ANALISIS SIFAT-SIFAT *GROWTH STOCKS* MELALUI PROSES KELAHIRAN DAN KEMATIAN

SKRIPSI

Oleh :

NOVIA KUSUMAWATI

0410940042-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG

2009

ANALISIS SIFAT-SIFAT *GROWTH STOCKS* MELALUI PROSES KELAHIRAN DAN KEMATIAN

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh :
NOVIA KUSUMAWATI
0410940042-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2009

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

ANALISIS SIFAT-SIFAT *GROWTH STOCKS* MELALUI PROSES KELAHIRAN DAN KEMATIAN

Oleh :
NOVIA KUSUMAWATI
0410940042-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji pada tanggal 12 Mei 2009 dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dalam Bidang Matematika

Pembimbing I	Pembimbing II
Dra. Endang Wahyu H., M.Si.	**Isnani Darti, S.Si., M.Si.**
NIP. 131 960 432	**NIP. 132 300 226**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Agus Suryanto, M.Sc.
NIP. 132 126 049

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	:	Novia Kusumawati
NIM	:	0410940042-94
Jurusan	:	Matematika
Penulis Skripsi berjudul	:	Analisis Sifat-sifat *Growth Stocks* melalui Proses Kelahiran dan Kematian

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. Isi dari Skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Skripsi ini.
2. Apabila di kemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 12 Mei 2009
Yang menyatakan,

(Novia Kusumawati)
NIM. 0410940042-94

ANALISIS SIFAT-SIFAT *GROWTH STOCKS* MELALUI PROSES KELAHIRAN DAN KEMATIAN

ABSTRAK

Growth stocks merupakan saham perusahaan yang diharapkan memberikan pertumbuhan laba yang lebih tinggi dari rata-rata saham-saham lain. Tingkat pertumbuhan *growth stocks* sangat sulit diramalkan, namun proses pertumbuhannya dapat dimodelkan dengan suatu model stokastik yang disebut proses kelahiran dan kematian. Di dalam skripsi ini, proses tersebut akan digunakan untuk menganalisis sifat-sifat umum *growth stocks*, yakni perilaku keadaan stabil dan perilaku *transient*. Analisis terhadap sifat-sifat *growth stocks* didapatkan *mean*, momen kedua, dan variansi dengan λ, g, h dan μ sebagai parameter-parameternya. Masing-masing parameter menyatakan λ adalah tingkat kenaikan harga saham, g adalah penambahan saham yang dikeluarkan melalui penawaran publik, h adalah pembayaran deviden, dan μ adalah tingkat penurunan harga saham.

Kata kunci : *Growth stocks*, proses kelahiran dan kematian, perilaku keadaan stabil, perilaku *transient*.

ANLYSIS PROPERTIES *GROWTH STOCKS* VIA BIRTH AND DEATH PROCESSES

ABSTRACT

Growth stocks is the stocks of a company that expected to increase the profit more than the average of other stocks. The growing level of *growth stocks* is unpredictable, but its process can be modelized by a stochastic model which is called birth and death processes. In this final project, those processes will be used to analyze the general properties of *growth stocks*, which are steady-state behaviour and *transient* behaviour. By doing those analysis, will be get *mean*, second moment, and variance with level of stock price increasing λ, stocks increasing which given from public offer g, deviden payment h, and level of stock price decreasing μ.

Keywords : *Growth stocks*, birth and death processes, steady-state behaviour, *transient* behaviour.

KATA PENGANTAR

Puji syukur Alhamdulillah penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, atas rahmat, taufik, dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "**Analisis Sifat-Sifat *Growth Stocks* *melalui Proses Kelahiran dan Kematian***".

Selama penyusunan skripsi ini, penulis menyadari tidak terlepas dari bantuan, bimbingan dan dorongan serta doa restu dari berbagai pihak. Oleh karena itu dalam kesempatan yang baik ini, tidak lupa penulis menghaturkan rasa hormat dan ucapan terima kasih yang tulus dan sebesar-besarnya kepada :

1. Dra. Endang Wahyu H., M.Si selaku dosen pembimbing I dan Isnani Darti, S.Si, M.Si selaku dosen pembimbing II atas bimbingan, dukungan, kesabaran, motivasi, nasihat dan waktu yang diberikan selama penyusunan skripsi ini.
2. Dr. Agus Suryanto, M.Sc selaku ketua jurusan Matematika Universitas Brawijaya Malang.
3. Dr. Wuryansari Muharini K., M.Si selaku ketua program studi Matematika Universitas Brawijaya Malang.
4. Ayah, ibu, dan adik yang selalu memberikan motivasi dan dukungan pada penulis hingga terselesaikannya skripsi ini.
5. Dosen pengajar dan seluruh staf Tata Usaha Jurusan Matematika atas kesabaran dan bimbingan selama masa perkuliahan.
6. Rinaldi, Indi , Zulfi, Anis, Eva, Aim, Yeni, Purnomo dan teman-teman yang telah membantu penulis.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna sehingga penulis mengharapkan saran dan kritik membangun dari berbagai pihak. Akhir kata, semoga skripsi ini bermanfaat bagi teman-teman mahasiswa, khususnya Fakultas MIPA Universitas Brawijaya.

Malang, 12 Mei 2009

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR SIMBOL

g	: Penambahan saham yang dikeluarkan melalui penawaran publik
h	: Pembayaran deviden
m_1	: Momen pertama atau *mean*
m_2	: Momen kedua
n	: Banyaknya keadaan
$P_{i,j}(t)$	: Peluang transisi dari keadaan i ke keadaan j pada waktu t
p_n	: Peluang terjadinya kelahiran pada keadaan n
q_n	: Peluang terjadinya kematian pada keadaan n
$X(t)$	: Keadaan dari suatu proses pada waktu t
λ	: Tingkat kenaikan harga saham
μ	: Tingkat penurunan harga saham
ρ_n	: Rata-rata banyaknya kelahiran dan kematian pada keadaan n
π_n	: Peluang keadaan stabil dari model *growth stocks* pada keadaan n
$\theta(t)$	: Jumlah semua saham dalam suatu sektor yang sama pada waktu t

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Seseorang berinvestasi di bursa saham untuk mendapatkan keuntungan yang sebesar-besarnya dalam waktu yang singkat. Investor akan mengharapkan pembagian deviden dan keuntungan dari kenaikan harga saham (*capital gain*) karena saham bisa dijual dengan harga yang lebih tinggi. Berinvestasi di pasar saham selain menawarkan keuntungan, sudah pasti memiliki potensi resiko (Ferdiansyah, 2002).

Growth stocks merupakan saham perusahaan yang diharapkan memberikan pertumbuhan laba yang lebih tinggi dari rata-rata saham-saham lain. *Growth stocks* biasanya tidak membayar deviden karena laba yang diperoleh perusahaan diinvestasikan lagi (Husnan, 2003). Tingkat pertumbuhan *growth stocks* sangat sulit diramalkan, namun proses pertumbuhannya dapat dimodelkan dengan suatu model stokastik yang disebut proses kelahiran dan kematian (*birth and death processes*).

Sifat-sifat umum *growth stocks* meliputi perilaku keadaan stabil (*steady-state*) dan perilaku *transient* yakni perilaku model yang akan kembali ke keadaan awal dalam jangka waktu tertentu. Model *growth stocks* dikatakan menuju keadaan stabil jika model tersebut memiliki nilai konstan setelah sistem berjalan selama periode waktu. Dengan menganalisis hal ini, akan dapat diketahui kapan suatu saham relatif bernilai konstan sehingga akan mengundang para pemodal lain untuk melakukan investasi. Saham akan diperdagangkan di pasar modal selama periode waktu yang panjang sehingga distribusi keadaan stabil akan berubah selama periode waktu itu. Karena perilaku model terus bergantung waktu maka penting dilakukan analisis *transient* yaitu menentukan momen pertama atau *mean* keadaan *transient* dari model tersebut. Dengan demikian sifat-sifat *growth stocks* penting dipelajari untuk mengerti pasar modal dan pertumbuhan ekonomi.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan pada latar belakang permasalahan tersebut, maka rumusan masalah dalam skripsi ini adalah sebagai berikut :

1. Bagaimana menganalisis perilaku keadaan stabil dari model *growth stocks* melalui proses kelahiran dan kematian ?
2. Bagaimana menganalisis perilaku *transient* dari model *growth stocks* melalui proses kelahiran dan kematian ?

1.3 Batasan Masalah

Pada skripsi ini, model yang digunakan hanya akan memakai saham bermodel *growth stocks* dengan kapitalisasi pasar yang besar. Kapitalisasi pasar dari suatu saham dikatakan besar apabila harga saham tersebut akan relatif lebih tinggi dari rata-rata saham lainnya.

1.4 Tujuan

Tujuan dalam penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut :

1. Menganalisis perilaku keadaan stabil dari model *growth stocks* melalui proses kelahiran dan kematian yakni dengan membuktikan lemma yang berkaitan dengan sifat keadaan stabil dari model *growth stocks*.
2. Menganalisis perilaku *transient* dari model *growth stocks* melalui proses kelahiran dan kematian yakni menentukan momen pertama atau *mean* keadaan *transient*nya.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Proses Stokastik

Definisi 2.1

Proses stokastik $\{X(t), t \in T\}$ adalah kumpulan peubah acak $X(t)$ dimana $t \in T$ merupakan indeks waktu. $X(t)$ merupakan keadaan dari proses pada waktu t (Ross, 1983).

2.1.1 Peluang Transisi

Peluang bersyarat $P[X(t+1) = j | X(t) = i] = P_{ij}$ disebut peluang transisi satu langkah dari suatu proses pada keadaan j pada waktu t+1 jika mula-mula proses tersebut pada keadaan i pada waktu t. Secara formulasi dapat ditulis

$$P[X(t+1) = j | X(t) = i] = P_{ij}, \forall i, j = 0,1,2.... \tag{2.1}$$

dimana

$$P_{ij} \geq 0$$

(Meerschaert, 1993).

2.1.2 Matrik Peluang Transisi

Vektor peluang adalah matriks 1 x n yang semua vektor didalamnya berjumlah 1. Jika $S_1, S_2, \ldots S_j$ merupakan keadaan dari suatu proses dan P_{ij} adalah peluang suatu proses pada keadaan S_j jika mula-mula proses tersebut pada keadaan S_i maka vektor peluangnya adalah

$$\begin{array}{l}
[P_{11} \quad P_{12} \quad \Lambda \quad P_{1j}] \\
[P_{21} \quad P_{22} \quad \Lambda \quad P_{2j}] \\
\qquad\qquad\qquad\quad \mathrm{M} \\
[P_{i1} \quad P_{i2} \quad \Lambda \quad P_{ij}]
\end{array}$$

Matriks transisi adalah sekumpulan vektor peluang. Sementara itu, matriks P yang disusun oleh vektor peluang disebut matriks peluang transisi. Matriks peluang transisi P dapat ditulis sebagai berikut :

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \Lambda & P_{1j} \\ P_{21} & P_{22} & \Lambda & P_{2j} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & & \mathrm{M} \\ P_{i1} & P_{i2} & \Lambda & P_{ij} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Menurut Meerschaert (1993), matriks peluang transisi mempunyai syarat sebagai berikut :

1. Matriks peluang transisi berbentuk bujur sangkar karena semua peluang yang muncul dari setiap keadaan dipakai sebagai baris dan kolom
2. Semua elemen matriks peluang transisi adalah antara 0 dan 1 karena semua elemen matriks peluang transisi adalah suatu peluang
3. Jumlah elemen dari setiap baris matriks peluang transisi adalah 1.

2.2 Proses Markov

Proses stokastik *X(t)* dikatakan proses Markov jika diberikan nilai *X(t)*, nilai *X(v)* untuk $v > t$ tidak bergantung pada nilai *X(u)* untuk $u < t$. Dengan kata lain, perilaku yang akan datang tergantung hanya pada nilai sekarang dan tidak pada nilai lampau.

Definisi 2.2

Proses acak *X(t)* dikatakan Markovian jika

$$P\left[X(t_{n+1}) \le x_{n+1} \middle| X(t_n) = x_n, X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \ldots\ldots, X(t_0) = x_0\right]$$
$$= P[X(t_{n+1}) \le X(t_n) = x_n] \tag{2.3}$$

dimana $t_0 \le t_1 \le t_2 \le t_3 \le \ldots. \le t_n \le t_{n+1}$.

$x_0, x_1, x_2, \ldots., x_n, x_{n+1}$ disebut keadaan (*state*).

Jika proses acak pada waktu t_n pada keadaan x_n, keadaan yang akan datang dari proses acak X_{n+1} pada waktu t_{n+1} tergantung hanya pada keadaan sekarang x_n dan tidak pada keadaan $x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_0$ (Kandasamy dkk, 2004).

Proses Markov waktu kontinu dinyatakan dengan $\{X(t)\}, t \geq 0$. Misalkan proses itu berada di ruang keadaan S maka fungsi peluang transisi dari suatu proses yang akan meninggalkan keadaan *i* menuju keadaan *j* adalah

$$P_{ij}(t) = P[X(t+s) = j | X(s) = i] \text{ .} \tag{2.4}$$

Peluang itu tidak bergantung pada *s* tetapi hanya pada *t* untuk pasangan keadaan *i,j* tertentu (Hines and Montgomery, 1990).
Jika fungsi peluang transisi tersebut dianggap kontinu di t = 0 maka

$$\lim_{t \to \infty} P_{ij}(t) = \begin{cases} 1 & \text{, jika } i = j \\ 0 & \text{, jika } i \neq j \end{cases}$$

Fungsi peluang transisi memenuhi persamaan Chapman-Kolmogorov untuk semua keadaan *i* dan *j* serta bilangan positif *h* dan *t*

$$P_{ij}(t+h) = \sum_k P_{ik}(t) P_{kj}(h). \tag{2.5}$$

Rantai Markov dengan $P_{ij} > 0$ untuk semua $t > 0$ dan semua keadaan *i* dan *j* mempunyai limit fungsi peluang transisi

$$\lim_{t \to \infty} P_{ij}(t) = \pi_j \quad , j \in S \tag{2.6}$$

dimana nilai tersebut ada dan bebas dari keadaan awal. Kondisi di atas disebut keadaan stabil (*steady-state*) (Parzen, 1962).

Menurut Kandasamy dkk (2004), jenis keadaan dari suatu proses dapat diklasifikasikan sebagai berikut :

1. Keadaan stabil

Keadaan stabil terjadi jika nilai dari persamaan (2.6) ada dan memenuhi

1. $\pi_j > 0$ (2.7)

2. $\sum_{j=0}^{n} \pi_j = 1$ (2.8)

3. $\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij} \qquad j = 0,1,2,3...$ (2.9)

2. Keadaan berlalu (*transient state*)

Suatu proses berada dalam keadaan berlalu (*transient state*) jika proses itu akan kembali ke keadaan semula dalam jangka waktu tertentu dengan peluang kurang dari 1.

3. Keadaan berulang (*recurrent state*)

Suatu proses dikatakan dalam keadaan berulang jika proses itu tidak akan meninggalkan suatu keadaan atau tetap berada dalam keadaan tersebut dengan peluang sama dengan 1.

2.3 Persamaan *Forward* Kolmogorov

Anggap bahwa rantai markov waktu kontinu memasuki keadaan i pada waktu, katakanlah waktu $t = 0$ dan anggap bahwa proses itu tidak akan meninggalkan keadaan i (transisi tidak terjadi) selama waktu s berikutnya. Dengan mengikuti sifat Markovian, maka peluang proses tetap berada di keadaan tersebut selama interval waktu $[s,s+t]$ merupakan peluang proses itu tinggal di keadaan i sebelum membuat transisi ke dalam keadaan yang berbeda. Secara matematika hal ini dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$P(X_i > t + s \mid X_i > s) = P(X_i > t) = \alpha_i(t), \forall s, t \geq 0, \qquad (2.10)$$

tetapi

$$\begin{aligned} \alpha_i(t+s) &= P(X_i > t+s) = P(X_i > t+s, X_i > s) \\ &= P(X_i > t+s \mid X_i > s).P(X_i > s) \\ &= \alpha_i(t)\alpha_i(s). \end{aligned} \qquad (2.11)$$

Dengan demikian

$$\log \alpha_i(t+s) = \log \alpha_i(t) + \log \alpha_i(s). \qquad (2.12)$$

Misalkan

$$\alpha_i(t) = e^{-\lambda_i t} \qquad (2.13)$$

dimana λ adalah konstanta maka persamaan (2.12) menjadi

$$\log e^{-\lambda_i (t+s)} = \log e^{-\lambda_i t} + \log e^{-\lambda_i s}$$

$${}^{e}\log e^{-\lambda_i (t+s)} = {}^{e}\log e^{-\lambda_i t} + {}^{e}\log e^{-\lambda_i s}$$

$$-\lambda_i (t+s)^{e}\log e = -\lambda_i t^{e}\log e + -\lambda_i s^{e}\log e$$

$$-\lambda_i (t+s) = -\lambda_i t + -\lambda_i s$$

$$-\lambda_i (t+s) = -\lambda_i (t+s).$$

Dengan melihat persamaan tersebut maka permisalan (2.13) benar untuk persamaan (2.11).

Dengan demikian

$$P(X_i > t) = \alpha_i(t) = e^{-\lambda_i t}, t \geq 0. \tag{2.14}$$

Akibatnya

$$P(X_i \leq t) = 1 - P(X_i > t) = 1 - e^{-\lambda_i t}, t \geq 0. \tag{2.15}$$

Jika $\lambda_i > 0$ maka peluang proses itu mengalami perubahan dari keadaan i pada interval waktu Δt adalah

$$\begin{aligned} P(X_i \leq \Delta t) &= 1 - e^{-\lambda_i \Delta t} \\ &= 1 - \left(1 - \frac{\lambda_i \Delta t}{1!} + \frac{(\lambda_i \Delta t)^2}{2!} - \frac{(\lambda_i \Delta t)^3}{3!} + ...\right) \\ &= \lambda_i \Delta t - \frac{(\lambda_i \Delta t)^2}{2!} + \frac{(\lambda_i \Delta t)^3}{3!} - .... \\ &= \lambda_i \Delta t + o(\Delta t) \end{aligned} \tag{2.16}$$

dan peluang bahwa proses itu tidak mengalami perubahan (tetap) dari keadaan i pada interval waktu yang sama adalah

$$\begin{aligned} P(X_i > \Delta t) &= 1 - P(X_i \leq \Delta t) \\ &= 1 - \lambda_i \Delta t + o(\Delta t) \end{aligned} \tag{2.17}$$

dimana $o(\Delta t)$ sangat kecil sekali.

Berdasarkan persamaan (2.16) dan (2.17) maka

$$P_{kj}(\Delta t) = \begin{cases} P(X_{kj} \leq \Delta t) = \lambda_{kj} \Delta t + o(\Delta t) & , k \neq j \\ P(X_j > \Delta t) = 1 - \lambda_j \Delta t + o(\Delta t) & , k = j \end{cases} \tag{2.18}$$

Berdasarkan persamaan (2.5) maka

$$P_{ij}(t + \Delta t) = \sum_k P_{ik}(t) P_{kj}(\Delta t). \tag{2.19}$$

Substitusikan persamaan (2.18) ke dalam persamaan (2.19)

$$P_{ij}(t + \Delta t) = \sum_k P_{ik}(t) \lambda_{kj} \Delta t + P_{ij}(t)(1 - \lambda_j \Delta t) + 2o(\Delta t)$$

$$P_{ij}(t + \Delta t) - P_{ij}(t) = \sum_k P_{ik}(t) \lambda_{kj} \Delta t + P_{ij}(t)(1 - \lambda_j \Delta t) - P_{ij}(t) + 2o(\Delta t)$$

$$= \sum_{k} P_{ik}(t)\lambda_{kj}\Delta t + P_{ij}(t)(1-\lambda_j\Delta t - 1) + 2o(\Delta t)$$

$$= \sum_{k\neq j} P_{ik}(t)\lambda_{kj}\Delta t + P_{ij}(t)(-\lambda_j\Delta t) + 2o(\Delta t)$$

$$\frac{P_{ij}(t+\Delta t) - P_{ij}(t)}{\Delta t} = \sum_{k\neq j} P_{ik}(t)\lambda_{kj} - P_{ij}(t)\lambda_j + \frac{2o(\Delta t)}{\Delta t}. \qquad (2.20)$$

Definisikan

$$\lambda_{ii} = -\lambda_i \qquad i = 0,1,2,3,... \qquad (2.21)$$

sehingga persamaan (2.20) menjadi

$$\frac{P_{ij}(t+\Delta t) - P_{ij}(t)}{\Delta t} = \sum_{k} P_{ik}(t)\lambda_{kj} + \frac{2o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Oleh karena itu,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_{ij}(t+\Delta t) - P_{ij}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\sum_{k} P_{ik}(t)\lambda_{kj} + \frac{2o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Karena $\Delta t \to 0$ maka ($2o(\Delta t)/\Delta t$) $\to 0$. Persamaan di atas menjadi

$$P_{ij}^{'}(t) = \sum_{k} P_{ik}(t)\lambda_{kj} \qquad i, j = 0,1,2,3,... \qquad (2.22)$$

dengan kondisi awal $P_{ij}(0) = 0$ untuk $i \neq j$ dan $P_{ii}(0) = 1$. (2.23)

Persamaan (2.22) dikenal sebagai persamaan *forward* Kolmogorov (Papoulis dan Pillai, 2002).

2.4 Proses Kelahiran dan Kematian (*Birth and Death Processes*)

Rantai markov waktu kontinu dengan keadaan 0,1,2,3,... dan $\lambda_{ij} = 0$ dimana $| i - j | > 1$ disebut proses kelahiran dan kematian. Proses kelahiran dan kematian merupakan rantai markov kontinu dengan keadaan 0,1,2,3… yang melakukan transisi dari keadaan i menuju keadaan $i + 1$ dengan peluang sebesar λ_i atau melakukan transisi dari keadaan i menuju keadaan i - 1 dengan peluang sebesar μ_i. Ketika keadaan bertambah 1 maka dikatakan kelahiran terjadi dan ketika keadaan berkurang 1 maka dikatakan kematian terjadi.

Nilai $\{\lambda_i \, , \, i \geq 0\}$ disebut *rate* kelahiran dan $\{\mu_i \, , \, i \geq 1\}$ disebut *rate* kematian. Dengan demikian

$$\lambda_{i,i+1} = \lambda_i \;, \lambda_{i,i-1} = \mu_i . \tag{2.24}$$

Persamaan (2.18) dapat ditulis sebagai berikut :

$$P_{ij}(\Delta t) = \begin{cases} P(X_{ij} \leq \Delta t) = \lambda_{ij}\Delta t + o(\Delta t) & ,i \neq j \\ P(X_j > \Delta t) = 1 - \lambda_j \Delta t + o(\Delta t) & ,i = j \end{cases} \tag{2.25}$$

Berdasarkan persamaan (2.25) maka

$$\begin{array}{r} P(X_{ij} \leq \Delta t) = \lambda_{ij}\Delta t + o(\Delta t) \\ P(X_{ij} > \Delta t) = 1 - \lambda_j \Delta t + o(\Delta t) \\ \hline P(X_{ij} \leq \Delta t) + P(X_{ij} > \Delta t) = 1 + \lambda_{ij}\Delta t - \lambda_j \Delta t + 2o(\Delta t) \end{array} +$$

$$\sum_j P_{ij}(\Delta t) = 1 + \lambda_{ij}\Delta t - \lambda_j \Delta t + 2o(\Delta t).$$

Dengan menggunakan (2.21) maka

$$\begin{aligned} \sum_j P_{ij}(\Delta t) &= 1 + \lambda_{ij}\Delta t + \lambda_{jj}\Delta t + 2o(\Delta t) \\ &= 1 + \sum_j \lambda_{ij}\Delta t + 2o(\Delta t). \end{aligned}$$

Karena $o(\Delta t)$ sangat kecil sekali maka nilai $2o(\Delta t)$ diabaikan. Dengan demikian

$$\sum_j P_{ij}(\Delta t) = 1 + \sum_j \lambda_{ij}\Delta t. \tag{2.26}$$

Berdasarkan persamaan (2.26) dan kondisi

$$\sum_j P_{ij}(\Delta t) = 1$$

maka didapatkan

$$\sum_j P_{ij}(\Delta t) = 1 + \sum_j \lambda_{ij}\Delta t = 1,$$

sehingga untuk Δt yang sangat kecil diperoleh

$$\sum_j \lambda_{ij} = 0. \tag{2.27}$$

Gunakan persamaan (2.24) dan persamaan (2.27) maka diperoleh

$$\lambda_{i,i+1} + \lambda_{ii} + \lambda_{i,i-1} = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda_{ii} &= -(\lambda_{i,i+1} + \lambda_{i,i-1}) \\ &= -(\lambda_i + \mu_i). \end{aligned} \tag{2.28}$$

Dari persamaan (2.24) dan (2.28) diperoleh

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & ,j=i+1 \\ \mu_i & ,j=i-1 \\ -(\lambda_i + \mu_i) & ,j=i \\ 0 & ,\text{ yang lain.} \end{cases} \tag{2.29}$$

Berdasarkan persamaan (2.29) akan diperoleh persamaan-persamaan sebagai berikut :

Untuk $i = 0 \rightarrow \lambda_{00} = -(\lambda_0 + \mu_0)$

Untuk i = 0, proses tidak dapat melakukan transisi dari keadaan i menuju i – 1. Oleh karena itu nilai μ_0 adalah 0. Dengan demikian

$$\begin{aligned} \lambda_{00} &= -\lambda_0 \\ \lambda_{01} &= \lambda_0 \\ \lambda_{02} &= 0 \\ \lambda_{03} &= 0 \\ &\vdots \\ \lambda_{0j} &= 0 \end{aligned}$$

Untuk $i = 1 \rightarrow \lambda_{10} = \mu_1$

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= -(\lambda_1 + \mu_1) \\ \lambda_{12} &= \lambda_1 \\ \lambda_{13} &= 0 \\ &\vdots \\ \lambda_{1j} &= 0 \end{aligned}$$

Untuk $i = 2 \rightarrow \lambda_{20} = 0$

$$\lambda_{01} = \mu_2$$

$$\lambda_{22} = -(\lambda_2 + \mu_2)$$
$$\lambda_{23} = \lambda_2$$
$$\vdots$$
$$\lambda_{0j} = 0$$

dan seterusnya.

Persamaan-persamaan tersebut dapat membentuk matriks peluang transisi A sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_{00} & \lambda_{01} & \lambda_{02} & \lambda_{03} & \cdots \\ \lambda_{10} & \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \cdots \\ \lambda_{20} & \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \quad \ddots & \cdots \end{bmatrix}$$

(2.30)

dimana $\lambda_{ij} = 0$ jika | i – j | > 1, $\lambda_i > 0$ untuk $i \geq 0, \mu_i > 0$ untuk $i \geq 1$ (Papoulis dan Pillai, 2002).

2.4.1 Persamaan keadaan stabil (*steady-state*)

Anggap peluang transisi memenuhi persamaan (2.6) maka dapat diperoleh bahwa

$$\lim_{t \to \infty} \frac{d}{dt} P_{ij}(t) = 0. \tag{2.31}$$

Dengan menggunakan persamaan (2.22) dan persamaan (2.29) didapatkan

$$\begin{aligned} P'_{i,0} &= \lambda_{0,0}.P_{i,o}(t) + \lambda_{1,0}.P_{i,1}(t) \\ &= -\lambda_0.P_{i,o}(t) + \mu_1.P_{i,1}(t) \qquad , j = 0 \end{aligned} \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned} P'_{i,j} &= \lambda_{j-1,j}.P_{i,j-1}(t) + \lambda_{j,j}.P_{i,j}(t) + \lambda_{j+1,j}.P_{i,j+1}(t) \\ &= \lambda_{j-1}.P_{i,j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j).P_{i,j}(t) + \lambda_{j+1}.P_{i,j+1}(t), j \geq 1 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Peluang transisi akan memenuhi persamaan (2.6) dan persamaan (2.31), sehingga persamaan (2.32) dan (2.33) menjadi

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda_0\pi_0 + \mu_1\pi_1 \\ 0 &= \lambda_{j-1}\pi_{j-1} - (\lambda_j + \mu_j)\pi_j + \mu_{j+1}\pi_{j+1}. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Untuk $j = 0 \rightarrow -\lambda_0\pi_0 + \mu_1\pi_1 = 0.$

$$\pi_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0.$$

Untuk $j = 1 \rightarrow \lambda_0\pi_0 - (\lambda_1 + \mu_1)\pi_1 + \mu_2\pi_2 = 0$

$$\begin{aligned} \mu_2\pi_2 &= -\lambda_0\pi_0 + (\lambda_1 + \mu_1)\frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0 \\ &= -\lambda_0\pi_0 + (\frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1} + \lambda_0)\pi_0 \end{aligned}$$

$$\pi_2 = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\pi_0$$

Untuk $j = 2 \rightarrow \lambda_1\pi_1 - (\lambda_2 + \mu_2)\pi_2 + \mu_3\pi_3 = 0$

$$\begin{aligned} \mu_3\pi_3 &= -\lambda_1\pi_1 + (\lambda_2 + \mu_2)\frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\pi_0 \\ &= -\lambda_1\frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0 + (\frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2} + \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1})\pi_0 \end{aligned}$$

$$\pi_2 = \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2\mu_3}\pi_0$$

dan seterusnya.

Untuk j = n, maka

$$\pi_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} \pi_0 \quad , n = 1,2,3,\ldots \tag{2.35}$$

Didefinisikan π_0 = 1, maka persamaan keadaan stabil (*steady-state*) dari proses kelahiran dan kematian adalah

$$\pi_n = \lim_{t \to \infty} P(X(t) = n) = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n}, n = 1,2,3,\ldots \tag{2.36}$$

(Papoulis dan Pillai, 2002).

2.4.2 *Positive Recurrent*

Menurut Parzen (1962), perjalanan acak pada ruang keadaan {0, 1, 2, 3,...} mempunyai matriks peluang transisi sebagai berikut :

$$P = \begin{bmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & r_3 & p_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_n & r_n & p_n \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

dimana (untuk k = 0, 1, 2, 3...) p_k , r_k , dan q_k adalah bilangan real tidak negatif sedemikian sehingga $r_0 + p_o = 1$, $q_k + r_k + p_k = 1$ untuk k = 1, 2, 3,...

$q_0 = 0$ karena pada keadaan $k = 0$ proses tidak dapat melakukan transisi ke keadaan $k - 1$.

Jika $\{X(t), t \geq 0\}$ adalah proses kelahiran dan kematian maka $\{X(t)\}$ merupakan perjalanan acak dengan matrik peluang transisi (2.37) dimana p_n adalah peluang terjadinya kelahiran pada keadaan n dan q_n adalah peluang terjadinya kematian pada keadaan n. Dengan demikian

$$p_n = \lambda_n \quad , q_n = \mu_n \quad , \; r_n = 1 - (\lambda_n + \mu_n).$$

ρ_n adalah rata-rata banyaknya kelahiran dan kematian maka didefinisikan $\rho_0 = 1$,

$$\rho_n = \frac{q_1 q_2 q_3 ... q_n}{p_1 p_2 p_3 ... p_n} = \frac{\mu_1 \mu_2 \mu_3 ... \mu_n}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 ... \lambda_n}$$

dan

$$P_n = \frac{p_0 p_1 p_2 ... p_{n-1}}{q_1 q_2 ... q_n} = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 ... \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 ... \mu_n} \text{ , untuk n} \geq 1 \tag{2.38}$$

Proses acak itu dikatakan *positive recurrent* jika dan hanya jika

$$\sum_n P_n < \infty \quad \text{dan} \quad \sum_n \rho_n = \infty \tag{2.39}$$

(Parzen, 1962).

2.5 Momen dan Variansi

Menurut Dudewicz dan Mishra (1988), fungsi pembangkit momen suatu peubah acak *X* didefinisikan untuk setiap bilangan real *t* sebagai $\eta_x(t) = E(e^{tx})$. Bila fungsi pembangkit momen $\eta_x(t)$ dari peubah acak *X* ada untuk | *t* | ≤ *T* (untuk suatu *T* > 0) maka $E(X^n)$ ada (*n* = 1,2,3,…) dan

$$E(X^n) = \eta_x^{(n)}(t) \equiv \frac{d^n}{dt^n} \eta_x(t) \Big|_{t=0} \tag{2.40}$$

Momen pertama disebut juga *mean*. *Mean* dari suatu peubah acak *X* diskrit dengan fungsi peluang *f*(*x*) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$m_1(x) = E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x.f(x) \tag{2.41}$$

Sementara itu, momen kedua dari suatu peubah acak *X* diskrit dengan fungsi peluang *f*(*x*) dapat ditulis sebagai berikut :

$$m_2(x) = E(X^2) = \sum_{x=1}^{\infty} x^2.f(x) \tag{2.42}$$

Variansi dari suatu peubah acak *X* dapat ditulis sebagai berikut :

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \tag{2.43}$$

2.6 Fungsi Gamma

Menurut Abramowitz dan Stegun (1972), fungsi gamma disebut juga fungsi faktorial. Fungsi gamma didefinisikan sebagai berikut :

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx, \quad n > 0$$

Sifat-sifat yang berlaku pada fungsi gamma adalah sebagai berikut :

1. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \qquad ,\forall n > 0$ (2.44)

2. $\Gamma(n+1) = n! \qquad ,\forall n \in$ bilangan bulat tidak negatif (2.45)

3. $\lim_{n \to \infty} n^{b-a} \dfrac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(n+b)} = 1 \quad ,\forall a, b \in$ bilangan bulat positif (2.46)

2.7 Fungsi Hipergeometri

Menurut Abramowitz dan Stegun (1972), suatu fungsi hipergeometri dapat dituliskan sebagai berikut :

$$F(a,b;c;z) = 1 + \frac{ab}{c}\frac{z^1}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!} + \ldots \tag{2.47}$$

Perhatikan bahwa

$$\frac{a!}{(a-1)!} = \frac{(a-1)!a}{(a-1)!} = a$$

$$\frac{(a+1)!}{(a-1)!} = \frac{(a-1)!a(a+1)}{(a-1)!} = a(a+1)$$

$$\frac{(a+2)!}{(a-1)!} = \frac{(a-1)!a(a+1)(a+2)}{(a-1)!} = a(a+1)(a+2)$$

M

$$\frac{(a+n-1)!}{(a-1)!} = \frac{(a-1)!a(a+1)\ldots(a+n-1)}{(a-1)!} = a(a+1)\ldots(a+n-1).$$

Oleh karena itu persamaan (2.47) dapat diubah menjadi

$$F(a,b;c;z) = 1 + \frac{a!b!(c-1)!}{(a-1)!(b-1)!c!}\frac{z^1}{1!} + \frac{(a+1)!(b+1)!(c-1)!}{(a-1)!(b-1)!(c+1)!}\frac{z^2}{2!} + ...$$

$$= 1 + \frac{(c-1)!}{(a-1)!(b-1)!}\frac{a!b!}{c!}\frac{z^1}{1!} + \frac{(c-1)!}{(a-1)!(b-1)!}\frac{(a+1)!(b+1)!}{(c+1)!}\frac{z^2}{2!} + ...$$

$$= \frac{(c-1)!}{(a-1)!(b-1)!}\left(\frac{(a-1)!(b-1)!}{(c-1)!} + \frac{a!b!}{c!}\frac{z^1}{1!} + \frac{(a+1)!(b+1)!}{(c+1)!}\frac{z^2}{2!} + ...\right)$$

$$= \frac{(c-1)!}{(a-1)!(b-1)!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+n-1)!(b+n-1)!}{(c+n-1)!}\frac{z^n}{n!} \qquad (2.48)$$

Dengan menggunakan persamaan (2.45) maka persaman (2.48) dapat disederhanakan menjadi

$$F(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)}.\frac{z^n}{n!} \qquad (2.49)$$

untuk *a, b, c* adalah konstanta-konstanta. $a,b,c \in$ bilangan bulat positif.

Turunan pertama dari fungsi tersebut adalah

$$\frac{d}{dz}F(a,b;c;z) = \frac{ab}{c}.F(a+1,b+1;c+1;z) \qquad (2.50)$$

sedangkan turunan ke-n dari fungsi hipergeometri adalah

$$\frac{d^n}{dz^n}F(a,b;c;z) = \frac{a(a+1)...(a+n-1)b(b+1)...(b+n-1)}{c(c+1)....(c+n-1)}.$$
$$F(a+n,b+n;c+n;z) \qquad (2.51)$$

Sifat fungsi hipergeometri adalah

$$F(a,b;b;z) = (1-z)^{-a}. \qquad (2.52)$$

Persamaan (2.52) didapatkan jika $c = b$. Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut :
Jika $c = b$, maka berdasarkan persamaan (2.47) didapatkan

$$F(a,b;b;z) = 1 + \frac{ab}{b}\frac{z^1}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{b(b+1)}\frac{z^2}{2!} + \ldots$$

$$= 1 + a\frac{z^1}{1!} + a(a+1)\frac{z^2}{2!} + a(a+1)(a+2)\frac{z^3}{3!} + \ldots \qquad (2.53)$$

Perhatikan bahwa

$$(1-z)^{-1} = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots$$

$$(1-z)^{-2} = \frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \ldots$$

$$(1-z)^{-3} = \frac{1}{(1-z)^3} = 1 + 3z + 6z^2 + 10z^3 + \ldots$$

$$\vdots$$

$$(1-z)^{-a} = \frac{1}{(1-z)^a} = 1 + a\frac{z}{1!} + a(a+1)\frac{z^2}{2!} + a(a+1)(a+2)\frac{z^3}{3!} + \ldots$$

Dengan demikian persamaan (2.53) menjadi

$$F(a,b;b;z) = (1-z)^{-a}.$$

2.8 Persamaan Diferensial

Definisi 2.3

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan satu (atau beberapa) fungsi yang tak diketahui (Kartono, 1994).

Definisi 2.4

Suatu persamaan diferensial biasa orde n adalah persamaan berbentuk

$$F(x, y, y', y'', \ldots. y^n) = 0$$

yang menyatakan hubungan antara peubah bebas x, peubah tak bebas $y(x)$ dan turunannya yaitu y', y'', ..., y^n (Kartono, 1994).

2.8.1 Persamaan Diferensial Linier Orde n

Bentuk persamaan diferensial linier orde n, sebagai berikut :

$$P_0 \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + ... + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = Q \qquad (2.54)$$

dimana $P_0 \neq 0, P_1, P_2, ..., P_n, Q$ adalah fungsi dari x atau konstan. Bentuk persamaan diferensial linier orde n dapat ditulis dengan menggunakan operator diferensial D, dimana

$$Dy = \frac{dy}{dx}, D^2 y = \frac{d^2 y}{dx^2}, ..., D^n y = \frac{d^n y}{dx^n}, \qquad (2.55)$$

sehingga bentuk persamaan diferensial linier orde n pada persamaan (2.54) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$P_0 D^n y + P_1 D^{n-1} y + P_2 D^{n-2} y + ... + P_{n-1} Dy + P_n y = Q$$

atau

$$F(D)y = Q. \qquad (2.56)$$

$F(D) = P_0 D^n + P_1 D^{n-1} + P_2 D^{n-2} + ... + P_{n-1} D + P_n$ dinamakan polinomial operator dalam D (Kartono, 1994).

2.8.2 Persamaan linier tak homogen orde n dengan koefisien konstan

Bentuk persamaan diferensial linier tak homogen orde n dengan koefisien konstan dapat ditulis sebagai berikut:

$$(P_0 D^n + P_1 D^{n-1} + P_2 D^{n-2} + ... + P_{n-1} D + P_n) y = Q(x)$$

dimana $P_0 \neq 0, P_1, P_2, ..., P_n$ adalah konstan, dan $Q = Q(x) \neq 0$. Penyelesaian umum persamaan diferensial ini adalah jumlah dari penyelesaian komplementer $y_c(x)$ dengan penyelesaian partikuler $y_p(x)$. Secara matematis dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$y = y_c(x) + y_p(x) \quad . \qquad (2.57)$$

Penyelesaian partikuler dari persamaan diferensial ini adalah

$$y_p = \frac{1}{F(D)} Q(x) \quad . \qquad (2.58)$$

Teorema 2.1

Jika $F(D) = (D - m)$ maka persamaan partikulernya adalah

$$\frac{1}{D-m}Q(x) = e^{mx}\int e^{-mx}Q(x)dx\,, \qquad \text{untuk } m \geq 0 \qquad (2.59)$$

(Kartono, 1994).

2.9 Kapitalisasi Pasar

Menurut Ferdiansyah (2002), nilai kapitalisasi pasar dari suatu saham adalah harga terakhir saham tersebut dikalikan dengan jumlah saham yang tercatat di bursa. Secara matematis dapat ditulis sebagai berikut :

$$M(t) = \theta(t).X(t) \qquad (2.60)$$

dimana

$\theta(t)$ = jumlah semua saham dalam suatu sektor yang sama pada waktu *t*

X(t) = harga saham terakhir dari suatu perusahaan dalam sektor tersebut pada waktu *t*.

$\theta(t)$ bernilai sama untuk semua perusahaan dalam sektor industri yang sama pada waktu *t* dan *X(t)* berbeda untuk setiap perusahaan yang ada dalam sektor tersebut pada waktu *t* (Kou dan Kou, 2003).

BAB III
PEMBAHASAN

3.1 Model *Growth Stocks*

Growth stocks adalah suatu saham perusahaan yang diharapkan memberikan pertumbuhan laba yang lebih tinggi dari rata-rata saham-saham lain. Anggap pada waktu *t* terdapat sebuah *growth stocks* dengan total kapitalisasi pasar *M(t)* seperti pada persamaan (2.60). *X(t)* merupakan harga saham terakhir dari suatu perusahaan yang dimodelkan sebagai proses kelahiran dan kematian.

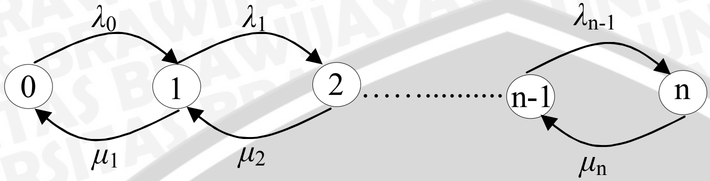
Diberikan *X(t)* pada keadaan *i* yang mengalami perubahan keadaan $i \rightarrow i+1$ dengan *rate* sebesar $i\lambda + g$ untuk $i \geq 0$ dan perubahan keadaan $i \rightarrow i-1$ dengan *rate* sebesar $i\mu + h$ untuk $i \geq 1$ dimana $\lambda, \mu > 0$, $g > 0$, $h \geq 0$, $\lambda < \mu$ adalah parameter-parameternya. *X(t)* merupakan proses kelahiran dan kematian dengan *rate* kelahiran λ_i dan *rate* kematian μ_i yang memenuhi

$$\lambda_i = i\lambda + g \qquad \mu_i = i\mu + h \qquad , i \geq 1$$
$$\lambda_0 = g \qquad \mu_0 = 0 \;. \tag{3.1}$$

Matriks peluang transisi dari sistem di atas dapat diperoleh dengan menggunakan matrik (2.30). Matriks peluang transisi sistem (3.1) menjadi

$$\begin{pmatrix} -g & g & 0 & 0 & \cdots \\ \mu + h & -(\lambda + \mu + g + h) & \lambda + g & 0 & \cdots \\ 0 & 2\mu + h & -(2\lambda + g + 2\mu + h) & 2\lambda + g & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \cdots \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Pada sistem (3.2), λ adalah tingkat kenaikan harga $X(t)$ dan μ adalah tingkat penurunan harga $X(t)$. Parameter *g* adalah faktor *non* pasar yang mampu mempengaruhi kenaikan harga $X(t)$, misalnya penambahan saham yang dikeluarkan melalui penawaran publik. Parameter *h* adalah faktor *non* pasar yang mampu mempengaruhi penurunan harga $X(t)$, misalnya pengaruh pembayaran deviden dari suatu saham. Proses dari sistem di atas dengan keadaan 0,1,2, 3,… dapat dilihat pada Gambar 3.1



Gambar 3.1. Proses kenaikan dan penurunan dari harga $X(t)$

3.2 Perilaku Keadaan Stabil dari Model

Model *growth stocks* dikatakan menuju keadaan stabil jika model tersebut memiliki nilai konstan setelah sistem berjalan selama periode waktu. Peluang keadaan stabil dari model *growth stocks* merupakan peluang model tersebut bernilai relatif konstan artinya tidak mengalami kenaikan dan penurunan yang drastis. Secara matematis peluang keadaan stabil dari model *growth stocks* dapat diperoleh dengan mensubstitusikan persamaan (3.1) ke dalam persamaan (2.36)

$$\pi_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2....\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2...\mu_n} = \frac{g(\lambda+g)(2\lambda+g)...((n-1)\lambda+g)}{(\mu+h)(2\mu+h)...(n\mu+h)}$$

$$= \frac{\lambda^{n-1}g(1+\frac{g}{\lambda})(2+\frac{g}{\lambda})...((n-1)+\frac{g}{\lambda})}{\mu^n(1+\frac{h}{\mu})(2+\frac{h}{\mu})...(n+\frac{h}{\mu})}$$

$$= (\frac{\lambda}{\mu})^n \frac{\frac{g}{\mu}(1+\frac{g}{\lambda})(2+\frac{g}{\lambda})...((n-1)+\frac{g}{\lambda})}{(1+\frac{h}{\mu})(2+\frac{h}{\mu})...(n+\frac{h}{\mu})}, n \geq 1. \qquad (3.3)$$

Persamaan ini dapat disederhanakan dengan menggunakan fungsi gamma. Perhatikan bahwa

$$(\frac{h}{\mu})! \quad = 1.2.3...(\frac{h}{\mu}-n)...(\frac{h}{\mu}-1)(\frac{h}{\mu})$$

$$(\frac{g}{\lambda}-1)! = 1.2.3...(\frac{g}{\lambda}-n)...(\frac{g}{\lambda}-1)$$

$$((n-1)+\frac{g}{\lambda})! = 1.2.3...(\frac{g}{\lambda}-n)...(\frac{g}{\lambda}-1)(\frac{g}{\lambda})(1+\frac{g}{\lambda})...(n-1+\frac{g}{\lambda})$$

$$(n+\frac{h}{\mu})! = (1.2.3...(\frac{h}{\mu}-n)...(\frac{h}{\mu}-1)(\frac{h}{\mu})(1+\frac{h}{\mu})...(n+\frac{h}{\mu}).$$

Oleh karena itu,

$$\frac{\frac{h}{\mu}!}{(\frac{g}{\lambda}-1)!}.\frac{((n-1)+\frac{g}{\lambda})!}{(n+\frac{h}{\mu})!}$$

$$=\frac{1.2...(\frac{h}{\mu}-n)...(\frac{h}{\mu})}{1.2...(\frac{g}{\lambda}-n)...(\frac{g}{\lambda}-1)}.\frac{1.2...(\frac{g}{\lambda}-n)...(\frac{g}{\lambda})...(n-1+\frac{g}{\lambda})}{1.2...(\frac{h}{\mu}-n)...(\frac{h}{\mu})...(n+\frac{h}{\mu})}$$

$$=\frac{(\frac{g}{\lambda})(1+\frac{g}{\lambda})...(n-1+\frac{g}{\lambda})}{(1+\frac{h}{\mu})...(\frac{h}{\mu})...(n+\frac{h}{\mu})}. \tag{3.4}$$

Berdasarkan sifat (2.45) maka persamaan (3.4) menjadi

$$\frac{\Gamma(1+\frac{h}{\mu})}{\Gamma(\frac{g}{\lambda})}.\frac{\Gamma(n+\frac{g}{\lambda})}{\Gamma(n+1+\frac{h}{\mu})}. \tag{3.5}$$

Dengan demikian persamaan (3.3) menjadi

$$\pi_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{\Gamma(1+\frac{h}{\mu})}{\Gamma(\frac{g}{\lambda})}.\frac{\Gamma(n+\frac{g}{\lambda})}{\Gamma(n+1+\frac{h}{\mu})}, n \geq 0. \tag{3.6}$$

Dengan memisalkan

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n$$

maka berdasarkan persamaan (2.8) didapatkan S=1.

Berdasarkan keadaan tersebut maka persamaan (2.36) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\lim_{t\to\infty} P(X(t) = n) = \frac{\pi_n}{S}. \tag{3.7}$$

Substitusikan persamaan (3.6) ke persamaan (3.7)

$$\lim_{t\to\infty} P(X(t) = n) = \frac{\pi_n}{S}$$

$$= \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{\Gamma(1+\frac{h}{\mu})}{\Gamma(\frac{g}{\lambda})} . \frac{\Gamma(n+\frac{g}{\lambda})}{\Gamma(n+1+\frac{h}{\mu})}}{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{\Gamma(1+\frac{h}{\mu})}{\Gamma(\frac{g}{\lambda})} . \frac{\Gamma(n+\frac{g}{\lambda})}{\Gamma(n+1+\frac{h}{\mu})}}. \tag{3.8}$$

Lemma yang berkaitan dengan sifat keadaan stabil (*steady-state*) dari *X(t)* yaitu **Lemma 3.1** berikut ini :

i. Proses kelahiran dan kematian *X(t)* di persamaan (3.1) adalah *positive recurrent* yaitu proses itu akan tetap berada di suatu keadaan n (untuk n = 0,1,2…) dengan peluang sama dengan 1.

ii. Karena $n \to \infty$,

$$\pi_n \cong \frac{\Gamma(1+\frac{h}{\mu})}{\Gamma(\frac{g}{\lambda})}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n n^{\frac{g}{\lambda}-\frac{h}{\mu}-1}. \tag{3.9}$$

iii. Fungsi pembangkit momen dari keadaan stabil adalah

$$\eta(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\theta n}\pi_n}{S} = \frac{F(\frac{g}{\lambda},1;1+\frac{h}{\mu};\frac{\lambda}{\mu}e^{\theta})}{F(\frac{g}{\lambda},1;1+\frac{h}{\mu};\frac{\lambda}{\mu})} \tag{3.10}$$

dimana *F(a,b c;z)* adalah fungsi hipergeometri.
Mean dan momen kedua dari keadaan stabil adalah

$$m_1 = \eta^{'}(0) = \frac{1}{S}\frac{g}{\mu+h}F(1+\frac{g}{\lambda},2;2+\frac{h}{\mu};\frac{\lambda}{\mu}) \tag{3.11}$$

dan

$$\begin{aligned} m_2 &= \eta^{''}(0) \\ &= \frac{1}{S}\frac{g}{\mu+h}\left\{F(1+\frac{g}{\lambda},2;2+\frac{h}{\mu};\frac{\lambda}{\mu}) + \right. \\ &\quad \left. 2\frac{\lambda+g}{2\mu+h}F(2+\frac{g}{\lambda},3;3+\frac{h}{\mu};\frac{\lambda}{\mu})\right\}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Bukti:

i. Untuk menunjukkan bahwa proses kelahiran dan kematian adalah *positive recurrent*, cukup diperiksa bahwa

$$\sum_n P_n < \infty \quad \text{dan} \quad \sum_n \rho_n = \infty$$

dimana

$$P_n == \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} = \pi_n,$$

$$\rho_n = \frac{\mu_1\mu_2\mu_3\ldots\mu_n}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_n} = \frac{1}{\pi_n\lambda_n}.$$

Dengan demikian akan diperiksa bahwa

$$\sum_n \pi_n < \infty \quad \text{dan} \quad \sum_n \frac{1}{\lambda_n\pi_n} = \infty.$$

a) Akan diperiksa bahwa

$$\sum_n \pi_n < \infty.$$

Deret penjumlahan dari π_n pada persamaan (3.6) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\sum_n \pi_n = \sum_n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{\Gamma(1+\frac{h}{\mu})}{\Gamma(\frac{g}{\lambda})} \cdot \frac{\Gamma(n+\frac{g}{\lambda})}{\Gamma(n+1+\frac{h}{\mu})}. \qquad (3.13)$$

Dengan menggunakan salah satu sifat dari fungsi gamma yakni pada persamaan (2.46) untuk a = $\frac{g}{\lambda}$ dan b = $1+\frac{h}{\mu}$, maka dapat diketahui bahwa

$$\lim_{n\to\infty} n^{(1+\frac{h}{\mu})-(\frac{g}{\lambda})} \frac{\Gamma(n+\frac{g}{\lambda})}{\Gamma(n+1+\frac{h}{\mu})} = 1.$$

Oleh karena itu diperoleh bahwa

$$\frac{\Gamma(n+\frac{g}{\lambda})}{\Gamma(n+1+\frac{h}{\mu})} \cong \frac{1}{n^{(1+\frac{h}{\mu})-(\frac{g}{\lambda})}} = n^{\frac{g}{\lambda}-1-\frac{h}{\mu}}. \qquad (3.14)$$

Berdasarkan persamaan (3.14) maka persamaan (3.13) menjadi

$$\sum_n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{\Gamma(1+\frac{h}{\mu})}{\Gamma(\frac{g}{\lambda})} n^{(\frac{g}{\lambda}-1-\frac{h}{\mu})}.$$

Model memiliki parameter $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $g > 0$, $h \geq 0$, dan $\lambda < \mu$ sehingga

$$\sum_n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{\Gamma(1+\frac{h}{\mu})}{\Gamma(\frac{g}{\lambda})} n^{(\frac{g}{\lambda}-1-\frac{h}{\mu})} < \infty.$$

Dengan demikian

$$\sum_n \pi_n < \infty.$$

b) Akan diperiksa bahwa

$$\sum_n \frac{1}{\lambda_n \pi_n} = \infty.$$

Dengan menggunakan penjumlahan π_n pada persamaan (3.6) maka

$$\sum_n \frac{1}{\lambda_n \pi_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\lambda + g}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n \frac{\Gamma(\frac{g}{\lambda})}{\Gamma(1+\frac{h}{\mu})} . \frac{\Gamma(n+1+\frac{h}{\mu})}{\Gamma(n+\frac{g}{\lambda})}. \tag{3.15}$$

Berdasarkan persamaan (2.46) untuk a = $1+\frac{h}{\mu}$ dan b = $\frac{g}{\lambda}$ maka dapat diketahui bahwa

$$\lim_{n\to\infty} n^{(\frac{g}{\lambda}-(1+\frac{h}{\mu}))} \frac{\Gamma(n+1+\frac{h}{\mu})}{\Gamma(n+\frac{g}{\lambda})} = 1$$

sehingga didapatkan

$$\frac{\Gamma(n+1+\frac{h}{\mu})}{\Gamma(n+\frac{g}{\lambda})} \cong \frac{1}{n^{\frac{g}{\lambda}-(1+\frac{h}{\mu})}} = n^{1-\frac{g}{\lambda}+\frac{h}{\mu}}.$$

Dengan demikian persamaan (3.15) menjadi

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\lambda+g}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n}\frac{\Gamma(\frac{g}{\lambda})}{\Gamma(1+\frac{h}{\mu})}n^{1-\frac{g}{\lambda}+\frac{h}{\mu}}.$$

Karena parameter $\lambda < \mu$ maka

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\lambda+g}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n}\frac{\Gamma(\frac{g}{\lambda})}{\Gamma(1+\frac{h}{\mu})}n^{1-\frac{g}{\lambda}+\frac{h}{\mu}}=\infty.$$

Dengan demikian

$$\sum_{n}\frac{1}{\lambda_n\pi_n}=\infty.$$

ii. Berdasarkan persamaan (2.46), dapat diketahui bahwa

$$\lim_{n\to\infty} n^{(1+\frac{h}{\mu})-\frac{g}{\lambda}}\frac{\Gamma(n+\frac{g}{\lambda})}{\Gamma(n+1+\frac{h}{\mu})}=1.$$

Oleh karena itu didapatkan

$$\frac{\Gamma(n+\frac{g}{\lambda})}{\Gamma(n+1+\frac{h}{\mu})}\cong\frac{1}{n^{\frac{h}{\mu}+1-\frac{g}{\lambda}}}=n^{\frac{g}{\lambda}-\frac{h}{\mu}-1}.$$

Dengan demikian jika $n\to\infty$ maka persamaan (3.6) menjadi

$$\pi_n\cong\frac{\Gamma(1+\frac{h}{\mu})}{\Gamma(\frac{g}{\lambda})}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n}n^{\frac{g}{\lambda}-\frac{h}{\mu}-1}.$$

iii. Fungsi pembangkit momen dari keadaan stabil dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.40).

$$\eta_n(\theta) = E(e^{\theta n}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\theta n} P(X(t)).$$

Berdasarkan persamaan (3.8) maka diperoleh

$$\eta_n(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\theta n} \frac{\pi_n}{S}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{\theta n} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{\Gamma(1+\frac{h}{\mu})}{\Gamma(\frac{g}{\lambda})} \cdot \frac{\Gamma(n+\frac{g}{\lambda})}{\Gamma(n+1+\frac{h}{\mu})}}{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{\Gamma(1+\frac{h}{\mu})}{\Gamma(\frac{g}{\lambda})} \cdot \frac{\Gamma(n+\frac{g}{\lambda})}{\Gamma(n+1+\frac{h}{\mu})}}$$

$$= \frac{\frac{\Gamma(1+\frac{h}{\mu})}{\Gamma(\frac{g}{\lambda})} \sum_{n=0}^{\infty} e^{\theta n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{\Gamma(n+\frac{g}{\lambda})}{\Gamma(n+1+\frac{h}{\mu})}}{\frac{\Gamma(1+\frac{h}{\mu})}{\Gamma(\frac{g}{\lambda})} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{\Gamma(n+\frac{g}{\lambda})}{\Gamma(n+1+\frac{h}{\mu})}}. \quad (3.16)$$

Kalikan persamaan (3.16) dengan $\dfrac{\Gamma(1+n)}{n!}.\dfrac{n!}{\Gamma(1+n)}.\dfrac{\Gamma(1)}{\Gamma(1)}$

sehingga menjadi

$$\eta(\theta)=\frac{\dfrac{\Gamma(1+\frac{h}{\mu})}{\Gamma(\frac{g}{\lambda}).\Gamma(1)}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\frac{g}{\lambda}).\Gamma(1+n)}{\Gamma(n+1+\frac{h}{\mu})}\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}e^{\theta}\right)^{n}}{n!}}{\dfrac{\Gamma(1+\frac{h}{\mu})}{\Gamma(\frac{g}{\lambda}).\Gamma(1)}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\frac{g}{\lambda}).\Gamma(1+n)}{\Gamma(n+1+\frac{h}{\mu})}\frac{(\frac{\lambda}{\mu})^{n}}{n!}}. \tag{3.17}$$

Persamaan (3.17) dapat disederhanakan dengan menggunakan persamaan (2.49) sehingga diperoleh

$$\eta(\theta)=\frac{F(\frac{g}{\lambda},1;1+\frac{h}{\mu};\frac{\lambda}{\mu}e^{\theta})}{F(\frac{g}{\lambda},1;1+\frac{h}{\mu};\frac{\lambda}{\mu})}. \tag{3.18}$$

Telah didefinisikan S adalah jumlahan dari π_n pada persamaan (3.6). Oleh karena itu S dapat ditulis sebagai berikut :

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\pi_n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n}\frac{\Gamma(1+\frac{h}{\mu})}{\Gamma(\frac{g}{\lambda})}.\frac{\Gamma(n+\frac{g}{\lambda})}{\Gamma(n+1+\frac{h}{\mu})}$$

$$=\frac{\Gamma(1+\frac{h}{\mu})}{\Gamma(\frac{g}{\lambda})}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\frac{g}{\lambda})}{\Gamma(n+1+\frac{h}{\mu})}.\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n}. \tag{3.19}$$

Berdasarkan persamaan (2.45) maka $\Gamma(1+n)$ akan sama dengan $n!$ sehingga $\dfrac{\Gamma(1+n)}{n!}=1$. Sementara itu $\Gamma(1)=1$.

Persamaan (3.19) dapat dikalikan dengan $\dfrac{\Gamma(1+n)}{n!}.\dfrac{1}{\Gamma(1)}$. Oleh karena itu dapat diperoleh

$$S=\frac{\Gamma(1+\frac{h}{\mu})}{\Gamma(\frac{g}{\lambda})\Gamma(1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\frac{g}{\lambda})\Gamma(1+n)}{\Gamma(n+1+\frac{h}{\mu})}.\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n}}{n!}. \tag{3.20}$$

Menurut definisi fungsi hipergeometri seperti pada persamaan (2.49) maka persamaan (3.20) menjadi

$$S=F(\frac{g}{\lambda},1;1+\frac{h}{\mu};\frac{\lambda}{\mu}). \tag{3.21}$$

Persamaan (3.21) digunakan untuk menyederhanakan persamaan (3.18), sehingga menjadi

$$\eta(\theta)=\frac{1}{S}F(\frac{g}{\lambda},1;1+\frac{h}{\mu};\frac{\lambda}{\mu}e^{\theta}). \tag{3.22}$$

Mean atau momen pertama dari keadaan stabil dapat diperoleh dengan menurunkan persamaan (3.22) terhadap θ pada $\theta=0$. Berdasarkan persamaan (2.50) maka didapat

$$\frac{d}{d(\frac{\lambda}{\mu}e^{\theta})}\left[F(\frac{g}{\lambda},1;1+\frac{h}{\mu};\frac{\lambda}{\mu}e^{\theta})\right]$$

$$=\frac{\frac{g}{\lambda}.1}{1+\frac{h}{\mu}}F(1+\frac{g}{\lambda},2;2+\frac{h}{\mu};\frac{\lambda}{\mu}e^{\theta}).$$

Oleh karena itu,

$$d\left[F(\frac{g}{\lambda},1;1+\frac{h}{\mu};\frac{\lambda}{\mu}e^{\theta})\right]$$

$$=\frac{\frac{g}{\lambda}}{\frac{\mu+h}{\mu}}F(1+\frac{g}{\lambda},2;2+\frac{h}{\mu};\frac{\lambda}{\mu}e^{\theta})d(\frac{\lambda}{\mu}e^{\theta})$$

$$=\frac{g}{\lambda}.\frac{\mu}{\mu+h}F(1+\frac{g}{\lambda},2;2+\frac{h}{\mu};\frac{\lambda}{\mu}e^{\theta}).(\frac{\lambda}{\mu}e^{\theta})d\theta$$

$$=\frac{\lambda}{\mu}.\frac{\mu}{\lambda}\frac{g}{\mu+h}e^{\theta}F(1+\frac{g}{\lambda},2;2+\frac{h}{\mu};\frac{\lambda}{\mu}e^{\theta})d\theta.$$

$$\frac{d\left[F(\frac{g}{\lambda},1;1+\frac{h}{\mu};\frac{\lambda}{\mu}e^{\theta})\right]}{d\theta}$$

$$=\frac{g}{\mu+h}e^{\theta}F(1+\frac{g}{\lambda},2;2+\frac{h}{\mu};\frac{\lambda}{\mu}e^{\theta})d\theta.$$

Dengan demikian penurunan persamaan (3.22) terhadap θ menjadi

$$\eta^{'}(\theta)=\frac{1}{S}\frac{g}{\mu+h}e^{\theta}F(1+\frac{g}{\lambda},2;2+\frac{h}{\mu};\frac{\lambda}{\mu}e^{\theta}). \qquad (3.23)$$

Untuk $\theta=0$ didapatkan

$$\eta^{'}(0)=\frac{1}{S}\frac{g}{\mu+h}F(1+\frac{g}{\lambda},2;2+\frac{h}{\mu};\frac{\lambda}{\mu})$$

sehingga *mean* atau momen pertama dari keadaan stabil adalah

$$m_1=\eta^{'}(0)=\frac{1}{S}\frac{g}{\mu+h}F(1+\frac{g}{\lambda},2;2+\frac{h}{\mu};\frac{\lambda}{\mu}).$$

Momen kedua dari keadaan stabil dapat diperoleh dengan menurunkan persamaan (3.23) terhadap θ pada $\theta=0$.
Berdasarkan persamaan (2.50) dapat diketahui bahwa

$$\frac{d}{d(\frac{\lambda}{\mu}e^{\theta})}\left[F(1+\frac{g}{\lambda},2;2+\frac{h}{\mu};\frac{\lambda}{\mu}e^{\theta})\right]$$

$$=\frac{(\frac{g}{\lambda}+1).2}{2+\frac{h}{\mu}}F(2+\frac{g}{\lambda},3;3+\frac{h}{\mu};\frac{\lambda}{\mu}e^{\theta}).$$

Oleh karena itu

$$d\left[F(1+\frac{g}{\lambda},2;2+\frac{h}{\mu};\frac{\lambda}{\mu}e^{\theta})\right]$$

$$=\frac{\frac{2(g+\lambda)}{\lambda}}{\frac{2\mu+h}{\mu}}F(2+\frac{g}{\lambda},3;3+\frac{h}{\mu};(\frac{\lambda}{\mu})e^{\theta})d(\frac{\lambda}{\mu}e^{\theta})$$

$$=\frac{2(\lambda+g)}{2\mu+h}\frac{\mu}{\kappa}\frac{\lambda}{\mu}e^{\theta}F(2+\frac{g}{\lambda},3;3+\frac{h}{\mu};\frac{\lambda}{\mu}e^{\theta})d(e^{\theta})$$

$$=\frac{2(\lambda+g)}{2\mu+h}e^{\theta}F(2+\frac{g}{\lambda},3;3+\frac{h}{\mu};\frac{\lambda}{\mu}e^{\theta})d(e^{\theta})$$

$$\frac{d\left[F(1+\frac{g}{\lambda},2;2+\frac{h}{\mu};\frac{\lambda}{\mu}e^{\theta})\right]}{d\theta}$$

$$=2\frac{(\lambda+g)}{2\mu+h}e^{\theta}F(2+\frac{g}{\lambda},3;3+\frac{h}{\mu};\frac{\lambda}{\mu}e^{\theta}).$$

Dengan demikian

$$\eta''(\theta)=\frac{1}{S}\frac{g}{\mu+h}\left(\frac{de^{\theta}}{d\theta}F(1+\frac{g}{\lambda},2;2+\frac{h}{\mu};\frac{\lambda}{\mu}e^{\theta})+\right.$$

$$\left.\frac{d\left[F(1+\frac{g}{\lambda},2;2+\frac{h}{\mu};\frac{\lambda}{\mu}e^{\theta})\right]}{d\theta}.e^{\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{S}\frac{g}{\mu+h}\left(e^{\theta}F(1+\frac{g}{\lambda},2;2+\frac{h}{\mu};\frac{\lambda}{\mu}e^{\theta})+\right.$$

$$\left.2\frac{\lambda+g}{2\mu+h}e^{\theta}F(2+\frac{g}{\lambda},3;3+\frac{h}{\mu};\frac{\lambda}{\mu}e^{\theta})\right).$$

Untuk $\theta = 0$ didapatkan

$$\eta^{"}(0) = \frac{1}{S}\frac{g}{\mu+h}\left[F(1+\frac{g}{\lambda},2;2+\frac{h}{\mu};\frac{\lambda}{\mu}) + \right.$$

$$\left. 2\frac{\lambda+g}{2\mu+h}F(2+\frac{g}{\lambda},3;3+\frac{h}{\mu};\frac{\lambda}{\mu})\right].$$

Oleh karena itu didapatkan momen kedua dari keadaan stabil sebagai berikut :

$$m_2 = \eta^{"}(0)$$

$$= \frac{1}{S}\frac{g}{\mu+h}\left\{F(1+\frac{g}{\lambda},2;2+\frac{h}{\mu};\frac{\lambda}{\mu}) + \right.$$

$$\left. 2\frac{\lambda+g}{2\mu+h}F(2+\frac{g}{\lambda},3;3+\frac{h}{\mu};\frac{\lambda}{\mu})\right\}.$$

Dengan demikian Lemma 3.1 telah terbukti.

3.3 Perilaku *Transient* dari Model

Model dikatakan berperilaku *transient* jika model tersebut akan kembali ke keadaan awal dengan peluang kurang dari 1. Analisia perilaku *transient* dapat dilakukan dengan menentukan momen pertama atau *mean transient*nya. *Mean transient* dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan *forward* kolmogorov. Berdasarkan persamaan (3.1) maka persamaan (2.32) dan (2.33) menjadi

$$P'_{i,0} = -g.P_{i,o}(t) + (\mu+h).P_{i,1}(t)$$

$$P'_{i,j} = (\lambda(j-1)+g)P_{i,j-1}(t) - ((\lambda+\mu)j+g+h)P_{i,j}(t) +$$

$$(\mu(j+1)+h)P_{i,j+1}(t) \qquad ,j \geq 1 \tag{3.24}$$

Kalikan persamaan ke-j dengan j untuk j = 0, 1, 2, 3, ... sehingga berturut-turut didapatkan

$$0.P'_{i,0} = 0.-g.P_{i,0}(t) + 0.(\mu+h).P_{i,1}(t)$$

$$1.P'_{i,1} = gP_{i,0}(t) - ((\lambda+\mu)+g+h)P_{i,1}(t) + (2\mu+h)P_{i,2}(t)$$

$$2.P'_{i,2} = 2(\lambda+g)P_{i,1}(t) - 2(2(\lambda+\mu)+g+h)P_{i,2}(t) +$$

$$2(3\mu+h)P_{i,3}(t)$$

$$3.P'_{i,3} = 3(2\lambda + g)P_{i,2}(t) - 3(3(\lambda + \mu) + g + h)P_{i,3}(t) + 3(4\mu + h)P_{i,4}(t)$$

$$4.P'_{i,4} = 4(3\lambda + g)P_{i,3}(t) - 4(4(\lambda + \mu) + g + h)P_{i,4}(t) + 4(5\mu + h)P_{i,5}(t)$$

dan seterusnya. (3.25)

Persamaan-persamaan (3.25) dapat dijabarkan sebagai berikut :

$$0.P'_{i,0} = 0$$

$$1.P'_{i,1} = gP_{i,0}(t) + (-\lambda - \mu - g - h)P_{i,1}(t) + (2\mu + h)P_{i,2}(t)$$

$$2.P'_{i,2} = 2(\lambda + g)P_{i,1}(t) + 2(-2\lambda - 2\mu - g - h)P_{i,2}(t) + 2(3\mu + h)P_{i,3}(t)$$

$$3.P'_{i,3} = 3(2\lambda + g)P_{i,2}(t) + 3(-3\lambda - 3\mu - g - h)P_{i,3}(t) + 3(4\mu + h)P_{i,4}(t)$$

$$4.P'_{i,4} = 4(3\lambda + g)P_{i,3}(t) + 4(-4\lambda - 4\mu) - g - h)P_{i,4}(t) + 4(5\mu + h)P_{i,5}(t)$$

dan seterusnya. (3.26)

Jika persamaan-persamaan (3.26) dijumlahkan maka didapatkan deret penjumlahan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\sum_j jP'_{ij}(t) &= gP_{i,0}(t) + (-\mu - h)P_{i,1}(t) + (\lambda + g)P_{i,1}(t) + \\
&\quad (-2\mu - h)P_{i,2}(t) + (2\lambda + g)P_{i,2}(t) + \\
&\quad (-3\mu - h)P_{i,3}(t) + (3\lambda + g)P_{i,3}(t) + \ldots \\
&= gP_{i,0}(t) + (-\mu - h + \lambda + g)P_{i,1}(t) + \\
&\quad (-2\mu - h + 2\lambda + g)P_{i,2}(t) + \\
&\quad (-3\mu - h + 3\lambda + g)P_{i,3}(t) + \ldots \\
&= gP_{i,0}(t) + \sum_j (-j\mu - h + j\lambda + g)P_{ij}(t) \\
&= gP_{i,0}(t) + \sum_j (j(\lambda - \mu) + g - h)P_{ij}(t)
\end{aligned}$$

$$= gP_{i,0}(t) + \sum_j j(\lambda - \mu)P_{ij}(t) + \sum_j (g-h)P_{ij}(t)$$

$$= gP_{i,0}(t) + \sum_j j(\lambda - \mu)P_{ij}(t) + \sum_j gP_{ij}(t) - \sum_j hP_{ij}(t)$$

$$= gP_{i,0}(t) + \sum_j j(\lambda - \mu)P_{ij}(t) + g\sum_j P_{ij}(t) - h\sum_j P_{ij}(t)$$

$$= gP_{i,0}(t) + (\lambda - \mu)\sum_j jP_{ij}(t) + g.1 - h.1$$

$$= gP_{i,0}(t) + (\lambda - \mu)\sum_j jP_{ij}(t) + g - h$$

$$= (\lambda - \mu)\sum_j jP_{ij}(t) + gP_{i,0}(t) + g - h. \qquad (3.27)$$

Didefinisikan bahwa peluang transisi dari keadaan *i* menuju keadaan *j* pada waktu *t* adalah

$$P_{i,j}(t) = P(X(t) = j \mid X(0) = i). \qquad (3.28)$$

Sementara itu, *mean* keadaan *transient*nya adalah

$$m_1(t) = E(X(t)) = \sum_{j=0}^{\infty} jP_{i,j}(t). \qquad (3.29)$$

Dengan menggunakan persamaan (3.29) maka persamaan (3.27) menjadi

$$m_1^{'}(t) = (\lambda - \mu)m_1(t) + gP_{i,0}(t) + g - h$$

$$m_1^{'}(t) - (\lambda - \mu)m_1(t) = gP_{i,0}(t) + g - h. \qquad (3.30)$$

Persamaan (3.30) merupakan persamaan diferensial tak homogen sehingga penyelesaiannya dapat dilakukan dengan menggunakan operator D. Berdasarkan persamaan (2.56) maka persamaan (3.30) menjadi

$$[D - (\lambda - \mu)]m_1(t) = gP_{i,0}(t) + g - h. \qquad (3.31)$$

Penyelesaian komplementer dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan diferensial homogen dari persamaan (3.31) sehingga didapatkan

$$[D - (\lambda - \mu)]m_1(t) = 0.$$

Dengan demikian diperoleh penyelesaian komplementer dari persamaan (3.30) yakni

$$y_c = C_1 e^{(\lambda - \mu)t}.$$

Penyelesaian partikuler untuk persamaan (3.30) didapatkan dengan menggunakan persamaan (2.58) dan (2.59). Oleh karena itu didapatkan

$$y_p = \frac{1}{F(D)}\left[gP_{i,0}(t) + g - h\right]$$

$$= \frac{1}{(D-(\lambda-\mu))}\left[gP_{i,0}(t) + g - h\right]$$

$$= \frac{1}{(D-(\lambda-\mu))} gP_{i,0}(t) + \frac{1}{(D-(\lambda-\mu))} g - \frac{1}{(D-(\lambda-\mu))} h$$

$$= e^{(\lambda-\mu)t}\int e^{-(\lambda-\mu)t} gP_{i,0}(t)dt + \frac{1}{\mu-\lambda(\frac{D}{\mu-\lambda}+1)} g -$$

$$\frac{1}{\mu-\lambda(\frac{D}{\mu-\lambda}+1)} h$$

$$= e^{(\lambda-\mu)t} g\int e^{-(\lambda-\mu)t} P_{i,0}(t)dt + \frac{1}{\mu-\lambda}.\left(1-\frac{D}{\mu-\lambda}+\left(\frac{D}{\mu-\lambda}\right)^2 -\right.$$

$$\left.\left(\frac{D}{\mu-\lambda}\right)^3 + \ldots\right)g - \frac{1}{\mu-\lambda}.\left(1-\frac{D}{\mu-\lambda}+\left(\frac{D}{\mu-\lambda}\right)^2 - \ldots\right)h$$

$$= g.e^{(\lambda-\mu)t}\int e^{-(\lambda-\mu)t} P_{i,0}(t)dt + \frac{g}{\mu-\lambda} - \frac{h}{\mu-\lambda}$$

$$= g\left(e^{(\lambda-\mu)t}\int e^{-(\lambda-\mu)t} P_{i,0}(t)dt + \frac{1}{\mu-\lambda}\right) - \frac{h}{\mu-\lambda}.$$

Didapatkan *mean* atau momen pertama keadaan *transient* dari model, yakni

$$m_1(t) = y_c + y_p$$

$$= C_1 e^{(\lambda-\mu)t} + g\left(e^{(\lambda-\mu)t}\int e^{-(\lambda-\mu)t} P_{i,0}(t)dt + \frac{1}{\mu-\lambda}\right) - \frac{h}{\mu-\lambda}$$

dengan syarat awal $m_1(0) = i$. (3.32)

3.4 Perilaku Keadaan Stabil dan Perilaku *Transient* dari Sebagian Besar *Growth Stocks*

Sebagian besar perusahaan dengan saham model *growth stocks* tidak membayarkan deviden. Laba yang diperoleh perusahaan tidak dibagikan tetapi akan diinvestasikan kembali. Dengan demikian parameter h dalam model akan dianggap bernilai nol.

3.4.1 Perilaku keadaan stabil untuk $h = 0$

Salah satu perilaku keadaan stabil adalah *mean* dan momen kedua dari keadaan stabil. Untuk sebagian besar perusahaan dengan saham model *growth stocks* maka fungsi pembangkit momennya dapat diperoleh dengan mensubtitusikan $h = 0$ pada persamaan (3.10). Oleh karena itu didapatkan fungsi pembangkit momen sebagai berikut:

$$\eta(\theta) = \frac{F(\frac{g}{\lambda},1;1;\frac{\lambda}{\mu}e^{\theta})}{F(\frac{g}{\lambda},1;1;\frac{\lambda}{\mu})}. \tag{3.33}$$

Berdasarkan persamaan (2.52) maka

$$F(\frac{g}{\lambda},1;1;\frac{\lambda}{\mu}e^{\theta}) = \left(1-\frac{\lambda}{\mu}e^{\theta}\right)^{-\frac{g}{\lambda}} = \left(\frac{\mu-\lambda e^{\theta}}{\mu}\right)^{-\frac{g}{\lambda}} \tag{3.34}$$

dan

$$F(\frac{g}{\lambda},1;1;\frac{\lambda}{\mu}) = \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-\frac{g}{\lambda}} = \left(\frac{\mu-\lambda}{\mu}\right)^{-\frac{g}{\lambda}}. \tag{3.35}$$

Substitusikan persamaan (3.34) dan (3.35) ke dalam persamaan (3.33), sehingga didapatkan

$$\eta(\theta) = \frac{\left(\frac{\mu-\lambda e^{\theta}}{\mu}\right)^{-\frac{g}{\lambda}}}{\left(\frac{\mu-\lambda}{\mu}\right)^{-\frac{g}{\lambda}}} = \left(\frac{\mu-\lambda e^{\theta}}{\mu-\lambda}\right)^{-\frac{g}{\lambda}}. \tag{3.36}$$

Persamaan (3.21) menyatakan bahwa $S = F(\frac{g}{\lambda},1;1+\frac{h}{\mu};\frac{\lambda}{\mu})$.

Berdasarkan persamaan (2.52) maka untuk h = 0, persamaan (3.21) menjadi

$$S = F(\frac{g}{\lambda},1;1+\frac{h}{\mu};\frac{\lambda}{\mu}) = \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-\frac{g}{\lambda}} = 1. \tag{3.37}$$

Mean atau momen pertama dari keadaan stabil dituliskan pada persamaan (3.11). Untuk h = 0 maka persamaan (3.11) menjadi

$$m_1 = \frac{1}{S}\frac{g}{\mu}F(1+\frac{g}{\lambda},2;2;\frac{\lambda}{\mu}). \tag{3.38}$$

Dengan menggunakan persamaan (2.52) maka persamaan (3.38) menjadi

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{S}\frac{g}{\mu}\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-\left(1+\frac{g}{\lambda}\right)} \\ &= \frac{1}{S}\frac{g}{\mu}\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-1}\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-\frac{g}{\lambda}}. \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (3.37) maka *mean* dari keadaan stabilnya menjadi

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{g}{\mu}\left(\frac{\mu-\lambda}{\mu}\right)^{-1}\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-\frac{g}{\lambda}} \\ &= \frac{g}{\mu}\left(\frac{\mu}{\mu-\lambda}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-\frac{g}{\lambda}} \\ &= \frac{g}{\mu}\left(\frac{\mu}{\mu-\lambda}\right).1 \\ &= \frac{g}{\mu-\lambda}. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Demikian juga untuk momen kedua dari keadaan stabil pada persamaan (3.12) juga berlaku hal yang sama, sehingga didapatkan

$$m_2 = \frac{1}{S}\frac{g}{\mu}\left\{F(1+\frac{g}{\lambda},2;2;\frac{\lambda}{\mu}) + 2\frac{\lambda+g}{2\mu}F(2+\frac{g}{\lambda},3;3;\frac{\lambda}{\mu})\right\}$$

$$= \frac{1}{S}\frac{g}{\mu}\left[\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-\left(1+\frac{g}{\lambda}\right)} + \frac{(\lambda+g)}{\mu}\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-\left(2+\frac{g}{\lambda}\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{S}\frac{g}{\mu}\left[\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-1}\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-\frac{g}{\lambda}} + \frac{(\lambda+g)}{\mu}\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-2}\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-\frac{g}{\lambda}}\right]$$

$$= \frac{1}{S}\frac{g}{\mu}\left[\left(\frac{\mu-\lambda}{\mu}\right)^{-1}\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-\frac{g}{\lambda}} + \frac{(\lambda+g)}{\mu}\left(\frac{\mu-\lambda}{\mu}\right)^{-2}\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-\frac{g}{\lambda}}\right]$$

$$= \frac{1}{S}\frac{g}{\mu}\left[\left(\frac{\mu}{\mu-\lambda}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-\frac{g}{\lambda}} + \frac{(\lambda+g)}{\mu}\left(\frac{\mu}{\mu-\lambda}\right)^{2}\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-\frac{g}{\lambda}}\right]$$

$$= \frac{g}{\mu}\left[\left(\frac{\mu}{\mu-\lambda}\right).1 + \frac{(\lambda+g)}{\mu}\left(\frac{\mu}{\mu-\lambda}\right)^{2}.1\right]$$

$$= \frac{g}{\mu}\left[\frac{\mu}{\mu-\lambda} + \frac{\mu(\lambda+g)}{(\mu-\lambda)^2}\right]$$

$$= \frac{g}{\mu}.\mu\left[\frac{1}{\mu-\lambda} + \frac{\lambda+g}{(\mu-\lambda)^2}\right]$$

$$= g\left[\frac{\mu-\lambda+\lambda+g}{(\mu-\lambda)^2}\right]$$

$$= \frac{g(\mu+g)}{(\mu-\lambda)^2}. \tag{3.40}$$

Dengan diperolehnya *mean* dan momen kedua dari keadaan stabil maka akan dapat dihitung variansi dari distribusi keadaan stabilnya.

Berdasarkan persamaan (2.43), (3.39), dan (3.40) maka variansi dari keadaan stabilnya adalah

$$Var = m_2 - (m_1)^2 = \frac{g(\mu+g)}{(\mu-\lambda)^2} - \left(\frac{g}{\mu-\lambda}\right)^2 = \frac{g\mu}{(\mu-\lambda)^2} \qquad (3.41)$$

3.4.2 Perilaku *transient* untuk *h* = 0

Perilaku *transient* dari model dapat dianalisis dengan menentukan *mean* atau momen pertama keadaan *transient*nya. Untuk sebagian besar perusahaan dengan saham model *growth stocks* maka *mean* keadaan *transient*nya dapat diperoleh dengan mensubtitusikan $h = 0$ pada persamaan (3.32). Oleh karena itu didapatkan

$$m_1(t) = C_1 e^{(\lambda-\mu)t} + g\left(e^{(\lambda-\mu)t}\int e^{-(\lambda-\mu)t} P_{i,0}(t)dt + \frac{1}{\mu-\lambda}\right) \qquad (3.42)$$

dengan syarat awal $m_1(0) = i$.
Investasi di pasar saham merupakan investasi jangka panjang sehingga *t* akan mendekati tak hingga. Parameter $\lambda < \mu$ sehingga nilai $\lambda - \mu$ akan selalu negatif, sedangkan nilai karakteristik fungsi $e^{-\theta t}$ untuk suatu parameter θ akan mendekati 0 untuk t mendekati tak hingga. Dengan demikian persamaan (3.42) menjadi

$$m_1(t) = \frac{g}{\mu-\lambda}. \qquad (3.43)$$

Persamaan (3.43) merupakan *mean* keadaan *transient* dari sebagian perusahaan dengan saham bermodel *growth stocks*.

Dari kedua analisis di atas, dapat dilihat bahwa *mean* keadaan stabil dan *mean transient* memiliki nilai yang sama. Hal ini karena parameter $\lambda < \mu$.

3.5 Contoh Analisis Sifat-Sifat *Growth Stocks*

Suatu perusahaan dikatakan memiliki saham model *growth stocks*, bila saham perusahaan tersebut memiliki pertumbuhan laba yang relatif lebih tinggi dari rata-rata saham lain. Perusahaan yang memiliki saham *growth stocks* adalah perusahaan dengan kapitalisasi pasar yang besar, artinya harga saham perusahaan itu akan relatif lebih tinggi dari rata-rata saham lain. Selain itu, perusahaan-perusahaan tersebut sebagian besar tidak membayarkan deviden karena laba perusahaan diinvestasikan kembali. Salah satu perusahaan di Indonesia yang memiliki kapitalisasi yang besar adalah PT Gudang Garam Tbk. Saham perusahaan PT Gudang Garam Tbk terdapat dalam saham LQ45*. Saham LQ45* merupakan kumpulan saham yang memiliki kapitalisasi pasar yang besar dan memiliki likuiditas (frekuensi transaksi) yang tinggi. Data saham LQ45* diberikan di Tabel 3.1. Gambaran pertumbuhan harga sahamnya dapat dilihat pada Gambar 3.2

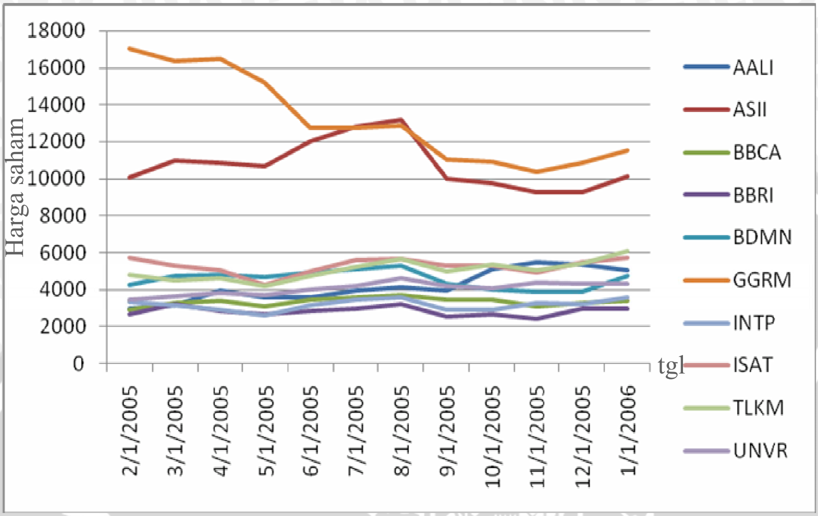
Tabel 3.1 Data Harga Beberapa Saham LQ45*

TANGGAL	AALI	ASII	BBCA	BBRI	BDMN	GGRM	INTP	ISAT	TLKM	UNVR
01/02/2005	2950	10050	2925	2700	4250	17000	3350	5750	4825	3475
01/03/2005	3125	11000	3275	3225	4750	16350	3200	5350	4550	3650
01/04/2005	3925	10850	3400	2875	4825	16450	2900	5050	4625	3825
02/05/2005	3550	10700	3100	2675	4675	15150	2625	4275	4225	3725
01/06/2005	3600	12000	3450	2875	4925	12700	3150	5025	4750	4000
01/07/2005	3925	12800	3575	3025	5110	12700	3500	5650	5250	4200
01/08/2005	4150	13200	3725	3250	5300	12850	3575	5700	5700	4600
01/09/2005	3975	10000	3475	2550	4325	11000	2950	5300	5000	4175
03/10/2005	5150	9750	3450	2700	4025	11000	2900	5300	5350	4075
01/11/2005	5500	9250	3125	2450	3900	10350	3275	4975	5050	4350
01/12/2005	5350	9250	3300	2975	3925	10850	3250	5500	5450	4300
02/01/2005	5050	10100	3400	3000	4750	11500	3600	5750	6100	4300

Keterangan :

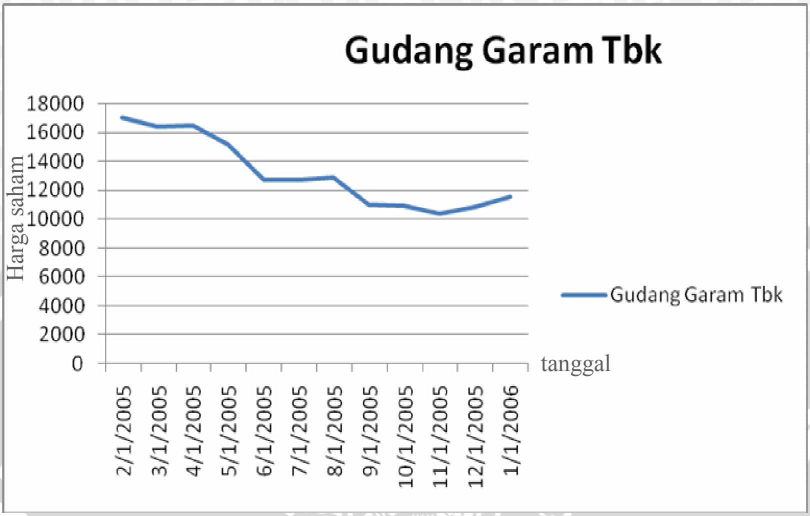
AALI : Astra Agro Lestari Tbk
ASII : Astra International Tbk
BBCA : Bank Central Asia Tbk
BBRI : Bank Rakyat Indonesia
BDMN : Bank Danamon Tbk
GGRM : Gudang Garam Tbk
INTP : Indocement Tunggal Prakasa Tbk
ISAT : Indosat Tbk
TLKM : Telekomunikasi Tbk
UNVR : Unilever Indonesia Tbk

Sumber : (Prayekti, 2008).



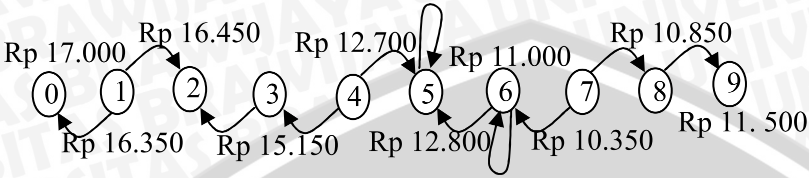
Gambar 3.2. Pertumbuhan harga saham beberapa perusahaan dalam saham LQ45* pada Februari 2005 s/d Januari 2006

Dari Gambar 3.2, dapat dilihat bahwa harga saham PT. Gudang Garam Tbk bernilai relatif lebih tinggi daripada saham-saham lain. Hal ini menunjukkan bahwa harga saham PT. Gudang Garam Tbk memiliki kapitalisasi pasar yang besar sehingga termasuk *growth stocks*. Secara spesifik, pertumbuhan harga saham dari PT. Gudang Garam Tbk pada pada Februari 2005 s/d Januari 2006 dapat dilihat pada Gambar 3.3.



Gambar 3.3. Pertumbuhan harga saham PT. Gudang Garam Tbk

Gambaran proses kelahiran dan kematian dari pertumbuhan harga sahamnya dapat dilihat pada Gambar 3.4 dengan menggunakan keadaan 0, 1, 2, 3,4,5,6,7,8, dan 9. Keadaan 0 menyatakan keadaan awal, yakni harga saham pada tanggal 1 Februari 2005. Harga saham pada bulan berikutnya, yakni saat harga saham sebesar Rp. 16.350,- dinyayakan sebagai keadaan 1. Keadaan 2 menyatakan keadaan pada saat harga saham sebesar Rp. 16.450,-. Sementara itu, keadaan 3 menyatakan keadaan pada saat harga saham sebesar Rp. 15.150,-. Keadaan pada saat harga saham mencapai Rp. 12.700,- dinyatakan sebagai keadaan 4. Keadaan berikutnya, yaitu keadaan 5 menyatakan keadaan pada saat harga saham mencapai harga Rp. 12.800,-. Selanjutnya, keadaan 6 menyatakan keadaan pada saat harga saham sebesar Rp. 11.000,-. Keadaan 7 menyatakan keadaan pada saat harga saham mencapai Rp. 10.350,-. Keadaan berikutnya, yakni keadaan 8 menyatakan keadaan pada saat harga saham sebesar Rp. 10.850,-. Keadaan terakhir, yakni keadaan 9 menyatakan keadaan pada saat harga saham sebesar Rp. 11.500,-



Gambar 3.4. Proses kelahiran dan kematian dari saham PT. Gudang Garam Tbk

Kelahiran dalam proses ini menyatakan kenaikan harga saham PT. Gudang Garam Tbk, sedangkan kematian menyatakan penurunan harga saham PT. Gudang Garam Tbk. Dengan melihat Gambar 3.4 maka dapat diketahui bahwa pada keadaan 1 terjadi penurunan harga saham, artinya terjadi peluang transisi dari keadaan 1 ke keadaan 0 sebesar $\mu_1 = (17000 - 16350)/17000 = 0{,}038.$ Kemudian terjadi kenaikan harga saham, artinya peluang transisi dari keadaan 1 ke keadaan 2 sebesar $\lambda_1 = (16450 - 16350)/16350 = 0{,}006$.

Berdasarkan persamaan (3.1) maka persamaan peluang transisi dari keadaan 1 ke keadaan 2 adalah $\lambda_2 = \lambda + g$. Dengan demikian didapatkan persamaan

$$2\lambda + g = 0{,}006. \tag{3.44}$$

Dari Gambar (3.4) juga dapat dilihat bahwa pada keadaan 4 terjadi kenaikan yang berarti peluang transisi dari keadaan 4 ke keadaan 5 sebesar $\lambda_4 = (12800 - 12700)/12700 = 0{,}008$. Dengan cara yang sama didapatkan persamaan

$$4\lambda + g = 0{,}008. \tag{3.45}$$

Eliminasi persamaan (3.44) dan (3.45) diperoleh $\lambda = 0{,}0006$ dan $g = 0{,}0048$. Dengan demikian perusahaan Gudang Garam Tbk memiliki pertumbuhan saham dengan parameter $\lambda = 0{,}0006$; $\mu = 0{,}038$; dan $g = 0{,}0048$. Parameter λ dari PT. Gudang Garam adalah sebesar 0,0006. Ini berarti bahwa tingkat kenaikan harga saham PT. Gudang Garam adalah sebesar 0,06%. Sementara itu, parameter $\mu = 0{,}038$ dan $g = 0{,}0048$ menyatakan bahwa PT. Gudang Garam memiliki tingkat penurunan harga saham sebesar 3,8% dengan penambahan saham yang dikeluarkan melalui penawaran publik sebesar 0,48%.

3.5.1 Analisis perilaku keadaan stabil dari saham PT. Gudang Garam Tbk

Salah satu perilaku keadaan stabil adalah *mean* dan momen kedua dari keadaan stabil. Dengan mengetahui *mean* keadaan stabil dari saham suatu perusahaan maka akan diketahui kapan harga saham tersebut akan bernilai relatif konstan. Pada contoh ini, PT. Gudang Garam Tbk menggunakan h = 0 karena perusahaan tidak membayarkan deviden. Dengan demikian *mean* atau momen pertama dari keadaan stabil saham PT. Gudang Garam Tbk, dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan (3.39). Dengan memasukkan parameter $\lambda = 0{,}0006$; $\mu = 0{,}038$; dan $g = 0{,}0048$ maka diperoleh

$$m_1 = \frac{g}{\mu-\lambda} = \frac{0{,}048}{0{,}038-0{,}0006} = 1{,}3\,.$$

Mean atau momen pertama dari keadaan stabil saham PT. Gudang Garam Tbk adalah sebesar 1,3 bulan atu 39 hari.

Momen kedua dari keadaan stabil saham PT. Gudang Garam Tbk, dapat diperoleh dengan mensubstitusi parameter-parameter $\lambda = 0{,}0006$; $\mu = 0{,}038$; dan $g = 0{,}0048$ pada persamaan (3.39). Dengan demikian diperoleh

$$m_2 = \frac{g(\mu+g)}{(\mu-\lambda)^2} = \frac{0{,}048(0{,}038+0{,}048)}{(0{,}038-0{,}0006)^2} = \frac{4{,}128.10^{-3}}{1{,}39876.10^{-3}} = 2{,}95.$$

Momen kedua telah diperoleh, yakni sebesar 2,95 bulan. Variansi dari kedaan stabil saham PT. Gudang Garam Tbk adalah

$$Var = m_2 - (m_1)^2 = 2{,}95 - (1{,}3)^2 = 1{,}26\,.$$

Variansi yang diperoleh adalah sebesar 1,26 bulan atau sebesar 38 hari. Simpangan dari keadaan stabilnya adalah $\sqrt{38} = 6{,}1 \approx 6$ hari. Dengan demikian rata-rata harga saham akan relatif bernilai konstan pada 1,3 bulan atau 39 hari mendatang dengan simpangan sebesar 6 hari.

3.5.2 Analisis perilaku *transient* dari saham PT. Gudang Garam Tbk

Analisis perilaku *transient* dilakukan dengan menentukan momen pertama atau *mean* keadaan *transient* dari saham PT. Gudang Garam Tbk. Perdagangan saham merupakan investasi jangka panjang, sehingga investasi ini tidak mengenal waktu. Ini berarti waktu perdagangan saham tak berhingga. *Mean* keadaan *transient* dari saham PT. Gudang Garam Tbk dapat diperoleh dengan mensubstitusikan $\lambda = 0{,}0006$; $\mu = 0{,}038$; dan $g = 0{,}0048$ pada persamaan (3.43). Oleh karena itu didapatkan

$$m_1(t) = \frac{g}{\mu - \lambda} = \frac{0{,}048}{0{,}038 - 0{,}0006} = 1{,}3 .$$

Mean transient dari saham PT. Gudang Garam Tbk adalah sebesar 1,3 bulan atau 39 hari. Dengan demikian rata-rata harga saham akan kembali ke posisi semula, yakni pada harga Rp 17.000,- adalah sekitar 1,3 bulan atau 39 hari mendatang.

Kedua analisis di atas menghasilkan *mean* keadaan stabil dan *mean transient* yang besarnya sama. Hal ini karena pengaruh besarnya parameter λ yang nilainya kurang dari μ. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa harga saham PT. Gudang Garam Tbk akan bernilai relatif konstan, yakni pada harga Rp. 17.000,- dalam waktu 39 hari mendatang.

BAB IV
PENUTUP

4.1 KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya maka dapat disimpulkan bahwa analisis sifat-sifat *growth stocks* meliputi :

1. Analisis perilaku keadaan stabil dari model *growth stocks* yakni
   (i) Keadaan stabil dari model *growth stocks* merupakan *positive recurrent*.
   (ii) Untuk n mendekati tak hingga maka diperoleh peluang keadaan stabil yang berbentuk fungsi gamma.
   (iii) *Mean* atau momen pertama dari keadaan stabil untuk sebagian besar dengan saham bermodel *growth stock* adalah sebesar $\frac{g}{\mu-\lambda}$. Sementara itu, momen keduanya adalah sebesar $\frac{g(\mu+g)}{(\mu-\lambda)^2}$. Variansi distribusi keadaan stabilnya adalah sebesar $\frac{g\mu}{(\mu-\lambda)^2}$, dimana g adalah penambahan saham yang dikeluarkan melalui penawaran publik, μ adalah tingkat penurunan harga saham dan λ adalah tingkat kenaikan harga saham.
2. Analisis perilaku *transient* dari model *growth stocks* meliputi *mean* atau momen pertama *transient*. *Mean* keadaan *transient* untuk sebagian besar perusahaan dengan saham bermodel *growth stocks* merupakan rasio dari penambahan saham yang dikeluarkan melalui penawaran publik dengan selisih tingkat penurunan harga saham dengan tingkat kenaikan harga saham.

4.2 SARAN

Di dalam skripsi ini masih ada hal yang belum dianalisis. Beberapa saran yang bisa dimasukkan untuk analisis selanjutnya adalah sebagai berikut :

1. Model *growth stocks* yang dikaji sebaiknya tidak hanya pada perusahaan dengan kapitalisasi pasar yang besar namun juga pada perusahaan dengan kapitalisasi pasar yang sedang.
2. Analisis yang dilakukan sebaiknya tidak hanya menentukan *mean* dan moment kedua saja, namun bisa sampai dengan momen ke empat.

DAFTAR PUSTAKA

Ambrowitz, M. dan I. A. Stegun. 1972. *Handbook of Mathematical Functions*. National Bureau of Standards. Washington DC.

Dudewicz, E. J. dan S. N. Mishra. 1988. *Modern Mathemathical Statistic*. John Willey and Son, Inc. Singapore.

Ferdiansyah, T. 2002. *Kiat dan Strategi Menjadi Investor Piawai*. PT Elex Media Komputindo Kelompok Kompas-Gramedia. Jakarta.

Hines, W. W. dan D. C. Montgomery. 1990. *Probability and Statistics in Engineering and Management Science, Third Edition*. John Willey and Son, Inc. Singapore.

Husnan, S. 2003. *Dasar-dasar Teori Portfolio dan Analisis Sekuritas, Edisi Ketiga*. UPP AMP YKPN. Yogyakarta.

Kandasamy, P. , K. Thilagavanthi, dan K. Gunvavanthi. 2004. *Probability Statistics and Queueing Theory*. S.Chand and Company Ltd. New Delhi.

Kartono. 1994. *Penuntun Belajar Persamaan Diferensial*. Andi Offset. Yogyakarta.

Kou, S. C. dan S. G. Kou. 2003. *Modeling Growth Stocks via Birth-Death Processes*. J.Adv. Prob.35:641-664.

Meerschaert, M. M. 1993. *Mathematical Modelling*. Academic Press, Inc. Boston.

Papoulis, A. dan S. U. Pillai. 2002. *Probability Random Variables and Stochastic Processes, Fourth Edition*. McGrow-Hill, Inc. Singapore.

Parzen, E. 1962. *Stochastic Processes*. Holden-Day, Inc. San Francisco.

Prayekti, N. 2006. *Analisis Data Saham LQ 45* Menggunakan Teori Matriks Acak (TMA) (Studi Kasus Pada Perdagangan Saham di Bursa Efek Jakarta (BEJ))*. Skripsi, FMIPA, Universitas Brawijaya. Malang.

Ross, S. M. 1983. *Stochastic Processes*. John and Son, Inc. Canada.