$ dan $\overline{p}_{k_1,k_2}$ merupakan bentuk pasangan transformasi Fourier diskrit, dimana $\overline{p}_{k_1,k_2}$ adalah

$$
\begin{aligned}
\overline{p}_{k_1,{}_2} &= \frac{1}{R}\sum_{r_1=0}^{\tilde{b}_1}\sum_{r_2=0}^{\tilde{b}_2}\left(\tilde{p}_{r_1,r_2}\right)\left(W_1^{r_1k_1}W_2^{r_2k_2}\right) \qquad (3.1.10)\\
&= \frac{1}{R}\sum_{r_1=0}^{\tilde{b}_1}\left(\left(\overline{p}_{r_1,0}\right)W_1^{r_1k_1}W_2^{0\cdot k_2}+\cdots\right.\\
&\quad \left.+\left(\overline{p}_{r_1,\tilde{b}_2}\right)W_1^{r_1k_1}W_2^{\tilde{b}_2k_2}\right)\\
&= \frac{1}{R}\left(\left(\overline{p}_{0,0}\right)W_1^{0\cdot k_1}W_2^{0\cdot k_2}+\cdots\right.\\
&\quad +\left(\overline{p}_{0,\tilde{b}_2}\right)W_1^{0k_1}W_2^{\tilde{b}_2k_2}+\cdots\\
&\quad +\left(\overline{p}_{1,0}\right)W_1^{1\cdot k_1}W_2^{0\cdot k_2}+\cdots\\
&\quad +\left(\overline{p}_{1,\tilde{b}_2}\right)W_1^{1\cdot k_1}W_2^{\tilde{b}_2k_2}+\cdots\\
&\quad \left.+\left(\overline{p}_{\tilde{b}_1,\tilde{b}_2}\right)W_1^{\tilde{b}_1k_1}W_2^{\tilde{b}_2k_2}\right),
\end{aligned}
$$

dengan $k_i = 0,\cdots,\tilde{b}_i$ dan $i = 1,2$. Jadi untuk menghitung FPB dari polinomial bivariat dengan menggunakan transformasi Fourier diskrit, langkah-langkahnya sebagai berikut:

Langkah 1. Menghitung derajat terbesar dalam persamaan FPB.

Langkah 2. Menghitung banyaknya titik interpolasi. Kemudian menentukan titik-titik interpolasi.

$u_i(r_j) = W_i^{-r_j}$, $W_i = e^{\frac{2\pi I}{b_i+1}}$, $i = 0,1$ dan $r_j = 0,1,\cdots,b_i$, $j = 0,1$.

Langkah 3. Menentukan FPB dari $p_1(x,y)$ dan $p_2(x,y)$ yaitu dengan mensubsitusikan $y = u_1(r_j)$ ke dalam polinomial $p_1(x,y)$ dan $p_2(x,y)$, sehingga diperoleh $p(x,u_1(r_j))$.

Langkah 4. Mensubsitusikan $x = u_0(r_j)$ ke dalam FPB satu variabel di atas untuk mendapatkan $\tilde{p}_{r_0,r_1} = p(u_0(r_j),u_1(r_j))$.

Langkah 5. Menggunakan invers transformasi Fourier diskrit, nilai $\tilde{p}_{r_0,r_1}$ digunakan untuk menentukan koefisien $\bar{p}_{k_0,k_1}$ kemudian disubsitusikan ke dalam persamaan (3.1.4).

Jika $p_i(x,y)$ adalah bukan koprime akar yaitu terdapat titik (x_j, y_k) sedemikian sehingga $p_i(x,y)=0$ maka pada perhitungan FPB satu variabel yaitu $\tilde{p}_k(x,y_k)$ akan terdapat faktor lain yaitu $(x - x_k)$ sehingga penyelesaiannya adalah dengan mengambil sebarang dua bilangan real c_1 dan c_2, kemudian mengalikan bilangan real tersebut dengan $W_i = e^{\frac{2\pi I}{b_i+1}}$. Perhitungan FPB-nya sama dengan langkah-langkah transformasi Fourier diskrit di atas, hanya berbeda pada pencarian titik-titik interpolasinya, yaitu pada Langkah 2. Jadi, titik-titik interpolasinya adalah:

$$u_i(r_j) = c_i W_i^{-r_j}, \; W_i^{-r_j} = e^{-\frac{2\pi I}{b_i+1}}, \; i = 0,1, \; r_j = 0,1,\cdots,b_i$$

dimana c_i adalah sebarang bilangan real acak. Perkalian c_i pada titik W_i tersebut dapat dilakukan jika transformasi Fourier diskrit pada persamaan (3.1.1) dan (3.1.2) dimodifikasi seperti pada Lemma 3.1.1 berikut.

Lemma 3.1.1 Misal $\tilde{W}_i^k = c_i W_i^k$, $i = 1,2$, $k = 0,1,\cdots,M_i$ dimana c_i adalah bilangan acak dan W_i^k didefinisikan oleh $W_i^k = (e^{\frac{2\pi I}{M_i+1}})^k$, $i = 1,2$. Maka hubungan:

$$\tilde{X}'(r_1,r_2) = \sum_{k_1=0}^{M_1}\sum_{k_2=0}^{M_2} X(k_1,k_2)\tilde{W}_1^{-k_1 r_1}\tilde{W}_2^{-k_2 r_2} \quad \text{dan}$$

$$X(k_1,k_2) = \frac{1}{R}\sum_{r_1=0}^{M_1}\sum_{r_2=0}^{M_2} \tilde{X}'(r_1,r_2)\tilde{W}_1^{k_1 r_1}\tilde{W}_2^{k_2 r_2}$$

merupakan pasangan transformasi Fourier diskrit juga.

Bukti:

Diketahui $\widetilde{W}_i^{\,k} = c_i W_i^{\,k}$, akan dibuktikan

$$\widetilde{X}'(r_1,r_2) = c_1^{\,-r_1} c_2^{\,-r_2}\,\widetilde{X}(r_1,r_2)$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}'(r_1,r_2) &= \sum_{k_1=0}^{M_1}\sum_{k_2=0}^{M_2} X(k_1,k_2)\widetilde{W}_1^{-k_1r_1}\widetilde{W}_2^{-k_2r_2}\\
&= \sum_{k_1}^{M_1}\sum_{k_2=0}^{M_2} X(k_1,k_2)\left(c_1W_1^{\,k_1}\right)^{-r_1}\left(c_2W_2^{\,k_2}\right)^{-r_2}\\
&= c_1^{\,-r_1}c_2^{\,-r_2}\sum_{k_1=0}^{M_1}\sum_{k_2=0}^{M_2} X(k_1,k_2)W_1^{\,-k_1r_1}W_2^{\,-k_2r_2}\\
&= c_1^{\,-r_1}c_2^{\,-r_2}\,\widetilde{X}(r_1,r_2)
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan $\widetilde{X}'(r_1,r_2) = c_1^{\,-r_1}c_2^{\,r_2}\,\widetilde{X}(r_1,r_2)$ dan $X(k_1,k_2) = \dfrac{1}{R}\sum_{r_1=0}^{M_1}\sum_{r_2=0}^{M_2}\widetilde{X}(r_1,r_2)W_1^{\,k_1r_1}W_2^{\,k_2r_2}$, dapat dilihat hubungan $X(k_1,k_2) = \dfrac{1}{R}\sum_{r_1=0}^{M_1}\sum_{r_2=0}^{M_2}\widetilde{X}'(r_1,r_2)\widetilde{W}_1^{\,k_1r_1}\widetilde{W}_2^{\,k_2r_2}$ dengan $\widetilde{X}(r_1,r_2)$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R}\sum_{r_1=0}^{M_1}\sum_{r_2=0}^{M_2}\widetilde{X}'(r_1,r_2)\widetilde{W}_1^{\,k_1r_1}\widetilde{W}_2^{\,k_2r_2} &=\\
&= \frac{1}{R}\sum_{r_1=0}^{M_1}\sum_{r_2=0}^{M_2}\left[c_1^{\,-r_1}c_2^{\,-r_2}\,\widetilde{X}(r_1,r_2)\right]\widetilde{W}_1^{\,k_1r_1}\widetilde{W}_2^{\,k_2r_2}\\
&= \frac{1}{R}\sum_{r_1=0}^{M_1}\sum_{r_2=0}^{M_2}c_1^{\,-r_1}c_2^{\,-r_2}\,\widetilde{X}(r_1,r_2)\left(c_1W_1^{\,k_1}\right)^{r_1}\left(c_2W_2^{\,k_2}\right)^{r_2}\\
&= \frac{1}{R}\sum_{r_1=0}^{M_1}\sum_{r_2=0}^{M_2}c_1^{\,-r_1}c_1^{\,r_1}c_2^{\,-r_2}c_2^{\,r_2}\,\widetilde{X}(r_1,r_2)W_1^{\,k_1r_1}W_2^{\,k_2r_2}\\
&= \frac{1}{R}\sum_{r_1=0}^{M_1}\sum_{r_2=0}^{M_2}\widetilde{X}(r_1,r_2)W_1^{\,k_1r_1}W_2^{\,k_2r_2} = X(k_1,k_2) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Contoh 3.1.1 Misalkan dua polinomial

$$p_1(x, y) = (x + y)(x + 1)y$$
$$p_2(x, y) = (xy + 1)(x + 1).$$

Akan dihitung FPB dari $p_1(x, y)$ dan $p_2(x, y)$.

Langkah 1. Menghitung derajat terbesar dalam persamaan FPB.

$$\begin{aligned} b_1 &= \min\{\deg_x[(x+y)(x+2)y], \deg_x[(xy+1)(x+1)]\} \\ &= \min\{\deg_x(xy^2 + y^2 + x^2y + xy), \deg_x(x^2y + xy + x + 1)\} \\ &= \min\{2,2\} \\ &= 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2 &= \min\{\deg_y[(x+y)(x+2)y], \deg_y[(xy+1)(x+1)]\} \\ &= \min\{\deg_y(xy^2 + y^2 + x^2y + xy), \deg_y(x^2y + xy + x + 1)\} \\ &= \min\{2,1\} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Langkah 2. Menghitung banyaknya titik interpolasi.

$$\begin{aligned} R_1 &= (b_1 + 1)(b_2 + 1) \\ &= (2 + 1)(1 + 1) \\ &= 6. \end{aligned}$$

Jadi, banyaknya titik interpolasi adalah 6 titik. Kemudian menentukan enam titik interpolasi.

$$u_i(r_j) = W_i^{-r_j}, \quad W_i = e^{\frac{2\pi I}{b_i+1}}, \quad i = 0,1 \text{ dan } r_j = 0,1,..b_i, \quad j = 0,1.$$

Untuk $i = 0 \Rightarrow r_j = 0,1,2$ dan $i = 1 \Rightarrow r_j = 0,1$

$u_0(0) = W_0^0 = 1$ $\qquad$ $u_1(0) = W_1^0 = 1$

$u_0(1) = W_0^{-1} = e^{\frac{-2\pi I}{2+1}}$ $\qquad$ $u_1(1) = W_1^{-1} = e^{-\frac{2\pi I}{1+1}} = -1.$

$\qquad = (-0,5 - 0,866I)$

$u_0(2) = W_0^{-1} = e^{2\cdot\frac{-2\pi I}{2+1}}$

$\qquad = (-0,5 + 0,866I)$

Langkah 3. Menentukan FPB dari $p_1(x,y)$ dan $p_2(x,y)$ yaitu dengan mensubsitusikan $y = u_1(r_j)$ ke dalam polinomial $p_1(x,y)$ dan $p_2(x,y)$, diperoleh:

$$p(x,u_1(0) = p(x,1)$$

$$FPB((x+1)^2,(x+1)^2) = \overline{p}_1(x,u_1(r_1)) = \overline{p}_1(x,1)$$

$$= (x+1)^2 .$$

$$p(x,u_1(1) = p(x,-1)$$

$$FPB((x-1)(x+1),(1-x)(x+1)) = \overline{p}_1(x,u_1(r_1)) = \overline{p}_1(x,-1)$$

$$= (x+1) - 1(x-1) .$$

Karena pada $u_1(0) = 1$ terdapat faktor lain yaitu $(x+1)$ dan pada $u_1(1) = -1$ terdapat faktor lain yaitu $(x-1)$. Jika langkah perhitungan pendekatan FPB dilanjutkan maka langkah selanjutnya adalah sebagai berikut.

Langkah 4. Mensubsitusi $x = u_0(r_j)$ ke dalam FPB satu variabel di atas untuk mendapatkan $\tilde{p}_{r_0,r_1} = p(u_0(r_0),u_1(r_1))$.

$$p(u_0(0),u_1(0)) = (x+1)^2 \Rightarrow \tilde{p}_{0,0} = p(1,u_1(0))$$

$$= (1+1)^2 = 4$$

$$p(u_0(1),u_1(0)) = (x+1)^2 \Rightarrow \tilde{p}_{1,0} = p((-0{,}5 - 0{,}866I),u_1(0))$$

$$= (-0{,}499956 - 0{,}866I)$$

$$p(u_0(2),u_1(0)) = (x+1)^2 \Rightarrow \tilde{p}_{2,0} = p((-0{,}5 + 0{,}866I),u_1(0))$$

$$= (-0{,}499956 + 0{,}866I)$$

$$p(u_0(0),u_1(1)) = (x+1)(1-x) \Rightarrow \tilde{p}_{0,1} = p(1,u_1(1))$$

$$= 0$$

$$p(u_0(1),u_1(1)) = (x+1)(1-x) \Rightarrow \tilde{p}_{1,1} = p((-0{,}5 - 0{,}866I),u_1(1))$$

$$= 1{,}499956 - 0{,}866I$$

$$p(u_0(2),u_1(1)) = (x+1)(1-x) \Rightarrow \tilde{p}_{2,1} = p((-0{,}5 + 0{,}866I),u_1(1))$$

$$= 1{,}499956 + 0{,}866I$$

Langkah 5. Dengan menggunakan invers transformasi Fourier diskrit, nilai $\tilde{p}_{r_0,r_1}$ digunakan untuk menentukan koefisien p_{k_0,k_1}, kemudian disubsitusikan ke dalam persamaan (3.1.4), polinomialnya adalah:

$$\overline{p}(x,y) = \tilde{p}_{0,0} + \tilde{p}_{0,1}y + \tilde{p}_{1,0}x + \tilde{p}_{1,1}xy + \tilde{p}_{2,0}x^2 + \tilde{p}_{2,1}x^2y \qquad (3.2.11)$$

Invers transformasi Fourier diskritnya adalah:

$$\overline{p}_{k_0,k_1} = \frac{1}{R}\sum_{r_0=0}^{\tilde{b}_1}\sum_{r_1=0}^{\tilde{b}_2}\left(\tilde{p}_{r_0,r_1}\right)\left(\tilde{W}_0^{r_0k_0}\tilde{W}_1^{r_1k_1}\right),$$

$$k_i = 0,1,\cdots,b_i \Rightarrow k_0 = 0,1,2 \text{ dan } k_1 = 0,1.$$

$$\overline{p}_{0,0} = \frac{1}{6}\sum_{r_0=0}^{2}\sum_{r_1=0}^{1}\left(\tilde{p}_{r_0,r_1}\right)\left(\tilde{W}_0^{r_0\cdot 0}\tilde{W}_1^{r_1\cdot 0}\right)$$

$$=1$$

$$\overline{p}_{0,1} = \frac{1}{6}\sum_{r_0=0}^{2}\sum_{r_1=0}^{1}\left(\tilde{p}_{r_0,r_1}\right)\left(\tilde{W}_0^{r_0\cdot 0}\tilde{W}_1^{r_1\cdot 1}\right)$$

$$= 0,00002933333333 \approx 0$$

$$\overline{p}_{1,0} = \frac{1}{6}\sum_{r_0=0}^{2}\sum_{r_1=0}^{1}\left(\tilde{p}_{r_0,r_1}\right)\left(\tilde{W}_0^{r_0\cdot 1}\tilde{W}_1^{r_1\cdot 0}\right)$$

$$= 0,9999706667 \approx 1$$

$$\overline{p}_{1,1} = \frac{1}{6}\sum_{r_0=0}^{2}\sum_{r_1=0}^{1}\left(\tilde{p}_{r_0,r_1}\right)\left(\tilde{W}_0^{r_0\cdot 1}\tilde{W}_1^{r_1\cdot 1}\right)$$

$$= 0,9999853333 \approx 1$$

$$\overline{p}_{2,0} = \frac{1}{6}\sum_{r_0=0}^{2}\sum_{r_1=0}^{1}\left(\tilde{p}_{r_0,r_1}\right)\left(\tilde{W}_0^{r_0\cdot 2}\tilde{W}_1^{r_1\cdot 0}\right)$$

$$= 0,00002933333333 \approx 0$$

$$\overline{p}_{2,1} = \frac{1}{6}\sum_{r_0=0}^{2}\sum_{r_1=0}^{1}\left(\tilde{p}_{r_0,r_1}\right)\left(\tilde{W}_0^{r_0\cdot 2}\tilde{W}_1^{r_1\cdot 1}\right)$$

$$= 0,9999706667 \approx 1.$$

Jika $\overline{p}_{0,0}=1$, $\overline{p}_{0,1}=0$, $\overline{p}_{1,0}=1$, $\overline{p}_{1,1}=1$, $\overline{p}_{2,0}=0$, dan $\overline{p}_{2,1}=1$ dimasukkan ke dalam persamaan (3.1.11), diperoleh:

$$\tilde{p}(x,y)=1+0+x+xy+0+x^2y$$
$$=(x+1)(xy+1).$$

Jadi, FPB dari polinomial $p_1(x,y)$ dan $p_2(x,y)$ adalah $(x+1)(xy+1)$. Hasil pendekatan FPB tersebut berbeda dengan FPB sebenarnya karena polinomial $p_1(x,y)$ dan $p_2(x,y)$ bukan koprime akar sehingga untuk $u_1(0)=1$ terdapat faktor lain yaitu $(x+1)$ dan untuk $u_1(1)=-1$ terdapat faktor lain yaitu $(x-1)$.

Permasalahan tersebut akan diselesaikan dengan menggunakan Lemma 3.1.1, yaitu pada perhitungan FPB dari polinomial univariat, digunakan titik interpolasi c_iW_i dengan $c_i, i=1,2$ adalah bilangan real sembarang.

Perbedaan perhitungan di atas dimulai dari Langkah 2 yaitu pada penentuan titik interpolasinya.

Langkah 2. Misalkan $c_0=c_1=1{,}55$, maka titik interpolasinya adalah:

$$u_i(r_j)=c_iW_i^{-r_j},\ W_i=e^{\frac{2\pi I}{b_i+1}},\ i=0{,}1 \text{ dan } r_j=0{,}1{,}..b_i,\ j=0{,}1.$$

Untuk $i=0\Rightarrow r_j=0{,}1{,}2$ dan $i=1\Rightarrow r_j=0{,}1$

$$u_0(0)=1{,}55W_0^0=1{,}55 \qquad u_1(0)=1{,}55W_1^0=1{,}55$$

$$u_0(1)=1{,}55W_0^{-1}=1{,}55e^{\frac{-2\pi I}{2+1}} \qquad u_1(1)=1{,}55W_1^{-1}$$

$$=1{,}55(-0{,}5-0{,}866I) \qquad =1{,}55e^{\frac{-2\pi I}{1+1}}$$

$$u_0(2)=1{,}55W_0^{-1}=1{,}55e^{2\cdot\frac{-2\pi I}{2+1}} \qquad =-1{,}55$$

$$=1{,}55(-0{,}5+0{,}866I).$$

Langkah 3. Menentukan FPB dari $p_1(x,y)$ dan $p_2(x,y)$ yaitu dengan mensubsitusikan $y=u_1(r_j)$ ke dalam polinomial $p_1(x,y)$ dan $p_2(x,y)$, diperoleh:

$p(x,u_1(0)) = p(x,(1{,}55))$

$FPB((3{,}925x + 2{,}4025 + 1{,}55x^2),(1{,}55x^2 + 2{,}55x + 1))$

$\bar{p}_1(x,(1{,}55)) = x + 1$

$p(x,u_1(1)) = p(x,(-1{,}55))$

$FPB((0{,}8525x + 2{,}4025 - 1{,}55x^2),(-1{,}55x^2 - 0{,}55x + 1))$

$\bar{p}_1(x,(-1{,}55)) = (x+1)$

Langkah 4. Mensubsitusi $x = u_0(r_j)$ ke dalam FPB satu variabel di atas untuk mendapatkan $\tilde{p}_{r_0,r_1} = p(u_0(r_0),u_1(r_1))$.

$$p(u_0(0),u_1(0)) = x+1 \Rightarrow \tilde{p}_{0,0} = p((1{,}55),u_1(0)) = 2{,}55$$

$$p(u_0(1),u_1(0)) = x+1 \Rightarrow \tilde{p}_{1,0} = p(1{,}55(-0{,}5-0{,}866I),u_1(0)) = (0{,}225 - 1{,}3423I)$$

$$p(u_0(2),u_1(0)) = x+1 \Rightarrow \tilde{p}_{2,0} = p(1{,}55(-0{,}5+0{,}866I),u_1(0)) = (0{,}225 + 1{,}3423I)$$

$$p(u_0(0),u_1(1)) = x+1 \Rightarrow \tilde{p}_{0,1} = p(1{,}55,u_1(1)) = 2{,}55$$

$$p(u_0(1),u_1(1)) = x+1 \Rightarrow \tilde{p}_{1,1} = p(1{,}55(-0{,}5-0{,}866I),u_1(1)) = (0{,}225 - 1{,}3423I)$$

$$p(u_0(2),u_1(1)) = x+1 \Rightarrow \tilde{p}_{2,1} = p(1{,}55(-0{,}5+0{,}866I),u_1(1)) = (0{,}225 + 1{,}3423I).$$

Langkah 5. Dengan menggunakan invers transformasi Fourier diskrit, nilai $\tilde{p}_{r_0,r_1}$ digunakan untuk menentukan koefisien p_{k_0,k_1}, kemudian disubsitusikan ke dalam persamaan (3.1.4), polinomialnya adalah:

$$\bar{p}(x,y) = \tilde{p}_{0,0} + \tilde{p}_{0,1}y + \tilde{p}_{1,0}x + \tilde{p}_{1,1}xy + \tilde{p}_{2,0}x^2 + \tilde{p}_{2,1}x^2y \qquad (3.1.12)$$

Invers transformasi Fourier diskritnya adalah:

$$\bar{p}_{k_0,k_1} = \frac{1}{R}\sum_{r_0=0}^{\tilde{b}_1}\sum_{r_1=0}^{\tilde{b}_2}\left(\tilde{p}_{r_0,r_1}\right)\left(\tilde{W}_0^{\,r_0k_0}\tilde{W}_1^{\,r_1k_1}\right),$$

$k_i = 0,1,\cdots,b_i \Rightarrow k_0 = 0,1,2$ dan $k_1 = 0,1$.

$$\overline{p}_{0,0} = \frac{1}{6}\sum_{r_0=0}^{2}\sum_{r_1=0}^{1}\left(\widetilde{p}_{r_0,r_1}\right)\left(\widetilde{W}_0^{\,r_0\cdot 0}\widetilde{W}_1^{\,r_1\cdot 0}\right)$$

$$= 1$$

$$\overline{p}_{1,0} = \frac{1}{6}\sum_{r_0=0}^{2}\sum_{r_1=0}^{1}\left(\widetilde{p}_{r_0,r_1}\right)\left(\widetilde{W}_0^{\,r_0\cdot 1}\widetilde{W}_1^{\,r_1\cdot 0}\right)$$

$$= 1$$

$$\overline{p}_{2,0} = \frac{1}{6}\sum_{r_0=0}^{2}\sum_{r_1=0}^{1}\left(\widetilde{p}_{r_0,r_1}\right)\left(\widetilde{W}_0^{\,r_0\cdot 2}\widetilde{W}_1^{\,r_1\cdot 0}\right)$$

$$= (0{,}0001092333334) \approx 0$$

$$\overline{p}_{0,1} = \frac{1}{6}\sum_{r_0=0}^{2}\sum_{r_1=0}^{1}\left(\widetilde{p}_{r_0,r_1}\right)\left(\widetilde{W}_0^{\,r_0\cdot 0}\widetilde{W}_1^{\,r_1\cdot 1}\right)$$

$$= 0$$

$$\overline{p}_{1,1} = \frac{1}{6}\sum_{r_0=0}^{2}\sum_{r_1=0}^{1}\left(\widetilde{p}_{r_0,r_1}\right)\left(\widetilde{W}_0^{\,r_0\cdot 1}\widetilde{W}_1^{\,r_1\cdot 1}\right)$$

$$= 0$$

$$\overline{p}_{2,1} = \frac{1}{6}\sum_{r_0=0}^{2}\sum_{r_1=0}^{1}\left(\widetilde{p}_{r_0,r_1}\right)\left(\widetilde{W}_0^{\,r_0\cdot 2}\widetilde{W}_1^{\,r_1\cdot 1}\right)$$

$$= 0.$$

Jika $\overline{p}_{0,0} = 1$, $\overline{p}_{0,1} = 0$, $\overline{p}_{1,0} = 1$, $\overline{p}_{1,1} = 0$, $\overline{p}_{2,0} = 0$, dan $\overline{p}_{2,1} = 0$ dimasukkan ke dalam persamaan (3.1.12) diperoleh:

$$\overline{p}(x,y) = 1 + 0 + x + 0 + 0 + 0$$

$$= (x+1).$$

Jadi, FPB dari polinomial $p_1(x,y)$ dan $p_2(x,y)$ adalah $(x+1)$.

Proposisi 3.1.1 Misalkan terdapat n polinomial dua variabel:

$$p_i(x,y) = \overbrace{p_i(x)g(x)}^{p'_i(x)}\overbrace{p_i(x,y)g(x,y)}^{p'_i(x,y)}\overbrace{p_i(y)g(y)}^{p'_i(y)},$$

$$i = 0,1,\cdots,n-1.$$

Jika didefinisikan

$$Q(x,y) = g(x)g(x,y)\prod_{i=0}^{n-1} p'_i(y),$$

$$S(x,y) = g(y)g(x,y)\prod_{i=0}^{n-1} p'_i(x),$$

maka FPB-nya adalah

$$p(x,y) = S(x,y)\frac{Q(x,c)}{S(x,c)} = Q(x,y)\frac{S(c,y)}{Q(c,y)},$$

dimana c adalah bilangan sebarang.

Bukti:

Diketahui bahwa $Q(x,y) = g(x)g(x,y)\prod_{i=0}^{n-1} p'_i(y)$

dan $S(x,y) = g(y)g(x,y)\prod_{i=0}^{n-1} p'_i(x)$

maka

$$\frac{Q(x,c)}{S(x,c)} = \frac{g(x)g(x,c)\prod_{i=0}^{n-1} p'_i(c)}{g(c)g(x,c)\prod_{i=0}^{n-1} p'_i(x)}$$

$$\frac{Q(x,c)}{S(x,c)} = \frac{g(x)g(x,c)C_1}{C_2\, g(x,c)\prod_{i=0}^{n-1} p'_i(x)},$$

dimana $C_1 = \prod_{i=0}^{n-1} p'_i(c)$ dan $C_2 = g(c)$.

Kemudian

$$\frac{Q_1(x,c)}{Q_2(x,c)} = \frac{g(x)C_1}{C_2\prod_{i=0}^{n-1} p'_i(x)}$$

$$= \frac{C_1}{C_2}\frac{g(x)}{p'_0(x)\prod_{i=1}^{n-1} p'_i(x)}$$

$$= \frac{C_1}{C_2} \frac{g(x)}{p_0(x) g(x) \prod_{i=1}^{n-1} p'_i(x)}$$

$$= \frac{C_1}{C_2} \frac{1}{p_0(x) \prod_{i=1}^{n-1} p'_i(x)},$$

dimana $Q(x,c)$ dan $S(x,c)$ adalah polinomial satu variabel, yaitu variabel x, sehingga FPB-nya adalah:

$$p(x,y) = S(x,y) \frac{Q(x,c)}{S(x,c)}$$

$$= \left[g(y) g(x,y) \prod_{i=0}^{n-1} p'_i(x) \right] \left[\frac{C_1}{C_2} \frac{1}{p_0(x) \prod_{i=1}^{n-1} p'_i(x)} \right]$$

$$= \frac{C_1}{C_2} g(y) g(x,y)\, p'_0(x) \prod_{i=1}^{n-1} p'_i(x) \frac{1}{p_0(x) \prod_{i=1}^{n-1} p'_i(x)}$$

$$= \frac{C_1}{C_2} g(y) g(x,y) g(x) p_0(x) \prod_{i=1}^{n-1} p'_i(x) \frac{1}{p_0(x) \prod_{i=1}^{n-1} p'_i(x)}$$

$$= \frac{C_1}{C_2} g(y) g(x,y) g(x) \tag{3.1.13}$$

Selanjutnya dengan cara yang sama, akan ditunjukkan persamaan FPB dalam polinomial variabel y. Dengan menggunakan C_1 dan C_2 di atas, didapatkan persamaan:

$$\frac{S(c,y)}{Q(c,y)} = \frac{g(y) g(c,y) \prod_{i=0}^{n-1} p'_i(c)}{g(c) g(c,y) \prod_{i=0}^{n-1} p'_i(y)}$$

$$= \frac{g(y)C_1}{C_2 \prod_{i=0}^{n-1} p'_i(y)}$$

$$= \frac{g(y)C_1}{C_2\, p'_0(y) \prod_{i=1}^{n-1} p'_i(y)}$$

$$= \frac{g(y)C_1}{C_2\, p_0(y) g(y) \prod_{i=1}^{n-1} p'_i(y)}$$

$$= \frac{C_1}{C_2} \frac{1}{p_0(y) \prod_{i=1}^{n-1} p'_i(y)}.$$

Persamaan FPB-nya adalah:

$$p(x,y) = Q(x,y)\frac{S(c,y)}{Q(c,y)}$$

$$= \left[g(x)g(x,y) \prod_{i=0}^{n-1} p'_i(y) \right] \left[\frac{C_1}{C_2} \frac{1}{p_0(y) \prod_{i=1}^{n-1} p'_i(y)} \right]$$

$$= \frac{C_1}{C_2} g(x)g(x,y)\, p'_0(y) \prod_{i=1}^{n-1} p'_i(y) \frac{1}{p_0(y) \prod_{i=1}^{n-1} p'_i(y)}$$

$$= \frac{C_1}{C_2} g(x)g(x,y)g(y)p_0(y) \prod_{i=1}^{n-1} p'_i(y) \frac{1}{p_0(y) \prod_{i=1}^{n-1} p'_i(y)}$$

$$= \frac{C_1}{C_2} g(x)g(x,y)g(y) \qquad (3.1.14)$$

Dari persamaan (3.1.13) dan (3.1.14) maka $p(x,y) = S(x,y)\dfrac{Q(x,c)}{S(x,c)} = Q(x,y)\dfrac{S(c,y)}{Q(c,y)}$ terbukti. ∎

Dengan menggunakan Proposisi 3.1.1 di atas, jika terdapat FPB yang berupa polinomial monik untuk perhitungan FPB satu variabel dari polinomial $\tilde{p}_k(x, y_k)$, maka penyelesaiannya adalah sebagai berikut:

Langkah 1. Menghitung $Q(x,y)$ dengan persamaan:

$$Q(x,y) = g(x)g(x,y)\prod_{i=0}^{n-1} p'_i(y).$$

Langkah 2. Menghitung $S(x,y)$ dengan persamaan:

$$S(x,y) = g(y)g(x,y)\prod_{i=0}^{n-1} p'_i(x).$$

Langkah 3. Persamaan FPB-nya adalah

$$p(x,y) = S(x,y)\frac{Q(x,c)}{S(x,c)} = Q(x,y)\frac{S(c,y)}{Q(c,y)},$$

dimana c adalah bilangan acak sebarang.

Contoh 3.1.2 Misalkan terdapat dua polinomial:

$$p_1(x,y) = (x+1)(y+2)$$
$$p_2(x,y) = (x+2y)(y+2).$$

Akan dihitung FPB dari $p_1(x,y)$ dan $p_2(x,y)$.

Langkah 1. Menghitung derajat dalam FPB.

$$\begin{aligned} b_1 &= \min\{\deg_x[(x+1)(y+2)], \deg_x[(x+2y)(y+2)]\} \\ &= \min\{\deg_x(xy+2x+y+2), \deg_x(xy+2x+2y^2+4y)\} \\ &= \min\{1,1\} \\ &= 1 \quad . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2 &= \min\{\deg_y[(x+1)(y+2)], \deg_y[(x+2y)(y+2)]\} \\ &= \min\{\deg_y(xy+2x+y+2), \deg_y(xy+2x+2y^2+4y)\} \\ &= \min\{1,2\} \\ &= 1 \quad . \end{aligned}$$

Langkah 2. Menghitung banyaknya titik interpolasi.

$$R_1 = (b_1 + 1)\,(b_2 + 1)$$
$$= (1+1)(1+1)$$
$$= 4\,.$$

Jadi, banyaknya titik interpolasi adalah 4 titik. Kemudian menentukan keempat titik interpolasi.

$$u_i(r_j) = W_i^{-r_j}\,,\quad W_i = e^{\frac{2\pi I}{b_i+1}}\,,\quad i = 0{,}1 \text{ dan } r_j = 0{,}1,..b_i\,,\quad j = 0{,}1\,.$$

Untuk $i = 0 \Rightarrow r_j = 0{,}1$ dan $i = 1 \Rightarrow r_j = 0{,}1$

$$u_0(0) = W_0^0 = 1 \qquad u_1(0) = W_1^0 = 1$$

$$u_0(1) = W_0^{-1} = e^{\frac{-2\pi I}{1+1}} = -1 \qquad u_1(1) = W_1^{-1} = e^{-\frac{2\pi I}{1+1}} = -1\,.$$

Langkah 3. Menentukan FPB dari $p_1(x,y)$ dan $p_2(x,y)$ yaitu dengan mensubsitusikan $y = u_1(r_j)$ ke dalam polinomial $p_1(x,y)$ dan $p_2(x,y)$, diperoleh:

$$p(x,u_1(0) = p(x,1)$$
$$FPB((x+1)(1+2),(x+2)(1+2)) = \overline{p}_1(x,1) = 3$$
$$p(x,u_1(1) = p(x,-1)$$
$$FPB((x+1)(-1+2),(x-2)(-1+2)) = \overline{p}_1(x,-1) = 1$$

Karena terdapat FPB yang berupa polinomial monik untuk perhitungan FPB satu variabel dari polinomial $\tilde{p}_k(x,y_k)$ yaitu pada $\tilde{p}_1(x,-1) = 1$. Jika langkah perhitungan pendekatan FPB dilanjutkan maka langkah selanjutnya adalah sebagai berikut.

Langkah 4. Mensubsitusi $x = u_0(r_j)$ ke dalam FPB satu variabel di atas untuk mendapatkan $\tilde{p}_{r_0,r_1} = p(u_0(r_0),u_1(r_1))$.

$$p(u_0(0),u_1(0)) = 3 \Rightarrow \tilde{p}_{0,0} = p(1,u_1(0)) = 3\,,$$
$$p(u_0(1),u_1(0)) = 3 \Rightarrow \tilde{p}_{1,0} = p(-1,u_1(0)) = 3\,,$$
$$p(u_0(0),u_1(1)) = 1 \Rightarrow \tilde{p}_{0,1} = p(1,u_1(1)) = 1\,,$$

$$p(u_0(1),u_1(1)) = 1 \Rightarrow \tilde{p}_{1,1} = p(-1,u_1(1)) = 1 .$$

Langkah 5. Dengan menggunakan invers transformasi Fourier diskrit, nilai $\tilde{p}_{r_0,r_1}$ digunakan untuk menentukan koefisien p_{k_0,k_1}, kemudian disubsitusikan ke dalam persamaan (3.1.2), polinomialnya adalah:

$$\tilde{p}(x,y) = \tilde{p}_{0,0} + \tilde{p}_{0,1}y + \tilde{p}_{1,0}x + \tilde{p}_{1,1}xy \tag{3.2.17}$$

Invers transformasi Fourier diskritnya adalah:

$$\bar{p}_{k_0,k_1} = \frac{1}{R}\sum_{r_0=0}^{\tilde{b}_1}\sum_{r_1=0}^{\tilde{b}_2}\left(\tilde{p}_{r_0,r_1}\right)\left(\tilde{W}_0^{\;r_0k_0}\tilde{W}_1^{\;r_1k_1}\right),$$

$$k_i = 0,1,\cdots,b_i \Rightarrow k_0 = 0,1 \text{ dan } k_1 = 0,1 .$$

$$\bar{p}_{0,0} = \frac{1}{4}\sum_{r_0=0}^{1}\sum_{r_1=0}^{1}\left(\tilde{p}_{r_0,r_1}\right)\left(\tilde{W}_0^{\;r_0\cdot 0}\tilde{W}_1^{\;r_1\cdot 0}\right)$$
$$= 2 .$$

$$\bar{p}_{0,1} = \frac{1}{4}\sum_{r_0=0}^{1}\sum_{r_1=0}^{1}\left(\tilde{p}_{r_0,r_1}\right)\left(\tilde{W}_0^{\;r_0\cdot 0}\tilde{W}_1^{\;r_1\cdot 1}\right)$$
$$= 1 .$$

$$\bar{p}_{1,0} = \frac{1}{4}\sum_{r_0=0}^{1}\sum_{r_1=0}^{1}\left(\tilde{p}_{r_0,r_1}\right)\left(\tilde{W}_0^{\;r_0\cdot 1}\tilde{W}_1^{\;r_1\cdot 0}\right)$$
$$= 0 .$$

$$\bar{p}_{1,1} = \frac{1}{4}\sum_{r_0=0}^{1}\sum_{r_1=0}^{1}\left(\tilde{p}_{r_0,r_1}\right)\left(\tilde{W}_0^{\;r_0\cdot 1}\tilde{W}_1^{\;r_1\cdot 1}\right)$$
$$= 0 .$$

Jika $\bar{p}_{0,0} = 2$, $\bar{p}_{0,1} = 1$, $\bar{p}_{1,0} = 0$, dan $\bar{p}_{1,1} = 0$ dimasukkan ke dalam persamaan (3.1.17), diperoleh: $\bar{p}(x,y) = 2 + y + 0 + 0 = y + 2.$

Jadi, FPB dari polinomial $p_1(x,y)$ dan $p_2(x,y)$ adalah $y+2$. Hasil pendekatan FPB tersebut memang sama dengan FPB sebenarnya tetapi terdapat FPB yang berupa polinomial monik untuk perhitungan FPB satu variabel dari polinomial $\tilde{p}_k(x,y_k)$ yaitu pada $\tilde{p}_1(x,-1) = 1$.

Permasalahan tersebut akan diselesaikan dengan menggunakan Proposisi 3.1.1 untuk mendapatkan FPB. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

$$p_1(x,y) = (x+1)(y+2) \longrightarrow$$
$$p_1(x,y) = \underbrace{\underbrace{(x+1)}_{p_1(x)} \cdot \underbrace{1}_{g(x)}}_{p'_1(x)} \underbrace{\underbrace{1}_{p_1(x,y)} \cdot \underbrace{1}_{g(x,y)}}_{p'_1(x,y)} \underbrace{\underbrace{(y+2)}_{p_1(y)=g(y)}}_{p'_1(y)}$$

$$p_2(x,y) = (x+2y)(y+2) \longrightarrow$$
$$p_2(x,y) = \underbrace{\underbrace{1}_{p_2(x)} \cdot \underbrace{1}_{g(x)}}_{p'_2(x)} \underbrace{\underbrace{(x+2y)}_{p_2(x,y)} \cdot \underbrace{1}_{g(x,y)}}_{p'_2(x,y)} \underbrace{\underbrace{(y+2)}_{p_2(y)=g(y)}}_{p'_2(y)}$$

Langkah 1. Menghitung $Q(x,y)$ dengan persamaan:

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= g(x)g(x,y)\prod_{i=0}^{n-1} p'_i(y). \\ &= 1 \cdot 1 \cdot [(y+2)\cdot(y+2)] \\ &= (y+2)\cdot(y+2) \end{aligned}$$

Langkah 2. Menghitung $S(x,y)$ dengan persamaan:

$$\begin{aligned} S(x,y) &= g(y)g(x,y)\prod_{i=0}^{n-1} p'_i(x). \\ &= (y+2)\cdot 1 \cdot [(x+1)] \\ &= (y+2)(x+1) \end{aligned}$$

Langkah 3. Persamaan FPB-nya adalah

$$p(x,y) = S(x,y)\frac{Q(x,c)}{S(x,c)} = Q(x,y)\frac{S(c,y)}{Q(c,y)},$$

dimana c adalah bilangan acak sebarang.

Misalkan $c=1$ maka FPB-nya adalah:

$$p(x,y)=S(x,y)\frac{Q(x,c)}{S(x,c)}$$

$$=(y+2)(x+1)\frac{(1+2)\cdot(1+2)}{(1+2)(x+1)}$$

$$=3(y+2)$$

Jadi, FPB dari $p_1(x,y)$ dan $p_2(x,y)$ adalah $3(y+2)$.

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dari pembahasan adalah bahwa polinomial bivariat atau polinomial dua variabel bukan ring euclid (*non Euclidean rings*) sehingga untuk menghitung FPB-nya dikembangkan metode:

1. Transformasi Fourier diskrit pada pendekatan FPB, yaitu:
   a. Jika $p_i(x, y)$ adalah bukan koprime akar yaitu terdapat titik (x_j, y_k) sedemikian sehingga $p_i(x, y) = 0$ maka pada perhitungan FPB satu variabel yaitu $\tilde{p}_k(x, y_k)$ terdapat faktor lain yaitu $(x - x_k)$ sehingga penyelesaiannya adalah dengan mengambil sebarang dua bilangan real c_1 dan c_2, kemudian mengalikan bilangan real tersebut dengan $W_i = e^{\frac{2\pi I}{b_i + 1}}$.
   b. Jika terdapat FPB yang berupa polinomial monik untuk perhitungan FPB satu variabel dari polinomial $\tilde{p}_k(x, y_k)$, maka FPB untuk polinomial dua variabel adalah:
   $$p(x, y) = S(x, y)\frac{Q(x, c)}{S(x, c)} = Q(x, y)\frac{S(c, y)}{Q(c, y)}.$$
   dengan
   $$Q(x, y) = g(x)g(x, y)\prod_{i=0}^{n-1} p'_i(y)$$
   dan
   $$S(x, y) = g(y)g(x, y)\prod_{i=0}^{n-1} p'_i(x).$$

4.2 Saran

Dalam pembahasan lebih lanjut disarankan untuk membahas penyelesaian FPB polinomial dua variabel dengan menggunakan program sehingga diketahui kecepatan dari algoritma transformasi Fourier diskrit.

DAFTAR PUSTAKA

Arifin, A. 2000. *Aljabar*. ITB Bandung

Bhattacharya, P.B. 1994. *Basic Abstract Algebra*. Cambridge University Press. Cambridge

Demanis, A. 2007. *Signal and Spectral Methods in Geoinformatics*. Aristotle University of Thessaloniki. Greece

Dummit, D.S and Richard M.F. 1994. *Abstract Algebra*. Second Edition. John Willey & Sons, Inc. New York

Fraleigh, J.B. 1994. *A First Course in Abstract Algebra*. Fifth Edition. Addison Wesley Publishing Company, USA

Kincaid, D and Ward C. 1990. *Numerical Analysis*. Brooks/Cole Publishing Company. California

McInerney, S.J. 1999. *Representation and Transformation for Multidimensional System*. Disertasi S3, Loughborough University

Munir, R. 2004. *Pengolahan Citra Digital Dengan Pendekatan Algoritmik*. Penerbit Informatika. Bandung

Raisinghania, M.D and Anggarwal R.S. 1980. *Modern Algebra*. S. Chard and Company, LTD. New Delhi

Ralston, A and Philip R. 1978. *A first Course in Numerical Analysis*. Second edition. McGraw-Hill, Inc. New York

Soehakso, R.M.J.T. 1990. *Aljabar Abstrak*. Bagian Matematika Fakultas Ilmu Pasti dan Alam UGM. Yogyakarta

Soehardjo. 2001. *Matematika Rekayasa 1*. ITS Surabaya

Sullivan, M. 1989. *College Algebra*. International Editions. Maxwell Maxmillan. Singapore

Wahyudin. 1989. *Aljabar Modern*. Tarsito Bandung

Whitelaw, T.A. 1995. *Introduction to Abstract Algebra*. Third Edition. Chapman and Hall. New York

Tzekis, P., Nicholas P.K., Haralambos K.T. 2007. *On the Computation of the GCD of the 2-D Polynomials*. Department of Mathematics, School of Science. Greece

www.mathrefresher.com/GCD. Tanggal akses: 4 Maret 2008

www.math-wolfram.com/Bivariate_Polynomials. Tanggal akses: 16 Maret 2008