LEFT PURE IDEAL DALAM *LEFT WEAKLY REGULAR SEMINEARRING*

SKRIPSI

oleh :

MOHAMMAD FAJARRULLAH

0410940030-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

MALANG

2009

LEFT PURE IDEAL
DALAM *LEFT WEAKLY REGULAR SEMINEARRING*

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh :
MOHAMMAD FAJARRULLAH
0410940030-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2009

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

LEFT PURE IDEAL
DALAM *LEFT WEAKLY REGULAR SEMINEARRING*

Oleh :

MOHAMMAD FAJARRULLAH

0410940034-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 28 Mei 2009
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang matematika

Pembimbing I	Pembimbing II
Drs. Noor Hidayat, M.Si	**Drs. Bambang Sugandi, M.Si**
NIP. 131 759 590	**NIP. 131 993 382**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Agus Suryanto, M.Sc
NIP. 132 126 049

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	**: MOHAMMAD FAJARRULLAH**
NIM	**: 0410940030**
Jurusan	**: MATEMATIKA**
Penulis Skripsi berjudul	**: *LEFT PURE IDEAL* DALAM *LEFT WEAKLY REGULAR SEMINEARRING***

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. **Isi Skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama - nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Skripsi ini.**
2. **Apabila di kemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 28 Mei 2009
Yang menyatakan,

(Mohammad Fajarrullah)
NIM. 0410940030

LEFT PURE IDEAL
DALAM *LEFT WEAKLY REGULAR SEMINEARRING*

ABSTRAK

Konsep mengenai seminearring kanan telah diperkenalkan oleh Ahsan pada tahun 1995. Kemudian konsep Seminearring kanan mengalami perkembangan menjadi *left weakly regular seminearring*. Skripsi ini memperkenalkan konsep ideal dan *left pure ideal* dalam *left weakly regular seminearring* dan sifat-sifatnya. Jika A dan B adalah ideal pada seminearring maka AB bukan merupakan ideal, sedangkan jika A dan B adalah ideal pada *distributively generated seminearring* maka AB adalah ideal. Disamping itu, jika I adalah ideal pada *left weakly regular seminearring* maka I juga merupakan *left weakly regular seminearring*. Selanjutnya, jika S adalah *distributively generated left weakly regular seminearring* maka setiap ideal pada S adalah *left pure ideal.*

Kata kunci : Seminearring kanan, *distributively generated, left weakly regular seminearring, left pure ideal*

LEFT PURE IDEAL

IN LEFT WEAKLY REGULAR SEMINEARRING

ABSTRACT

The concept of the right seminearring has been introduced in 1995 by Ahsan. Then it is developed to the left weakly regular seminearring. In this paper, we introduces the concepts of an ideal and left pure ideal in a left weakly regular seminearring and their properties. If A and B are ideals of right seminearring then AB is not an ideal, whereas if they are the ideal in distributively generated seminearring then AB is ideal. Besides that, if I is an ideal in the left weakly regular seminearring then it is also left weakly regular seminearring. Furthermore, if S is a distributively generated left weakly regular seminearring then every ideal of S are a left pure ideals.

Keywords : Right seminearring, distributively generated, left weakly regular seminearring, left pure ideal

KATA PENGANTAR

Bismillahi wal hamdulillah, segala puji hanya bagi Allah, *Rabb* yang Maha Segala. Shalawat dan salam semoga selalu terlimpah kepada *Murabbi* besar kita Rasulullah Muhammad saw, beserta keluarga, sahabat serta orang-orang beriman yang mengikuti jejaknya.

Atas izin Allah SWT penulis bisa menyelesaikan skripsi yang berjudul **"*Left Pure Ideal* Dalam *Left Weakly Regular Seminearring*"**. Skripsi ini disusun dan diajukan sebagai syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains pada Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Brawijaya. Skripsi ini dapat terselesaikan berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada :

1. Drs. Noor Hidayat, M.Si selaku pembimbing I dan Drs. Bambang Sugandi, M.Si selaku pembimbing II atas segala pengarahan, motivasi, nasihat, dukungan, waktu dan segala sesuatu yang telah diberikan selama penyusunan Skripsi ini.
2. Dra. Trisilowati, M.Sc, Dra. Ari Andari,M.S dan Dr. Abdul Rouf Al Ghofari, M.Sc selaku dosen penguji atas segala masukan dan saran yang diberikan untuk perbaikan Skripsi ini,
3. Dr. Agus Suryanto, M.Sc dan Dr. Wuryansari Muharini K, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika dan Ketua Program Studi Matematika atas segala bantuan dan motivasi yang telah diberikan kepada penulis,
4. Drs. Imam Nurhadi, MT selaku dosen Penasihat Akademik beserta seluruh dosen dan staf pengajar yang telah mencurahkan ilmunya selama melaksanakan studi.
5. Ayah dan Ibuku tercinta yang telah mengasuhku dan menyayangiku tanpa letih, serta kakakku, adikku dan acid yang selalu menjadi motivatorku.
6. Arif, Amin, Edi, Kholis, Kholil dan sobat–sobatku Mat '04 yang selalu menemaniku di saat suka dan duka.

Sebagai manusia yang memiliki keterbatasan dan dengan segala kerendahan hati, penulis menyadari bahwa Skripsi ini masih belum sempurna. Untuk itu penulis sangat mengharapkan kritik dan saran dari berbagai pihak demi kesempurnaan Skripsi ini.

Akhir kata, penulis berharap semoga Skripsi ini dapat memberikan manfaat dan sumbangan yang berarti di masa yang akan datang.

Malang, 28 Mei 2009

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

$\in$	: elemen (anggota)
$\notin$	: bukan elemen
ϕ	: himpunan kosong
$\forall$	: untuk setiap
$\subseteq$	: subset (himpunan bagian)
$\not\subset$	: bukan subset
$\bigcup$	: gabungan
$\bigcap$	: irisan
$\Rightarrow$	: Jika ... maka ... (implikasi)
$\Leftrightarrow$	: jika dan hanya jika
$\neq$	: tidak sama dengan
Z_n	: himpunan bilangan bulat modulo *n*
Z^+	: himpunan bilangan bulat positif
Z	: himpunan bilangan bulat
N	: himpunan bilangan asli
$\Re$	: himpunan bilangan riil
$\langle a \rangle$	: ideal yang dibangun oleh *a*
▣	: akhir sebuah bukti

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Struktur aljabar merupakan suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu atau lebih operasi biner. Struktur aljabar di mana operasi binernya memenuhi aksioma-aksioma tertentu dinamakan semigrup, grup, semiring, ring, modul, dan sebagainya

Struktur Aljabar yang paling sederhana adalah semigrup. semigrup adalah suatu himpunan tidak kosong yang hanya dilengkapi dengan satu operasi biner saja dan memenuhi sifat ketertutupan dan keasosiatifan. Seperti halnya semigrup, grup juga merupakan suatu struktur aljabar yang hanya dilengkapi dengan satu operasi biner. Aksioma- aksioma yang berlaku pada grup adalah sama dengan aksioma-aksioma yang berlaku pada semigrup tetapi dalam grup harus memiliki elemen identitas dan setiap elemennya memiliki invers. Jadi dengan kata lain suatu grup merupakan semigrup yang memiliki elemen identitas dan setiap elemen pada semigrup memiliki invers.

Berbeda dengan semigrup dan grup, semiring adalah suatu struktur aljabar yang dilengkapi dengan dua operasi biner misalkan penjumlahan dan perkalian yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Seperti halnya dalam semiring, di dalam ring juga berlaku dua operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Suatu himpunan bagian dari ring yang merupakan subring dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu dikenal dengan nama ideal. Pada umumnya ideal dibedakan dalam dua macam, yaitu ideal kiri dan ideal kanan. Suatu Ideal yang merupakan Ideal kiri dan Ideal kanan dikenal dengan nama Ideal dua sisi. Ahsan dan Thaheem (1989) dalam jurnalnya yang berjudul *On Pure Radical in Semigroup With Zero* memperkenalkan suatu konsep baru dari ideal yang kemudian dikenal dengan nama *left pure ideal*.

Kemudian pada tahun 1995 Javed Ahsan memperkenalkan suatu struktur aljabar baru yang memiliki dua operasi biner yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu dan kemudian dikenal dengan nama seminearring kanan. Selanjutnya, M.Shabir dan I.Ahmed (2007) dalam jurnalnya yang berjudul *Weakly Regular Seminearring* memperkenalkan konsep baru dari seminearring kanan yang dinamakan *left weakly regular seminearring.* Selain itu, akan dibuktikan teorema-teorema yang berhubungan dengan ideal dan *left pure ideal* dalam *left weakly regular seminearring*, sehingga diketahui konsep ideal dan *left pure ideal* dalam *left weakly regular seminearring*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, rumusan masalah dalam skripsi ini adalah bagaimana sifat-sifat ideal dan *left pure ideal* dalam *left weakly regular seminearring*.

1.3 Batasan Masalah

Pada skripsi ini akan dibahas definisi-definisi dan teorema-teorema hanya pada *left weakly regular seminearring*.

1.4 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah membuktikan teorema dan proposisi tentang Ideal dan *left pure ideal* dalam *left weakly regular seminearring* sehingga dapat diketahui sifat Ideal dan *left pure ideal* dalam *left weakly regular seminearring*

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diberikan teori-teori dasar dalam bentuk definisi, teorema, lemma, dan proposisi yang akan menjadi dasar pembahasan dalam Bab 3, yaitu antara lain tentang semigrup, grup, semiring, ring dan yang terakhir adalah ideal.

2.1 Semigrup

Semigrup adalah suatu struktur aljabar yang paling sederhana. Semigrup merupakan suatu himpunan tak kosong yang di dalamnya memiliki satu operasi biner dan memenuhi syarat-syarat tertentu. Definisi, contoh serta teorema yang berkaitan dengan semigrup akan diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.1.1 (Whitelaw,1995)
Misalkan M himpunan tak kosong dan di dalamnya didefinisikan operasi biner $*$. Maka $(M,*)$ disebut semigrup jika dan hanya jika:

1. $(M,*)$ tertutup : $a*b \in M$, untuk setiap $a,b \in M$, dan
2. $(M,*)$ assosiatif : $(a*b)*c = a*(b*c)$, untuk setiap $a,b,c \in M$

Berikut ini adalah contoh-contoh untuk lebih memudahkan dalam mempelajari suatu semigrup.

Contoh 2.1.2
Diberikan himpunan $Z_4 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3}\}$. Maka $(Z_4,+)$ merupakan semigrup.

Bukti : Jadi akan ditunjukkan bahwa $(Z_4,+)$ memenuhi syarat-syarat sebagai berikut ini:

1. untuk setiap $a,b \in Z_4$ maka $a+b \in Z_4$
2. untuk setiap $a,b,c \in Z_4$ maka $(a+b)+c = a+(b+c)$,

Tabel 2.1 Operasi penjumlahan pada Z_4

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

Berdasarkan Tabel 2.1 jelas bahwa Z_4 tertutup terhadap operasi penjumlahan. Selain itu, Z_4 juga memenuhi hukum assosiatif terhadap operasi penjumlahan. Jadi terbukti bahwa $(Z_4,+)$ merupakan semigrup. ◘

Contoh 2.1.3

Misalkan himpunan $S = Z^+ \bigcup \{0\}$ dan $\otimes$ merupakan operasi pada S yang didefinisikan sebagai berikut : $a \otimes b = a + b + ab$. $(S,\otimes)$ merupakan suatu semigrup.

Bukti : (1) Ambil sebarang $x, y \in S$. Akan dibuktikan $x \otimes y \in S$. Jadi $x \otimes y = x + y + xy \in S$.

(2) Ambil sebarang $x, y, z \in S$. Maka:

$$
\begin{aligned}
(x \otimes y) \otimes z &= (x + y + xy) \otimes z \\
&= (x + y + xy) + z + (x + y + xy)z \\
&= x + y + z + xy + xz + yz + xyz \\
x \otimes (y \otimes z) &= x \otimes (y + z + yz) \\
&= x + (y + z + yz) + x(y + z + yz) \\
&= x + y + z + xy + yz + xz + xyz
\end{aligned}
$$

Dari (1) dan (2) terbukti bahwa $(S,\otimes)$ semigrup. ◘

Berikut ini akan diberikan definisi-definisi mengenai semigrup komutatif, semigrup dengan elemen identitas dan subsemigrup serta teorema yang berhubungan dengan subsemigrup.

Definisi 2.1.4 (Kandasamy,2002)
Jika dalam semigrup $(M,*)$ berlaku $a*b=b*a$, untuk setiap $a,b\in M$ maka $(M,*)$ disebut semigrup komutatif. Sedangkan jika $(M,*)$ adalah suatu semigrup dan mempunyai elemen identitas e sedemikian sehingga $e*a=a*e=a$, untuk setiap $a\in M$ maka $(M,*)$ disebut semigrup dengan elemen identitas atau semigrup *monoid*

Definisi 2.1.5 (Lallement, 1979)
Jika $(S,*)$ adalah semigrup dan T himpunan bagian dari S maka T dikatakan subsemigrup dari S jika $(T,*)$ adalah semigrup

Teorema 2.1.6 (Whitelaw,1995)
Misalkan H himpunan tak kosong dan H himpunan bagian dari M di mana $(M,*)$ suatu semigrup. Maka $(H,*)$ subsemigrup dari $(M,*)$ jika dan hanya jika H tertutup terhadap operasi $*$.

Bukti: $(\Rightarrow)$ Jelas, jika $(H,*)$ subsemigrup dari $(M,*)$ maka $(H,*)$ merupakan suatu semigrup (Definisi 2.1.5). Berdasarkan Definisi 2.1.1 maka H tertutup terhadap operasi $*$.

$(\Leftarrow)$ H tertutup terhadap operasi $*$. Karena $(M,*)$ suatu semigrup, maka berlaku: $(a*b)*c=a*(b*c)$, untuk setiap $a,b,c\in M$. Selanjutnya karena H himpunan bagian dari M maka juga berlaku : $(a*b)*c=a*(b*c)$, untuk setiap $a,b,c\in H$. Berdasarkan Definisi 2.1.1 maka $(H,*)$ merupakan semigrup. Jadi terbukti bahwa $(H,*)$ subsemigrup dari $(M,*)$. $\blacksquare$

2.2 Grup

Seperti halnya semigrup, grup juga merupakan suatu struktur aljabar yang hanya dilengkapi dengan satu operasi biner. Perbedaan antara semigrup dan grup adalah grup memiliki elemen identitas dan setiap elemennya memiliki invers sedangkan pada semigrup tidak perlu memiliki elemen identitas dan setiap elemennya tidak harus memiliki invers. Jadi dengan kata lain suatu grup jelas merupakan semigrup sedangkan suatu semigrup belum tentu merupakan grup. Definisi dan teorema yang berkaitan dengan grup akan diberikan sebagai berikut

Definisi 2.2.1 (Fieseler, 2008)
Grup adalah pasangan $(G,*)$, dimana G bukan merupakan himpunan kosong dan memiliki satu operasi biner $*$, yang memenuhi aksioma–aksioma berikut ini:

1. Assosiatif, yaitu untuk setiap $a,b,c \in G$ maka berlaku $(ab)c = a(bc)$.
2. Memiliki elemen satuan (identitas), yaitu untuk setiap $a \in G$ terdapat $e \in G$ sedemikian sehingga berlaku $ea = ae = a$.
3. Setiap elemen memiliki invers, yaitu terdapat $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga berlaku $a^{-1}a = aa^{-1} = e$ untuk setiap $a \in G$.

Dimana operasi $*$ merupakan suatu pemetaan yang didefinisikan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
&* : G \times G \to G \\
&(a,b) \mapsto *(a,b) = a * b := ab
\end{aligned}
$$

Dalam grup juga dikenal istilah grup komutatif. Suatu grup yang komutatif dikenal dengan istilah grup abelian. Berikut ini adalah definisi dari grup abelian

Definisi 2.2.2 (Fieseler, 2008)
Grup $(G,*)$ disebut suatu grup abelian atau grup komutatif jika $ab = ba$ untuk setiap $a,b \in G$.

Dari definisi grup, diketahui bahwa suatu grup memiliki sifat – sifat sederhana, yaitu bahwa suatu grup memiliki elemen identitas tunggal dan setiap elemen memiliki invers yang tunggal. Berikut ini akan dibahas suatu sifat sederhana lainnya dari grup yang dikenal dengan nama hukum kanselasi atau hukum pencoretan

Teorema 2.2.3 (Fraleigh, 1994)
Jika G adalah grup dengan operasi biner * maka hukum kanselasi kanan dan kiri terpenuhi dalam G, yaitu untuk setiap $a,b,c \in G$ berlaku:
1) Jika $a*b = a*c$ maka $b = c$
2) Jika $b*a = c*a$ maka $b = c$

Bukti : 1) Hukum kanselasi kiri: Jika $a \in G$ dan G adalah suatu grup maka terdapat $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$ dimana e adalah elemen identitas dari $(G,*)$. Menurut ketentuan $a*b = a*c$ jika kedua ruas dioperasikan dengan a^{-1}(invers dari a) dari kiri maka berlaku:

$$a^{-1}*(a*b) = a^{-1}*(a*c)$$

$$(a^{-1}*a)*b = (a^{-1}*a)*c$$

$$e*b = e*c$$

$$b = c$$

2) Hukum kanselasi kanan: Jika $a \in G$ dan G adalah suatu grup maka terdapat $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$ dimana e adalah elemen identitas dari $(G,*)$. Menurut ketentuan $a*b = a*c$ jika kedua ruas dioperasikan dengan a^{-1} (invers dari a) dari kanan maka berlaku:

$$(b*a)*a^{-1} = (c*a)*a^{-1}$$

$$b*(a*a^{-1}) = c*(a*a^{-1})$$

$$b*e = c*e$$

$$b = c$$

Definisi 2.2.4 (Durbin, 1992)
Misalkan $(G,*)$ adalah suatu grup dan H adalah suatu himpunan bagian dari G. H dikatakan suatu subgrup dari G jika H merupakan suatu grup terhadap operasi biner $*$ yang didefinisikan pada G. Dengan kata lain, $(H,*)$ merupakan suatu grup.

Dalam sistem bilangan real atau sistem bilangan kompleks telah dikenal mempunyai dua operasi biner yang dasar, yang disebut penjumlahan (addition) dan perkalian (multiplication). Semigrup dan grup belum cukup untuk merangkum semua struktur aljabar dari sistem bilangan tersebut, karena suatu semigrup dan grup hanya berkaitan dengan satu operasi biner saja. Misalkan terhadap penjumlahan atau terhadap perkalian, tetapi struktur tersebut mengabaikan hubungan antara penjumlahan dan perkalian, misalkan diketahui bahwa perkalian itu distributif terhadap penjumlahan. Oleh karena itu sekarang akan dipandang struktur-struktur aljabar dengan dua operasi biner yang berlaku pada sistem-sistem bilangan tertentu. Suatu semiring dan ring adalah suatu struktur aljabar yang mempunyai dua operasi biner yang pada umumnya adalah penjumlahan dan perkalian.

2. 3 Semiring

Semiring adalah suatu struktur aljabar yang berkaitan dengan dua operasi biner. Pada bagian ini diberikan definisi dan contoh yang berkaitan dengan semiring.

Definisi 2.3.1 (Kandasamy, 2002)
Misalkan S himpunan tak kosong dan di dalamnya didefinisikan dua operasi biner, yaitu penjumlahan dan perkalian yang memenuhi:

1. $(S,+)$ semigrup komutatif,
2. $(S,.)$ semigrup, dan
3. Untuk setiap $a,b,c \in S$ berlaku $(a+b)\,c = ac+bc$ dan $a\,(b+c) = ab+ac$,

maka $(S,+,.)$ disebut semiring.

Berikut ini akan diberikan definisi-definisi mengenai semiring komutatif, semiring dengan elemen identitas, semiring dengan *absorbing zero*

Definisi 2.3.2 (Kandasamy, 2002)
Semiring $(S,+,.)$ disebut semiring komutatif jika $(S,.)$ suatu semigrup komutatif.

Definisi 2.3.3 (Fieseler, 2008)
Misalkan S adalah semiring. S disebut semiring dengan elemen identitas jika memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut:

1. $(S,+)$ semigrup komutatif,
2. $(S,.)$ semigrup *monoid*,
3. Untuk setiap $a,b,c \in S$ berlaku $(a+b)\,c = ac+bc$ dan $a\,(b+c) = ab+ac$.

Definisi 2.3.4 (Shabir dan Iqbal, 2007)
Suatu semiring $(S,+,.)$ dikatakan mempunyai *absorbing zero* 0 jika $0+s=s+0=s$ dan $0\cdot s=s\cdot 0=0$, untuk setiap $s\in S$.

Jika suatu himpunan bagian dari semiring merupakan semiring terhadap operasi yang sama pada semiring, maka himpunan tersebut dikenal dengan nama subsemiring. Hal ini didefinisikan oleh Kandasamy (2002), yaitu misalkan diberikan suatu semiring *S* dan *P* adalah himpunan bagian dari *S*. *P* disebut subsemiring dari *S* jika *P* merupakan semiring terhadap operasi yang sama pada *S*.

2.4 Ring

Ring juga merupakan struktur aljabar dengan dua operasi biner di dalamnya. Berdasarkan aksioma-aksioma yang berlaku pada ring, sebagaimana didefinisikan pada Definisi 2.4.1 berikut ini maka dapat dibuat suatu kesimpulan bahwa suatu ring dijamin merupakan suatu semiring sedangkan suatu semiring belum tentu merupakan ring.

Definisi 2.4.1 (Fieseler, 2008)
Suatu ring adalah rangkap tiga atau tripel $(R,+,*)$, dimana R bukan merupakan suatu himpunan kosong dan memiliki dua operasi biner $+$ dan $*$, yang memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. Pasangan $(R,+)$ merupakan grup komutatif
2. Pasangan $(R,*)$ memenuhi assosiatif, yaitu $(ab)c = a(bc)$ untuk setiap $a,b,c \in R$
3. memenuhi hukum distributif
   $(a+b)c = ac + bc$
   $a(b+c) = ab + ac$ untuk setiap $a,b,c \in R$

Dimana operasi $+$ dan $*$ merupakan suatu pemetaan yang didefinisikan sebagai berikut:

$$+ : R \times R \to R$$
$$(a,b) \mapsto +(a,b) = a + b$$

dan

$$* : R \times R \to R$$
$$(a,b) \mapsto *(a,b) = a * b := ab$$

Definisi 2.4.2 (Fieseler, 2008)
Misalkan *R* adalah ring, dan *S* adalah himpunan bagian dari *R*. *S* adalah subring dari *R* jika terhadap operasi biner yang sama pada *R* juga merupakan suatu ring.

2.5 Ideal

Dalam suatu ring, subring-subring tertentu mempunyai peranan yang mirip dengan subgrup normal dalam suatu grup. Tipe subring seperti ini disebut dengan ideal. Berikut ini adalah definisi dari ideal

Definisi 2.5.1 (Bhattacharya, 1994)
Himpunan bagian tak kosong *I* dalam ring *R* disebut ideal kanan (kiri) dari *R* jika memenuhi dua syarat berikut :

1. $I \neq \emptyset$
2. $a,b \in I$ berlaku $a + b \in I$
3. $a \in I$ dan $r \in R$ berlaku $ar \in I$ ($ra \in I$)

Suatu ideal yang sekaligus merupakan ideal kiri dan ideal kanan disebut ideal dua sisi.

Proposisi 2.5.2 (Spindler, 1994)
Misalkan *R* suatu ring dengan elemen nol. Maka *R* dan $\{0\}$ adalah ideal-ideal dalam *R*.

Bukti: a. Akan dibuktikan bahwa ring *R* merupakan suatu ideal. Karena *R* merupakan suatu ring maka jelas bahwa $R \neq \varnothing$ (*R* bukan himpunan kosong).

Ambil sebarang $a, b \in R$. Akan dibuktikan bahwa $a + b \in R$. Diketahui bahwa *R* adalah suatu ring, maka *R* memenuhi hukum ketertutupan terhadap operasi penjumlahan. Yaitu untuk setiap $a, b \in R$ maka $a + b \in R$.

Ambil sebarang $a \in R$ dan $r \in R$. Akan dibuktikan $ar \in R$ dan $ra \in R$. Diketahui bahwa *R* adalah suatu ring, maka *R* memenuhi hukum ketertutupan terhadap operasi perkalian. Yaitu untuk setiap $a, b \in R$ maka $ab \in R$ dan $ba \in R$.

Dari ketiga bukti di atas maka terbukti bahwa *R* adalah suatu ideal.

b. Akan dibuktikan $M = \{0\}$ merupakan suatu ideal.

Jelas bahwa $M \neq \varnothing$ karena *M* memiliki elemen yaitu 0
Untuk setiap $0, 0 \in M = \{0\}$ maka $0 + 0 = 0 \in M = \{0\}$.
Untuk setiap $0 \in M = \{0\}$ dan untuk setiap $r \in R$ maka $0.r = 0 \in \{0\}$ dan $r.0 = 0 \in \{0\}$.
Dari ketiga bukti di atas maka terbukti bahwa $M = \{0\}$ adalah suatu ideal. ■

Pada dasarnya suatu ring dan $\{0\}$ merupakan suatu ideal. Ideal yang demikian dikenal dengan nama ideal tak sejati (Spindler, 1994). Definisi tentang Ideal sejati diberikan dibawah ini.

Definisi 2.5.3 (Arifin, 2000)
I disebut ideal sejati dalam ring *R* jika $I \subset R$ dan $I \neq R$

Definisi 2.5.4 (Spindler, 1994)
Suatu ring yang tidak mempunyai ideal sejati disebut ring simple

Teorema 2.5.5
Misal R adalah suatu ring dan S himpunan bagian dari R. Maka S adalah ideal dalam ring R $\Leftrightarrow$ memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut:

1. $S \neq \varnothing$
2. S tertutup terhadap pengurangan
3. s $\in$ S dan $r \in R$ maka $rs\ (sr) \in S$

Bukti : ($\Rightarrow$) Jika S adalah ideal dalam ring R maka S adalah subring dari R sehingga kondisi (1) dan (2) terpenuhi. Karena S adalah ideal dari R maka kondisi (3) juga terpenuhi

($\Leftarrow$) Misal kondisi 1, 2, 3 terpenuhi. Dari kondisi 1 & 2 terbukti bahwa S Subring dari R. Sedangkan kondisi 3 menunjukkan bahwa S tertutup terhadap pergandaan
Dengan kata lain terbukti S ideal dalam R. ◘

Berikut ini akan diberikan proposisi, teorema dan lemma mengenai sifat-sifat ideal dalam suatu ring R

Proposisi 2.5.6 (Spindler, 1994)
Misalkan I adalah ideal dalam ring R. Bila I memuat identitas 1 maka I adalah ring R.

Bukti : Diketahui bahwa I adalah ideal dalam ring R.
$1 \in I$ dan $r \in R$
Karena I adalah ideal maka $1.r \in I$. Sehingga $r \in I$
Jadi setiap anggota di R juga merupakan anggota di $I \ni R = I$. ◘

Teorema 2.5.8 (Spindler, 1994)
Apabila I_1 dan I_2 masing-masing ideal dalam ring R, maka $I_1 \cap I_2$ adalah suatu ideal dalam ring R.

Bukti : 1. Ambil sebarang $x_1, x_2 \in I_1 \cap I_2$. Akan dibuktikan bahwa $x_1 - x_2 \in I_1 \cap I_2$.

$x_1 \in I_1 \cap I_2 \Rightarrow x_1 \in I_1 \ \& \ x_1 \in I_2$

$x_2 \in I_1 \cap I_2 \Rightarrow x_2 \in I_1 \ \& \ x_2 \in I_2$

Diketahui bahwa I_1 ideal dan $x_1, x_2 \in I_1$ maka:

$x_1 - x_2 \in I_1$.

Diketahui bahwa I_2 ideal dan $x_1, x_2 \in I_2$ maka:

$x_1 - x_2 \in I_2$.

$x_1 - x_2 \in I_1$ dan $x_1 - x_2 \in I_2$ maka $x_1 - x_2 \in I_1 \cap I_2$

Jadi $x_1 - x_2 \in I_1 \cap I_2$

2. Ambil sebarang $x \in I_1 \cap I_2, r \in R$. Akan dibuktikan bahwa $xr \in I_1 \cap I_2 (rx \in I_1 \cap I_2)$.

Jika $x \in I_1 \cap I_2$ maka $x \in I_1$ dan $x \in I_2$.

Diketahui bahwa I_1 ideal maka:

Jika $x \in I_1$ dan $r \in R$ maka $rx \in I_1$ dan $xr \in I_1$

Diketahui bahwa I_2 ideal maka:

Jika $x \in I_2$ dan $r \in R$ maka $rx \in I_2$ dan $xr \in I_2$

Karena $xr \in I_1$ dan $xr \in I_2$ maka $xr \in I_1 \cap I_2$. Kemudian diketahui bahwa $rx \in I_1$ dan $rx \in I_2$ maka $rx \in I_1 \cap I_2$

Dari 1 dan 2 maka terbukti bahwa $I_1 \cap I_2$ adalah ideal pada *R*. ◘

Lemma 2.5.9 (Hartley dan Hawkes, 1994)

Jika $I_1, I_2, ..., I_n$ adalah ideal-ideal dalam ring *R*, maka $\bigcap_{i=1}^{n} I_i$ adalah ideal dari ring *R*.

Bukti : 1) Ambil sebarang $x, y \in \bigcap_{i=1}^{n} I_i$. Akan dibuktikan $x - y \in \bigcap_{i=1}^{n} I_i$. $x, y \in I_i$ untuk setiap $i \in \{1,2,...,n\}$ sehingga $x - y \in I_i$ maka mengakibatkan $x - y \in \bigcap_{i=1}^{n} I_i$

2) Ambil sebarang $x \in \bigcap_{i=1}^{n} I_i, r \in R$. Akan dibuktikan $rx \in \bigcap_{i=1}^{n} I_i$.

Jika $x \in \bigcap_{i=1}^{n} I_i$ maka $x \in I_i$ untuk setiap $i \in \{1,2,...,n\}$ sehingga $rx \in I_i$ yang mengakibatkan $rx \in \bigcap_{i=1}^{n} I_i$

Jadi $\bigcap_{i=1}^{n} I_i$ adalah suatu ideal dalam *R*. ▪

Berikut ini akan diberikan definisi mengenai ideal minimal dan ideal maksimal

Definisi 2.5.10 (Bhattacharya, 1994)
Suatu ideal *I* dalam ring *R* disebut ideal minimal jika memenuhi syarat-syarat sebagai berikut:

1. $I \neq \{0\}$.
2. Jika *J* adalah ideal kanan (ideal kiri) tak nol dari *R* yang termuat dalam *I* maka $J = I$.

Definisi 2.5.11 (Bhattacharya, 1994)
Suatu ideal *I* dalam ring *R* disebut ideal maksimal jika :

1. $I \neq R$.
2. Untuk sebarang ideal *J* yang memuat *I* $(J \supseteq I)$, $J = I$ atau $J = R$

Selain ideal maksimal dan ideal minimal, dikenal juga istilah *Prime Ideal* dan *Primary Ideal*. Pada definisi berikut ini akan dijelaskan tentang *Prime Ideal* dan *Primary Ideal.*

Definisi 2.5.12 (Spindler, 1994)
Misalkan *R* adalah ring komutatif dan misalkan *I* adalah ideal pada *R* dimana $I \neq R$

1) *I* disebut *Prime Ideal* jika $ab \in I$ maka berlaku $a \in I$ atau $b \in I$
2) *I* disebut *Primary Ideal* jika $ab \in I$ dan $a \notin I$ maka $b^n \in I$ untuk $n \in N$

Proposisi yang berkenaan dengan *Prime Ideal* dan *Primary Ideal* akan diberikan pada Proposisi 2.5.13 dan Proposisi 2.5.14 sebagai berikut

Proposisi 2.5.13 (Spindler, 1994)

Misal $f : R \rightarrow S$ adalah *Isomorphisma Ring* dimana *R* dan *S* adalah ring komutatif dan misalkan *J* adalah *Prime Ideal* pada *S* maka $f^{-1}(J)$ adalah *Prime Ideal* pada *R*

Bukti: Pertama-tama akan dibuktikan bahwa $f^{-1}(J)$ adalah ideal pada ring R :

Ambil sebarang $a, b \in f^{-1}(J)$. Akan dibuktikan $a - b \in f^{-1}(J)$. Karena $a, b \in f^{-1}(J)$ maka $f(a), f(b) \in J$.

Diketahui bahwa J adalah suatu ideal pada *S*. Sehingga untuk setiap $f(a), f(b) \in J$ berlaku $f(a) - f(b) \in J$. Karena *f* adalah suatu pemetaan yang homomorphisma maka $f(a) - f(b) = f(a - b) \in J$. Diketahui bahwa $f(a - b) \in J$ maka $a - b \in f^{-1}(J)$.

Ambil sebarang $a \in f^{-1}(J)$ dan $r \in R$. Akan dibuktikan $ar \in f^{-1}(J)$. Karena $a \in f^{-1}(J)$ dan $r \in R$ maka $f(a) \in J$ dan $f(r) \in S$.

Diketahui bahwa J adalah ideal pada *S*. Sehingga untuk setiap $f(a) \in J$ dan $f(r) \in S$ maka $f(a)f(r) \in J$. Sedangkan *f* adalah suatu pemetaan yang homomorphisma, maka $f(a)f(r) = f(ar) \in J$. Karena $f(ar) \in J$ maka $ar \in f^{-1}(J)$.

Kemudian akan dibuktikan bahwa $f^{-1}(J)$ adalah *Prime Ideal*:

Ambil sebarang $ab \in f^{-1}(J)$. Akan dibuktikan $a \in f^{-1}(J)$ dan $b \notin f^{-1}(J)$.

Karena $ab \in f^{-1}(J)$ maka $f(ab) \in J$. Sedangkan diketahui bahwa *J* adalah *Prime Ideal* pada *S*. Karena $f(ab) \in J$ dan *f* adalah suatu pemetaan yang homomorphisma maka $f(ab) = f(a)f(b) \in J$. Karena $f(a)f(b) \in J$ maka $f(a) \in J$ dan $f(b) \notin J$. Diketahui bahwa $f(a) \in J$ maka $a \in f^{-1}(J)$ dan $f(b) \notin J$ maka $b \notin f^{-1}(J)$. Karena $a \in f^{-1}(J)$ dan $b \notin f^{-1}(J)$ maka terbukti bahwa $f^{-1}(J)$ adalah *Prime Ideal* pada *R*. ◘

Proposisi 2.5.14 (Spindler, 1994)

Misal $f : R \rightarrow S$ adalah *Isomorphisma Ring* dimana *R* dan *S* adalah Ring komutatif dan misalkan *J* adalah *Primary Ideal* pada *S* maka $f^{-1}(J)$ adalah *Primary Ideal* pada *R*

Bukti: Pertama-tama akan dibuktikan bahwa $f^{-1}(J)$ adalah ideal pada ring R :

Ambil sebarang $a,b \in f^{-1}(J)$. Akan dibuktikan $a-b \in f^{-1}(J)$.

Karena $a,b \in f^{-1}(J)$ maka $f(a), f(b) \in J$.

Diketahui bahwa *J* adalah suatu ideal pada *S*. Sehingga untuk setiap $f(a), f(b) \in J$ berlaku $f(a) - f(b) \in J$. Karena *f* adalah suatu pemetaan yang homomorphisma maka $f(a) - f(b) = f(a-b) \in J$. Diketahui bahwa $f(a-b) \in J$ maka $a - b \in f^{-1}(J)$.

Ambil sebarang $a \in f^{-1}(J)$ dan $r \in R$. Akan dibuktikan $ar \in f^{-1}(J)$. Karena $a \in f^{-1}(J)$ dan $r \in R$ maka $f(a) \in J$ dan $f(r) \in S$.

Diketahui bahwa *J* adalah ideal pada *S*. Sehingga untuk setiap $f(a) \in J$ dan $f(r) \in S$ maka $f(a)f(r) \in J$. Sedangkan *f* adalah suatu pemetaan yang homomorphisma, maka $f(a)f(r) = f(ar) \in J$. Karena $f(ar) \in J$ maka $ar \in f^{-1}(J)$.

Kemudian akan dibuktikan bahwa $f^{-1}(J)$ adalah *Primary Ideal*

Ambil sebarang $ab \in f^{-1}(J)$.

Akan dibuktikan $a \in f^{-1}(J)$ dan $b \notin f^{-1}(J)$.

Karena $ab \in f^{-1}(J)$ maka $f(ab) \in J$. Sedangkan diketahui bahwa *J* adalah *Primary Ideal* pada *S*. Karena $f(ab) \in J$ dan *f* adalah suatu pemetaan yang homomorphisma maka $f(ab) = f(a)f(b) \in J$. Karena $f(a)f(b) \in J$ maka $f(a) \notin J$ dan $(f(b))^n \in J$. $(f(b))^n = \underbrace{f(b).f(b)...f(b)}_{n} = f(b^n) \in J$.

Diketahui bahwa $f(a) \notin J$ maka $a \notin f^{-1}(J)$ dan $f(b^n) \in J$ maka $b^n \in f^{-1}(J)$. Karena $a \notin f^{-1}(J)$ dan $b^n \in f^{-1}(J)$ maka terbukti bahwa $f^{-1}(J)$ adalah *Primary Ideal* pada *R*. ▣

Jika pada sebelumnya telah diberikan definisi mengenai *Prime Ideal* dan *Primary Ideal*, maka pada definisi berikutnya akan diperkenalkan tentang *Irreducible Ideal*

Definisi 2.5.15 (Spindler, 1994)
Suatu ideal *A* dari ring *R* dikatakan *Irreducible Ideal* jika untuk setiap ideal *I, J* pada *R* maka berlaku :
$A = I \cap J \Rightarrow I = A$ atau $J = A$.

BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas definisi-definisi dan teorema-teorema dari *left weakly regular seminearring* dan *left pure ideal* beserta bukti-buktinya. *Weakly regular seminearring* merupakan konsep baru dari seminearring kanan. *Weakly regular seminearring* pada dasarnya dibedakan menjadi dua sifat, yaitu *right weakly regular seminearring* dan *left weakly regular seminearring*. Pada skripsi ini hanya akan dibahas pada *left wekly regular seminearring*.

3.1 Seminearring kanan

Seminearring kanan adalah suatu struktur aljabar yang berkaitan dengan dua operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu sebagaimana didefinisikan dibawah ini

Definisi 3.1.1 (Shabir dan Ahmed, 2007)
Seminearring kanan adalah suatu himpunan tak kosong S dengan 2 operasi biner "+" dan "$\cdot$" yang memenuhi aksioma – aksioma sebagai berikut:

1. $(S,+)$ adalah semigrup
2. $(S,\cdot)$ adalah semigrup
3. $(S,+,\cdot)$ distributif kanan

   Untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku $(y+z)x = yx + zx$

Definisi 3.1.2 (Shabir dan Ahmed, 2007)
Suatu himpunan tak kosong I yang merupakan himpunan bagian dari seminearring kanan disebut ideal kiri (kanan) jika:

1. Untuk setiap $x, y \in I$ maka $x + y \in I$ dan
2. Untuk setiap $x \in I$ dan $r \in S$ maka $rx \in I$ ($xr \in I$)

Suatu ideal yang merupakan ideal kiri dan ideal kanan disebut dengan ideal dua sisi.
Suatu seminearring kanan dikatakan memiliki *absorbing zero* jika terdapat $0 \in S$ sedemikian sehingga $a + 0 = 0 + a = a$ dan $a.0 = 0.a = 0$ untuk setiap $a \in S$ (Shabir dan Ahmed, 2007).

Contoh-contoh himpunan yang merupakan suatu seminearring kanan diberikan dibawah ini:

Contoh 3.1.3

Himpunan $S = Z^+ \bigcup \{0\}$ merupakan seminearring kanan terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan pada bilangan.

Bukti: (1) Ambil sebarang $a, b, c \in S$ maka berlaku:

(i) $a + b \in S$,

(ii) $(a + b) + c = a + (b + c)$,

Dari (i) dan (ii) maka $(S, +)$ merupakan semigrup.

(2) Ambil sebarang $a, b, c \in S$ maka berlaku:

(i) $a \cdot b \in S$,

(ii) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Dari (i) dan (ii) maka $(S, \cdot)$ merupakan semigrup.

(3) Ambil sebarang $a, b, c \in S$ maka berlaku $(b + c)a = ba + ca$.

Dari (1), (2), dan (3) maka terbukti bahwa S adalah seminearring kanan. ▪

Contoh 3.1.4

Diberikan suatu himpunan $S = \{0, a, b, c, d\}$. Akan dibuktikan bahwa $S = \{0, a, b, c, d\}$ merupakan suatu seminearring kanan dengan *absorbing zero* terhadap operasi ”+” dan ”.” seperti yang didefinisikan dalam Tabel 3.1 dan Tabel 3.2

Bukti : 1. Akan ditunjukkan bahwa $(S, +)$ merupakan semigrup dengan elemen identitas 0:

a) Untuk setiap $x, y \in S$ maka $x + y \in S$

b) Untuk setiap $x, y, z \in S$ maka $(x + y) + z = x + (y + z)$

c) memiliki elemen identitas 0 sedemikian sehingga $x + 0 = 0 + x = x$ untuk setiap $x \in S$

Tabel 3.1 Operasi penjumlahan pada S

+	0	a	b	c	d
0	0	a	b	c	d
a	a	a	b	d	d
b	b	b	b	d	d
c	c	d	d	c	d
d	d	d	d	d	d

Berdasarkan Tabel 3.1 jelas bahwa S tertutup terhadap operasi penjumlahan. Selain itu, S juga memenuhi hukum assosiatif terhadap operasi penjumlahan. Jadi terbukti bahwa $(S,+)$ merupakan semigrup dengan *absorbing zero*

2. Langkah berikutnya akan ditunjukkan bahwa $(S,.)$ merupakan Semigrup terhadap perkalian:

a) untuk setiap $x, y \in S$ maka $x \cdot y \in S$

b) untuk setiap $x, y, z \in S$ maka $(x.y).z = x.(y.z)$,

Tabel 3.2 Operasi perkalian terhadap S

•	0	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0
a	0	a	b	c	d
b	0	b	b	c	d
c	0	c	b	c	d
d	0	d	d	c	d

Berdasarkan Tabel 3.2 jelas bahwa S tertutup terhadap operasi perkalian. Selain itu, S juga memenuhi hukum assosiatif terhadap operasi perkalian. Jadi terbukti bahwa $(S,\cdot)$ merupakan semigrup

3. Berlaku hukum distributif kanan

Untuk setiap $x, y, z \in S$ maka $(x+y)z = xz + yz$.

Dari pembuktian 1,2 dan 3 maka terbukti bahwa himpunan $S = \{0, a, b, c, d\}$ adalah suatu seminearring kanan. ■

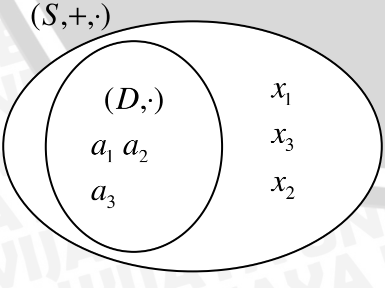
Suatu elemen *a* pada seminearring kanan dikatakan elemen distributif jika untuk setiap $x, y \in S$ maka $a(x+y) = ax + ay$, seminearring kanan dikatakan seminearring distributif jika setiap elemennya adalah elemen distributif (Shabir dan Ahmed, 2007). Pada skripsi ini setiap seminearring kanan memiliki elemen identitas terhadap operasi perkalian.

Definisi 3.1.5 (Shabir dan Ahmed, 2007)

Misalkan *S* adalah seminearring kanan, maka *S* disebut *distributively generated seminearring* atau disingkat dengan *d.g* jika *S* memiliki subsemigrup *D* terhadap operasi perkalian yang elemen-elemennya merupakan elemen distributif sedemikian sehingga *D* membangun $(S,+)$.

Jika *S* adalah *distributively generated seminearring* maka terdapat elemen-elemen distributif $d_1, d_2, ..., d_n \in D$ sedemikian sehingga $r = k_1 d_1 + k_n d_2 + ... + k_n d_n$, untuk setiap $r \in S$ dan $k_1, k_2, ..., k_n$ adalah nilai-nilai koefisien dimana $k_1, k_2, ..., k_n \in N$. Ilustrasi mengenai *distributively generated seminearring* akan ditunjukkan dengan diagram Ven dibawah ini. Dimisalkan $(S,+,.)$ adalah suatu seminearring kanan dan *D* adalah subsemigrup terhadap operasi perkalian.

$(S,+,\cdot)$



$$x_1 = k_{m1}a_1 + k_{m2}a_2 + k_{m3}a_3$$
$$x_2 = k_{n1}a_1 + k_{n2}a_2 + k_{n3}a_3$$
$$x_3 = k_{p1}a_1 + k_{p2}a_2 + k_{p3}a_3$$

Berikut ini adalah contoh dari *distributively generated seminearring*

Contoh 3.1.6

Pandang $(Z_4,+,\cdot)$ sebagai seminearring kanan. Akan ditunjukkan bahwa seminearring kanan $(Z_4,+,\cdot)$ merupakan *distributively generated seminearring*

Bukti: $D=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}$ adalah subsemigrup dari $Z_4=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3}\}$ terhadap operasi perkalian yang didefinisikan sebagai berikut

Tabel 3.3 Operasi perkalian terhadap *D*

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$

Diketahui bahwa $(Z_4,+,\cdot)$ merupakan suatu ring. Sehingga dijamin bahwa setiap elemennya memenuhi hukum distributif kanan dan distributif kiri, sehingga terbukti bahwa elemen-elemen di *D* adalah elemen-elemen distributif.

Langkah berikutnya akan ditunjukkan bahwa setiap elemen di Z_4 dibangun oleh elemen-elemen di *D*

$\bar{0}=1.\bar{0}+2.\bar{1}+1.\bar{2}$

$\bar{1}=1.\bar{0}+3.\bar{1}+1.\bar{2}$

$\bar{2}=1.\bar{0}+2.\bar{1}+2.\bar{2}$

$\bar{3}=1.\bar{0}+1.\bar{1}+1.\bar{2}$

Jadi terbukti bahwa $(Z_4,+,\cdot)$ merupakan *distributively generated seminearring.* ▪

Jika *A* dan *B* adalah suatu himpunan tak kosong dan merupakan himpunan bagian dari seminearring kanan, maka *AB* dinotasikan sebagai himpunan penjumlahan berhingga yang berbentuk $\sum a_k b_k$ dimana $a_k \in A$ dan $b_k \in B$. $AB = \{\sum_{finite} a_k b_k | a_k \in A, b_k \in B\}$ (Shabir dan Ahmed, 2007).

Definisi 3.1.7 (Shabir dan Ahmed, 2007)
Misalkan *S* adalah seminearring kanan. Untuk setiap $a \in S$, maka *Sa* dinotasikan sebagai himpunan semua penjumlahan berhingga yang berbentuk $\sum s_k a$ dimana $s_k \in S$. Dan *aS* adalah suatu himpunan semua penjumlahan berhingga yang berbentuk $\sum as_k$ dimana $s_k \in S$.
Karena *S* merupakan distributif kanan maka $Sa = \{sa | s \in S\}$.

Lemma 3.1.8
Misalkan *S* adalah suatu seminearring kanan. Untuk setiap $a \in S$ maka *Sa* adalah ideal kiri pada seminearring kanan yang dibangun oleh *a*. Dan *aS* adalah ideal kanan pada seminearring kanan.

Bukti: 1. Ambil sebarang $x, y \in Sa$. Akan dibuktikan $x + y \in Sa$. Karena $x, y \in Sa$ maka $x = s_1 a$ dan $y = s_2 a$ dimana $s_1, s_2 \in S$. $x + y = s_1 a + s_2 a = (s_1 + s_2)a = s_n a \in Sa$, $s_n \in S$. Jadi terbukti bahwa $x + y \in Sa$

2. Ambil sebarang $x \in Sa$. Akan dibuktikan $sx \in Sa$ dimana $s \in S$. Karena $x \in Sa$ maka $x = s_1 a$. $sx = s(s_1 a) = (ss_1)a = s_m a \in Sa$, $s_m \in S$. Jadi terbukti bahwa $sx \in Sa$

Dari 1 dan 2 maka terbukti bahwa *Sa* adalah ideal kiri dari seminearring kanan. Karena seminearring kanan memiliki elemen identitas terhadap operasi perkalian maka $a \in Sa$.
Selanjutnya akan dibuktikan bahwa *aS* adalah ideal kanan

a) Ambil sebarang $x, y \in aS$. Akan dibuktikan bahwa $x + y \in aS$. Karena $x, y \in aS$ maka $x = \sum_{finite} as_i$ dan $y = \sum_{finite} at_i$ dimana $s_i, t_i \in S$.

$$x+y = \sum_{finite} as_i + \sum_{finite} at_i$$
$$= as_1 + as_2 + \ldots + as_n + at_1 + at_2 + \ldots + at_n$$

Misalkan: $t_1 = s_{n+1}, t_2 = s_{n+2}, \ldots., t_n = s_{n+n}$

Maka:

$$x + y = as_1 + as_2 + \ldots + as_n + as_{n+1} + as_{n+2} + \ldots + as_{n+n}$$
$$x + y = \sum_{finite} as_i \in aS$$

b) Ambil sebarang $x \in aS$ dan $s \in S$. Akan dibuktikan bahwa $xs \in aS$. Karena $x \in aS$ maka $x = \sum_{finite} as_i$

$$xs = (\sum_{finite} as_i)s$$
$$= (as_1 + as_2 + \ldots + as_n)s$$
$$= as_1 s + as_2 s + \ldots + as_n s$$

Karena seminearring kanan maka elemen-elemennya tertutup terhadap operasi pergandaan: $s_1 s = u_1, s_2 s = u_2, \ldots, s_n s = u_n \in S$ sehingga:

$$xs = au_1 + au_1 + \ldots + au_n = \sum_{finite} au_i \in aS$$

Dari a) dan b) maka terbukti bahwa *aS* adalah Ideal kanan pada seminearring kanan. ▪

Lemma 3.1.9

Misalkan *S* adalah seminearring kanan. Jika *A* dan *B* adalah ideal pada *S* maka $AB = \{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \,|\, a_k \in A \text{ dan } b_k \in B\}$ bukan merupakan ideal. Tetapi jika *S* adalah *distributively generated seminearring* maka *AB* adalah ideal pada *S*.

Bukti : Pertama-tama akan ditunjukkan bahwa *AB* bukan merupakan ideal pada seminearring kanan.

Ambil sebarang $x, y \in AB$. Akan dibuktikan $x + y \in AB$

Karena $x \in AB$ maka $x = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$.

Dan $y \in AB$ maka $y = \sum_{k=1}^{n} f_k g_k = f_1 g_1 + f_2 g_2 + \ldots + f_n g_n$

dimana $a_1, a_2, \ldots, a_n, f_1, f_2, \ldots, f_n \in A$

$b_1, b_2, \ldots, b_n, g_1, g_2, \ldots, g_n \in B$.

$$x + y = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} f_k g_k$$

$$x + y = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n) + (f_1 g_1 + f_2 g_2 + \ldots + f_n g_n)$$

Dimisalkan: $f_1 = a_{n+1}$, $f_2 = a_{n+2}, \ldots, f_n = a_{n+n}$, $g_1 = b_{n+1}$, $g_2 = b_{n+2}$, $\ldots$, $g_n = b_{n+n}$ maka

$$x + y = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n + a_{n+1} b_{n+1} + a_{n+2} b_{n+2} + \ldots + a_{n+n} b_{n+n}$$

$$x + y = \sum_{k=1}^{2n} a_k b_k$$

Jadi terbukti bahwa $x + y \in AB$.

Ambil sebarang $x \in AB$.
Akan dibuktikan bahwa $rx \in AB$ dan $xr \in AB$ dimana $r \in S$

Karena $x \in AB$ maka $x = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$.

$$rx = r \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = r(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)$$

Karena S bukan merupakan *distributively generated seminearring* maka elemen-elemennya bukan merupakan elemen distributif, sehingga $r(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n) \neq r a_1 b_1 + r a_2 b_2 + \ldots + r a_n b_n$. Sehingga $rx \notin AB$. Jadi *AB* bukan ideal pada *S*

Langkah berikutnya akan dibuktikan bahwa *AB* adalah ideal pada *distributively generated seminearring*

Ambil sebarang $x \in AB$.

Akan dibuktikan bahwa $rx \in AB$ dan $xr \in AB$ dimana $r \in S$

$x \in AB$ maka $x = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$.

Karena S adalah *distributively generated seminearring* maka terdapat Subsemigrup D terhadap operasi perkalian yang elemen-elemennya adalah elemen distributif dan membangun $(S,+)$, misalkan $d_1, d_2, \ldots, d_n \in D$ maka $r = d_1 + d_2 + \ldots + d_n$ dengan mengambil semua nilai koefisiennya adalah 1.

$$rx = r\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = (d_1 + d_2 + \ldots + d_n)\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

$$rx = d_1 \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + d_2 \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \ldots + d_n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

$$\begin{aligned} rx = {} & d_1(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n) + d_2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n) + \ldots \\ & + d_n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} rx = {} & (d_1 a_1 b_1 + d_1 a_2 b_2 + \ldots + d_1 a_n b_n) + (d_2 a_1 b_1 + d_2 a_2 b_2 + \ldots + d_2 a_n b_n) \\ & + \ldots + (d_n a_1 b_1 + d_n a_2 b_2 + \ldots + d_n a_n b_n) \end{aligned}$$

Karena A ideal maka $d_1 a_1, \ldots, d_1 a_n, d_2 a_1, \ldots, d_2 a_n, d_n a_1, \ldots, d_n a_n \in A$

Jika dimisalkan :

$$\begin{aligned} & d_1 a_1 = p_1, d_1 a_2 = p_2, \ldots, d_1 a_n = p_n \\ & d_2 a_1 = q_1, d_2 a_2 = q_2, \ldots, d_2 a_n = q_n \\ & \vdots \\ & d_n a_1 = s_1, d_n a_2 = s_2, \ldots, d_n a_n = s_n, \text{ maka} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} rx = {} & (p_1 b_1 + p_2 b_2 + \ldots + p_n b_n) + (q_1 b_1 + q_2 b_2 + \ldots + q_n b_n) + \ldots + \\ & (s_1 b_1 + s_2 b_2 + \ldots + s_n b_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} rx = {} & (p_1 + q_1 + \ldots + s_1)b_1 + (p_2 + q_2 + \ldots + s_2)b_2 + \ldots \\ & + (p_n + q_n + \ldots + s_n)b_n \end{aligned}$$

Karena $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, s_1, \ldots, s_n \in A$ dan A Ideal maka:

$$p_1 + q_1 + \ldots + s_1 = c_1 \in A$$

$$p_2 + q_2 + \ldots + s_2 = c_2 \in A$$

$$\vdots$$

$$p_n + q_n + \ldots + s_n = c_n \in A$$

Sehingga $rx = c_1 b_1 + c_2 b_2 + \ldots + c_n b_n$

$rx = \sum_{k=1}^{n} c_k b_k$ dimana $c_k \in A$. Jadi $rx \in AB$

$$xr = (\sum_{k=1}^{n} a_k b_k) r = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n) r$$

$$xr = (a_1 b_1) r + (a_2 b_2) r + \ldots + (a_n b_n) r$$

$$xr = a_1 (b_1 r) + a_2 (b_2 r) + \ldots + a_n (b_n r)$$

Karena *B* adalah ideal maka $b_1 r, b_2 r, \ldots, b_n r \in B$, sehingga:

$$xr = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots + a_n f_n$$

$xr = \sum_{k=1}^{n} a_k f_k$ dimana $f_k \in B$. Jadi $xr \in AB$

Jadi terbukti bahwa *AB* merupakan ideal pada *distributvely generated seminearring.* ◘

3.2 *Weakly Regular Seminearring*

Pada definisi berikut ini akan diperkenalkan suatu pengembangan dari seminearring kanan yang dinamakan *left weakly regular seminearring*.

Definisi 3.2.1 (Shabir dan Ahmed, 2007)
Suatu seminearring kanan disebut *left weakly regular seminearring* jika $x \in (Sx)^2$ untuk setiap $x \in S$.

Contoh himpunan yang merupakan *left weakly regular seminearring* diberikan di berikut ini

Contoh 3.2.2
Diberikan himpunan $S = \{0, a, b, c, d\}$. S suatu seminearring kanan dengan operasi penjumlahan dan perkalian yang didefinisikan sebagai berikut

Tabel 3.4 Operasi penjumlahan terhadap *S*

+	0	a	b	c	d
0	0	a	b	c	d
a	a	a	b	d	d
b	b	b	b	d	d
c	c	d	d	c	d
d	d	d	d	d	d

Tabel 3.5 Operasi perkalian terhadap *S*

•	0	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0
a	0	a	b	c	d
b	0	b	b	c	d
c	0	c	b	c	d
d	0	d	b	c	d

Tunjukkan bahwa *S* adalah *left weakly regular seminearring*

Bukti: Berdasarkan Tabel 3.5 dapat disimpulkan bahwa $a = e$ sedemikian sehingga $a \cdot x = x \cdot a = x$ (a adalah elemen identitas terhadap operasi pergandaan) dan 0 adalah elemen nol sedemikian sehingga $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$ untuk setiap $x \in S$.

1. Pilih $0 \in S$. Akan dibuktikan bahwa $0 \in (S0)^2$.

   $0 = 0 \cdot 0 = (r \cdot 0)(s \cdot 0)$ untuk setiap $r, s \in S$. Jadi terbukti bahwa $0 \in (S0)^2$

2. Pilih $a \in S$. Akan dibuktikan bahwa $a \in (Sa)^2$

$a = r \cdot a = (r \cdot a)(s \cdot a)$ untuk setiap $r, s \in S$. Jadi terbukti bahwa $a \in (Sa)^2$

3. Ambil sebarang $x \in S$. Akan dibuktikan $x \in (Sx)^2$. Berdasarkan Tabel 3.5 jika $x, y \neq 0$ dan $x, y \neq a$ maka $x \cdot y = y$ dan $y \cdot x = x$ dimana $x, y \in S$
   $x = x \cdot x = (r \cdot x)(s \cdot x)$ untuk $r, s \in S$
   Sehingga terbukti bahwa $x \in (Sx)^2$.

Dari 1, 2 dan 3 maka terbukti bahwa *S* adalah *left weakly regular seminearring.* ◘

Contoh 3.2.3

Suatu himpunan $Z_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ terhadap operasi $\oplus$ dan $\otimes$ merupakan suatu *left weakly regular seminearring* dimana operasi $\oplus$ dan $\otimes$ didefinisikan sebagai berikut : $a \oplus b = maks(a, b)$ dan $a \otimes b = min(a, b)$.

Bukti: Pertama-tama akan ditunjukkan bahwa $(Z_6, *, \#)$ adalah suatu seminearring kanan

A. $(Z_6, \oplus)$ merupakan semigrup

1) tertutup (untuk setiap $a, b \in Z_6$ maka $a \oplus b \in Z_6$)

   Jika $a < b$ maka $a \oplus b = b \in Z_6$ untuk setiap $a, b \in Z_6$

   Jika $b < a$ maka $a \oplus b = a \in Z_6$ untuk setiap $a, b \in Z_6$

   Jika $a = b$ maka $a \oplus b = a \oplus a = a \in Z_6$

2) Berlaku hukum assosiatif (untuk setiap $a, b, c \in Z_6$ maka $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$)

   a. Jika $a < b < c$ maka: $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$
   $a \oplus c = b \oplus c$
   $c = c$

   b. Jika $b < c < a$ maka: $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$
   $a \oplus c = a \oplus c$
   $a = a$

c. Jika $a < c < b$ maka: $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$

$a \oplus b = b \oplus c$

$b = b$

d. Jika $c < b < a$ maka: $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$

$a \oplus b = a \oplus c$

$a = a$

e. Jika $b < a < c$ maka: $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$

$a \oplus c = a \oplus c$

$c = c$

f. Jika $c < a < b$ maka: $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$

$a \oplus b = b \oplus c$

$b = b$

Dari pembuktian 1) dan 2) maka $(Z_6, \oplus)$ merupakan semigrup terhadap operasi $\oplus$ yang didefinisikan sebagai Tabel berikut:

Table 3.6 Operasi $\oplus$ pada Z_6

$\oplus$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{5}$

B. $(Z_6, \otimes)$ merupakan semigrup

1) tertutup (untuk setiap $a, b \in Z_6$ maka $a \otimes b \in Z_6$)

Jika $a < b$ maka $a \otimes b = a \in Z_6$ untuk setiap $a, b \in Z_6$

Jika $b < a$ maka $a \otimes b = b \in Z_6$ untuk setiap $a, b \in Z_6$

Jika $a = b$ maka $a \otimes b = a \otimes a = a \in Z_6$

2) Berlaku hukum assosiatif (untuk setiap $a,b,c \in Z_6$ maka $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$)

a.Jika $a < b < c$ maka: $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$

$a \otimes b = a \otimes c$

$a = a$

b.Jika $b < c < a$ maka: $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$

$a \otimes b = b \otimes c$

$b = b$

c.Jika $a < c < b$ maka: $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$

$a \otimes b = a \otimes c$

$a = a$

d.Jika $c < b < a$ maka: $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$

$a \otimes c = b \otimes c$

$c = c$

e.Jika $b < a < c$ maka: $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$

$a \otimes b = b \otimes c$

$b = b$

f.Jika $c < a < b$ maka: $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$

$a \otimes c = a \otimes c$

$c = c$

Dari pembuktian 1) dan 2) maka $(Z_6, \otimes)$ merupakan semigrup terhadap operasi $\otimes$ yang didefinisikan sebagai Tabel berikut:

Table 3.7 Operasi $\otimes$ pada Z_6

$\otimes$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$

C. operasi $\otimes$ terhadap operasi $\oplus$ berlaku hukum distributif

a. Jika $a < b < c$ maka: $(b \oplus c) \otimes a = b \otimes a \oplus c \otimes a$

$$c \otimes a = a \oplus a$$
$$a = a$$

b. Jika $b < c < a$ maka: $(b \oplus c) \otimes a = b \otimes a \oplus c \otimes a$

$$c \otimes a = b \oplus c$$
$$c = c$$

c.Jika $a < c < b$ maka: $(b \oplus c) \otimes a = b \otimes a \oplus c \otimes a$

$$b \otimes a = a \oplus a$$
$$a = a$$

d. Jika $c < b < a$ maka: $(b \oplus c) \otimes a = b \otimes a \oplus c \otimes a$

$$b \otimes a = b \oplus c$$
$$b = b$$

e. Jika $b < a < c$ maka: $(b \oplus c) \otimes a = b \otimes a \oplus c \otimes a$

$$c \otimes a = b \oplus a$$
$$a = a$$

f. Jika $c < a < b$ maka: $(b \oplus c) \otimes a = b \otimes a \oplus c \otimes a$

$$b \otimes a = a \oplus c$$
$$a = a$$

Dari A,B dan C maka terbukti bahwa $(Z_6, \oplus, \otimes)$ adalah suatu seminearring kanan.

Langkah berikutnya akan ditunjukkan bahwa $(Z_6, \oplus, \otimes)$ merupakan *left weakly regular seminearring.*

Ambil sebarang $a \in Z_6$. Akan dibuktikan bahwa $a \in (Z_6 \otimes a)^2$

a. Jika $a < b < c$ maka: $a = a \otimes a = (b \otimes a) \otimes (c \otimes a)$

Jadi $a \in (Z_6 \otimes a)^2$. Untuk setiap $b, c \in Z_6$

b. Jika $b < c < a$ maka: $a = a \otimes a = (a \otimes a) \otimes (a \otimes a)$

Jadi $a \in (Z_6 \otimes a)^2$.

c. Jika $a < c < b$ maka: $a = a \otimes a = (b \otimes a) \otimes (c \otimes a)$

Jadi $a \in (Z_6 \otimes a)^2$. Untuk setiap $b, c \in Z_6$

d. Jika $c < b < a$ maka: $a = a \otimes a = (a \otimes a) \otimes (a \otimes a)$

Jadi $a \in (Z_6 \otimes a)^2$

e. Jika $b < a < c$ maka: $a = a \otimes a = (c \otimes a) \otimes (c \otimes a)$

Jadi $a \in (Z_6 \otimes a)^2$. Untuk setiap $c \in Z_6$

f. Jika $c < a < b$ maka: $a = a \otimes a = (b \otimes a) \otimes (b \otimes a)$

Jadi $a \in (Z_6 \otimes a)^2$. Untuk setiap $b \in Z_6$

Jadi terbukti bahwa $(Z_6, \oplus, \otimes)$ merupakan suatu *left weakly regular seminearring.* ▪

Pada Teorema 3.2.4 berikut ini akan dibuktikan bahwa jika S adalah *left weakly regular seminearring* maka setiap ideal kiri pada S adalah ideal idempotent ($I^2=I$). Begitu juga sebaliknya, misalkan S adalah seminearring kanan. Jika setiap ideal kiri pada S adalah ideal idempotent maka S adalah *left weakly regular seminearring*. Dimana $(Sx)^2 = \{\sum_{finite} s_i x t_i x \mid s_i, t_i \in S\}$ dan $I^2 = \{\sum_{finite} i_k j_k \mid i_k, j_k \in I\}$.

Teorema 3.2.4 (Shabir dan Ahmed, 2007)
Misalkan S merupakan seminearring kanan. Maka pernyataan berikut adalah ekivalen

1. S adalah *left weakly regular seminearring*
2. Setiap ideal kiri dari S adalah idempotent (yaitu $A^2 = A$ untuk setiap A ideal kiri pada S)

Bukti : $(1) \Rightarrow (2)$ Ambil sebarang J ideal kiri pada S. Akan dibuktikan J idempotent pada S atau $J = J^2$. Pertama-tama akan ditunjukkan bahwa $J^2 \subseteq J$. Ambil sebarang $x \in J^2$. Akan dibuktikan $x \in J$. Karena $x \in J^2$ maka $x = \sum_{finite} a_i b_i$ dimana $a_i, b_i \in J$. Sedangkan diketahui bahwa J adalah ideal kiri pada S sehingga untuk setiap $a_i, b_i \in J$ maka $\sum_{finite} a_i b_i = x \in J$. Jadi terbukti bahwa $J^2 \subseteq J$.

Langkah berikutnya akan dibuktikan bahwa $J \subseteq J^2$. Ambil sebarang $x \in J$. Akan dibuktikan bahwa $x \in J^2$. Karena *J* adalah ideal kiri pada *S* maka $J \subseteq S$. Sehingga $x \in S$. Karena *S* adalah *left weakly regular seminearring* maka $x \in (Sx)^2$. Akan ditunjukkan bahwa $(Sx)^2 \subseteq J^2$. Sehingga akan dibuktikan bahwa $x \in J^2$.

Karena $x \in (Sx)^2$ maka $x = \sum_{finite}(r_i x)(t_i x)$ dimana $r_i, t_i \in S$. Karena *J* merupakan ideal kiri pada *S* maka $r_i x, t_i x \in J$. Sehingga $\sum_{finite}(r_i x)(t_i x) = x \in J^2$. Jadi terbukti bahwa $(Sx)^2 \subseteq J^2$. Karena $x \in (Sx)^2$ maka $x \in J^2$

(2) $\Rightarrow$ (1) Diketahui bahwa setiap ideal kiri pada seminearring kanan adalah idempotent. Akan dibuktikan bahwa *S* adalah *left weakly regular seminearring*.

Ambil sebarang $x \in S$. Akan dibuktikan $x \in (Sx)^2$. Jika $x \in S$ maka $x \in Sx$. Dimana *Sx* adalah ideal kiri yang dibangun oleh *x. Sx* adalah ideal kiri pada ring *S*. Karena setiap ideal kiri pada *S* adalah idempotent maka $Sx = (Sx)^2$.

Jadi terbukti bahwa $x \in (Sx)^2$. ◘

Pada proposisi 3.2.5 berikut ini akan dibuktikan bahwa jika $a \in S$ maka SaS adalah ideal dua sisi pada *S* yang dibangun oleh *a* dan akan ditunjukkan bahwa $a \in SaS$, dimana *S* adalah *distributively generated seminearing* dan $SaS = \{\sum_{finite} s_i a t_i \mid s_i, t_i \in S\}$ (Shabir dan Ahmed, 2007).

Proposisi 3.2.5 (Shabir dan Ahmed, 2007)
Misalkan *S* adalah *distributively generated seminearring*. Jika $z \in S$ maka SzS adalah ideal dua sisi pada *S* yang dibangun oleh *z.*

Bukti: 1). Ambil sebarang $a, b \in SzS$. Akan dibuktikan $a + b \in SzS$.

Jika $a \in SzS$ maka $a = \sum_{finite} s_i z t_i$ untuk setiap $s_i, t_i \in S$

Jika $b \in SzS$ maka $b = \sum_{finite} s_i ' z t_i '$ untuk setiap $s_i ', t_i ' \in S$

$$a+b = \left(\sum_{finite} s_i z t_i + \sum_{finite} s_i ' z t_i ' \right)$$

$$= s_1 z t_1 + s_2 z t_2 + \ldots + s_n z t_n + s_1 ' z t_1 ' + s_2 ' z t_2 ' + \ldots + s_n ' z t_n '$$

Misalkan $s_1 ' z t_1 ' = s_{n+1} z t_{n+1}$

$s_2 ' z t_2 ' = s_{n+2} z t_{n+2}$

$\vdots$

$s_n ' z t_n ' = s_{n+n} z t_{n+n}$, maka:

$$a+b = s_1 z t_1 + s_2 z t_2 + \ldots + s_n z t_n + s_{n+1} z t_{n+1} + s_{n+2} z t_{n+2} + \ldots + s_{2n} z t_{2n}$$

$$a+b = \sum_{finite} s_i z t_i \in SzS$$

2). Ambil sebarang $a \in SzS, r \in S$. Akan dibuktikan bahwa $ar \in SzS$ dan $ra \in SzS$.

Karena $a \in SzS$ maka $a = \sum_{finite} szt$ untuk setiap $s, t \in S$

$$ar = \left(\sum_{finite} s_i z t_i \right) r$$

$$= (s_1 z t_1 + s_2 z t_2 + \ldots + s_n z t_n) r$$

$$= (s_1 z t_1 r + s_2 z t_2 r + \ldots + s_n z t_n r)$$

Karena seminearring kanan, maka elemen-elemennya tertutup terhadap operasi pergandaan sehingga:

$t_1 r = u_1, t_2 r = u_2, \ldots, t_n r = u_n \in S$ maka

$$ar = (s_1 z u_1 + s_2 z u_2 + \ldots + s_n z u_n)$$

$$= \sum_{finite} s_i z u_i \in SzS$$

Langkah berikutnya akan ditunjukkan bahwa $ra \in SzS$. Karena seminearring kanan hanya memenuhi hukum distributif kanan sehingga untuk setiap $a,b,c \in S$ maka $a(b+c) \neq ab+ac$. Berdasarkan pernyataan tersebut maka untuk membuktikan bahwa $ra \in SzS$ perlu digunakan sifat *distributively generated.* Diketahui bahwa S adalah *distributively generated* maka terdapat subsemigrup D terhadap operasi perkalian yang elemen-elemennya adalah elemen distributif (distributif kiri) dan membangun $(S,+)$, misalkan $d_1, d_2, ..., d_n \in D$ maka $r = d_1 + d_2 + ... + d_n$

$$ra = (d_1 + d_2 + ... + d_n)\left(\sum_{finite} szt\right)$$

$$= d_1\left(\sum_{finite} szt\right) + d_2\left(\sum_{finite} szt\right) + ... + d_n\left(\sum_{finite} szt\right)$$

$$= d_1(s_1zt_1 + s_2zt_2 + ... + s_nzt_n) + d_2(s_1zt_1 + s_2zt_2 + ... s_nzt_n) + \ldots + d_n(s_1zt_1 + s_2zt_2 + ... + s_nzt_n)$$

$$= (d_1s_1zt_1 + d_1s_2zt_2 + ... + d_1s_nzt_n) + (d_2s_1zt_1 + d_2s_2zt_2 + \ldots + d_2s_nzt_n) + ... + (d_ns_1zt_1 + d_ns_2zt_2 + ... + d_ns_nzt_n)$$

Karena seminearring kanan, maka elemen-elemennya tertutup terhadap operasi pergandaan sehingga:

$$d_1s_1, d_1s_2, ..., d_1s_n, d_2s_1, d_2s_2, ..., d_2s_n, d_ns_1, d_ns_2, ..., d_ns_n \in S$$

Misalkan : $d_1s_1 = j_1, d_1s_2 = j_2, ..., d_1s_n = j_n$

$d_2s_1 = k_1, d_2s_2 = k_2, ..., d_2s_n = k_n$

$\vdots$

$d_ns_1 = m_1, d_ns_2 = m_2, ..., d_ns_n = m_n$ maka:

$$ra = (j_1zt_1) + (j_2zt_2) + ... + (j_nzt_n) + (k_1zt_1) + (k_2zt_2) + ... + (k_nzt_2) + \ldots + (m_1zt_1) + (m_2zt_2) + ... + (m_nzt_2)$$

$$ra = (j_1 + k_1 + ... + m_1)zt_1 + (j_2 + k_2 + ... + m_2)zt_2 + ... + (j_n + k_n + ... + m_n)zt_n$$

Misalkan: $j_1 + k_1 + ... + m_1 = c_1$

$j_2 + k_2 + ... + m_2 = c_2$

$$\vdots$$

$$j_n + k_n + \ldots + m_n = c_n$$

Maka : $ra = c_1 zt_1 + c_2 zt_2 + \ldots + c_n zt_n$

$$ra = \sum_{k=1}^{n} c_k zt_k \in SzS$$

Jadi terbukti bahwa SzS adalah ideal dua sisi pada S yang dibangun oleh z. Karena seminearring kanan memiliki elemen identitas terhadap operasi perkalian maka $z \in SzS$. Jika dimisalkan I adalah ideal dua sisi yang memuat z maka $szt \in I$ untuk setiap $s, t \in I$. Sehingga mengakibatkan $\sum_{finite} s_i zt_i \in I$. Karena $\sum_{finite} s_i zt_i \in I$ maka $SzS \subseteq I$. ◘

Pada Teorema 3.2.4 diketahui bahwa jika S adalah seminearring kanan maka pernyataan (1) dan (2) ekivalen, yaitu S adalah *left weakly regular seminearring* jika dan hanya jika setiap ideal kiri pada S adalah idempotent. Teorema tersebut juga berlaku jika S adalah *distributively generated seminearring*. Selain teorema tersebut, dalam *distributively generated seminearring* juga berlaku pernyataan bahwa irisan ideal kiri dan ideal dua sisi sama dengan perkalian keduanya. Dan pernyataan tersebut tidak berlaku jika S adalah seminearring kanan.

Teorema 3.2.6 (Shabir dan Ahmed, 2007)
Misalkan S adalah *distributively generated seminearring*. Maka pernyataan berikut ekivalen
1. S adalah *left weakly regular*
2. Setiap ideal kiri pada S adalah idempotent
3. Untuk setiap ideal dua sisi I pada S maka berlaku $J \cap I = IJ$, J adalah ideal kiri pada S

Bukti : $(1) \Rightarrow (2)$ (sesuai dengan Teorema 3.2.4)

$(2) \Rightarrow (3)$ Diketahui bahwa I adalah ideal dua sisi pada S dan J adalah ideal kiri pada S. Akan ditunjukkan bahwa $J \cap I = IJ$

a) akan dibuktikan bahwa $IJ \subseteq J \bigcap I$. Untuk hal ini akan ditunjukkan bahwa $IJ \subseteq J$ dan $IJ \subseteq I$

i) Ambil sebarang $x \in IJ$. Akan dibuktikan $x \in J$. Karena $x \in IJ$ maka $x = \sum_{finite} i_i j_i$.

$x = i_1 j_1 + i_2 j_2 + ... + i_n j_n$ dimana $i_1, i_2, ..., i_n \in I$ dan $j_1, j_2, ..., j_n \in J$

Karena $i_1, i_2, ..., i_n \in I$ dan $I \subseteq S$ maka jelas bahwa $i_1, i_2, ..., i_n \in S$. Selanjutnya karena J merupakan ideal kiri pada S maka berlaku:

$x = i_1 j_1 + i_2 j_2 + ... + i_n j_n = \sum_{finite} i_i j_i \in J$. Sehingga terbukti bahwa $IJ \subseteq J$

ii) Ambil sebarang $x \in IJ$. Akan dibuktikan $x \in I$. Karena $x \in IJ$ maka $x = \sum_{finite} i_i j_i$.

$x = i_1 j_1 + i_2 j_2 + ... + i_n j_n$ dimana $i_1, i_2, ..., i_n \in I$ dan $j_1, j_2, ..., j_n \in J$

Karena $j_1, j_2, ..., j_n \in J$ dan $J \subseteq S$ maka jelas bahwa $j_1, j_2, ..., j_n \in S$

Karena I merupakan ideal dua sisi pada S maka berlaku:

$x = i_1 j_1 + i_2 j_2 + ... + i_n j_n = \sum_{finite} i_i j_i \in I$. Sehingga terbukti bahwa $IJ \subseteq I$

Dari i) dan ii) maka terbukti bahwa $IJ \subseteq J \bigcap I$

b) $J \bigcap I \subseteq IJ$

Ambil sebarang $x \in J \bigcap I$. Akan dibuktikan $x \in IJ$

Jika $x \in J \bigcap I$ maka $x \in J$ dan $x \in I$. Karena Sx adalah ideal kiri yang dibangun oleh x maka $x \in Sx$. Dari pernyataan (2) diketahui bahwa setiap ideal kiri dari S adalah idempotent maka $x \in Sx = (Sx)^2$ sehingga $x = \sum (r_i x)(t_i x) = (\sum (r_i x t_i))x$.

Karena $x \in I$ dan I adalah ideal dua sisi maka $\sum_{finite} r_i x t_i \in I$.

Sehingga $x = \sum (r_i x)(t_i x) = (\sum (r_i x t_i))x \in IJ$, untuk setiap $x \in J \bigcap I$. Jadi didapat $J \bigcap I \subseteq IJ$.

Dari a) dan b) diperoleh bahwa $J \bigcap I = IJ$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Ambil sebarang $x \in S$. Akan dibuktikan $x \in (Sx)^2$. Karena $x \in S$ maka $x \in Sx$, dimana *Sx* adalah ideal kiri yang dibangun oleh *x*. Dari Proposisi 3.2.6 diketahui bahwa *SxS* adalah ideal dua sisi pada *distributively generated seminearring,* dengan menggunakan pernyataan (3) diperoleh:

$Sx \bigcap SxS = (SxS)(Sx)$

Akan ditunjukkan bahwa $(SxS)(Sx) = (Sx)^2$

1. Akan ditunjukkan bahwa $(SxS)(Sx) \subseteq (Sx)^2$. Ambil sebarang $x \in (SxS)(Sx)$. Akan dibuktikan bahwa $x \in (Sx)^2$. Karena $x \in (SxS)(Sx)$ maka $x = (\sum_{finite} s_i x t_i)(rx)$ dimana $s_i, t_i, r \in S$.

   $$\begin{aligned} x &= (s_1 x t_1 + s_2 x t_2 + ... + s_n x t_n) r x \\ &= s_1 x t_1 r x + s_2 x t_2 r x + ... + s_n x t_n r x \end{aligned}$$

   Diketahui bahwa *S* adalah seminearring kanan, maka:

   $t_1 r = u_1, t_2 r = u_2, ..., t_n r = u_n \in S$ sehingga:

   $$x = s_1 x u_1 x + s_2 x u_2 x + ... + s_n x u_n x = (\sum_{finite} s_i x u_i x) \in (Sx)^2$$

   jadi terbukti bahwa $(SxS)(Sx) \subseteq (Sx)^2$

2. Langkah berikutnya akan ditunjukkan $(Sx)^2 \subseteq (SxS)(Sx)$. Ambil sebarang $x \in (Sx)^2$. Akan dibuktikan bahwa $x \in (SxS)(Sx)$.

   Karena $x \in (Sx)^2$ maka $x = \sum_{finite} s_i x t_i x$ dimana $s_i, t_i \in S$

   $$x = (s_1 x t_1 x + s_2 x t_2 x + ... + s_n x t_n x)$$

   Karena $t \in S$ maka terdapat $e \in S$ sedemikian sehingga $t = te$ dimana e adalah elemen identitas terhadap operasi perkalian. Dari pernyataan tersebut maka:

$$x = (s_1xt_1ex + s_2xt_2ex + ... + s_nxt_nex)$$
$$x = (s_1xt_1 + s_2xt_2 + ... + s_nxt_n)ex$$
$$x = (\sum_{finite} s_ixt_i)es \in (SxS)(Sx)$$

Dari 1) dan 2) maka terbukti bahwa $(SxS)(Sx) = (Sx)^2$ sehingga $Sx \cap SxS = (Sx)^2$. Karena $x \in Sx \cap SxS$ maka jelas bahwa $x \in (Sx)^2$ sehingga membuktikan bahwa S adalah *left weakly regular seminearring.* ◘

Pada Proposisi dibawah ini akan dibuktikan bahwa setiap ideal dua sisi pada *left weakly regular seminearring* juga merupakan *left weakly regular seminearring.* Sehingga jika terdapat ideal kiri yang merupakan himpunan bagian dari ideal dua sisi tersebut, maka ideal kirinya adalah ideal idempotent (sifat ke-idempotentan Ideal pada *left weakly regular seminearring* dibuktikan pada Teorema 3.2.4).

Proposisi 3.2.7 (Shabir dan Ahmed, 2007)
Setiap ideal dari *left weakly regular seminearring* adalah *left weakly regular seminearring*

Bukti : Misalkan *S* adalah *left weakly regular seminearring*. Ambil sebarang *J* ideal dua sisi pada *S*. Akan dibuktikan bahwa *J* adalah *left weakly regular seminearring*.

Ambil sebarang $x \in J$. Akan dibuktikan bahwa $x \in (Jx)^2$.

Diketahui $x \in J$ maka Jx adalah suatu ideal kiri dari *S* karena:

1. Ambil sebarang $a, b \in Jx$. Akan dibuktikan $a + b \in Jx$.
   Karena $a, b \in Jx$ maka $a = j_1x$ dan $b = j_2x$ dimana $j_1, j_2 \in J$. $a + b = j_1x + j_2x = (j_1 + j_2)x \in Jx$
2. Ambil sebarang $a \in Jx$ dan $r \in S$. Akan dibuktikan $ra \in Jx$.
   Karena $a \in Jx$ maka $a = j_1x$.
   $ra = r(j_1x) = (rj_1)x = j_nx \in Jx$, dimana $j_n \in J$.

Karena *S* adalah *left weakly regular seminearring* dan Jx adalah ideal kiri pada *S* maka $Jx = (Jx)^2$ (berdasarkan Teorema 3.2.4).

Karena $x \in J$ dan $J \subseteq S$ maka jelas bahwa $x \in S$. Diketahui bahwa *S* adalah *left weakly regular seminearring* maka $x \in (Sx)^2$, sehingga

$$\begin{aligned} x &= \sum_{finite} s_i x t_i x \\ &= (s_1 x t_1 x + s_2 x t_2 x + \ldots + s_n x t_n x) \\ &= (s_1 x t_1 + s_2 x t_2 + \ldots + s_n x t_n) x \in Jx \end{aligned}$$

Karena $x \in Jx$ dan $Jx = (Jx)^2$ maka $x \in (Jx)^2$

Dengan demikian maka *J* adalah *left weakly regular seminearring.* ◘

Proposisi 3.2.8 (Shabir dan Ahmed, 2007)
Misalkan *S* adalah *distributively generated left weakly regular seminearring*. Misalkan *P* adalah suatu ideal pada *S* maka pernyataan berikut ini ekivalen:

1 $I \cap J = P$ maka $I = P$ atau $J = P$ *I,J* sebarang ideal di *S*

2 $I \cap J \subseteq P \Rightarrow I \subseteq P$ atau $J \subseteq P$

3 $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle \subseteq P \Rightarrow a \in P$ atau $b \in P$ untuk $a, b \in S$

Bukti: (1) $\Rightarrow$ (2) Ambil sebarang *I,J* ideal pada *S*. Dari pernyataan (1) maka berlaku bahwa jika $I \cap J = P$ maka $I = P$ atau $J = P$. Misalkan $I \cap J \subseteq P$ akan dibuktikan $I \subseteq P$ atau $J \subseteq P$. Diketahui bahwa $I \cap J = P$ maka $I \cap J \subseteq P$ dan $P \subseteq I \cap J$.

$$P = I \cap J$$
$$P = (I \cap J) \cup (I \cap J)$$
$$P = (I \cap J) \cup P$$
$$P = (I \cup P) \cap (J \cup P)$$

Karena $P = (I \cup P) \cap (J \cup P)$ maka $I \cup P = P$ atau $J \cup P = P$

Karena $I \cup P = P$ maka $I \subseteq P$ atau karena $J \cup P = P$ maka $J \subseteq P$. Jadi terbukti bahwa $I \subseteq P$ atau $J \subseteq P$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Ambil sebarang *I, J* ideal pada *S,* dari pernyataan 2 maka didapat bahwa $I \cap J \subseteq P \Rightarrow I \subseteq P$ atau $J \subseteq P$.

Misalkan $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle \subseteq P$ maka akan dibuktikan bahwa $a\in P$ atau $b\in P$. Dimana $\langle a\rangle$ adalah ideal dua sisi yang dibangun oleh *a* dan $\langle b\rangle$ adalah ideal yang dibangun oleh *b*. Akan dimisalkan bahwa $\langle a\rangle = I$ dan $\langle b\rangle = J$. Dari pernyataan (2) jika $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle \subseteq P$ maka $\langle a\rangle \subseteq P$ atau $\langle b\rangle \subseteq P$. Karena seminearring kanan memiliki elemen identitas terhadap operasi perkalian maka $a\in \langle a\rangle$ dan $b\in \langle b\rangle$. Karena $\langle a\rangle \subseteq P$ dan $a\in \langle a\rangle$ maka jelas bahwa $a\in P$. Atau karena $\langle b\rangle \subseteq P$ dan $b\in \langle b\rangle$ maka jelas bahwa $b\in P$. Jadi terbukti bahwa $a\in P$ atau $b\in P$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Misalkan $I\cap J = P$ maka akan dibuktikan bahwa $I = P$ atau $J = P$, dimana *I,J* adalah ideal pada *S*. Untuk setiap $a\in I$ dan $b\in J$. Dari pernyataan (3) maka didapat bahwa $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle \subseteq P \Rightarrow a\in P$ atau $b\in P$. Dimana $\langle a\rangle$ adalah ideal dua sisi yang dibangun oleh a dan $\langle b\rangle$ adalah ideal dua sisi yang dibangun oleh *b*. Diketahui bahwa $a\in I$ dan $a\in P$ atau $b\in J$ dan $b\in P$. Karena berlaku untuk setiap, maka $I = P$ atau $J = P$. ◘

3.3 *Left Pure Ideal* dan *Left Pure Left Ideal*

Left pure ideal dan *left pure left ideal* merupakan suatu ideal yang memenuhi syarat-syarat tertentu. Misalkan *S* adalah *distributively generated seminearring,* jika setiap ideal dua sisi dalam *S* adalah *left pure ideal* maka *S* adalah *left weakly regular seminearring*. Begitu juga sebaliknya, jika *S* adalah *distributively generated left weakly regular seminearrring* maka setiap ideal dua sisi pada *S* adalah *left pure ideal* (dibuktikan dalam Proposisi 3.3.2). Berikut ini akan diberikan definisi dari *left pure ideal* dan *left pure left ideal.*

Definisi 3.3.1 (Shabir dan Ahmed, 2007)
Ideal dua sisi *I* pada seminearring kanan dikatakan *left pure ideal* jika untuk setiap $x \in I$ terdapat $y \in I$ sedemikian sehingga *x=yx*. Dengan kata lain, *I* adalah *left pure ideal* jika dan hanya jika persamaan *a=xa* memiliki solusi di *I.*

Sedangkan yang dimaksud dengan *left pure left ideal* adalah ideal kiri *J* yang untuk setiap $x \in J$ terdapat $y \in J$ sedemikian sehingga *x=yx.* Atau dengan kata lain, *J* adalah *lef pure left ideal* jika dan hanya jika persamaan *a=xa* memiliki solusi di *J*, untuk setiap $a \in J$ (Ahsan dan Thaheem, 1989).

Proposisi 3.3.2 (Shabir dan Ahmed, 2007)
Misalkan *S* adalah *Distributively generated seminearring. S* adalah *left weakly regular seminearring* jika dan hanya jika setiap ideal *I* pada *S* adalah *left pure ideal*

Bukti: ($\Rightarrow$) Ambil sebarang *I* adalah ideal dua sisi pada seminearring kanan. Misalkan $x \in I$, karena $I \subseteq S$ maka $x \in S$. Diketahui bahwa *S* adalah *left weakly regular seminearring* maka $x \in (Sx)^2$ sehingga

$$\begin{aligned}
x &= \sum_{finite} (s_i x t_i x) \\
&= (s_1 x t_1 x + s_2 x t_2 x + \ldots + s_n x t_n x) \\
&= (s_1 x t_1 + s_2 x t_2 + \ldots + s_n x t_n) x \\
&= \sum_{finite} (s_i x t_i) x
\end{aligned}$$

Dimisalkan $y = \sum_{finite} (s_i x t_i)$, karena *I* adalah ideal dua sisi yang memuat *x* maka $y = \sum_{finite} (s_i x t_i) \in I$, sehingga $x = yx$.

Jadi terbukti bahwa *I* adalah *left pure ideal* karena untuk setiap $x \in I$ terdapat $y \in I$ sedemikian sehingga *x=yx.*

($\Leftarrow$) Diketahui bahwa setiap ideal dua sisi pada *distributively generated seminearring* adalah *left pure* *ideal*. Ambil sebarang $a \in S$ akan dibuktikan bahwa $a \in (Sa)^2$. Karena $a \in S$ maka SaS adalah ideal dua sisi yang dibangun oleh a (sesuai dengan Proposisi 3.2.5) dan karena seminearring kanan memiliki elemen identitas terhadap operasi perkalian maka $a \in SaS$. Diketahui bahwa SaS adalah ideal dua sisi maka untuk setiap $a \in SaS$ terdapat $x \in SaS$ sedemikian sehingga $a = xa$. Karena $a \in SaS$ maka $a = \sum_{finite} s_i a t_i$ dimana $s_i, t_i \in S$ sehingga :

$$\begin{aligned} a &= (\sum_{finite} s_i a t_i) a \\ &= (s_1 a t_1 + s_2 a t_2 + \ldots + s_n a t_n) a \\ &= (s_1 a t_1 a + s_2 a t_2 a + \ldots + s_n a t_n a) \backslash \\ &= (\sum_{finite} s_i a t_i a) \in (Sa)^2 \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa S adalah *left weakly regular seminearring.* ◘

Corollary 3.3.3 (Ahsan dan Thaheem, 1989)
Jika *I* adalah *left pure ideal* pada seminearring kanan maka $I=I^2$

Bukti : (1) Pertama-tama akan dibuktikan bahwa $I \subseteq I^2$. Ambil sebarang $x \in I$. Akan dibuktikan $x \in I^2$. Diketahui bahwa *I* adalah *left pure ideal*, maka untuk setiap $x \in I$ terdapat $y \in I$ sedemikian sehingga $x = yx \in I^2$.

(2) Langkah berikutnya akan dibuktikan bahwa $I^2 \subseteq I$ **.** Ambil sebarang $x \in I^2$. Akan dibuktikan bahwa $x \in I$. Karena $x \in I^2$ maka $x = ab$, dimana $a, b \in I$. Karena *I* adalah ideal maka $x = ab \in I$ (sifat ketertutupan). Dari (1) dan (2) maka terbukti bahwa $I=I^2$. ◘

Lemma 3.3.4 (Ahsan dan Thaheem, 1989)
Jika I_1 dan I_2 adalah *left pure ideal* pada seminearring kanan maka $I_1 \cap I_2$ adalah *left pure ideal.*

Bukti : Ambil sebarang $x \in I_1 \bigcap I_2$. Akan dibuktikan bahwa $y \in I_1 \bigcap I_2$, sedemikian sehingga $x = yx$. Karena $x \in I_1 \bigcap I_2$ maka $x \in I_1$ dan $x \in I_2$. Diketahui bahwa I_1 dan I_2 adalah *left pure ideal* maka terdapat $y_1 \in I_1$ sedemikian sehingga $x = y_1 x$ dan terdapat $y_2 \in I_2$ sedemikian sehingga $x = y_2 x$. Dari pernyataan tersebut maka diperoleh $x = y_1 x = y_2 x$ dengan menggunakan hukum kanselasi kanan maka $y_1 = y_2$ sehingga $y_1 \in I_2$. Karena $y_1 \in I_1$ dan $y_1 \in I_2$ maka $y_1 \in I_1 \bigcap I_2$ sedemikian sehingga $x = y_1 x$. Jadi terbukti bahwa $I_1 \bigcap I_2$ adalah *left pure ideal.* ◘

Bagan yang menunjukkan perkembangan dari definisi yang satu menjadi definisi yang lain, serta hubungan definisi dengan pembuktian (teorema, proposisi dan lemma) terlampir dalam lampiran (Halaman 51). Selain itu akan diperlihatkan bagaimana hubungan antara pembuktian yang satu dengan pembuktian yang lain, dalam artian bahwa pembuktian sebelumnya digunakan untuk membuktikan pembuktian berikutnya.

BAB IV
KESIMPULAN

4.1 Kesimpulan

Dari hasil pembahasan di atas dapat diambil kesimpulan:

1. Setiap ideal dua sisi pada *left weakly regular seminearring* adalah suatu *left weakly regular seminearring*
2. Setiap ideal kiri pada *left weakly regular seminearring* adalah ideal idempotent
3. Jika *S* adalah *distributively generated left weakly regular seminearring* maka setiap ideal dua sisi pada *S* adalah *left pure ideal*.

DAFTAR PUSTAKA

Ahsan, J. 1995. *Seminearring Characterized by their §-Ideals*. Department of Mathematical Sciences King Fahd University. Saudi Arabia.

Ahsan, J and A.B Thaheem. 1989. *On Pure Radical in Semigroup with Zero.* International Center for Theoretical. Trieste.

Arifin, A. 2000. *Aljabar*. ITB Bandung.

Bhattacharya, P.B., dkk. 1994. *Basic Abstract Algebra*. Cambridge University Press. Cambridge.

Durbin, J.R. 1992. *Modern Algebra*: An Introduction. 3rd edition. John Wiley & Sons. New York.

Fieseler, K.H. 2008. *Groups, Rings and Fields.* Uppsala

Fraeligh, J.B. 1994. *A First Course in Abstract Algebra.* Fifth Ed. Addison Wesley Publishing Company, Inc. USA.

Hansen, F. 1975. On One-Sided Prime Ideals. *Pacific Journal of Mathematics*. 58:79-85.

Hartley, B dan Hawkes, T.O. 1994. *Rings, Modules and linier algebra.* Chapman and Hall, Inc. New York.

Kandasamy, W.B.V. 2002. *Smarandache Semirings, Semifield, and Semivector Spaces*. Departement of Mathematics Indian Institute of Technology. Madras.

Shabir, M dan I. Ahmed. 2007. *Weakly Regular Seminearring*. International Electronic Journal of Algebra vol 2:114-126.

Spindler, K. 1994. *Abstract Algebra with Aplication.* Volume II. Marcel Dekker, Inc. USA.

Whitelaw, T.A. 1995. *Introduction to Abstract Algebra*. Chapman & Hall. London.