

**DISTRIBUSI PROBABILITAS NILAI SEKARANG
PEMBAYARAN SANTUNAN ASURANSI JIWA**

SKRIPSI

oleh :
DINA ANGGRAINI
0510940011



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2009**

**DISTRIBUSI PROBABILITAS NILAI SEKARANG
PEMBAYARAN SANTUNAN ASURANSI JIWA**

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh :
DINA ANGGRAINI
0510940011



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2009**

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

**DISTRIBUSI PROBABILITAS NILAI SEKARANG
PEMBAYARAN SANTUNAN ASURANSI JIWA**

oleh :
DINA ANGGRAINI
0510940011

**Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 5 Juni 2009
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang matematika**

Pembimbing I

Pembimbing II

Dra. Endang Wahyu H, M.Si
NIP. 131 960 432

Prof. Dr. Agus Widodo
NIP. 131 281 894

**Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya**

Dr. Agus Suryanto, MSc
NIP. 132 126 049

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : DINA ANGGRAINI
NIM : 0510940011
Jurusan : MATEMATIKA
Penulis skripsi berjudul :DISTRIBUSI PROBABILITAS
NILAI SEKARANG PEMBAYARAN SANTUNAN ASURANSI
JIWA

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. Isi dari Skripsi yang saya buat benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Skripsi ini.
2. Apabila di kemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya akan bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 5 Juni 2009
Yang menyatakan,

(DINA ANGGRAINI)
NIM. 0510940011

KATA PENGANTAR

Puji syukur Alhamdulillah penulis panjatkan kehadiran Allah SWT yang telah memberikan taufik, hidayah dan inayahNya sehingga penulis dapat menyelesaikan Skripsi berjudul **“DISTRIBUSI PROBABILITAS NILAI SEKARANG PEMBAYARAN SANTUNAN ASURANSI JIWA”**. Shalawat serta salam selalu tercurah kepada Nabi Muhammad SAW sebagai suri tauladan bagi penulis.

Dalam penyusunan skripsi ini, penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah memberi bantuan dan dukungannya, antara lain sebagai berikut:

1. Dra. Endang Wahyu H, M.Si selaku Dosen Pembimbing I yang telah memberikan bimbingan dan arahan kepada penulis.
2. Prof. Dr. Agus Widodo selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberikan bimbingan dan arahan kepada penulis.
3. Dr. Agus Suryanto MSc. selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unibraw sekaligus sebagai Penasihat Akademik.
4. Drs. Bambang Sugandi, Msi., Dra. Trisilowati, MSc serta Isnani Darti, SSi , M.Si selaku Dosen Penguji.
5. Seluruh dosen dan staf pengajar FMIPA Universitas Brawijaya.
6. Mama dan Papa tercinta serta kakak – kakakku, Mas Henry, Mas Rosi, mas Koko, mbak Santi, Iin dan Putri atas segala do’a yang tercurah untuk penulis.
7. Astika Sari, Astin Agustina, Fitri Amalia, Fatchatul Maulida dan Meyada Nurani serta rekan-rekan Matematika 2005.
8. Semua pihak yang telah membantu penyusunan skripsi ini.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa penyusunan Skripsi ini sangat jauh dari kesempurnaan, sehingga saran dan kritik yang membangun sangat penulis harapkan. Akhirnya, semoga Skripsi ini bermanfaat bagi pembaca.

Malang, 5 Juni 2009

Penulis

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DISTRIBUSI PROBABILITAS NILAI SEKARANG PEMBAYARAN SANTUNAN ASURANSI JIWA

ABSTRAK

Nilai sekarang pembayaran santunan asuransi jiwa merupakan nilai diskon dari besarnya santunan yang harus dibayar oleh perusahaan asuransi berdasarkan pada *future lifetime* T dari tertanggung. Pada skripsi ini dibahas variabel acak kontinu Z yang menyatakan nilai sekarang pembayaran santunan asuransi *general*, yaitu kombinasi antara asuransi jiwa maupun anuitas hidup. Kemudian akan ditentukan fungsi distribusi dan kepadatan probabilitasnya, yaitu melalui beberapa teorema ditunjukkan bahwa kedua fungsi tersebut memiliki bentuk tertentu yang dipengaruhi oleh distribusi probabilitas variabel acak *future lifetime* T .

Kata kunci : asuransi *general*, distribusi probabilitas, *future lifetime*

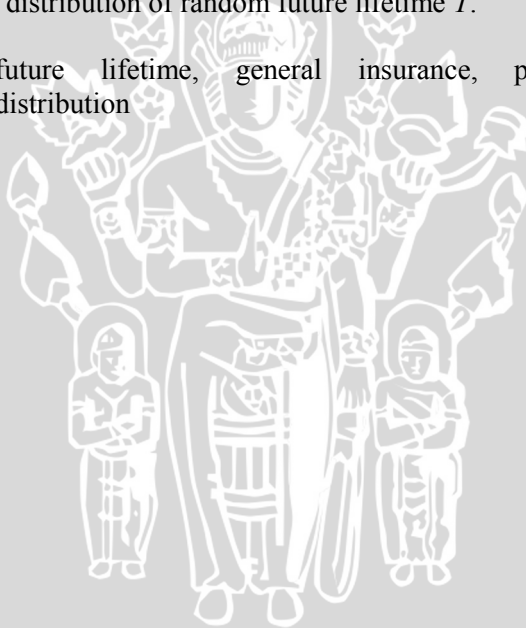


PROBABILITY DISTRIBUTION OF PRESENT VALUE OF BENEFIT PAYMENT OF LIFE INSURANCE

ABSTRACT

Present value of benefit payment is defined as the discount value of all the benefits to be paid by the insurer over the random future lifetime T of the insured. In this final project, it will be considered the continuous random variable Z describing present value of benefit payment of general insurance by mean of combination of life insurance and life annuity. Its distribution and density probability function will be derived. According to some theorems, it will be shown that these functions have a special type that is determined by the probability distribution of random future lifetime T .

Keywords : future lifetime, general insurance, probability distribution



DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGESAHAN	ii
HALAMAN PERNYATAAN	iii
ABSTRAK	iv
ABSTRACT	v
KATA PENGANTAR	vi
DAFTAR ISI	vii
DAFTAR TABEL	ix
 BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	1
1.3 Tujuan.....	2
1.4 Batasan Masalah.....	2
 BAB II TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 Probabilitas	3
2.1.1 Probabilitas bersyarat.....	3
2.1.2 Probabilitas dua kejadian saling bebas.....	3
2.1.3 Kaidah total probabilitas.....	3
2.2 Variabel Acak	3
2.3 Fungsi Distribusi Variabel Acak	4
2.4 Fungsi Kepadatan Probabilitas Variabel Acak	6
2.5 Nilai Harapan, Momen dan Variansi Variabel Acak.....	6
2.6 <i>The Future Lifetime of Life Aged x</i>	8
2.7 Percepatan Mortalitas.....	8
2.8 Percepatan Pembungaan (<i>Force of Interest</i>).....	10
2.9 Anuitas Hidup	10
2.9.1 Anuitas seumur hidup.....	10
2.9.2 Anuitas hidup berjangka.....	10
2.9.3 Anuitas hidup tertunda.....	11
2.10 Asuransi Jiwa	11
2.11 Nilai Sekarang Santunan Asuransi Jiwa	11
2.11.1 Asuransi seumur hidup dan berjangka.....	12
2.11.2 Endowmen murni.....	12
2.11.3 Asuransi endowmen.....	12

2.12	<i>Loss</i>	13
2.13	Resiko.....	13
2.13.1	Ukuran Resiko.....	13
2.14	Fungsi Tangga Satuan dan Fungsi Delta.....	14

BAB III PEMBAHASAN

3.1	Variabel Acak Nilai Sekarang Pembayaran Santunan...	17
3.2	Nilai Sekarang Pembayaran Santunan Asuransi <i>General</i>	19
3.3	Distribusi Probabilitas Nilai Sekarang Pembayaran Santunan Asuransi Jiwa.....	21
3.4	Beberapa Contoh Permasalahan.....	31
3.4.1	Menentukan premi bersih dengan probabilitas tertentu.....	31
3.4.2	Mengukur resiko perusahaan asuransi jiwa.....	36

BAB IV KESIMPULAN

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN.....

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Konstanta Nilai Sekarang Pembayaran Santunan Asuransi Jiwa dan Anuitas Hidup.....	17
Tabel 3.2 Ukuran Resiko Beberapa Polis Asuransi Jiwa.....	37

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Santunan asuransi jiwa merupakan ganti rugi yang diberikan oleh perusahaan asuransi jika tertanggung mengalami kejadian yang terdefinisi (mati atau hidup) selama periode polis. Di bawah kontrak asuransi jiwa pada umumnya santunan terdiri atas pembayaran tunggal dengan waktu pembayarannya bergantung pada *future lifetime* dari tertanggung, yaitu sisa usia yang dapat dilalui oleh tertanggung.

Nilai diskon dari besarnya santunan yang harus dibayarkan oleh perusahaan asuransi berdasarkan pada *future lifetime* dari tertanggung merupakan nilai sekarang pembayaran santunan pada saat terbit polis bagi tertanggung berusia x tahun. Oleh karena itu nilai sekarang dari pembayaran santunan tersebut tidak dapat diketahui dengan pasti berapa besar jumlahnya.

Nilai sekarang pembayaran santunan dapat dinyatakan sebagai suatu variabel acak dan dapat ditentukan hal-hal yang berkaitan dengan konsep variabel acak, antara lain fungsi distribusi dan kepadatan probabilitasnya serta dapat pula ditentukan probabilitas yang berhubungan dengan nilai sekarang pembayaran santunan tersebut. Pada skripsi ini akan dibahas mengenai variabel acak yang menyatakan nilai sekarang pembayaran santunan beberapa jenis asuransi jiwa, anuitas hidup maupun kombinasi diantaranya. Kemudian dapat ditentukan fungsi distribusi dan kepadatan probabilitas dari variabel acak tersebut.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang dibahas dalam skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana bentuk umum dari variabel acak yang menyatakan nilai sekarang pembayaran santunan asuransi jiwa, anuitas hidup maupun kombinasi diantaranya?
2. Bagaimana fungsi distribusi serta kepadatan probabilitas nilai sekarang pembayaran santunan asuransi jiwa, anuitas hidup maupun kombinasi diantaranya?

1.3 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Menunjukkan bentuk umum dari variabel acak yang dapat menyatakan nilai sekarang pembayaran santunan yang berlaku untuk asuransi jiwa, anuitas hidup maupun kombinasinya.
2. Menentukan fungsi distribusi serta kepadatan probabilitas dari nilai sekarang pembayaran santunan yang berlaku umum baik untuk asuransi jiwa, anuitas hidup maupun kombinasinya.

1.4 Batasan Masalah

Dalam skripsi ini, permasalahan dibatasi pada asuransi yang santunannya dibayarkan pada saat kematian tertanggung dengan polis asuransi hanya berlaku secara perseorangan.



BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Probabilitas

Probabilitas merupakan suatu nilai untuk mengukur besarnya tingkat kemungkinan terjadinya suatu kejadian (Supranto, 1985). Probabilitas suatu kejadian A adalah jumlah probabilitas semua titik contoh yang menyusun A dan dinotasikan $\Pr(A)$. Probabilitas himpunan kosong ($\emptyset$) adalah nol dan $\Pr(S)$ adalah satu, S adalah semua kejadian yang mungkin (Walpole, 1982).

2.1.1 Probabilitas bersyarat

Probabilitas bersyarat kejadian B , jika kejadian A terjadi atau diketahui dilambangkan dengan $\Pr(B|A)$, didefinisikan sebagai

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A, B)}{\Pr(A)}, \Pr(A) > 0 \quad (2.1.1)$$

(Walpole, 1982)

2.1.2 Probabilitas dua kejadian saling bebas

Dua kejadian A dan B dikatakan saling bebas jika

$$\Pr(B|A) = \Pr(B) \quad (2.1.2)$$

atau

$$\Pr(A|B) = \Pr(A) \quad (2.1.3)$$

Akibatnya

$$\Pr(A, B) = \Pr(A)\Pr(B) \quad (2.1.4)$$

(Walpole, 1982)

2.1.3 Kaidah total probabilitas

Jika $B = [B_1, B_2, \dots, B_n]$ adalah suatu partisi dari S dan A adalah sembarang kejadian maka

$$\Pr(A) = \sum_{i=1}^n \Pr(B_i) \Pr(A|B_i) \quad (2.1.5)$$

(Papoulis, 1992)

2.2 Variabel Acak

Suatu fungsi bernilai riil yang ditentukan oleh setiap unsur dalam suatu ruang contoh disebut variabel acak. Variabel acak yang didefinisikan pada ruang contoh kontinu disebut variabel acak kontinu. Ruang contoh kontinu merupakan ruang contoh yang mengandung tak hingga banyaknya titik contoh yang sama dengan banyaknya titik pada sebuah ruas garis (Walpole, 1982).

Dalam prakteknya, variabel acak kontinu digunakan untuk data terukur, misalnya umur, waktu, atau bobot.

2.3 Fungsi Distribusi Variabel Acak

Elemen–elemen himpunan S yang termuat dalam kejadian $(T \leq t)$ berubah bila t menjalani berbagai harga. Akibatnya, probabilitas $\Pr(T \leq t)$ adalah bilangan yang tergantung pada t . Bilangan ini dinyatakan dengan $F_T(t)$ dan disebut dengan fungsi distribusi variabel acak T .

Definisi 2.3.1

Fungsi distribusi variabel acak T adalah fungsi

$$F_T(t) = \Pr(T \leq t) \quad (2.3.1)$$

yang didefinisikan untuk setiap t dari $-\infty$ sampai t , mendeskripsikan semua kemungkinan nilai dari variabel acak T (Papoulis, 1992).

Teorema 2.3.2

Jika T adalah variabel acak dan $t_1 < t_2$, maka

$$\Pr(t_1 < T \leq t_2) = F_T(t_2) - F_T(t_1) \quad (2.3.2)$$

(Papoulis, 1992)

Bukti :

Kejadian $(T \leq t_1)$ dan $(t_1 < T \leq t_2)$ adalah saling asing dan

$$(T \leq t_2) = (T \leq t_1) \cup (t_1 < T \leq t_2)$$

Karena itu,

$$\Pr(T \leq t_2) = \Pr(T \leq t_1) + \Pr(t_1 < T \leq t_2)$$

$$\Pr(t_1 < T \leq t_2) = \Pr(T \leq t_2) - \Pr(T \leq t_1)$$

Menurut Definisi 2.3.1

$$\Pr(t_1 < T \leq t_2) = F_T(t_2) - F_T(t_1)$$

Teorema 2.3.3

Jika $F_T(t^-) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_T(t - \varepsilon)$, $0 \leq \varepsilon \rightarrow 0$ maka

$$\Pr(T = t) = F_T(t) - F_T(t^-) \quad (2.3.3)$$

(Papoulis, 1992)

Bukti :

Dengan mengambil $t_1 = t - \varepsilon$ dan $t_2 = t$ pada Teorema 2.3.2 persamaan (2.3.2), didapat

$$\Pr(t - \varepsilon < T \leq t) = F_T(t) - F_T(t - \varepsilon)$$

dan dengan $\varepsilon \rightarrow 0$, maka

$$\Pr(T = t) = F_T(t) - F_T(t^-)$$

Definisi 2.3.4

Variabel acak T berdistribusi kontinu jika fungsi distribusinya $F_T(t)$ kontinu. Untuk keadaan ini,

$$F_T(t^-) = F_T(t) \quad (2.3.4)$$

sehingga

$$\Pr(T = t) = 0, \quad \text{untuk setiap } t \quad (2.3.5)$$

(Papoulis, 1992)

Teorema 2.3.5

Jika T adalah variabel acak berdistribusi kontinu dan $t_1 < t_2$, maka

$$\Pr(t_1 \leq T \leq t_2) = \Pr(t_1 < T \leq t_2) = \Pr(t_1 \leq T < t_2) \quad (2.3.6)$$

(Papoulis, 1992)

Bukti :

$$\begin{aligned} \Pr(t_1 \leq T \leq t_2) &= \Pr(t_1 < T \leq t_2) + \Pr(T = t_1) = \Pr(t_1 \leq T < t_2) \\ &+ \Pr(T = t_2) \end{aligned}$$

Menurut Definisi 2.3.4 persamaan (2.3.5)

$$\Pr(t_1 \leq T \leq t_2) = \Pr(t_1 < T \leq t_2) = \Pr(t_1 \leq T < t_2)$$

2.4 Fungsi Kepadatan Probabilitas Variabel Acak

Misalkan $F_T(t)$ adalah fungsi distribusi dari variabel acak kontinu T . Derivatif dari $F_T(t)$ disebut fungsi kepadatan probabilitas variabel acak kontinu T .

$$f_T(t) = \frac{dF_T(t)}{dt} \quad (2.4.1)$$

(Papoulis, 1992)

Fungsi kepadatan probabilitas kontinu digambarkan sebagai suatu kurva kontinu.

Teorema 2.4.2

Jika $f_T(t)$ adalah fungsi kepadatan probabilitas variabel acak kontinu T , maka

$$F_T(t) = \int_{-\infty}^t f_T(t) dt \quad (2.4.2)$$

(Papoulis, 1992)

Bukti :

Menurut persamaan 2.4.1

$$d F_T(t) = f_T(t) dt$$

Dengan mengintegrasikan persamaan 2.4.1 dari $-\infty$ sampai t , diperoleh

$$\int_{-\infty}^t d F_T(t) = \int_{-\infty}^t f_T(t) dt$$

$$F_T(t) = \int_{-\infty}^t f_T(t) dt$$

2.5 Nilai Harapan, Momen dan Variansi Suatu Variabel Acak

Nilai harapan dari T , dinotasikan dengan $E(T)$ merupakan ukuran kedudukan dari $F_T(t)$ untuk variabel acak T . Jika $F_T(t)$ adalah titik massa distribusi sepanjang sumbu t , maka $E(T)$ adalah pusat gravitasi dari distribusi massa tersebut.

Definisi 2.5.1

Misalkan $f_T(t)$ adalah fungsi kepadatan probabilitas dari variabel acak kontinu T . Nilai harapan dari T , didefinisikan sebagai berikut:

$$E(T) = \int_{-\infty}^{\infty} t f_T(t) dt \quad (2.5.1)$$

(Papoulis, 1992)

Definisi 2.5.2

Misalkan $f_T(t)$ adalah fungsi kepadatan dari variabel acak kontinu T . Momen ke- n dari T , didefinisikan sebagai berikut :

$$E(T^n) = \int_{-\infty}^{\infty} t^n f_T(t) dt \quad (2.5.2)$$

(Ghahramani, 2000)

Momen pertama dari variabel acak T merupakan nilai harapan dari T , yaitu $E(T^1) = E(T)$.

Definisi 2.5.3

Misalkan $f_T(t)$ adalah fungsi kepadatan dari variabel acak kontinu T dengan nilai harapan $E(T)$. Momen sentral ke- n dari T , didefinisikan sebagai berikut :

$$E\left[(T - E(T))^n\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (t - E(T))^n f_T(t) dt \quad (2.5.3)$$

(Ghahramani, 2000)

Definisi 2.5.4

Misalkan $f_T(t)$ adalah fungsi kepadatan dari variabel acak kontinu T dengan nilai harapan $E(T)$. Variansi variabel acak T didefinisikan sebagai berikut :

$$\text{Var}(T) = \int_{-\infty}^{\infty} (t - E(T))^2 f_T(t) dt \quad (2.5.4)$$

(Ghahramani, 2000)

Variansi variabel acak T , $\text{Var}(T)$ merupakan momen sentral ke-2 dari T , yaitu $E\left[(T - E(T))^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (t - E(T))^2 f_T(t) dt$.

2.6 The Future Lifetime of Life Aged x

Misalkan seseorang berusia x tahun (*life aged x*) dinotasikan dengan (x) dan *future lifetime* seseorang berusia x tahun dinotasikan dengan T atau lebih eksplisit lagi dengan $T(x)$. *Future lifetime* T adalah variabel acak dengan fungsi distribusi probabilitasnya adalah

$$F_T(t) = \Pr(T \leq t), \quad t \geq 0 \quad (2.6.1)$$

Fungsi $F_T(t)$ menunjukkan probabilitas orang tersebut meninggal dalam kurun waktu t tahun.

Misal probabilitas seseorang meninggal dalam kurun waktu t tahun dinotasikan dengan ${}_t q_x$ maka diperoleh relasi

$${}_t q_x = F_T(t), \quad (2.6.2)$$

sedangkan probabilitas seseorang yang berusia x tahun akan hidup t tahun lagi, dinotasikan dengan ${}_t p_x$, yaitu

$${}_t p_x = 1 - {}_t q_x = 1 - F_T(t) \quad (2.6.3)$$

(Gerber, 1997)

2.7 Percepatan Mortalitas

Percepatan mortalitas merupakan perubahan tingkat kematian pada suatu usia tertentu yang diukur untuk selang waktu yang sangat pendek (Anonymous¹).

Definisi 2.7.1

Misalkan *future lifetime* T adalah variabel acak dengan fungsi kepadatan probabilitas $f_T(t)$ dan distribusi probabilitas $F_T(t)$. Percepatan mortalitas (x) pada usia $x + t$ tahun didefinisikan sebagai berikut:

$$\mu_{x+t} = \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)} \quad (2.7.1)$$

(Norberg, 2002)

Teorema 2.7.2

Misalkan *future lifetime* T adalah variabel acak dengan fungsi distribusi probabilitas $F_T(t)$ dan percepatan mortalitas μ_{x+t} , maka fungsi kepadatan probabilitas $f_T(t)$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$f_T(t) = {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} \quad (2.7.2)$$

(Norberg, 2002)

Bukti :

Menurut Definisi 2.7.1

$$\mu_{x+t} = \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)}$$

$$f_T(t) = (1 - F_T(t))\mu_{x+t}$$

Menurut persamaan (2.6.3)

$$f_T(t) = {}_t p_x \cdot \mu_{x+t}$$

Teorema 2.7.3

Jika *future lifetime* T adalah variabel acak kontinu dan μ_{x+t} adalah percepatan mortalitas (x) pada usia $x+t$ tahun, maka probabilitas (x) akan bertahan hidup t tahun lagi dapat juga dihitung menurut rumus

$${}_t p_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+t} dt} \quad (2.7.3)$$

(Norberg, 2002)

Bukti :

Menurut Definisi 2.7.1

$$\mu_{x+t} = \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)}$$

Menurut sifat turunan dari $\ln$

$$\mu_{x+t} = - \frac{d}{dt} \ln[1 - F_T(t)]$$

$$d \ln[1 - F_T(t)] = - \mu_{x+t} dt$$

Dengan mengintegalkan bentuk di atas dari 0 sampai t , diperoleh

$$\int_0^t d \ln[1 - F_T(t)] = - \int_0^t \mu_{x+t} dt$$

$$\ln[1 - F_T(t)] = \left[- \int_0^t \mu_{x+t} dt \right]$$

$$[1 - F_T(t)] = e^{-\int_0^t \mu_{x+t} dt}$$

Menurut persamaan (2.6.3)

$${}_tP_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+t} dt}.$$

7.8 Percepatan Pembungaan (*Force of Interest*)

Misalkan i adalah tingkat bunga dan $v = (1+i)^{-1}$ adalah faktor diskon, yaitu nilai sekarang pembayaran sebesar 1 yang dilakukan 1 tahun kemudian. Percepatan pembungaan, δ didefinisikan sebagai $v = e^{-\delta}$, sehingga diperoleh

$$\delta = -\ln v = \ln(1+i) \quad (2.8.1)$$

(Futami, 1993)

2.9 Anuitas Hidup

Anuitas adalah suatu pembayaran dalam jumlah tertentu setiap selang dan lama waktu tertentu secara berkelanjutan (Futami, 1993). Sementara itu menurut Bowers dkk (1997), anuitas hidup adalah suatu deretan pembayaran yang dilakukan secara kontinu atau setiap interval tertentu (misalkan bulanan, empat bulanan, tahunan) selama tertanggung masih hidup.

8.1 Anuitas seumur hidup

Anuitas seumur hidup adalah anuitas yang pembayarannya dilakukan selama tertanggung masih hidup (Futami, 1993). Nilai sekarang Z dari anuitas seumur hidup yang dibayarkan secara kontinu sebesar 1 setiap tahun adalah

$$Z = 1.\bar{a}_{\overline{T}|} = \frac{1 - v^T}{\delta}, T \geq 0 \quad (2.9.1)$$

(Bowers, dkk., 1997)

8.2 Anuitas hidup berjangka

Anuitas hidup berjangka merupakan anuitas hidup yang pembayarannya dilakukan untuk suatu jangka waktu tertentu (Futami, 1993). Nilai sekarang Z dari anuitas hidup berjangka n tahun yang dibayarkan secara kontinu sebesar 1 setiap tahun adalah

$$Z = \begin{cases} \frac{1 - v^T}{\delta} & , 0 \leq T < n \\ \frac{1 - v^n}{\delta} & , T \geq n \end{cases} \quad (2.9.2)$$

(Bowers, dkk., 1997)

8.3 Anuitas hidup tertunda

Anuitas hidup tertunda merupakan anuitas hidup yang pembayarannya dilakukan setelah beberapa waktu kemudian (Futami, 1993). Nilai sekarang Z dari anuitas hidup tertunda m tahun yang dibayarkan secara kontinu sebesar 1 setiap tahun adalah

$$Z = \begin{cases} 0 & , 0 \leq T < m \\ v^m \frac{1 - v^{T-n}}{\delta} & , T \geq m \end{cases} \quad (2.9.3)$$

(Bowers, dkk., 1997)

9.10 Asuransi Jiwa

Asuransi jiwa merupakan suatu perlindungan atas hilangnya pendapatan yang akan menghasilkan santunan, jika tertanggung mengalami kejadian terdefinisi (mati atau hidup) dan terjadi selama periode polis (Anonymouse²). Beberapa komponen yang penting dalam asuransi jiwa antara lain:

- Perusahaan asuransi (*insurer*), yaitu pihak yang menjamin pertanggungan dan resiko pihak yang diasuransikan.
- Polis asuransi, yaitu suatu kontrak tertulis yang berisi jumlah jaminan asuransi dan premi yang telah disetujui untuk dibayar.
- Tertanggung (*insured*), yaitu seseorang yang mengasuransikan dirinya atau seseorang yang diasuransikan dalam polis asuransi.
- Premi, adalah pembayaran langsung atau berkala, sebagai suatu kewajiban yang diberikan oleh perusahaan asuransi yang telah disepakati dalam polis asuransi jiwa agar polis tersebut dapat berlaku. Jika pembayaran tersebut dilakukan hanya pada waktu kontrak asuransi disetujui dan tidak ada pembayaran lagi sesudahnya maka disebut premi tunggal (Futami, 1993).
- Santunan asuransi, yaitu ganti rugi yang diberikan jika tertanggung mengalami kejadian yang terdefinisi (mati atau hidup).

2.11 Nilai Sekarang Santunan Asuransi Jiwa

Di bawah polis asuransi pada umumnya santunan terdiri atas pembayaran tunggal dimana waktu pembayarannya bergantung pada hidup atau matinya tertanggung. Nilai harapan dari nilai sekarang pembayaran santunan tersebut merupakan premi tunggal bersih dari polis asuransi dan disebut sebagai *actuarial present value* (APV) (Gerber, 1997).

1.11. Asuransi seumur hidup dan berjangka

Asuransi jiwa seumur hidup adalah asuransi yang santunannya akan dibayarkan sewaktu-waktu bila kematian terjadi (Sembiring, 1986). Jika santunan yang akan dibayarkan sebesar 1 pada saat kematian tertanggung maka nilai sekarang dari santunan tersebut adalah

$$Z = v^T, T \geq 0 \quad (2.11.1)$$

Untuk asuransi berjangka n tahun, santunan akan diberikan jika kematian tertanggung terjadi dalam jangka n tahun yang telah disepakati. Bila tidak maka tertanggung tidak akan mendapatkan apapun dari perusahaan asuransi (Sembiring, 1986). Nilai sekarang dari santunan sebesar 1 untuk asuransi ini adalah

$$Z = \begin{cases} v^T, & T < n \\ 0, & T \geq n \end{cases} \quad (2.11.2)$$

(Bowers dkk, 1997)

dengan T adalah *future life time* dari tertanggung, yaitu waktu yang berlalu sejak diterbitkannya polis sampai kematian tertanggung.

2.11. Endowmen murni

Endowmen murni menyediakan santunan pada akhir tahun ke- n jika dan hanya jika tertanggung hidup paling tidak n tahun setelah diterbitkannya polis. Jika santunan sebesar 1 maka nilai sekarangnya adalah

$$Z = \begin{cases} 0 & , T < n \\ v^n & , T \geq n \end{cases} \quad (2.11.3)$$

(Bowers, dkk., 1997)

2.11.3 Asuransi endowment

Asuransi endowment n tahun adalah gabungan dari asuransi berjangka n tahun dan endowment murni, sehingga meskipun sudah habis jangka waktu asuransi perusahaan asuransi tetap memberikan santunan pada akhir tahun ke- n (Sembiring, 1986). Jika santunan sebesar 1 unit maka nilai sekarangnya adalah

$$Z = \begin{cases} v^T & , T < n \\ v^n & , T \geq n \end{cases} \quad (2.11.4)$$

(Bowers, dkk., 1997)

2.12 Loss

Loss (L) bagi perusahaan asuransi merupakan selisih antara nilai sekarang pembayaran santunan dengan nilai sekarang pembayaran premi (Gerber, 1997).

1. $L > 0$ jika nilai sekarang santunan lebih besar dari nilai sekarang pembayaran premi,
2. $L = 0$ jika nilai sekarang santunan sama dengan nilai sekarang pembayaran premi,
3. $L < 0$ jika nilai sekarang santunan lebih kecil dari nilai sekarang pembayaran premi.

2.13 Resiko

Resiko adalah kemungkinan penyimpangan nilai yang sebenarnya dengan nilai yang diharapkan yang dapat melahirkan kerugian atau *loss*. Secara statistik, resiko dapat diartikan sebagai tingkat atau derajat penyimpangan suatu nilai di sekitar suatu posisi atau di sekitar titik rata-rata (Fitriadi, 2008). Dalam pembahasan skripsi ini, yang dimaksud resiko bagi perusahaan asuransi adalah tingkat penyimpangan atau perbedaan dari nilai harapan, yaitu premi bersih yang diterima perusahaan asuransi (APV), dengan nilai sekarang santunan yang harus dibayar perusahaan kepada

tertanggung yang dapat menyebabkan *loss* bagi perusahaan asuransi tersebut.

2.13.1 Ukuran resiko

Resiko mengacu pada variabilitas, yaitu suatu ukuran yang berkaitan dengan seberapa besar penyimpangan atau penyebaran suatu fungsi kepadatan terhadap nilai harapannya. Beberapa ukuran resiko yang sering digunakan adalah variansi, standar deviasi dan koefisien variasi (Kay dan Edwards, 2004).

Definisi 2.13.1

Untuk sebarang variabel acak T , variansi dari T adalah $\text{Var}(T)$ yang didefinisikan oleh

$$\text{Var}(T) = E[(T - E(T))^2] \quad (2.13.1)$$

dan standar deviasi dari T adalah σ yang didefinisikan oleh

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(T)} \quad (2.13.2)$$

(Bean, 2001)

dengan $E(T)$ adalah nilai harapan dari T .

Variansi dan standar deviasi memberikan informasi tentang seberapa besar resiko dari nilai harapannya. Semakin besar variansi dan standar deviasi suatu variabel acak maka semakin besar pula resikonya. Standar deviasi lebih mudah digunakan untuk mengukur resiko dibandingkan dengan variansi karena mempunyai satuan yang sama dengan nilai harapannya. Namun kedua ukuran tersebut kurang sesuai untuk membandingkan tingkat resiko relatif antara dua atau lebih distribusi probabilitas dengan nilai harapan yang berbeda (Oyolola, 2008).

Definisi 2.13.2

Koefisien variasi yang dinotasikan dengan CV merupakan suatu ukuran resiko yang merepresentasikan standar deviasi sebagai suatu rasio terhadap nilai harapannya, yaitu

$$CV = \frac{\sigma}{E(T)} \quad (2.13.3)$$

(Bowman, 2008)

Koefisien variasi digunakan untuk membandingkan tingkat resiko relatif dari dua atau lebih distribusi. Semakin besar koefisien variasi maka semakin besar pula resikonya (Oyolola, 2008).

2.14 Fungsi Tangga Satuan dan Fungsi Delta

Definisi 2.14.1

Fungsi tangga satuan adalah fungsi yang didefinisikan oleh

$$U(t - t_0) = \begin{cases} 1 & ; t \geq t_0 \\ 0 & ; t < t_0 \end{cases} \quad (2.14.1)$$

Definisi 2.14.2

Derivatif dari fungsi tangga satuan adalah fungsi delta, yaitu

$$\frac{dU(t - t_0)}{dt} = \Delta(t - t_0) \quad (2.14.2)$$

Definisi 2.14.3

Fungsi delta adalah fungsi yang mempunyai sifat

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(t - t_0) dt = 1 \quad (2.14.3)$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Delta(t - t_0) dt = f(t_0) \quad (2.14.4)$$

dengan $f(t)$ adalah sembarang fungsi kontinu.

(Phonphoem, 2004)

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Variabel Acak Nilai Sekarang Pembayaran Santunan

Nilai sekarang pembayaran santunan asuransi jiwa maupun anuitas hidup sebesar 1 menurut Bowers dkk (1997) dapat dinyatakan sebagai variabel acak Z , seperti yang telah disebutkan pada Subbab 2.9 dan 2.11. Melalui beberapa contoh berikut, dapat dikonstruksikan bentuk umum dari variabel acak yang menyatakan nilai sekarang pembayaran asuransi jiwa maupun anuitas hidup tersebut.

Contoh 3.1.1

Variabel acak yang menyatakan nilai sekarang pembayaran santunan untuk asuransi jiwa seumur hidup sebesar 1 menurut Bowers dkk (1997) adalah

$$Z = v^T, T \geq 0$$

Persamaan tersebut dapat juga dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut:

$$Z = \begin{cases} 0 & , T < 0 \\ v^T & , 0 \leq T < \infty \\ 0 & , T \geq \infty \end{cases}$$

Contoh 3.1.2

Variabel acak yang menyatakan nilai sekarang pembayaran santunan untuk asuransi endowment n tahun sebesar 1 adalah

$$Z = \begin{cases} v^T & , 0 \leq T < n \\ v^n & , T \geq n \end{cases}$$

Persamaan ini dapat dinyatakan dalam bentuk

$$Z = \begin{cases} 0 & , T < 0 \\ v^T & , 0 \leq T < n \\ v^n & , T \geq n \end{cases}$$

Contoh 3.1.3

Variabel acak yang menyatakan nilai sekarang pembayaran anuitas tertunda m tahun sebesar 1 pertahun adalah

$$Z = \begin{cases} 0 & , 0 \leq T < m \\ \frac{v^m - v^T}{\delta} & , T \geq m \end{cases}$$

Persamaan ini dapat juga dinyatakan dalam bentuk

$$Z = \begin{cases} 0 & , 0 \leq T < m \\ \frac{v^m}{\delta} - \frac{v^T}{\delta} & , m \leq T < \infty \\ 0 & , T \geq \infty \end{cases}$$

Dari ketiga contoh di atas, persamaan kedua pada setiap contoh tersebut mempunyai suatu pola yang dapat diformulasikan menjadi persamaan (3.1) berikut ini,

$$Z = \begin{cases} 0 & , 0 \leq T < m \\ a + bv^T & , m \leq T < m + n \\ c & , T \geq m + n \end{cases} \quad (3.1)$$

dengan T adalah *future lifetime* (x), a , b dan c adalah bilangan riil serta m dan n adalah bilangan bulat tidak negatif yang masing-masing nilainya diberikan pada tabel 3.1. Dengan proses yang sama, jenis asuransi jiwa dan anuitas hidup lainnya juga dapat dibentuk menjadi persamaan (3.1).

Tabel 3.1. Konstanta Nilai Sekarang Pembayaran Santunan Asuransi Jiwa dan Anuitas Hidup

Jenis Asuransi	a	b	c	m	n
Asuransi jiwa seumur hidup	0	1	0	0	∞
Asuransi jiwa berjangka n -tahun	0	1	0	0	n
Asuransi jiwa tertunda m -tahun	0	1	0	m	∞
Endowmen murni n tahun	0	0	v^n	0	n
Asuransi endowmen n tahun	0	1	v^n	0	n
Anuitas seumur hidup	$1/\delta$	$-1/\delta$	0	0	∞
Anuitas hidup berjangka n tahun	$1/\delta$	$-1/\delta$	$a_{\overline{n} }$	0	n
Anuitas hidup tertunda m tahun	v^m/δ	$-1/\delta$	0	m	∞

3.2 Nilai Sekarang Pembayaran Santunan Asuransi *General*

Definisi 3.2.1

Asuransi *general* didefinisikan sebagai kombinasi antara polis asuransi jiwa maupun anuitas hidup dengan nilai sekarang dari tiap polis tersebut didasarkan pada persamaan (3.1) dan Tabel 3.1 serta preminya dibayar berdasarkan kombinasi tersebut.

Definisi 3.2.2

Variabel acak yang menyatakan nilai sekarang pembayaran santunan asuransi *general* merupakan kombinasi linier dari persamaan (3.1) yang dapat ditulis sebagai berikut:

$$Z = a_i + b_i v^T, \quad m(i-1) \leq T < m(i) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.2.1)$$

dengan T *future lifetime* dari (x) , a_i dan b_i adalah bilangan riil serta $m(i)$ adalah bilangan bulat tidak negatif dengan $i=1, 2, \dots, n$ yang memenuhi

$$0 \leq m(0) < m(1) < \dots < m(n) \leq \infty \quad (3.2.2)$$

Representasi dari variabel acak Z pada persamaan (3.2.1) yang menyatakan nilai sekarang pembayaran santunan asuransi *general* antara lain diberikan melalui beberapa contoh berikut ini.

Contoh 3.2.1

Suatu polis asuransi jiwa terdiri dari asuransi jiwa berjangka 5 tahun dan anuitas hidup tertunda 5 tahun dengan nilai santunan masing-masing sebesar 1. Nilai sekarang pembayaran santunan polis asuransi berdasarkan Definisi 3.2.2 adalah sebagai berikut:

$$Z = \begin{cases} v^T & 0 \leq T < 5 \\ \frac{v^5 - v^T}{\delta} & T \geq 5 \end{cases} \quad (3.2.3)$$

dengan $i=1, 2$; $m(0)=0, m(1)=5$ dan $m(2) = \infty$

Persamaan (3.2.3) merupakan kombinasi linier dari nilai sekarang pembayaran santunan asuransi jiwa berjangka 5 tahun sebesar 1, yang berdasarkan persamaan (3.1) dan Tabel 3.1 berbentuk sebagai berikut:

$$Z = \begin{cases} v^T & 0 \leq T < 5 \\ 0 & T \geq 5 \end{cases}$$

dan nilai sekarang dari anuitas hidup tertunda 5 tahun sebesar 1, yang berdasarkan persamaan (3.1) dan Tabel 3.1 berbentuk sebagai berikut:

$$Z = \begin{cases} 0 & 0 \leq T < 5 \\ \frac{v^5 - v^T}{\delta} & T \geq 5 \end{cases}$$

Contoh 3.2.2

Nilai *loss* (L) asuransi endowment n tahun merupakan nilai sekarang pembayaran santunan untuk asuransi endowment n tahun dikurangi dengan nilai sekarang pembayaran preminya. Pembayaran premi asuransi endowment n tahun berupa anuitas hidup berjangka n tahun (Bowers, dkk., 1997), sehingga nilai *loss* untuk asuransi endowment n tahun adalah sebagai berikut:

$$L = \begin{cases} v^T - P\bar{a}_{\overline{T}|} & 0 \leq T < n \\ v^n - P\bar{a}_{\overline{n}|} & T \geq n \end{cases} \quad (3.2.4)$$

dengan P adalah besarnya premi.

Persamaan (3.2.4) dapat ditulis menjadi

$$L = \begin{cases} v^T - P \frac{1 - v^T}{\delta} & , 0 \leq T < n \\ v^n - P \frac{1 - v^n}{\delta} & , T \geq n \end{cases} = \begin{cases} \frac{-P}{\delta} + \left(1 + \frac{P}{\delta}\right) v^T & , 0 \leq T < n \\ \frac{-P}{\delta} + \left(1 + \frac{P}{\delta}\right) v^n & , T \geq n \end{cases}$$

Persamaan (3.2.4) mempunyai pola yang sama dengan persamaan

(3.2.1) pada Definisi 3.2.2, yaitu dengan $i=1,2$; $a_1 = \frac{-P}{\delta}$, $b_1 = \left(1 + \frac{P}{\delta}\right)$,

$a_2 = \frac{-P}{\delta} + \left(1 + \frac{P}{\delta}\right) v^n$, $b_2 = 0$, $m(0)=0, m(1)=n$ dan $m(2) = \infty$

Contoh 3.2.2 menunjukkan bahwa variabel acak L yang menyatakan nilai *loss* asuransi jiwa juga dapat dinyatakan sebagai variabel acak yang menyatakan nilai sekarang pembayaran santunan asuransi *general*.

Contoh 3.2.3

Variabel acak Z pada persamaan (3.1) adalah bentuk khusus dari variabel acak Z yang didefinisikan pada persamaan (3.2.1) yaitu dengan $i=1,2,3$; $a_1=0$, $b_1=0$, $a_2=a$, $b_2=b$, $a_3=c$, $b_3=0$; $m(0)=0$, $m(1)=m$, $m(2)=m+n$, $m(3) = \infty$. Hal ini menunjukkan bahwa variabel acak Z yang didefinisikan pada persamaan (3.2.1) tidak hanya berlaku untuk menyatakan nilai sekarang pembayaran santunan asuransi *general* tetapi juga untuk satu jenis polis asuransi jiwa maupun anuitas hidup.

3.3 Distribusi Probabilitas Nilai Sekarang Pembayaran Santunan

Variabel acak yang menyatakan nilai sekarang pembayaran santunan merupakan variabel acak kontinu karena merupakan fungsi dari variabel acak kontinu T . Oleh karena itu nilai sekarang pembayaran santunan juga memiliki fungsi distribusi dan fungsi probabilitas kontinu. Melalui dua teorema berikut, ditunjukkan fungsi distribusi dan fungsi kepadatan probabilitas dari nilai santunan sekarang asuransi *general*, dan dapat dilihat bahwa kedua fungsi tersebut adalah suatu fungsi yang memiliki bentuk khusus.

Teorema 3.3.1

Fungsi distribusi dari variabel acak Z pada Definisi 3.2.2 diberikan oleh

$$F(z) = \sum_{i=1}^n F_i(z) \quad (3.3.1)$$

dengan

$$F_i(z) = \begin{cases} U(z - a_i) q_x - m(i-1) q_x & , b_i = 0 \\ m(i) q_x - \max \left[m(i-1), -\frac{1}{\delta} \ln \left(\frac{z - a_i}{b_i} \right) \right] q_x & , b_i > 0, z > a_i \\ 0 & , b_i > 0, z \leq a_i \\ m(i) q_x - m(i-1) q_x & , b_i < 0, z \geq a_i \\ \min \left[m(i), -\frac{1}{\delta} \ln \left(\frac{z - a_i}{b_i} \right) \right] q_x - m(i-1) q_x & , b_i < 0, z < a_i \end{cases} \quad (3.3.2)$$

untuk $i=1,2,\dots,n$.

Bukti:

Menurut Definisi 2.3.1, fungsi distribusi variabel acak Z adalah

$$F(z) = \Pr(Z \leq z)$$

Karena $Z = a_i + b_i v^T$ maka $F(z) = \Pr(a_i + b_i v^T \leq z)$.

Karena $m(i-1) \leq T < m(i)$ untuk $i=1,2,\dots,n$ maka $\Pr(a_i + b_i v^T \leq z)$ dapat dinyatakan berdasarkan kaidah total probabilitas, yaitu

$$F(z) = \sum_{i=1}^n \Pr(a_i + b_i v^T \leq z \mid m(i-1) \leq T < m(i)) \Pr(m(i-1) \leq T < m(i))$$

Menurut definisi probabilitas bersyarat

$$F(z) = \sum_{i=1}^n \Pr(a_i + b_i v^T \leq z, m(i-1) \leq T < m(i)) \quad (3.3.3)$$

Selanjutnya ditentukan $F(z)$ pada persamaan (3.3.3) untuk lima kasus, yaitu $b_i = 0$; $b_i > 0, z > a_i$; $b_i > 0, z \leq a_i$; $b_i < 0, z \geq a_i$ dan $b_i < 0, z < a_i$.

i). Untuk $b_i = 0$, persamaan (3.3.3) menjadi

$$F(z) = \sum_{i=1}^n \Pr(a_i \leq z, m(i-1) \leq T < m(i))$$

$a_i \leq z$ dan $m(i-1) \leq T < m(i)$ adalah dua kejadian saling bebas, maka dari persamaan (2.1.5) berlaku

$$F(z) = \sum_{i=1}^n \Pr(a_i \leq z) \Pr(m(i-1) \leq T < m(i)).$$

Karena $\Pr(a_i \leq z) = \begin{cases} 1 & z \geq a_i \\ 0 & z < a_i \end{cases}$ maka menurut Definisi 2.14.1,

$$F(z) = \sum_{i=1}^n U(z - a_i) \Pr(m(i-1) \leq T < m(i)).$$

Karena T adalah variabel acak kontinu, menurut Teorema 2.3.5

$$F(z) = \sum_{i=1}^n U(z - a_i) \Pr(m(i-1) < T \leq m(i)).$$

Menurut Teorema 2.3.2

$$F(z) = \sum_{i=1}^n U(z - a_i) (\Pr(T \leq m(i)) - \Pr(T \leq m(i-1))).$$

Menurut Definisi 2.3.1

$$F(z) = \sum_{i=1}^n U(z - a_i) (F_T(m(i)) - F_T(m(i-1)))$$

Menurut persamaan (2.6.2)

$$F(z) = \sum_{i=1}^n U(z - a_i) ({}_{m(i)}q_x - {}_{m(i-1)}q_x) \quad (3.3.4)$$

ii). Untuk $b_i > 0, z > a_i$, persamaan (3.3.3) dapat ditulis menjadi

$$F(z) = \sum_{i=1}^n \Pr \left(v^T \leq \frac{z - a_i}{b_i}, m(i-1) \leq T < m(i) \right)$$

Karena $v = e^{-\delta}$, maka

$$F(z) = \sum_{i=1}^n \Pr \left(e^{-\delta T} \leq \frac{z - a_i}{b_i}, m(i-1) \leq T < m(i) \right)$$

$$F(z) = \sum_{i=1}^n \Pr \left(T \geq -\frac{1}{\delta} \ln \left(\frac{z - a_i}{b_i} \right), m(i-1) \leq T < m(i) \right)$$

$$F(z) = \sum_{i=1}^n \Pr \left[\max \left[m(i-1), -\frac{1}{\delta} \ln \left(\frac{z - a_i}{b_i} \right) \right] \leq T < m(i) \right]$$

Karena T variabel acak kontinu maka menurut Teorema 2.3.5

$$F(z) = \sum_{i=1}^n \Pr \left[\max \left[m(i-1), -\frac{1}{\delta} \ln \left(\frac{z - a_i}{b_i} \right) \right] < T \leq m(i) \right]$$

Menurut Teorema 2.3.2 serta Definisi 2.3.1

$$F(z) = \sum_{i=1}^n F_T(m(i)) - F_T \left(\max \left[m(i-1), -\frac{1}{\delta} \ln \left(\frac{z - a_i}{b_i} \right) \right] \right)$$

$$F(z) = \sum_{i=1}^n {}_{m(i)}q_x - \max \left[m(i-1), -\frac{1}{\delta} \ln \left(\frac{z - a_i}{b_i} \right) \right] q_x \quad (3.3.5)$$

iii). Untuk $b_i > 0, z \leq a_i$ maka persamaan (3.3.3) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{i=1}^n \Pr(b_i v^T \leq z - a_i \leq 0, m(i-1) \leq T < m(i)) \\ &= \sum_{i=1}^n \Pr(b_i v^T \leq 0, m(i-1) \leq T < m(i)) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^n \Pr(v^T \leq 0, m(i-1) \leq T < m(i)).$$

Karena $0 < v = (1+i)^{-1} < 1$ maka $v^T \leq 0$ adalah kejadian yang tidak mungkin atau $v^T \leq 0 = \emptyset$, sehingga

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{i=1}^n \Pr(\emptyset, m(i-1) \leq T < m(i)) \\ F(z) &= \sum_{i=1}^n \Pr(\emptyset) \\ F(z) &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

iv). Untuk $b_i < 0, z \geq a_i$ maka persamaan (3.3.3) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{i=1}^n \Pr(b_i v^T \leq z - a_i, m(i-1) \leq T < m(i)) \\ &= \sum_{i=1}^n \Pr\left(v^T \geq \frac{z - a_i}{b_i}, m(i-1) \leq T < m(i)\right). \end{aligned}$$

Karena $\frac{z - a_i}{b_i} \leq 0$ dan v^T tidak pernah bernilai negatif ataupun lebih dari 1 maka $\left(v^T \geq \frac{z - a_i}{b_i}\right) \equiv (0 < v^T \leq 1)$, sehingga

$$F(z) = \sum_{i=1}^n \Pr(0 < v^T \leq 1, m(i-1) \leq T < m(i)).$$

Karena $0 < v^T \leq 1$ adalah kejadian pasti maka

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{i=1}^n \Pr(m(i-1) \leq T < m(i)) \\ F(z) &= \sum_{i=1}^n q_{m(i)-m(i-1)} \quad (3.3.7) \end{aligned}$$

v). Untuk $b_i < 0, z < a_i$ maka

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{i=1}^n \Pr(a_i + b_i v^T \leq z, m(i-1) \leq T < m(i)) \\ F(z) &= \sum_{i=1}^n \Pr\left(v^T \geq \frac{z - a_i}{b_i}, m(i-1) \leq T < m(i)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(z) &= \sum_{i=1}^n \Pr \left(e^{-\delta T} \geq \frac{z - a_i}{b_i}, m(i-1) \leq T < m(i) \right) \\
F(z) &= \sum_{i=1}^n \Pr \left(T \leq -\frac{1}{\delta} \ln \left(\frac{z - a_i}{b_i} \right), m(i-1) \leq T < m(i) \right) \\
F(z) &= \sum_{i=1}^n \Pr \left(m(i-1) \leq T < \min \left[m(i), -\frac{1}{\delta} \ln \left(\frac{z - a_i}{b_i} \right) \right] \right) \\
F(z) &= \sum_{i=1}^n \min \left(m(i), -\frac{1}{\delta} \ln \frac{z - a_i}{b_i} \right) q_x - m(i-1) q_x \quad (3.3.8)
\end{aligned}$$

Dengan memisalkan persamaan di sebelah kanan tanda $\sum_{i=1}^n$ pada persamaan (3.3.4), (3.3.5), (3.3.6), (3.3.7) dan (3.3.8) dengan $F_i(z)$, terbukti Teorema 3.3.1.

Teorema 3.3.2

Fungsi kepadatan probabilitas variabel acak Z pada Definisi 3.2.2 diberikan oleh

$$f(z) = \sum_{i=1}^n f_i(z) \quad (3.3.9)$$

dengan

$$f_i(z) = \begin{cases} \Delta(z - a_i) \left(m(i) q_x - m(i-1) q_x \right), & b_i = 0 \\ \frac{1}{\delta(z - a_i)} f_T(r(i)), & b_i > 0, a_i + b_i v^{m(i)} < z < a_i + b_i v^{m(i-1)} \\ \frac{1}{\delta(a_i - z)} f_T(r(i)), & b_i < 0, a_i + b_i v^{m(i)} < z < a_i + b_i v^{m(i-1)} \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

untuk $i=1,2,\dots,n$ dan $r(i) = -\frac{1}{\delta} \ln \frac{z - a_i}{b_i}$ dengan $\frac{z - a_i}{b_i} > 0$.

Bukti:

Fungsi kepadatan probabilitas variabel acak Z adalah

$$f(z) = \frac{dF(z)}{dz}$$

Sebelumnya akan ditentukan nilai $Z = z$ yang didefinisikan untuk $f(z)$.

Karena $Z = a_i + b_i v^T$ dengan $m(i-1) \leq T < m(i)$ maka nilai z yang mungkin agar $f(z)$ terdefinisi adalah

$$a_i + b_i v^{m(i)} < z < a_i + b_i v^{m(i-1)} \quad \text{untuk } b_i > 0 \quad (3.3.10)$$

$$a_i + b_i v^{m(i-1)} < z < a_i + b_i v^{m(i)} \quad \text{untuk } b_i < 0 \quad (3.3.11)$$

Selanjutnya ditentukan $f(z)$ untuk z yang telah didefinisikan sebelumnya, dimana $f(z)$ dapat diperoleh langsung dari turunan $F(z)$ yang diberikan pada Teorema 3.3.1.

i). Untuk $b_i = 0$.

Menurut Teorema 3.2.1

$$F(z) = \sum_{i=1}^n U(z - a_i) \left({}_{m(i)}q_x - {}_{m(i-1)}q_x \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{dF(z)}{dz} &= \frac{d}{dz} \sum_{i=1}^n U(z - a_i) \left({}_{m(i)}q_x - {}_{m(i-1)}q_x \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{d}{dz} U(z - a_i) \left({}_{m(i)}q_x - {}_{m(i-1)}q_x \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left({}_{m(i)}q_x - {}_{m(i-1)}q_x \right) \frac{dU(z - a_i)}{dz}. \end{aligned}$$

Menurut Definisi 2.14.2

$$\frac{dF(z)}{dz} = \sum_{i=1}^n \left({}_{m(i)}q_x - {}_{m(i-1)}q_x \right) \Delta(z - a_i)$$

$$\text{Jadi } f(z) = \sum_{i=1}^n \left({}_{m(i)}q_x - {}_{m(i-1)}q_x \right) \Delta(z - a_i) \quad (3.3.12)$$

ii). Untuk $b_i > 0$, $z > a_i$.

Menurut Teorema 3.3.1

$$F(z) = \sum_{i=1}^n {}_{m(i)}q_x - \max \left[m(i-1), -\frac{1}{\delta} \ln \left(\frac{z - a_i}{b_i} \right) \right] q_x$$

$$\frac{dF(z)}{dz} = \frac{d}{dz} \left(\sum_{i=1}^n {}_{m(i)}q_x - \max \left[m(i-1), -\frac{1}{\delta} \ln \left(\frac{z - a_i}{b_i} \right) \right] q_x \right)$$

$$= \frac{d}{dz} \left(\sum_{i=1}^n F_T(m(i)) - F_T \left(\max \left[m(i-1), -\frac{1}{\delta} \ln \frac{z-a_i}{b_i} \right] \right) \right).$$

Tetapi dari persamaan (3.3.10) diperoleh $m(i-1) < -\frac{1}{\delta} \ln \frac{z-a_i}{b_i} < m(i)$

$$\text{sehingga} \max \left[m(i-1), -\frac{1}{\delta} \ln \left(\frac{z-a_i}{b_i} \right) \right] = -\frac{1}{\delta} \ln \left(\frac{z-a_i}{b_i} \right).$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned} \frac{F(z)}{dz} &= \frac{d}{dz} \left(\sum_{i=1}^n F_T(m(i)) - F_T \left(-\frac{1}{\delta} \ln \frac{z-a_i}{b_i} \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\delta (z-a_i)} f_T \left(-\frac{1}{\delta} \ln \frac{z-a_i}{b_i} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Jadi } f(z) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\delta (z-a_i)} f_T \left(-\frac{1}{\delta} \ln \frac{z-a_i}{b_i} \right) \quad (3.3.12)$$

iii). Untuk $b_i < 0, z < a_i$.

Menurut Teorema 3.3.1

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{i=1}^n \min \left(m(i), -\frac{1}{\delta} \ln \frac{z-a_i}{b_i} \right) q_x^{-m(i-1)} q_x \\ \frac{dF(z)}{dz} &= \frac{d \sum_{i=1}^n \min \left[m(i), -\frac{1}{\delta} \ln \left(\frac{z-a_i}{b_i} \right) \right] q_x^{-m(i-1)} q_x}{dz} \\ &= \frac{d \sum_{i=1}^n F_T \left(\min \left[m(i), -\frac{1}{\delta} \ln \left(\frac{z-a_i}{b_i} \right) \right] \right) - F_T(m(i-1))}{dz}. \end{aligned}$$

Tetapi dari persamaan (3.3.11) diperoleh $m(i-1) < -\frac{1}{\delta} \ln \frac{z-a_i}{b_i} < m(i)$

$$\text{sehingga} \min \left[m(i), -\frac{1}{\delta} \ln \left(\frac{z-a_i}{b_i} \right) \right] = -\frac{1}{\delta} \ln \left(\frac{z-a_i}{b_i} \right).$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned} \frac{F(z)}{dz} &= \frac{d \sum_{i=1}^n F_T \left(-\frac{1}{\delta} \ln \left(\frac{z - a_i}{b_i} \right) \right) - F_T(m(i))}{dz} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{f_T \left(-\frac{1}{\delta} \ln \frac{z - a_i}{b_i} \right)}{-\delta (z - a_i)} - 0 \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\delta (a_i - z)} f_T \left(-\frac{1}{\delta} \ln \frac{z - a_i}{b_i} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Jadi } f(z) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\delta (a_i - z)} f_T \left(-\frac{1}{\delta} \ln \frac{z - a_i}{b_i} \right). \quad (3.3.13)$$

iv). Untuk $b_i < 0, z \geq a_i$ dan $b_i > 0, z \leq a_i$ diperoleh

$$f(z) = 0 \quad (3.3.14)$$

Hal ini disebabkan $F(z)$ pada Teorema 3.3.1 untuk kasus ini tidak memuat variabel z .

Dari kasus i) sampai iv) diperoleh bahwa kemungkinan $f(z) \neq 0$ terjadi jika $b_i = 0$ dan $b_i > 0, z > a_i$ serta $b < 0, z < a_i$ atau dengan kata lain, kemungkinan $f(z) \neq 0$ jika $b_i = 0$ atau $\frac{z - a_i}{b_i} > 0$.

Dengan memisalkan persamaan di sebelah kanan tanda $\sum_{i=1}^n$ pada persamaan (3.3.12), (3.3.13) dan (3.3.14) dengan $f_i(z)$, terbukti Teorema 3.3.2

Korolari 3.3.3

Fungsi distribusi variabel acak Z yang didefinisikan pada persamaan (3.1) diberikan oleh

$$F(z) = {}_m q_x U(z) + G(z) + {}_{m+n} p_x U(z - c)$$

dengan $G(z)$ didefinisikan oleh

$$G(z) = \begin{cases} m+n q_x - \max(m,r) q_x & , b > 0, z > a \\ 0 & , b > 0, z \leq a \\ m+n q_x - m q_x & , b < 0, z \geq a \\ \min(m+n,r) q_x - m q_x & , b < 0, z < a \end{cases}$$

dan

$$r = -\frac{1}{\delta} \ln\left(\frac{z-a}{b}\right) \text{ dengan } \frac{z-a}{b} > 0.$$

Fungsi kepadatan probabilitas dari variabel acak Z tersebut adalah

$$f(z) = m q_x \Delta(z) + g(z) + m+n p_x \Delta(z-c)$$

dengan

$$g(z) = \begin{cases} \Delta(z-a)(m+n q_x - m q_x) & , b = 0 \\ f_T(r)/\delta(z-a) & , b > 0, a + bv^{m+n} < z < a + bv^m \\ f_T(r)/\delta(a-z) & , b < 0, a + bv^m < z < a + bv^{m+n} \\ 0 & , \text{lainnya} \end{cases}$$

Bukti :

Variabel acak Z yang didefinisikan pada persamaan (3.1.1) adalah

$$Z = \begin{cases} 0 & 0 \leq T < m \\ a + bv^T & m \leq T < m+n \\ c & T \geq m+n \end{cases}$$

Menurut Contoh 3.2.3, variabel acak pada persamaan (3.1.1) adalah bentuk khusus dari variabel acak Z yang didefinisikan pada persamaan (3.2.1), yaitu dengan $i=1,2,3$; $a_1=0$, $b_1=0$, $a_2=a$, $b_2=b$, $a_3=c$, $b_3=0$; $m(0)=0$, $m(1)=m$, $m(2)=m+n$, $m(3) = \infty$. Jadi menurut Teorema 3.3.1, fungsi distribusi Z adalah

$$F(z) = \sum_{i=1}^3 F_i(z)$$

dengan

$$F_1(z) = U(z)(m q_x - 0 q_x) = U(z) m q_x$$

$$F_2(z) = \begin{cases} m+n q_x - \max\left(m, -\frac{1}{\delta} \ln\left(\frac{z-a}{b}\right)\right) q_x & , b > 0, z > a \\ 0 & , b > 0, z \leq a \\ m+n q_x - m q_x & , b < 0, z \geq a \\ \min\left(m+n, -\frac{1}{\delta} \ln\left(\frac{z-a}{b}\right)\right) q_x - m q_x & , b < 0, z < a \end{cases}$$

$$F_3(z) = U(z-c)(\infty q_x - m+n q_x) = U(z-c)(1 - m+n q_x).$$

Menurut persamaan (2.6.3),

$$F_3(z) = U(z-c)_{m+n} p_x.$$

Dengan memisalkan $F_2(z) = G(z)$ diperoleh

$$\begin{aligned} F(z) &= F_1(z) + F_2(z) + F_3(z) \\ &= m q_x U(z) + G(z) + m+n p_x U(z-c). \end{aligned}$$

Menurut Teorema 3.3.2, fungsi kepadatan probabilitas Z adalah

$$f(z) = \sum_{i=1}^3 f_i(z)$$

dengan

$$f_1(z) = \Delta(z)(m q_x - 0 q_x) = \Delta(z)(m q_x)$$

$$f_2(z) = \begin{cases} \Delta(z-a)(m+n q_x - m q_x) & , b = 0 \\ f_T\left(-\frac{1}{\delta} \ln\left(\frac{z-a}{b}\right)\right) / \delta (z-a) & , b > 0, a + b v^{m+n} < z < a + b v^m \\ f_T\left(-\frac{1}{\delta} \ln\left(\frac{z-a}{b}\right)\right) / \delta (a-z) & , b < 0, a + b v^m < z < a + b v^{m+n} \\ 0 & , \text{lainnya} \end{cases}$$

$$f_3(z) = \Delta(z-c)(\infty q_x - m+n q_x) = \Delta(z-c)(1 - m+n q_x).$$

Menurut persamaan (2.6.3)

$$f_3(z) = \Delta(z-c)_{m+n} p_x.$$

Dengan memisalkan $f_2(z) = g(z)$ diperoleh

$$f(z) = m q_x \Delta(z) + g(z) + m+n p_x \Delta(z-c).$$

3.4 Beberapa Contoh Permasalahan

3.4.1 Menentukan premi bersih dengan probabilitas tertentu

Misal P adalah premi tunggal bersih yang dibayar saat ini oleh tertanggung untuk polis asuransi jiwa dengan santunan sebesar 1. Premi tersebut cukup digunakan oleh perusahaan untuk membayar santunan bagi tertanggung jika $Pv^{-T} \geq 1$ atau $v^T \leq P$. Oleh karena itu perusahaan asuransi tentunya akan mempertimbangkan nilai P sedemikian sehingga $\Pr(v^T \leq P) = \Pr(Z \leq P)$ bernilai besar, yaitu kejadian $v^T \leq P$ mempunyai probabilitas yang besar. Dengan demikian P dapat ditentukan jika distribusi variabel acak Z diketahui (Bean, 2001).

Contoh 3.4.1

Misalkan seseorang berusia 30 tahun membeli polis asuransi jiwa dengan santunan yang dibayar pada saat kematiannya, yaitu sebagai berikut:

Usia (x)	Santunan Kematian
$30 \leq x < 40$	Rp. 10.000.000
$40 \leq x < 50$	Rp. 50.000.000
$x \geq 50$	Rp. 100.000.000

diasumsikan bahwa percepatan pembungaan δ sebesar 5% dan *future lifetime* (x) mempunyai fungsi kepadatan probabilitas sebagai berikut:

$$f_T(t) = 0,1e^{-0,1t}, t \geq 0.$$

Dari polis tersebut akan ditentukan besarnya probabilitas perusahaan mampu membayar kewajibannya pada saat terjadi kematian, jika premi yang diterimanya merupakan premi tunggal bersih.

Penyelesaian Contoh 3.4.1

Premi tunggal bersih adalah nilai harapan dari nilai sekarang santunan asuransi jiwa $E(Z)$, sehingga untuk menentukan nilai harapan tersebut akan ditentukan dahulu fungsi kepadatan probabilitas dari Z .

Variabel acak yang menyatakan nilai sekarang santunan asuransi di atas menurut Definisi 3.2.2 adalah

$$Z = \begin{cases} 10^7 v^T & 0 \leq T < 10 \\ 50^7 v^T & 10 \leq T < 20 \\ 10^8 v^T & T \geq 20 \end{cases}$$

yaitu dengan $i=1,2,3$; $a_1=a_2=a_3=0$, $b_1=10^7$, $b_2=50^7$, $b_3=10^8$, dan $m(0)=0$, $m(1)=10$, $m(2)=20$, $m(3) = \infty$.

Menurut Teorema 3.3.2 fungsi kepadatan probabilitas dari Z adalah sebagai berikut:

$$f(z) = \sum_{i=1}^3 f_i(z)$$

dengan

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{1}{0,05z} f_T \left(-\frac{1}{0,05} \ln \frac{z}{10^7} \right) \\ &= \frac{0,1e^{-0,1 \cdot \frac{1}{0,05} \ln \frac{z}{10^7}}}{0,05z} \\ &= 2z \left(\frac{1}{10^7} \right)^2, 10^7 v^{10} < z < 10^7 \\ f_2(z) &= \frac{1}{0,05z} f_T \left(-\frac{1}{0,05} \ln \frac{z}{5 \cdot 10^7} \right) \\ &= 2z \left(\frac{1}{5 \cdot 10^7} \right)^2, 5 \cdot 10^7 v^{20} < z < 5 \cdot 10^7 v^{10} \\ f_3(z) &= \frac{1}{0,05z} f_T \left(-\frac{1}{0,05} \ln \frac{z}{10^8} \right) \\ &= 2z \left(\frac{1}{10^8} \right)^2, 0 < z < 10^7 v^{20}. \end{aligned}$$

Jadi

$$f(z) = \begin{cases} 2z\left(\frac{1}{10^8}\right)^2 & , 0 < z < 10^7 v^{10} \\ 2z\left(\frac{1}{10^7}\right)^2 + 2z\left(\frac{1}{10^8}\right)^2 & , 10^7 v^{10} < z < 10^7 \\ 2z\left(\frac{1}{10^8}\right)^2 & , 10^7 < z < 5.10^7 v^{20} \\ 2z\left(\frac{1}{5.10^7}\right)^2 + 2z\left(\frac{1}{10^8}\right)^2 & , 5.10^7 v^{20} < z < 5.10^7 v^{10} \\ 2z\left(\frac{1}{10^8}\right)^2 & , 5.10^7 v^{10} < z < 10^8 v^{20} \\ 0 & , \text{lainnya} \end{cases}$$

Premi tunggal bersihnya adalah nilai harapan dari Z yaitu

$$\begin{aligned} E(Z) &= \int_{-\infty}^{\infty} zf(z)dz \\ &= \int_{10^7 v^{10}}^{10^7} 2z^2\left(\frac{1}{10^7}\right)^2 dz + \int_{50^7 v^{20}}^{50^7 v^{10}} 2z^2\left(\frac{1}{5.10^7}\right)^2 dz + \int_0^{10^8 v^{21}} 2z^2\left(\frac{1}{10^8}\right)^2 dz \\ &= 14.276.373,18 \end{aligned}$$

Jadi besarnya premi tunggal bersih adalah Rp14.276.373,18

Selanjutnya adalah menentukan $\Pr(Z \leq P)$ dimana $P=E(z)$

$$\Pr(Z \leq P) = \Pr(Z \leq E(z))$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{E(Z)} f(z)dz \\ &= \int_0^{14.276.373,18} f(z)dz \end{aligned}$$

Karena nilai 14.276.373,18 berada pada $10^7 < z < 5.10^7 v^{20}$ maka batas integrasi di atas, yaitu 0 sampai dengan 14.276.373,18 akan berada pada $0 < z < 5.10^7 v^{20}$, sehingga

$$\begin{aligned} \int_0^{14.276,373,18} f(z) dz &= \\ \int_0^{10^7 v^{10}} 2z \left(\frac{1}{10^8} \right)^2 dz &+ \int_{10^7 v^{10}}^{10^7} 2z \left(\frac{1}{10^7} \right)^2 dz + 2z \left(\frac{1}{10^8} \right)^2 dz + \int_{1^7 0}^{14.276,373,18} 2z \left(\frac{1}{10^8} \right)^2 dz \\ &= 0,6525. \end{aligned}$$

Jadi, jika premi yang diterima perusahaan adalah premi tunggal bersih maka perusahaan dapat membayar santunan pada saat terjadi kematian dengan probabilitas sebesar 65,25%.

Contoh 3.4.2

Suatu polis asuransi endomen 20 tahun mempunyai nilai santunan sebesar Rp.10.000.000 bagi orang berusia x tahun dengan premi tahunan sebesar P . Diasumsikan percepatan pembungaan δ sebesar 6% dan *future lifetime* (x) mempunyai fungsi kepadatan probabilitas

$$f_T(t) = \frac{1}{45}, \quad 0 < t < 45$$

Akan ditentukan nilai P terkecil agar jika terjadi *loss* positif ($L > 0$) maka probabilitasnya tidak lebih dari 25%.

Penyelesaian Contoh 3.4.2

Untuk menentukan P terkecil sedemikian sehingga probabilitas $L > 0$ tidak lebih dari 25%, maka akan dipilih P sedemikian sehingga memenuhi

$$\Pr(L > 0) \leq 0,25$$

dengan L adalah nilai *loss* asuransi endomen 20 tahun.

$$\Pr(L > 0) = 1 - \Pr(L \leq 0)$$

Menurut Definisi 2.3.1, $1 - \Pr(L \leq 0) = 1 - F_L(0)$ sehingga untuk menentukan $\Pr(L > 0) = 1 - F_L(0) \leq 0,25$ harus ditentukan terlebih dahulu fungsi distribusi dari L untuk $l = 0$.

Dari Contoh 3.2.2, diketahui bahwa nilai *loss* untuk asuransi endomen 20 tahun dengan santunan sebesar Rp10.000.000 berbentuk sebagai berikut:

$$L = \begin{cases} 10^7 v^T - P \bar{a}_{\overline{T}|} & T < 20 \\ 10^7 v^{20} - P \bar{a}_{\overline{20}|} & T \geq 20 \end{cases} \quad (3.4.1)$$

atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$L = \begin{cases} \frac{-P}{0,06} + \left(10^7 + \frac{P}{0,06}\right) v^T, & T < 20 \\ \frac{-P}{0,06} + \left(10^7 + \frac{P}{0,06}\right) v^n, & T \geq 20 \end{cases} \quad (3.4.2)$$

Persamaan (3.4.2) mempunyai pola yang sama dengan persamaan (3.3.1) yaitu dengan $i=1,2$; $m(0)=0$, $m(1)=20$, $m(2) = \infty$ dan $a_1 = \frac{-P}{0,06}$, $b_1 = \left(10^7 + \frac{P}{0,06}\right)$, $a_2 = \frac{-P}{0,06} + \left(10^7 + \frac{P}{0,06}\right) v^{20}$, $b_2 = 0$.

sehingga untuk menentukan fungsi distribusi dari variabel acak L dapat menggunakan Teorema 3.2.1, yaitu

$$F_L(l) = \sum_{i=1}^2 F_{L_i}(l)$$

dengan $i=1$ dan $(l=0) > (a_1 = \frac{-P}{0,06})$ diperoleh

$$\begin{aligned} F_{L_1}(l) &= {}_{20}q_x - \left(-\frac{1}{006} \ln \left[\frac{l + \frac{P}{0,06}}{10^7 + \frac{P}{0,06}} \right] \right) q_x \\ &= {}_{20}q_x - \left(-\frac{1}{006} \ln \left[\frac{0,06l + P}{6 \cdot 10^5 + P} \right] \right) q_x \\ &= F_T(20) - F_T \left(-\frac{1}{006} \ln \left[\frac{0,06l + P}{6 \cdot 10^5 + P} \right] \right). \end{aligned}$$

Karena fungsi distribusi dari T adalah $F_T(t) = \frac{t}{45}$ maka

$$F_{L_1}(l) = \frac{20}{45} - \left(\frac{-1}{0,06} \right) \left(\frac{\ln[(0,06l + P)/(6 \cdot 10^5 + P)]}{45} \right), \quad l > -\frac{P}{0,06}$$

dan

$$F_{L_1}(0) = \frac{20}{45} + \frac{1}{006} \frac{\ln[(P)/(6 \cdot 10^5 + P)]}{45}$$

untuk $i=2$ diperoleh

$$F_{L_2}(l) = U \left(l - \left[\frac{-P}{0,06} + \left(10^7 + \frac{P}{0,06}\right) v^{20} \right] \right) ({}_{\infty}q_x - {}_{20}q_x)$$

$$= U \left(l - \left[\frac{-P}{0,06} + \left(10^7 + \frac{P}{0,06} \right) v^{20} \right] \right) \left(1 - \frac{20}{45} \right).$$

Menurut definisi fungsi satuan tangga, $F_{L_2}(0) = 1 - \frac{20}{45}$

Karena fungsi distribusi telah diperoleh maka besarnya premi, P , terkecil agar $\Pr(L > 0) \leq 0,25$ dapat ditentukan, yaitu

$$\begin{aligned} \Pr(L > 0) &= 1 - F_L(0) \leq 0,25 \\ &= 1 - (F_{L_1}(0) + F_{L_2}(0)) \leq 0,25 \\ &= 1 - \left(\frac{20}{45} + \frac{1}{006} \frac{\ln[(P)/(6.10^5 + P)]}{45} + \left(1 - \frac{20}{45} \right) \right) \leq 0,25 \\ &= \frac{1}{006} \frac{\ln[(P)/(6.10^5 + P)]}{45} \geq -0,25 \\ \ln[(P)/(6.10^5 + P)] &\geq -0,675 \\ \frac{P}{6.10^5 + P} &\geq e^{-0,675} \\ P &\geq \frac{6.10^5 e^{-0,675}}{1 - e^{-0,675}} \\ P &\geq 622.385,35. \end{aligned}$$

Jadi premi terkecil yang harus ditentukan sedemikian sehingga jika terjadi *loss* positif maka probabilitasnya tidak lebih dari 25% adalah Rp 622.385,35.

3.4.2 Mengukur Tingkat Resiko Perusahaan Asuransi Jiwa

Dengan mengetahui distribusi probabilitas nilai sekarang pembayaran santunan, dapat ditentukan momen-momen dari nilai sekarang tersebut sehingga dapat dihitung nilai ekspektasi, variansi, standar deviasi dan koefisien variasinya. Hal ini berguna dalam memberikan informasi tentang tingkat resiko perusahaan asuransi yang berkaitan dengan premi bersih (nilai harapan dari nilai sekarang pembayaran santunan) yang diterimanya (Norberg, 2002).

Pada Tabel 3.2 diberikan nilai harapan (E), standar deviasi (σ) dan koefisien variasi (CV) dari nilai sekarang santunan endomen murni, asuransi jiwa berjangka, asuransi endomen, dan anuitas seumur hidup. Masing-masing jenis tersebut mempunyai santunan

sebesar 1 untuk tertanggung berusia 30 tahun dengan jangka waktu polis selama 30 tahun. Percepatan mortalitas dianggap konstan μ sebesar 0.01 dan tingkat bunga pertahun i sebesar 5%. Perhitungan nilai E , Var , σ dan CV dapat dilihat pada lampiran 1.

Tabel 3.2 Ukuran Resiko Beberapa Polis Asuransi Jiwa

	Endomen Murni	Asuransi Berjangka	Asuransi Endomen	Anuitas Seumur Hidup
E	0,1714	0,1393	0,3107	17,0096
σ	0,1014	0,2635	0,1773	5,1859
CV	0,5915	1,8916	0,5677	0,3049

Dari Tabel 3.2 terlihat bahwa diantara 4 jenis polis asuransi jiwa maupun anuitas seumur hidup, asuransi jiwa berjangka mempunyai tingkat resiko relatif paling besar, yaitu dengan nilai koefisien variasi sebesar 1,8916. Hal ini disebabkan oleh nilai harapannya yang juga paling kecil, yang menunjukkan premi yang diterima perusahaan juga lebih kecil. Kondisi ini menyebabkan perusahaan mempunyai kemungkinan lebih besar untuk mengalami *loss* positif, yaitu jika kematian tertanggung terjadi pada awal jangka polis.

BAB IV

KESIMPULAN

Dari pembahasan skripsi ini, dapat disimpulkan hal-hal berikut:

1. Nilai sekarang pembayaran santunan asuransi jiwa, anuitas hidup maupun kombinasinya dapat dinyatakan secara umum sebagai suatu variabel acak Z yang menyatakan nilai sekarang pembayaran santunan asuransi *general*, yaitu kombinasi antara asuransi jiwa maupun anuitas hidup. Variabel acak Z tersebut merupakan variabel acak kontinu yang bergantung pada variabel acak *future lifetime* T .
2. Fungsi distribusi serta kepadatan probabilitas dari nilai sekarang pembayaran santunan asuransi jiwa, anuitas hidup maupun kombinasinya dapat dinyatakan secara umum sebagai fungsi distribusi dan kepadatan probabilitas dari variabel acak yang menyatakan nilai sekarang pembayaran santunan asuransi *general*. Dapat ditunjukkan bahwa fungsi distribusi serta kepadatan probabilitas tersebut masing-masing adalah

$$F(z) = \sum_{i=1}^n F_i(z) \text{ dan } f(z) = \sum_{i=1}^n f_i(z) \text{ dengan } F_i(z) \text{ dan } f_i(z)$$

adalah fungsi–fungsi yang dapat ditentukan jika distribusi probabilitas *future lifetime* T diketahui.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR PUSTAKA

Bean, M.A. 2001. **The Science Uncertainty with Applications to Investment, Insurance and Engineering**. Brooks.Cole.

Bowers, N.L., dkk. 1997. **Actuarial Mathematics**. The Society of Actuaries. Illinois.

Bowman. 2008. **Coefficient of Variation and Pearson's Index of Skewness**.<http://rchsbowman.wordpress.com/2008/09/16/statistics-notes-coefficient-of-variation-and-pearson's-index-of-skewness/>., tanggal akses : 28 Februari 2009.

Fitriadi, D. 2008. **Pengertian Resiko Menurut Beberapa Ahli**.<http://ngapackers.blogspot.com/2008/10/pengertian-resiko-menurut-beberapa-ahli.html>., tanggal akses 15 Maret 2009.

Futami,T. 1993. **Matematika Asuransi Jiwa, Bagian I**. Gatot Herliyanto. Incorporated Foundation Oriental Life Insurance Cultural Development Center. Jepang.

Gerber,H.U. 1997. **Life Insurance Mathematics**. Springer. Swiss.

Kay dan Edwards. 2004. **Managing Risk and Uncertainty**.<http://agb.calpoly.edu/shurley/agb322/agbus-322-lec10-p04.ppt>., tanggal akses: 15 Maret 2009.

Ghahramani, S. 2000. **Fundamentals of Probability**. Prentice Hall International. New Jersey.

Anonymous¹. **Force of Mortality**. http://en.wikipedia.org/wiki/Force_of_mortality., tanggal akses: 8 Juni 2009.

Anonymous². **Life insurance**. <http://answers.com/topic/life-insurance>., tanggal akses: 16 November 2008.

Norberg, R. 2002. **Basic Life Insurance Mathematics**.<http://stats.lse.ac.uk/norberg>, tanggal akses: 16 November 2008.

Oyolola. 2008. **Risk Analysis.** <http://d.scribd.com/docs/10gr6to5xmodpciwlrum.pdf>, tanggal akses: 15 Maret 2009.

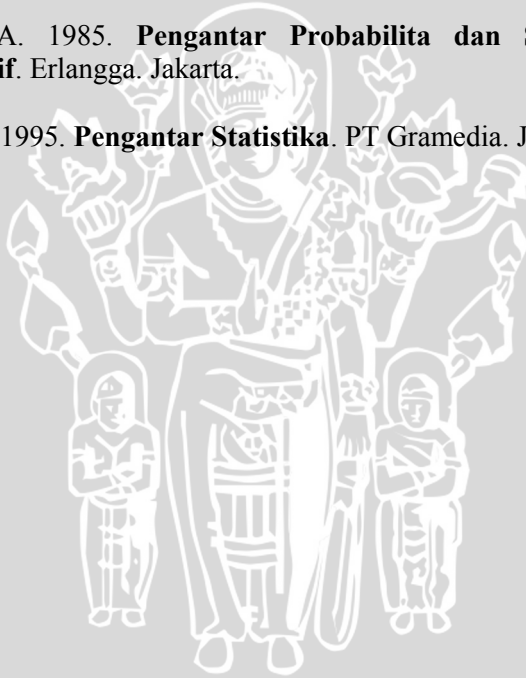
Papoulis, A. 1992. **Probabilitas, Variabel Random, dan Proses Stokastik.** Universitas Gajah Mada. Yogyakarta.

Phonphoem, A. 2004. **Continuous Random Variables (4).** <http://iwing.cpe.ku.ac.th>, tanggal akses: 16 November 2008.

Sembiring, R.K. 1986. **Asuransi I.** Karunika Jakarta Universitas Terbuka. Jakarta.

Supranto, M.A. 1985. **Pengantar Probabilita dan Statistika Induktif.** Erlangga. Jakarta.

Walpole, R.E. 1995. **Pengantar Statistika.** PT Gramedia. Jakarta.



Lampiran

Untuk menghitung nilai harapan (E), standar deviasi (σ) dan koefisien variasi (CV) dari asuransi berjangka (TI), *pure endowment* (PE), asuransi *endowment* (EI), dan anuitas seumur hidup (LA) dengan asumsi $i=5\%$, $\mu = 0.01$ dan $n=30$, ditentukan terlebih dahulu fungsi kepadatan probabilitas masing-masing polis tersebut, yaitu berdasarkan Korolari 3.3.3

$$\delta = \ln(1.05) ; \mu = 0.01 ; n = 30$$

$${}_t p_x = e^{-\mu t} = e^{-30t}$$

Menurut Korolari 3.3.3

$$f(z) = {}_m q_x \Delta(z) + g(z) + {}_{m+n} p_x \Delta(z - c) .$$

1. Asuransi berjangka

$$\begin{aligned} f(z) &= {}_0 q_x \Delta(z) + g(z) + {}_{0+30} p_x \Delta(z) \\ &= g(z) + e^{-0.3} \Delta(z) \end{aligned}$$

$$g(z) = \begin{cases} 0.205z^{-0.795} & v^{30} < z < 1 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(Z) &= \int_{-\infty}^{\infty} z f(z) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} z (g(z) + e^{-0.3} \Delta(z)) dz \\ &= \int_{v^{30}}^1 z (0.205z^{-0.795}) dz + \int_{-\infty}^{\infty} z [e^{-0.3} \Delta(z)] dz \\ &= 0.172z^{1.205} \Big|_{v^{30}}^1 = 0.1393 \end{aligned}$$

$$Var(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} (z - E(Z))^2 f(z) dz$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{\infty} (z - 0,1393)^2 (g(z) + e^{-0,3} \Delta(z)) dz \\
 &= \int_{v^{30}}^1 (z - 0,1393)^2 (0,205z^{-0,795}) dz + \int_{-\infty}^{\infty} (z - 0,1393)^2 [e^{-0,3} \Delta(z)] dz \\
 &= \left(0,093z^{2,205} - 0,048z^{1,205} + 0,019z^{0,205} \right) \Big|_{v^{30}}^1 + 0,019e^{-0,3} = 0,0694
 \end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{Var(Z)} = \sqrt{0,0694} = 0,2635$$

$$CV = \frac{\sigma}{E(Z)} = \frac{0,2635}{0,1393} = 1,8916.$$

2. Endowmen murni

$$\begin{aligned}
 f(z) &= {}_0 q_x \Delta(z) + g(z) + {}_{0+30} p_x \Delta(z - v^{30}) \\
 &= g(z) + e^{-0,3} \Delta(z - v^{30})
 \end{aligned}$$

$$g(z) = {}_{30} q_x \Delta(z) = (1 - e^{-0,3}) \Delta(z)$$

$$\begin{aligned}
 E(Z) &= \int_{-\infty}^{\infty} z f(z) dz \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} z \left((1 - e^{-0,3}) \Delta(z) + e^{-0,3} \Delta(z - v^{30}) \right) dz \\
 &= 0 + e^{-0,3} v^{30} = 0,1714
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Var(Z) &= \int_{-\infty}^{\infty} (z - E(Z))^2 f(z) dz \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} (z - 0,1714)^2 \left((1 - e^{-0,3}) \Delta(z) + e^{-0,3} \Delta(z - v^{30}) \right) dz \\
 &= (-0,1714)^2 (1 - e^{-0,3}) + (v^{30} - 0,1714)^2 e^{-0,3} = 0,0103
 \end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{Var(Z)} = \sqrt{0,0103} = 0,1014$$

$$CV = \frac{\sigma}{E(Z)} = \frac{0,1014}{0,1714} = 0,5915$$

3. Asuransi endowmen

$$\begin{aligned} f(z) &= {}_0q_x \Delta(z) + g(z) + {}_{0+30}p_x \Delta(z - v^{30}) \\ &= g(z) + e^{-0.3\Delta}(z - v^{30}) \end{aligned}$$

$$g(z) = \begin{cases} 0.205z^{-0.795} & v^{30} < z < 1 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} zf(z)dz$$

$$= \int_{v^{30}}^1 z(0.205z^{-0.795})dz + \int_{-\infty}^{\infty} z[e^{-0.3\Delta}(z - v^{30})]dz$$

$$= 0,1393 + 0,1714 = 0,3107$$

$$Var(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} (z - E(Z))^2 f(z)dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (z - 0,3107)^2 \left(0.205z^{-0.795} + e^{-0.3\Delta}(z - v^{30}) \right) dz$$

$$= \int_{v^{30}}^1 (z - 0,3107)^2 \cdot 0.205z^{-0.795} dz + \int_{-\infty}^{\infty} (z - 0,3107)^2 e^{-0.3\Delta}(z - v^{30}) dz$$

$$= 0,170z^{2,2049} - 0,1057z^{1,2049} + 0,0965z^{0,2049} \Big|_{v^{30}}^1 + (v^{30} - 0,3107)^2 e^{-0,3}$$

$$= 0,026 + 4,8512 \cdot 10^{-3} = 0,0314$$

$$\sigma = \sqrt{Var(Z)} = \sqrt{0,0314} = 0,1773$$

$$CV = \frac{\sigma}{E(Z)} = \frac{0,1773}{0,3107} = 0,5677.$$

4. Anuitas seumur hidup

$$\begin{aligned} f(z) &= {}_0q_x \Delta(x) + g(z) + {}_{\infty}p_x \Delta(z) \\ &= 0 + g(z) + 0 \\ &= g(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{1 - \ln(1,05)z} 0,01 e^{\frac{-0,01}{-\ln 1,05} \ln(1 - \ln(1,05)z)} \\ &= 0,01(1 - \ln(1,05)z)^{-0,7950} \quad ; 0 < z < 20,4959 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Z) &= \int_{-\infty}^{\infty} zf(z)dz \\ &= \int_0^{20,4959} z(0,01(1 - z \ln 1,05)^{-0,7950})dz \\ &= -z(1 - z \ln 1,05)^{0,2050} - 17,0096(1 - z \ln 1,05)^{1,2050} \Big|_0^{20,4959} \\ &= 17,0096 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(Z) &= \int_{-\infty}^{\infty} (z - E(Z))^2 f(z)dz \\ &= \int_0^{20,4959} (z - 17,0096)^2 (1 - z \ln 1,05)^{0,2050} - \frac{2(z - 17,096)}{0,0588} (1 - z \ln 1,05)^{1,2050} \\ &\quad - \frac{2}{0,1664} (1 - z \ln 1,05)^{2,2050} dz \Big|_0^{20,4959} \\ &= 26,8941 \end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{Var(Z)} = \sqrt{26,8941} = 5,1859$$

$$CV = \frac{\sigma}{E(Z)} = \frac{5,1859}{17,0096} = 0,3049$$