QUASI-IDEAL DALAM Γ-SEMIRING

SKRIPSI

Oleh :
MOKHAMAD HARIS
0410940034-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2008

QUASI-IDEAL DALAM Γ-SEMIRING

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh :
MOKHAMAD HARIS
0410940034-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2008

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

QUASI-IDEAL DALAM Γ-SEMIRING

Oleh :
MOKHAMAD HARIS
0410940034-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 28 Juli 2008
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang matematika

Pembimbing I	Pembimbing II
Dra. Ari Andari, MS	**Drs. M. Muslikh, M.Si**
NIP. 131 652 679	**NIP. 131 871 740**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Agus Suryanto, M.Sc
NIP. 132 126 049

repository.ub.ac
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	**: MOKHAMAD HARIS**
NIM	**: 0410940034**
Jurusan	**: MATEMATIKA**
Penulis Skripsi berjudul	**: QUASI-IDEAL DALAM Γ - SEMIRING**

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. **Isi Skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di dalam isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Skripsi ini.**
2. **Apabila di kemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 28 Juli 2008
Yang menyatakan,

(Mokhamad Haris)
NIM. 0410940034

repository.ub.ac
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

QUASI-IDEAL DALAM Γ -SEMIRING

ABSTRAK

Konsep tentang quasi-ideal, yang pada mulanya hanya diperkenalkan dalam ring dan semigrup, telah mengalami perkembangan menjadi quasi-ideal dalam semiring dan Γ -semigrup. Dalam Skripsi ini diperkenalkan bentuk baru dari quasi-ideal, yaitu quasi-ideal dalam Γ -semiring. Γ -semiring merupakan generalisasi dari semiring, di mana sifat-sifat (aksioma-aksioma) yang berlaku pada semiring tetap dipertahankan dalam Γ -semiring. Quasi-ideal dalam Γ -semiring merupakan subsemigrup terhadap penjumlahan dari Γ -semiring dan sekaligus irisan dari ideal kiri dan ideal kanan dalam Γ -semiring tersebut.

Kata kunci : Γ -semiring, quasi-ideal.

QUASI-IDEALS IN Γ-SEMIRINGS

ABSTRACT

Concept of quasi-ideal, which is previously introduced only in ring and semigroup, has been developed into quasi-ideal in semiring and Γ-semigroup. This final project introduces a new form of quasi-ideal i.e. quasi-ideal in Γ-semiring. Γ-semiring is a generalization of semiring, where the properties or axioms valid in semiring are kept valid in Γ-semiring. Quasi-ideal in Γ-semiring is both additive subsemigroup of Γ-semiring and intersection of left and right ideal in that Γ-semiring.

Keywords : Γ-semirings, quasi-ideals.

KATA PENGANTAR

Segala puja-puji syukur penulis panjatkan ke hadirat ALLAH Rabbul 'Alamiin atas segala rahmat serta hidayahNya yang telah dilimpahkan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan penulisan Skripsi yang berjudul **"Quasi-Ideal dalam Γ-semiring"**. Shalawat, salam, dan terima kasih sebesar–besarnya juga penulis curahkan kepada Rasulullah MUHAMMAD SAW. Skripsi ini disusun dan diajukan sebagai syarat untuk memperoleh gelar sarjana pada Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Brawijaya.

Penulis menyadari bahwa penulisan Skripsi ini tidak dapat terealisasikan tanpa bantuan baik yang bersifat moral maupun spiritual dari berbagai pihak. Untuk itu penulis menyampaikan terima kasih yang sedalam-dalamnya kepada :

1. Dra. Ari Andari, MS selaku pembimbing I dan Drs. M. Muslikh, M.Si selaku pembimbing II atas segala pengarahan, motivasi, nasihat, dukungan, waktu dan segala sesuatu yang telah diberikan selama penyusunan Skripsi ini.
2. Dr. Agus Suryanto, M.Sc, Dr. Marjono, M.Phil, dan Dr. Abdul Rouf Al-Ghofari, M.Sc selaku dosen penguji atas segala masukan dan saran yang diberikan untuk perbaikan Skripsi ini.
3. Drs. Sobri Abusini, MT selaku dosen penasihat akademik beserta seluruh dosen dan staf pengajar yang telah mencurahkan ilmunya selama melaksanakan studi.
4. Segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika (P. Ni dkk) atas segala bantuannya.
5. Ayah (alm) dan Ibuku tercinta yang telah mengasuhku dan menyayangiku tanpa letih, serta kakakku (mas Ayung) yang selalu menjadi motivatorku.
6. Segenap keluargaku di Malang: kel. B. Tutik, kel. P. Edi, kel. P. Nurali, kel. P. Samsul, dan keluarga–keluarga lain yang telah mencurahkan segala kebaikan dan kepercayaannya selama ini.
7. Keluarga besar Kerto Asri 104: B. Meilin (almh) sekeluarga beserta seluruh PKK 104 dari 2004 – sekarang.
8. Bush, Bamby, Ron, Hermione, DJ, Alyon, Ni2Z, dan sobat–sobatku Mat '04 yang selalu menemaniku di saat suka dan duka.

9. Seluruh adik (anak didik) yang telah bertukar pikiran dan ilmu pengetahuan, khususnya Macruz dan adikku tercinta Normalita yang memandu dan menginspirasi pengerjaan Skripsi ini.

Sebagai manusia yang memiliki keterbatasan dan dengan segala kerendahan hati, penulis menyadari bahwa dalam penulisan Skripsi ini masih terdapat banyak kekurangan sehingga belum dapat dikatakan sempurna. Untuk itu penulis sangat mengharapkan kritik dan saran dari berbagai pihak demi kesempurnaan Skripsi ini.

Akhir kata, penulis berharap semoga Skripsi ini dapat memberikan manfaat dan sumbangan yang berarti di masa yang akan datang.

Malang, 28 Juli 2008

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

HALAMAN JUDUL i
HALAMAN PENGESAHAN iii
HALAMAN PERNYATAAN v
ABSTRAK vii
ABSTRACT ix
KATA PENGANTAR xi
DAFTAR ISI xiii
DAFTAR SIMBOL xv

BAB I PENDAHULUAN 1
1.1. Latar Belakang 1
1.2. Rumusan Masalah 1
1.3. Batasan Masalah 2
1.4. Tujuan 2

BAB II TINJAUAN PUSTAKA 3
2.1. Grup dan Semigrup 3
2.1.1. Operasi Biner 3
2.1.2. Grup 3
2.1.3. Subgrup 3
2.1.4. Semigrup 4
2.1.5. Semigrup Komutatif 4
2.1.6. Subsemigrup 4
2.2. Ring dan Semiring 4
2.2.1. Ring 4
2.2.2. Subring 4
2.2.3. Semiring 4
2.2.4. Semiring Komutatif 5
2.2.5. Ideal dalam Ring 5
2.2.6. Ideal dalam Semiring 5
2.3 Γ-semigrup 5
2.3.1. Γ-semigrup 5
2.3.2. Sub Γ-semigrup 6
2.3.3. Ideal dalam Γ-semigrup 7
2.4. Γ-semiring 7
2.4.1. Γ-semiring 7

2.4.2. Γ -semiring Komutatif 7
2.4.3. Sub Γ -semiring 11
2.4.4. Ideal dalam Γ -semiring 12

BAB III PEMBAHASAN 21
3.1. Quasi-Ideal dalam Ring 21
3.2. Quasi-Ideal dalam Semigrup 22
3.3. Quasi-Ideal dalam Semiring 23
3.4. Quasi-Ideal dalam Γ -Semigrup 24
3.5. Quasi-Ideal dalam Γ -Semiring 25
3.6. k -ideal 29
3.7. Elemen Identitas dari Γ -semiring 32
3.8. Γ -semiring Regular 35

BAB IV KESIMPULAN 39
DAFTAR PUSTAKA 41

DAFTAR SIMBOL

Γ	: Gamma
$*$	: Operasi biner
$\in$	: Anggota (elemen) dari
$\forall$	: Untuk setiap
$\Rightarrow$	: Jika ... maka ... (implikasi)
$\subseteq$	: Subset (himpunan bagian)
Z	: Himpunan bilangan bulat
Z^+	: Himpunan bilangan bulat positif
N	: Himpunan bilangan asli (natural)
R	: Himpunan bilangan real
$M_{m\times n}$	: Matriks M yang berukuran m baris dan n kolom
$[A]_{ij}$	: Entri pada baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dari suatu matriks A
$\cup$	: Gabungan (union)
$\cap$	: Irisan
$(X)_l$	: Ideal kiri terkecil dalam Γ-semiring yang memuat X
$(X)_r$	: Ideal kanan terkecil dalam Γ-semiring yang memuat X
$(X)_i$	: Ideal terkecil dalam Γ-semiring yang memuat X
$(X)_q$	: Quasi-ideal terkecil dalam Γ-semiring yang memuat X
■	: Akhir dari suatu bukti.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Bentuk struktur aljabar yang paling sederhana dengan suatu operasi biner adalah semigrup. Semigrup kemudian berkembang menjadi grup, yang selanjutnya berkembang lagi menjadi ring. Di dalam ring, terdapat subring dan ideal. Ideal dibedakan atas dua macam, yakni ideal kiri dan ideal kanan. Jika suatu ideal memenuhi kedua jenis ideal tersebut, maka dikatakan sebagai ideal dua sisi, atau cukup disebut dengan ideal. Struktur aljabar yang lebih lemah daripada ring dinamakan semiring. Definisi semiring hampir sama dengan ring, hanya saja terdapat sedikit perbedaan pada aksioma yang harus dipenuhi.

Dari beberapa konsep dasar di atas, bentuk–bentuk struktur aljabar terus mengalami perkembangan. Konsep tentang semigrup dan semiring, masing-masing berkembang menjadi Γ-semigrup dan Γ-semiring. Seperti halnya Γ-semigrup yang merupakan generalisasi dari semigrup, Γ-semiring juga merupakan perluasan dari semiring, di mana sifat-sifat (aksioma-aksioma) yang berlaku pada semiring tetap dipertahankan dalam Γ-semiring. Sementara itu, konsep tentang quasi-ideal, yang pada mulanya ditemukan terdapat dalam ring oleh Otto Steinfeld pada tahun 1953, juga terus mengalami perkembangan. Pada tahun 1956, Steinfeld kembali mengemukakan konsep quasi-ideal dalam semigrup. Selanjutnya, pada tahun 2004 M. Shabir dkk memperkenalkan quasi-ideal dalam semiring, yang kemudian dilanjtkan oleh R. Chinram yang menjabarkan quasi-ideal dalam Γ-semigrup.

Oleh karena itu, dalam skripsi ini diperkenalkan bentuk baru dari quasi-ideal, yaitu quasi-ideal dalam Γ-semiring.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka permasalahan yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah bagaimana definisi quasi-ideal dalam Γ-semiring dan apa saja teorema–teorema yang berkaitan dengan quasi-ideal dalam Γ-semiring, beserta bukti–buktinya.

1.3 Batasan Masalah

Dalam skripsi ini permasalahan yang akan dibahas dibatasi hanya pada definisi–definisi dan teorema–teorema dari quasi-ideal dalam Γ-semiring, beserta bukti–buktinya, dan tidak dibandingkan dengan bentuk–bentuk aljabar abstrak yang lain.

1.4 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah memaparkan beberapa definisi, serta membuktikan teorema–teorema yang berhubungan dengan quasi-ideal dalam Γ-semiring.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan beberapa definisi dan teorema untuk membantu memahami permasalahan yang akan dibahas dan juga digunakan sebagai acuan dalam pembahasan.

2.1 Grup dan Semigrup

Definisi 2.1.1 Operasi Biner (Dummit dan Foote, 2002)
Suatu operasi biner $*$ atas suatu himpunan tak kosong G adalah suatu fungsi $* : G \times G \to G$. Untuk sebarang $a, b \in G$, ditulis $a * b$ untuk $*(a, b)$.

Definisi 2.1.2 Grup (Dummit dan Foote, 2002)
Suatu grup adalah suatu pasangan terurut $(G, *)$, di mana G adalah suatu himpunan tak kosong dan $*$ adalah suatu operasi biner atas G yang memenuhi aksioma–aksioma:

1. tertutup: $\forall\, a, b \in G \Rightarrow a * b \in G$;
2. asosiatif: $\forall\, a, b, c \in G \Rightarrow a * (b * c) = (a * b) * c$;
3. untuk setiap $a \in G$ terdapat elemen identitas $e \in G$ sedemikian sehingga $a * e = e * a = a$;
4. untuk masing–masing $a \in G$ terdapat elemen invers $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Grup $(G, *)$ dikatakan abelian (komutatif) jika $a * b = b * a$, $\forall\, a, b \in G$.

Definisi 2.1.3 Subgrup (Dummit dan Foote, 2002)
Misalkan H subset tak kosong dari suatu grup G. Himpunan H disebut subgrup dari G jika H membentuk grup terhadap operasi yang sama dengan operasi di dalam G.

Definisi 2.1.4 Semigrup (Lallement, 1979)
Misalkan M himpunan tak kosong dan $*$ merupakan operasi biner pada M. $(M,*)$ disebut semigrup jika M terhadap operasi $*$ memenuhi tertutup dan asosiatif.

Definisi 2.1.5 Semigrup Komutatif (Lallement, 1979)
Suatu semigrup M dikatakan semigrup komutatif jika M bersifat komutatif terhadap operasi di dalamnya.

Definisi 2.1.6 Subsemigrup (Lallement, 1979)
Misalkan N subset tak kosong dari suatu semigrup M. Himpunan N disebut subsemigrup dari M jika N membentuk semigrup terhadap operasi yang sama dengan operasi di dalam M.

2.2 Ring dan Semiring

Definisi 2.2.1 Ring (Dummit dan Foote, 2002)
Suatu himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner, yaitu penjumlahan (+) dan pergandaan $(\cdot)$ dikatakan ring jika:

1. $(R,+)$ membentuk grup komutatif;
2. $(R,\cdot)$ membentuk semigrup;
3. $(R,+,\cdot)$ memenuhi hukum distributif, yaitu $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ dan $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$, $\forall\, a,b,c\in R$.

Definisi 2.2.2 Subring (Dummit dan Foote, 2002)
Misalkan M subset tak kosong dari suatu ring $(R,+,\cdot)$. M disebut subring dari R jika M membentuk ring terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan.

Definisi 2.2.3 Semiring (Shabir dkk, 2004)
Suatu himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner, yaitu penjumlahan (+) dan pergandaan $(\cdot)$ dikatakan semiring jika:

1. $(R,+)$ membentuk semigrup komutatif;
2. $(R,\cdot)$ membentuk semigrup;

3. $(R,+,\cdot)$ memenuhi hukum distributif, yaitu $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ dan $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$, $\forall\, a,b,c\in R$.

Definisi 2.2.4 Semiring Komutatif (Andhikari dan Sen, 2000)
Suatu semiring R disebut semiring komutatif jika R terhadap operasi pergandaan memenuhi komutatif.

Definisi 2.2.5 Ideal dalam Ring (Dummit dan Foote, 2002)
Misalkan R ring dan I subset tak kosong dari R. Himpunan I disebut ideal kiri (kanan) dalam R jika $a-b\in I$ dan $ra\in I$ $(ar\in I)$, $\forall\, a,b\in I$ dan $\forall\, r\in R$. Jika I adalah ideal kiri dan ideal kanan dalam R, maka I disebut ideal dua sisi dalam R, atau cukup disebut dengan ideal dalam R.

Definisi 2.2.6 Ideal dalam Semiring (Shabir dkk, 2004)
Misalkan R semiring dan I subset tak kosong dari R. Himpunan I disebut ideal kiri (kanan) dalam R jika $a+b\in I$ dan $ra\in I$ $(ar\in I)$, $\forall\, a,b\in I$ dan $\forall\, r\in R$. Jika I adalah ideal kiri dan ideal kanan dalam R, maka I disebut ideal dua sisi dalam R, atau cukup disebut dengan ideal dalam R.

2.3 Γ-semigrup

Definisi 2.3.1 Γ-semigrup (Sen dan Saha, 1986)
Misalkan N dan Γ adalah himpunan tak kosong. Jika diberikan pemetaan $N\times\Gamma\times N\to N$ yang didefinisikan dengan $(a,\gamma,b)\mapsto a\gamma b$, maka N disebut Γ-semigrup jika memenuhi $(a\gamma b)\mu c=a\gamma(b\mu c)$, $\forall\, a,b,c\in N$ dan $\forall\,\gamma,\mu\in\Gamma$.

Sebelum menjelaskan definisi berikutnya tentang Γ-semigrup, perlu didefinisikan terlebih dulu notasi yang akan digunakan. Misalkan A dan B adalah subset tak kosong dari suatu Γ-semigrup N. Didefinisikan $A\Gamma B=\{a\gamma b \mid a\in A,\gamma\in\Gamma,b\in B\}$.

Definisi 2.3.2 Sub Γ-semigrup (Chinram dan Jirojkul, 2007)
Suatu subset tak kosong A dari Γ-semigrup N dikatakan sub Γ-semigrup dari N jika $a\gamma b \in A$, $\forall\, a,b \in A$, dan $\forall\, \gamma \in \Gamma$, atau dengan kata lain $A\Gamma A \subseteq A$.

Contoh 2.3.1
Misalkan $M = [0,1]$, $\Gamma = \left\{ 1/n \,\middle|\, n \in Z^+ \right\}$, dan $K = [0,1/2]$. Jika diberikan pemetaan $M \times \Gamma \times M \to M$, maka M adalah Γ-semigrup dan K adalah sub Γ-semigrup dari M.

Bukti:
Misalkan diberikan sebarang $a,b \in M$ dan $\gamma \in \Gamma$. Jadi $0 \le a \le 1$, $0 \le b \le 1$, dan $0 < \gamma \le 1$, sehingga diperoleh $0 \cdot 0 \cdot 0 \le a\gamma b \le 1 \cdot 1 \cdot 1$ atau $0 \le a\gamma b \le 1$. Dengan demikian, $a\gamma b \in M$. Selanjutnya, misalkan diberikan pula sebarang $c \in M$ dan $\mu \in \Gamma$. Jadi $\gamma = \frac{1}{m}$ dan $\mu = \frac{1}{n}$, untuk suatu m dan n bilangan bulat positif, sehingga $(a\gamma b)\mu c = (a\frac{1}{m}b)\frac{1}{n}c = a\frac{1}{m}(b\frac{1}{n}c) = a\gamma(b\mu c)$. Karena $a\gamma b \in M$ dan $(a\gamma b)\mu c = a\gamma(b\mu c)$, terbukti M adalah Γ-semigrup. Berikutnya, akan ditunjukkan K adalah sub Γ-semigrup dari M. Jelas K adalah subset tak kosong dari M. Selanjutnya, misalkan diberikan sebarang $k,l \in K$. Jadi $0 \le k \le \frac{1}{2}$ dan $0 \le l \le \frac{1}{2}$, sehingga $0 \cdot 0 \cdot 0 \le k\gamma l \le \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}$ atau $0 \le k\gamma l \le \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$. Dengan demikian, $k\gamma l \in K$. Terbukti K adalah sub Γ-semigrup dari M. ■

Lemma 2.3.1 (Chinram, 2006)
Misalkan $(N,\cdot)$ adalah semigrup dan Γ adalah sebarang himpunan tak kosong. Jika diberikan pemetaan $N \times \Gamma \times N \to N$ yang

didefinisikan dengan $a\gamma b = ab$, $\forall\, a, b \in N$, dan $\forall\, \gamma \in \Gamma$, maka N adalah Γ-semigrup.

Bukti:
Misalkan diberikan sebarang $a, b, c \in N$ dan $\gamma, \mu \in \Gamma$. Maka

$$
\begin{aligned}
(a\gamma b)\mu c &= (ab)\mu c && \text{(definisi pemetaan)}\\
&= a(b\mu c) && \text{(asosiatif)}\\
&= a(bc) && \text{(definisi pemetaan)}\\
&= (ab)c && \text{(asosiatif)}\\
&= (a\gamma b)c && \text{(definisi pemetaan)}\\
&= a\gamma(bc) && \text{(asosiatif)}\\
&= a\gamma(b\mu c) && \text{(definisi pemetaan)}
\end{aligned}
$$

Jadi, terbukti N adalah Γ-semigrup. ■

Definisi 2.3.3 Ideal dalam Γ-semigrup (Jun, 2003)
Suatu subset tak kosong A dari Γ-semigrup N disebut ideal kiri (kanan) dalam N jika $n\gamma a \in A\,(a\gamma m \in A)$, $\forall\, n \in N$, $\forall\, \gamma \in \Gamma$, dan $\forall\, a \in A$, atau dengan kata lain $N\Gamma A \subseteq A\,(A\Gamma N \subseteq A)$. Jika A ideal kiri dan ideal kanan dalam N, maka A disebut ideal dua sisi dalam N, atau cukup disebut dengan ideal dalam N.

2.4 Γ-semiring

Definisi 2.4.1 Γ-semiring (Chinram, 2008)
Misalkan S adalah semigrup komutatif terhadap penjumlahan dan Γ adalah himpunan tak kosong. S disebut Γ-semiring jika S adalah Γ-semigrup dan $\forall\, a, b, c \in S$, dan $\forall\, \alpha \in \Gamma$ berlaku:

1. $a\alpha(b + c) = a\alpha b + a\alpha c$;
2. $(a + b)\alpha c = a\alpha c + b\alpha c$.

Definisi 2.4.2 Γ-semiring komutatif (Rao, 1995)
Suatu Γ-semiring S dikatakan komutatif jika $a\alpha b = b\alpha a$, $\forall\, a, b \in S$ dan $\forall\, \alpha \in \Gamma$.

Contoh 2.4.1

Misalkan $(M_{m\times n},+)$ adalah semigrup dari matriks–matriks $m\times n$ atas himpunan bilangan bulat tak negatif dan $(\Gamma_{n\times m},+)$ adalah semigrup dari matriks–matriks $n\times m$ atas himpunan yang sama. Jika diberikan pemetaan $\varphi: M_{m\times n}\times\Gamma_{n\times m}\times M_{m\times n}\to M_{m\times n}$, maka M adalah Γ-semiring.

Bukti:

Misalkan diberikan $M_{m\times n}=\left\{A_{m\times n}\,\middle|\,[A]_{ij}\in Z^{+}\cup\{0\}\right\}$ dan $\Gamma_{n\times m}=\left\{\alpha_{n\times m}\,\middle|\,[\alpha]_{ij}\in Z^{+}\cup\{0\}\right\}$ adalah semigrup terhadap penjumlahan. Karena operasi penjumlahan pada matriks bersifat komutatif, jadi M adalah semigrup komutatif. Selanjutnya, misalkan diberikan sebarang $A,B,C\in M$ dan $\alpha,\beta\in\Gamma$. Maka:

1. $$\begin{aligned}[A\alpha(B\beta C)]_{ij}&=\sum_{p=1}^{m}[A\alpha]_{ip}[B\beta C]_{pj}\\&=\sum_{p=1}^{m}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}[A]_{ik}[\alpha]_{kp}\right)\left(\sum_{r=1}^{m}[B\beta]_{pr}[C]_{rj}\right)\right)\\&=\sum_{p=1}^{m}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}[A]_{ik}[\alpha]_{kp}\right)\left(\sum_{r=1}^{m}\left(\sum_{q=1}^{n}[B]_{pq}[\beta]_{qr}\right)[C]_{rj}\right)\right)\\&=\sum_{p=1}^{m}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}[A]_{ik}[\alpha]_{kp}\right)\left(\sum_{r=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}[B]_{pq}[\beta]_{qr}[C]_{rj}\right)\right)\\&=\sum_{p=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}[A]_{ik}[\alpha]_{kp}[B]_{pq}[\beta]_{qr}[C]_{rj}\right)\\&=\sum_{p=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}[A]_{ik}[\alpha]_{kp}[B]_{pq}[\beta]_{qr}[C]_{rj}\\&=\sum_{q=1}^{n}\left(\sum_{p=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{m}[A]_{ik}[\alpha]_{kp}[B]_{pq}[\beta]_{qr}[C]_{rj}\right)\end{aligned}$$

$$= \sum_{q=1}^{n}\left(\sum_{p=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}[A]_{ik}[\alpha]_{kp}[B]_{pq}\right)\left(\sum_{r=1}^{m}[\beta]_{qr}[C]_{rj}\right)\right)$$

$$= \sum_{q=1}^{n}\left(\left(\sum_{p=1}^{m}[A\alpha]_{ip}[B]_{pq}\right)[\beta C]_{qj}\right)$$

$$= \sum_{q=1}^{n}[A\alpha B]_{iq}[\beta C]_{qj}$$

$$= [(A\alpha B)\beta C]_{ij}$$

2. $[A\alpha(B+C)]_{ij} = \sum_{p=1}^{m}[A\alpha]_{ip}[B+C]_{pj}$

$$= \sum_{p=1}^{m}[A\alpha]_{ip}([B]_{pj}+[C]_{pj})$$

$$= \sum_{p=1}^{m}[A\alpha]_{ip}[B]_{pj} + \sum_{p=1}^{m}[A\alpha]_{ip}[C]_{pj}$$

$$= [A\alpha B]_{ij} + [A\alpha C]_{ij}$$

3. $[(A+B)\alpha C]_{ij} = \sum_{p=1}^{n}[A+B]_{ip}[\alpha C]_{pj}$

$$= \sum_{p=1}^{n}([A]_{ip}+[B]_{ip})[\alpha C]_{pj}$$

$$= \sum_{p=1}^{n}[A]_{ip}[\alpha C]_{pj} + \sum_{p=1}^{n}[B]_{ip}[\alpha C]_{pj}$$

$$= [A\alpha C]_{ij} + [B\alpha C]_{ij}$$

Dengan demikian, terbukti M adalah Γ-semiring. ■

Lemma 2.4.1 (Chinram, 2008)
Misalkan S adalah semiring dan Γ adalah sebarang himpunan tak kosong. Jika diberikan pemetaan $S \times \Gamma \times S \to S$ yang didefinisikan

dengan $a\gamma b = ab$, $\forall\, a, b \in S$, dan $\forall\, \gamma \in \Gamma$, maka S adalah Γ-semiring.

Bukti:
Misalkan diberikan sebarang $a, b, c \in S$ dan $\gamma, \mu \in \Gamma$.

1. Jelas bahwa $(S, +)$ adalah semigrup komutatif, sebab S adalah semiring.

2. Dari definisi pemetaan jelas $a\gamma b = ab \in S$.
   Selanjutnya,
   $$\begin{aligned}
   (a\gamma b)\mu c &= (ab)\mu c && \text{(definisi pemetaan)}\\
   &= a(b\mu c) && \text{(asosiatif)}\\
   &= a(bc) && \text{(definisi pemetaan)}\\
   &= (ab)c && \text{(asosiatif)}\\
   &= (a\gamma b)c && \text{(definisi pemetaan)}\\
   &= a\gamma(bc) && \text{(asosiatif)}\\
   &= a\gamma(b\mu c) && \text{(definisi pemetaan)}
   \end{aligned}$$
   Karena $a\gamma b \in S$ dan $(a\gamma b)\mu c = a\gamma(b\mu c)$, terbukti S adalah Γ-semigrup.

3. $$\begin{aligned}
   a\gamma(b+c) &= a(b+c) && \text{(definisi pemetaan)}\\
   &= ab + ac && \text{(distributif)}\\
   &= a\gamma b + a\gamma c && \text{(definisi pemetaan)}\\
   (b+c)\gamma a &= (b+c)a && \text{(definisi pemetaan)}\\
   &= ba + ca && \text{(distributif)}\\
   &= b\gamma a + c\gamma a && \text{(definisi pemetaan)}
   \end{aligned}$$

Dari ketiga bukti di atas, terbukti bahwa S adalah Γ-semiring. ■

Corollary 2.4.2 (Chinram, 2008)
Jika R adalah ring, Γ adalah sebarang himpunan tak kosong dan didefinisikan pemetaan seperti pada Lemma 2.4.1, maka R adalah Γ-semiring.

Bukti:
Karena setiap ring adalah semiring, jadi R adalah semiring. Menurut Lemma 2.4.1, terbukti R adalah Γ-semiring. ■

Selanjutnya diasumsikan bahwa setiap Γ-semiring S mempunyai suatu Γ-*absorbing zero*, yaitu terdapat $0 \in S$ sedemikian sehingga $x + 0 = 0 + x = x$ dan $0\gamma x = x\gamma 0 = 0$, $\forall\, x \in S$ dan $\forall\, \gamma \in \Gamma$.

Sebelum membahas lebih lanjut tentang Γ-semiring, perlu diberikan terlebih dulu notasi yang akan digunakan. Misalkan A dan B adalah subset tak kosong dari Γ-semiring S, dan N adalah himpunan bilangan asli. Didefinisikan

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\},$$

$$A\Gamma B = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \gamma_i b_i \mid a_i \in A, \gamma_i \in \Gamma, b_i \in B \right\},$$

dan

$$\mathrm{N}A = \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \mid p_i \in \mathrm{N}, a_i \in A \right\}.$$

Definisi 2.4.3 Sub Γ-semiring (Chinram, 2008)
Misalkan S adalah Γ-semiring dan T subset tak kosong dari S. T disebut sub Γ-semiring dari S jika T adalah subsemigrup dari $(S, +)$ dan $a\gamma b \in T$, $\forall\, a, b \in T$ dan $\forall\, \gamma \in \Gamma$, atau dengan kata lain $T\Gamma T \subseteq T$.

Lemma 2.4.3 (Chinram, 2008)
Misalkan S adalah semiring, T adalah subsemiring dari S, dan Γ adalah sebarang himpunan tak kosong. Jika diberikan pemetaan $S \times \Gamma \times S \to S$ yang didefinisikan dengan $a\gamma b = ab$, $\forall\, a, b \in S$, dan $\forall\, \gamma \in \Gamma$, maka T adalah sub Γ-semiring dari Γ-semiring S.

Bukti:
Jelas bahwa T adalah subsemigrup dari $(S, +)$ dan $ab \in T$, $\forall\, a, b \in T$, sebab T adalah subsemiring dari S. Menurut Lemma

2.4.1, S adalah Γ-semiring. Selanjutnya, misalkan diberikan sebarang $a, b \in T$ dan $\gamma \in \Gamma$. Jadi $a\gamma b = ab \in T$. Dengan demikian, terbukti T adalah sub Γ-semiring dari Γ-semiring S. ■

Corollary 2.4.4 (Chinram, 2008)
Jika R adalah ring, T subring dari R, Γ adalah sebarang himpunan tak kosong dan didefinisikan pemetaan seperti pada Lemma 2.4.3, maka T adalah sub Γ-semiring dari Γ-semiring R.

Bukti:
Karena setiap ring adalah semiring, jadi R adalah semiring. Dengan demikian, menurut Lemma 2.4.3, terbukti T adalah sub Γ-semiring dari Γ-semiring R. ■

Definisi 2.4.4 Ideal dalam Γ-semiring (Chinram, 2008)
Misalkan S adalah Γ-semiring dan T subset tak kosong dari S. T disebut ideal kiri (kanan) dalam S jika T adalah subsemigrup dari $(S, +)$ dan $x\gamma t \in T$ $(t\gamma x \in T)$, $\forall x \in S$, $\forall \gamma \in \Gamma$, dan $\forall t \in T$, atau dengan kata lain $S\Gamma T \subseteq T$ $(T\Gamma S \subseteq T)$. Jika T adalah ideal kiri dan ideal kanan dalam S, maka T disebut ideal dua sisi dalam S, atau cukup disebut dengan ideal dalam S.

Lemma 2.4.5 (Chinram, 2008)
Misalkan S adalah semiring, T adalah ideal kiri (kanan) dalam S, dan Γ adalah sebarang himpunan tak kosong. Jika diberikan pemetaan $S \times \Gamma \times S \to S$ yang didefinisikan dengan $a\gamma b = ab$, $\forall a, b \in S$, dan $\forall \gamma \in \Gamma$, maka T adalah ideal kiri (kanan) dalam Γ-semiring S. Demikian juga, jika T adalah ideal dalam semiring S, maka T adalah ideal dalam Γ-semiring S.

Bukti:
Jelas bahwa T adalah subsemigrup dari $(S, +)$, sebab T adalah ideal kiri (kanan) dalam semiring S. Menurut Lemma 2.4.1, S adalah Γ-semiring. Selanjutnya, misalkan diberikan sebarang $x \in S$, $\gamma \in \Gamma$, dan $t \in T$. Jadi $x\gamma t = xt$ $(t\gamma x = tx)$. Karena T ideal kiri (kanan) dalam S, maka $x\gamma t = xt \in T$ $(t\gamma x = tx \in T)$. Dengan

demikian, terbukti T adalah ideal kiri (kanan) dalam Γ-semiring S. Jika T adalah ideal dalam semiring S, maka $\forall\, x \in S$, $\forall\, \gamma \in \Gamma$, dan $\forall\, t \in T$, berlaku $x\gamma t = xt \in T$ dan $t\gamma x = tx \in T$. Sedangkan menurut Lemma 2.4.1, S adalah Γ-semiring. Terbukti T adalah ideal kiri dan ideal kanan dalam Γ-semiring S, atau dengan kata lain T adalah ideal dalam Γ-semiring S. ■

Corollary 2.4.6 (Chinram, 2008)
Jika R adalah ring, T adalah ideal kiri (kanan, ideal) dalam R, Γ adalah sebarang himpunan tak kosong dan didefinisikan pemetaan seperti pada Lemma 2.4.5, maka T adalah ideal kiri (kanan, ideal) dalam Γ-semiring R.

Bukti:
Karena setiap ring adalah semiring, jadi R adalah semiring. Menurut Lemma 2.4.5, terbukti T adalah ideal kiri (kanan, ideal) dalam Γ-semiring R. ■

Selanjutnya, didefinisikan pula notasi yang akan digunakan dalam Teorema 2.4.7 dan 2.4.8. Misalkan X adalah subset tak kosong dari Γ-semiring S. Didefinisikan $(X)_l$ adalah ideal kiri terkecil dalam S yang memuat X, $(X)_r$ adalah ideal kanan terkecil dalam S yang memuat X, dan $(X)_i$ adalah ideal terkecil dalam S yang memuat X.

Teorema 2.4.7 (Chinram, 2008)
Misalkan S adalah suatu Γ-semiring, X adalah suatu subset tak kosong dari S, dan N adalah himpunan bilangan asli. Maka

1. $(X)_l = \mathrm{N}X + S\Gamma X$
2. $(X)_r = \mathrm{N}X + X\Gamma S$
3. $(X)_i = \mathrm{N}X + S\Gamma X + X\Gamma S + S\Gamma X\Gamma S$

Bukti:
1. Misalkan $L = \mathrm{N}X + S\Gamma X$.
i) Akan dibuktikan $X \subseteq L$.

Misalkan diberikan sebarang $x \in X$. Karena S mempunyai Γ-*absorbing zero* 0, yaitu $0\gamma x = x\gamma 0 = 0$, untuk setiap $\gamma \in \Gamma$, jadi $x = 1x + 0 = 1x + 0\gamma x \in L$. Terbukti $X \subseteq L$.

ii) Akan dibuktikan L adalah ideal kiri dalam S.
Misalkan diberikan sebarang $a, b \in L$. Jadi $a = a_1 + a_2$ dan $b = b_1 + b_2$, untuk suatu $a_1, b_1 \in \mathrm{N}X$ dan $a_2, b_2 \in S\Gamma X$.

$a_1 \in \mathrm{N}X \Rightarrow a_1 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$, untuk suatu $p_i \in \mathrm{N}$ dan $x_i \in X$, untuk setiap $i = 1, 2, ..., n$. $b_1 \in \mathrm{N}X \Rightarrow b_1 = \sum_{i=1}^{n} q_i x_i$, untuk suatu $q_i \in \mathrm{N}$ dan $x_i \in X$, untuk setiap $i = 1, 2, ..., n$.

$a_1 + b_1 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i + \sum_{i=1}^{n} q_i x_i = \sum_{i=1}^{n} (p_i + q_i) x_i$. Karena N tertutup terhadap penjumlahan, jadi $p_i + q_i \in \mathrm{N}$, untuk setiap $i = 1, 2, ..., n$, sehingga $a_1 + b_1 = \sum_{i=1}^{n} (p_i + q_i) x_i \in \mathrm{N}X$.

$a_2 \in S\Gamma X \Rightarrow a_2 = \sum_{i=1}^{n} k_i \gamma_i x_i$, untuk suatu $k_i \in S$, $\gamma_i \in \Gamma$, dan $x_i \in X$, $\forall\, i = 1, 2, ..., n$. $b_2 \in S\Gamma X \Rightarrow b_2 = \sum_{i=1}^{n} l_i \gamma_i x_i$, untuk suatu $l_i \in S$, $\gamma_i \in \Gamma$, dan $x_i \in X$, $\forall\, i = 1, 2, ..., n$.

$a_2 + b_2 = \sum_{i=1}^{n} k_i \gamma_i x_i + \sum_{i=1}^{n} l_i \gamma_i x_i = \sum_{i=1}^{n} (k_i + l_i) \gamma_i x_i$. Karena S adalah semigrup, jadi $k_i + l_i \in S$, $\forall\, i = 1, 2, ..., n$, sehingga $a_2 + b_2 = \sum_{i=1}^{n} (k_i + l_i) \gamma_i x_i \in S\Gamma X$. Karena $a_1 + b_1 \in \mathrm{N}X$ dan $a_2 + b_2 \in S\Gamma X$, jadi $a + b \in \mathrm{N}X + S\Gamma X = L$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $S\Gamma L \subseteq L$.

$S\Gamma L = S\Gamma(\mathrm{N}X + S\Gamma X) = S\Gamma \mathrm{N}X + S\Gamma S\Gamma X$

$= \mathrm{N}S\Gamma X + S\Gamma S\Gamma X = (\mathrm{N} + S\Gamma)S\Gamma X \subseteq S\Gamma X \subseteq L$.

Terbukti L ideal kiri dalam S.

iii) Akan dibuktikan L adalah ideal kiri terkecil dalam S yang memuat X.

Misalkan K adalah sebarang ideal kiri dalam S yang memuat X. Karena $X \subseteq K$, jadi $\mathrm{N}X \subseteq K$ dan $S\Gamma X \subseteq S\Gamma K \subseteq K$. Dengan demikian, $L = \mathrm{N}X + S\Gamma X \subseteq K$. Terbukti L adalah ideal kiri terkecil dalam S yang memuat X.

Dari i), ii), dan iii), terbukti $(X)_l = L = \mathrm{N}X + S\Gamma X$.

2. Misalkan $R = \mathrm{N}X + X\Gamma S$.

i) Akan dibuktikan $X \subseteq R$.

Misalkan diberikan sebarang $x \in X$. Karena S mempunyai Γ-*absorbing zero* 0, yaitu $0\gamma x = x\gamma 0 = 0$, untuk setiap $\gamma \in \Gamma$, jadi $x = 1x + 0 = 1x + x\gamma 0 \in R$. Terbukti $X \subseteq R$.

ii) Akan dibuktikan R adalah ideal kanan dalam S.

Misalkan diberikan sebarang $a, b \in R$. Jadi $a = a_1 + a_2$ dan $b = b_1 + b_2$, untuk suatu $a_1, b_1 \in \mathrm{N}X$ dan $a_2, b_2 \in X\Gamma S$.

$a_1 \in \mathrm{N}X \Rightarrow a_1 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$, untuk suatu $p_i \in \mathrm{N}$ dan $x_i \in X$, untuk setiap $i = 1, 2, ..., n$. $b_1 \in \mathrm{N}X \Rightarrow b_1 = \sum_{i=1}^{n} q_i x_i$, untuk suatu $q_i \in \mathrm{N}$ dan $x_i \in X$, untuk setiap $i = 1, 2, ..., n$.

$a_1 + b_1 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i + \sum_{i=1}^{n} q_i x_i = \sum_{i=1}^{n} (p_i + q_i) x_i$. Karena N tertutup terhadap penjumlahan, jadi $p_i + q_i \in \mathrm{N}$, untuk setiap

$i = 1, 2, ..., n$, sehingga $a_1 + b_1 = \sum_{i=1}^{n} (p_i + q_i) x_i \in \mathrm{N}X$.

$a_2 \in X\Gamma S \Rightarrow a_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \gamma_i k_i$, untuk suatu $k_i \in S$, $\gamma_i \in \Gamma$, dan $x_i \in X$, $\forall\, i = 1, 2, ..., n$. $b_2 \in X\Gamma S \Rightarrow b_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \gamma_i l_i$, untuk suatu $l_i \in S$, $\gamma_i \in \Gamma$, dan $x_i \in X$, $\forall\, i = 1, 2, ..., n$.

$a_2 + b_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \gamma_i k_i + \sum_{i=1}^{n} x_i \gamma_i l_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \gamma_i (k_i + l_i)$. Karena S adalah semigrup, jadi $k_i + l_i \in S$, $\forall\, i = 1, 2, ..., n$, sehingga $a_2 + b_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \gamma_i (k_i + l_i) \in X\Gamma S$. Karena $a_1 + b_1 \in \mathrm{N}X$ dan $a_2 + b_2 \in X\Gamma S$, jadi $a + b \in \mathrm{N}X + X\Gamma S = R$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $R\Gamma S \subseteq R$.

$R\Gamma S = (\mathrm{N}X + X\Gamma S)\Gamma S = \mathrm{N}X\Gamma S + \mathrm{X}\Gamma S\Gamma S$

$= X\Gamma S\mathrm{N} + \mathrm{X}\Gamma S\Gamma S = \mathrm{X}\Gamma S(\mathrm{N} + \Gamma S) \subseteq X\Gamma S \subseteq R$.

Terbukti R ideal kanan dalam S.

iii) Akan dibuktikan R adalah ideal kanan terkecil dalam S yang memuat X.
Misalkan K adalah sebarang ideal kanan dalam S yang memuat X. Oleh karena $X \subseteq K$, maka $\mathrm{N}X \subseteq K$ dan $X\Gamma S \subseteq K\Gamma S \subseteq K$. Dengan demikian, $R = \mathrm{N}X + X\Gamma S \subseteq K$.
Terbukti R adalah ideal kanan terkecil dalam S yang memuat X.

Dari i), ii), dan iii), terbukti $(X)_r = R = \mathrm{N}X + X\Gamma S$.

3. Misalkan $I = \mathrm{N}X + S\Gamma X + X\Gamma S + S\Gamma X\Gamma S$.

i) Akan dibuktikan $X \subseteq I$.

Misalkan diberikan sebarang $x \in X$. Karena S mempunyai Γ-*absorbing zero* 0, yaitu $0\gamma x = x\gamma 0 = 0$, untuk setiap $\gamma \in \Gamma$, jadi $x = 1x + 0 + 0 + 0 = 1x + 0\gamma x + x\gamma 0 + 0\gamma x\gamma 0 \in I$. Terbukti $X \subseteq I$.

ii) Akan dibuktikan I adalah ideal dalam S.
Misalkan diberikan sebarang $a, b \in I$. Jadi $a = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ dan $b = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$, untuk suatu $a_1, b_1 \in \mathrm{N}X$, $a_2, b_2 \in S\Gamma X$, $a_3, b_3 \in X\Gamma S$, dan $a_4, b_4 \in S\Gamma X\Gamma S$. $a_1 \in \mathrm{N}X \Rightarrow a_1 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$, untuk suatu $p_i \in \mathrm{N}$ dan $x_i \in X$, untuk setiap $i = 1, 2, ..., n$. $b_1 \in \mathrm{N}X \Rightarrow b_1 = \sum_{i=1}^{n} q_i x_i$, untuk suatu $q_i \in \mathrm{N}$ dan $x_i \in X$, untuk setiap $i = 1, 2, ..., n$. Dengan demikian, $a_1 + b_1 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i + \sum_{i=1}^{n} q_i x_i = \sum_{i=1}^{n} (p_i + q_i) x_i$. Karena N tertutup terhadap penjumlahan, jadi $p_i + q_i \in \mathrm{N}$, untuk setiap $i = 1, 2, ..., n$, sehingga $a_1 + b_1 = \sum_{i=1}^{n} (p_i + q_i) x_i \in \mathrm{N}X$.

$a_2 \in S\Gamma X \Rightarrow a_2 = \sum_{i=1}^{n} k_i \gamma_i x_i$, untuk suatu $k_i \in S$, $\gamma_i \in \Gamma$, dan $x_i \in X$, $\forall i = 1, 2, ..., n$. $b_2 \in S\Gamma X \Rightarrow b_2 = \sum_{i=1}^{n} l_i \gamma_i x_i$, untuk suatu $l_i \in S$, $\gamma_i \in \Gamma$, dan $x_i \in X$, $\forall i = 1, 2, ..., n$. $a_2 + b_2 = \sum_{i=1}^{n} k_i \gamma_i x_i + \sum_{i=1}^{n} l_i \gamma_i x_i = \sum_{i=1}^{n} (k_i + l_i) \gamma_i x_i$. Karena S adalah semigrup, jadi $k_i + l_i \in S$, $\forall i = 1, 2, ..., n$, sehingga

$$a_2 + b_2 = \sum_{i=1}^{n} (k_i + l_i) \gamma_i x_i \in S\Gamma X.$$

$a_3 \in X\Gamma S \Rightarrow a_3 = \sum_{i=1}^{n} x_i \gamma_i k_i$, untuk suatu $k_i \in S$, $\gamma_i \in \Gamma$, dan $x_i \in X$, $\forall i = 1, 2, ..., n$. $b_3 \in X\Gamma S \Rightarrow b_3 = \sum_{i=1}^{n} x_i \gamma_i l_i$, untuk suatu $l_i \in S$, $\gamma_i \in \Gamma$, dan $x_i \in X$, $\forall i = 1, 2, ..., n$.

$a_3 + b_3 = \sum_{i=1}^{n} x_i \gamma_i k_i + \sum_{i=1}^{n} x_i \gamma_i l_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \gamma_i (k_i + l_i)$. Karena S adalah semigrup, jadi $k_i + l_i \in S$, $\forall i = 1, 2, ..., n$, sehingga

$$a_3 + b_3 = \sum_{i=1}^{n} x_i \gamma_i (k_i + l_i) \in X\Gamma S .$$

$a_4 \in S\Gamma X\Gamma S \Rightarrow a_4 = \sum_{i=1}^{n} k_i \gamma_i x_i \gamma_i k_i$, untuk suatu $k_i \in S$, $\gamma_i \in \Gamma$, dan $x_i \in X$, untuk setiap $i = 1, 2, ..., n$.

$b_4 \in S\Gamma X\Gamma S \Rightarrow b_4 = \sum_{i=1}^{n} l_i \gamma_i x_i \gamma_i l_i$, untuk suatu $l_i \in S$, $\gamma_i \in \Gamma$, dan $x_i \in X$, untuk setiap $i = 1, 2, ..., n$.

$$a_4 + b_4 = \sum_{i=1}^{n} k_i \gamma_i x_i \gamma_i k_i + \sum_{i=1}^{n} l_i \gamma_i x_i \gamma_i l_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (k_i + l_i) \gamma_i x_i \gamma_i (k_i + l_i) .$$

Karena S adalah semigrup, jadi $k_i + l_i \in S$, $\forall i = 1, 2, ..., n$, sehingga $a_4 + b_4 = \sum_{i=1}^{n} (k_i + l_i) \gamma_i x_i \gamma_i (k_i + l_i) \in S\Gamma X\Gamma S$.

Karena $a_1 + b_1 \in \mathrm{N}X$, $a_2 + b_2 \in S\Gamma X$, $a_3 + b_3 \in X\Gamma S$, dan $a_4 + b_4 \in S\Gamma X\Gamma S$, dengan demikian dapat disimpulkan $a + b \in \mathrm{N}X + S\Gamma X + X\Gamma S + S\Gamma X\Gamma S = I$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $S\Gamma I \subseteq I$ dan $I\Gamma S \subseteq I$.

$S\Gamma I = S\Gamma(\mathrm{N}X + S\Gamma X + X\Gamma S + S\Gamma X\Gamma S)$
$= S\Gamma \mathrm{N}X + S\Gamma S\Gamma X + S\Gamma X\Gamma S + S\Gamma S\Gamma X\Gamma S$

$$= \mathrm{N}S\Gamma X + S\Gamma S\Gamma X + S\Gamma X\Gamma S + S\Gamma S\Gamma X\Gamma S$$
$$= (\mathrm{N} + S\Gamma)S\Gamma X + (S\Gamma + S\Gamma S\Gamma)X\Gamma S$$
$$\subseteq S\Gamma X + X\Gamma S \subseteq I .$$

$$I\Gamma S = (\mathrm{N}X + S\Gamma X + X\Gamma S + S\Gamma X\Gamma S)\Gamma S$$
$$= \mathrm{N}X\Gamma S + S\Gamma X\Gamma S + X\Gamma S\Gamma S + S\Gamma X\Gamma S\Gamma \mathrm{S}$$
$$= X\Gamma S\mathrm{N} + S\Gamma X\Gamma S + X\Gamma S\Gamma S + S\Gamma X\Gamma S\Gamma S$$
$$= X\Gamma S(\mathrm{N} + \Gamma S) + S\Gamma X(\Gamma S + \Gamma S\Gamma S)$$
$$\subseteq X\Gamma S + S\Gamma X \subseteq I .$$

Terbukti I ideal dalam S.

iii) Akan dibuktikan I ideal terkecil dalam S yang memuat X. Misalkan K adalah sebarang ideal dalam S yang memuat X. Oleh karena $X \subseteq K$, maka $\mathrm{N}X \subseteq K$, $S\Gamma X \subseteq S\Gamma K \subseteq K$, $X\Gamma S \subseteq K\Gamma S \subseteq K$, dan $S\Gamma X\Gamma S \subseteq S\Gamma K\Gamma S \subseteq K$. Dengan demikian, $I = \mathrm{N}X + S\Gamma X + X\Gamma S + S\Gamma X\Gamma S \subseteq K$. Terbukti I adalah ideal terkecil dalam S yang memuat X.

Dengan demikian, dari i), ii), dan iii), terbukti bahwa $(X)_i = I = \mathrm{N}X + S\Gamma X + X\Gamma S + S\Gamma X\Gamma S$. ■

Corollary 2.4.8 (Chinram, 2008)
Misalkan S adalah suatu Γ-semiring dan X adalah suatu subsemigrup dari $(S, +)$. Maka

1. $(X)_l = X + S\Gamma X$
2. $(X)_r = X + X\Gamma S$
3. $(X)_i = X + S\Gamma X + X\Gamma S + S\Gamma X\Gamma S$.

Bukti:
Cukup dibuktikan bahwa $X = \mathrm{N}X$. Misalkan diberikan sebarang $x \in X$. Jadi $x = 1x \in \mathrm{N}X$. Dengan demikian, $X \subseteq \mathrm{N}X$. Selanjutnya, misalkan diberikan sebarang $a \in \mathrm{N}X$. Jadi $a = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$, untuk suatu $p_i \in \mathrm{N}$ dan $x_i \in X$, untuk setiap $i = 1, 2, ..., n$. Karena X adalah subsemigrup dari $(S, +)$, jadi

$p_i x_i \in X$, untuk setiap $i = 1, 2, ..., n$, sehingga $a = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \in X$.

Dengan demikian, $\mathrm{N}X \subseteq X$. Karena $X \subseteq \mathrm{N}X$ dan $\mathrm{N}X \subseteq X$, terbukti bahwa $X = \mathrm{N}X$. Untuk bukti–bukti selanjutnya analog dengan bukti–bukti pada Teorema 2.4.7. ∎

BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas tentang definisi–definisi dan teorema–teorema dari quasi-ideal dalam Γ-semiring beserta bukti–buktinya**.**

Definisi 3.1 Quasi-Ideal dalam Ring (Chinram dan Kemprasit, 2005) Misalkan R adalah ring dan Q subset tak kosong dari R. Himpunan Q disebut quasi-ideal dalam R jika Q adalah subgrup dari $(R,+)$ yang memenuhi $RQ \cap QR \subseteq Q$.

Contoh 3.1

Misalkan $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a,b,c,d \text{ bilangan bulat} \right\}$ adalah ring dan $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, x \text{ bilangan bulat} \right\}$. Jadi Q adalah quasi-ideal dalam R.

Bukti:

Jelas Q subset tak kosong dari R. Selanjutnya, misalkan diberikan sebarang $\overline{M}, \overline{N} \in Q$. Jadi $\overline{M} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dan $\overline{N} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, untuk suatu x dan y merupakan bilangan bulat, sehingga diperoleh $\overline{M} - \overline{N} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in Q$. Dengan demikian, Q adalah subgrup dari $(R,+)$. Berikutnya, misalkan diberikan sebarang $\overline{K} \in R$. Jadi $\overline{K} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, untuk suatu a,b,c,d bilangan bulat, sehingga $\overline{K}\overline{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & 0 \\ cx & 0 \end{pmatrix} \in RQ$ dan

$\overline{M}\,\overline{K} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa & xb \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in QR$. Dengan demikian,

$RQ = \left\{ \begin{pmatrix} ax & 0 \\ cx & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a,c,x \in Z \right\}$ dan $QR = \left\{ \begin{pmatrix} xa & xb \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a,b,x \in Z \right\}$.

Jika RQ diiriskan dengan QR, maka $ax = xa$, $xb = 0$, dan $cx = 0$, sehingga $RQ \cap QR = \left\{ \begin{pmatrix} ax & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a,x \in Z \right\} \subseteq Q$. Karena Q subgrup dari $(R,+)$ dan $RQ \cap QR \subseteq Q$, terbukti Q adalah quasi-ideal dalam ring R. ■

Definisi 3.2 Quasi-Ideal dalam Semigrup (Chinram, 2006)
Misalkan S adalah semigrup dan Q subset tak kosong dari S. Himpunan Q disebut quasi-ideal dalam S jika memenuhi $SQ \cap QS \subseteq Q$.

Contoh 3.2
Misalkan $S = [0,1]$ adalah semigrup terhadap pergandaan, dan $Q = [0,1/2]$. Jadi Q adalah quasi-ideal dalam S.

Bukti:
Jelas Q subset tak kosong dari S. Selanjutnya, misalkan diberikan sebarang $s \in S$ dan $q \in Q$. Terlihat bahwa $0 \le s \le 1$ dan $0 \le q \le \frac{1}{2}$, sehingga $0 \cdot 0 \le sq \le 1 \cdot \frac{1}{2}$ atau $0 \le sq \le \frac{1}{2}$. Jadi, $SQ = [0,1/2]$. Sebaliknya, $0 \cdot 0 \le qs \le \frac{1}{2} \cdot 1$ atau $0 \le qs \le \frac{1}{2}$. Jadi, $QS = [0,1/2]$. Dengan demikian, $SQ \cap QS = [0,1/2] \subseteq Q$. Terbukti Q adalah quasi-ideal dalam semigrup S. ■

Definisi 3.3 Quasi-Ideal dalam Semiring (Shabir dkk, 2004)
Misalkan S adalah semiring dan Q subset tak kosong dari S. Himpunan Q disebut quasi-ideal dalam S jika Q adalah subsemigrup dari $(S,+)$ yang memenuhi $SQ \cap QS \subseteq Q$.

Contoh 3.3

Misalkan $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a,b,c,d \text{ bilangan bulat tak negatif} \right\}$ adalah semiring terhadap penjumlahan dan pergandaan, dan $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, x \text{ bilangan bulat tak negatif} \right\}$. Jadi Q adalah quasi-ideal dalam S.

Bukti:
Jelas Q subset tak kosong dari S. Selanjutnya, misalkan diberikan sebarang $\overline{M}, \overline{N} \in Q$. Jadi $\overline{M} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dan $\overline{N} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, untuk suatu x dan y merupakan bilangan bulat tak negatif, sehingga $\overline{M} + \overline{N} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in Q$. Dengan demikian, Q subsemigrup dari $(S,+)$. Berikutnya, misalkan diberikan pula sebarang $\overline{K} \in S$. Jadi $\overline{K} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, untuk suatu a,b,c,d bilangan bulat tak negatif, sehingga $\overline{K}\overline{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & 0 \\ cx & 0 \end{pmatrix} \in SQ$ dan $\overline{M}\overline{K} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa & xb \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in QS$. Dengan demikian, $SQ = \left\{ \begin{pmatrix} ax & 0 \\ cx & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a,c,x \text{ bilangan bulat tak negatif} \right\}$, sedangkan

$QS = \left\{ \begin{pmatrix} xa & xb \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b, x \text{ bilangan bulat tak negatif} \right\}$. Jika SQ diiriskan dengan QS, maka $ax = xa$, $xb = 0$, dan $cx = 0$, sehingga diperoleh $SQ \cap QS = \left\{ \begin{pmatrix} ax & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, x \in Z^+ \cup \{0\} \right\} \subseteq Q$. Karena Q subsemigrup dari $(S, +)$ dan $SQ \cap QS \subseteq Q$, terbukti Q adalah quasi-ideal dalam semiring S. ■

Definisi 3.4 Quasi-Ideal dalam Γ-semigrup (Chinram, 2006)
Misalkan M adalah Γ-semigrup dan Q subset tak kosong dari M. Q disebut quasi-ideal dalam Γ-semigrup M jika memenuhi $M\Gamma Q \cap Q\Gamma M \subseteq Q$.

Contoh 3.4
Misalkan $M = [0,1]$ adalah semigrup terhadap pergandaan, $\Gamma = \left\{ 1/n \,\middle|\, n \in Z^+ \right\}$, dan $Q = [0, 1/2]$. Jika diberikan pemetaan $M \times \Gamma \times M \to M$, maka Q adalah quasi-ideal dalam Γ-semigrup M.

Bukti:
Jelas Q subset tak kosong dari M dan menurut Lemma 2.3.1, M adalah Γ-semigrup. Selanjutnya, misalkan diberikan sebarang $m \in M$, $q \in Q$, dan $\gamma \in \Gamma$. Jelas bahwa $0 \le m \le 1$, $0 \le q \le \frac{1}{2}$, dan $0 < \gamma \le 1$, sehingga $0 \cdot 0 \cdot 0 \le m\gamma q \le 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}$ atau $0 \le m\gamma q \le \frac{1}{2}$. Jadi, $M\Gamma Q = [0, 1/2]$. Sebaliknya, $0 \cdot 0 \cdot 0 \le q\gamma m \le \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1$ atau dengan kata lain $0 \le q\gamma m \le \frac{1}{2}$. Jadi, $Q\Gamma M = [0, 1/2]$. Dengan demikian, $M\Gamma Q \cap Q\Gamma M = [0, 1/2] \subseteq Q$. Terbukti Q adalah quasi-ideal dalam Γ-semigrup M. ■

Definisi 3.5 Quasi-Ideal dalam Γ-semiring (Chinram, 2008)
Misalkan S adalah Γ-semiring dan Q subset tak kosong dari S. Q disebut quasi-ideal dalam S jika Q adalah subsemigrup dari $(S,+)$ yang memenuhi $S\Gamma Q \cap Q\Gamma S \subseteq Q$.

Contoh 3.5

Misalkan $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a,b,c,d \text{ bilangan bulat tak negatif} \right\}$ adalah semiring terhadap penjumlahan dan pergandaan, $\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \middle| \, \gamma \in Z^+ \cup \{0\} \right\}$, dan $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, x \in Z^+ \cup \{0\} \right\}$. Jika diberikan pemetaan $S \times \Gamma \times S \to S$, maka Q adalah quasi-ideal dalam Γ-semiring S.

Bukti:
Menurut Contoh 3.2, Q adalah quasi-ideal dalam semiring S, sehingga Q subsemigrup dari $(S,+)$. Selanjutnya, menurut Lemma 2.4.1, S adalah Γ-semiring. Misalkan diberikan sebarang $\overline{K} \in S$, $\overline{M} \in Q$, dan $\overline{\Phi} \in \Gamma$. Jadi $\overline{K} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\overline{M} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, dan $\overline{\Phi} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$, untuk suatu $a,b,c,d,x,\gamma \in Z^+ \cup \{0\}$, sehingga $\overline{K}\overline{\Phi}\overline{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\gamma x & 0 \\ c\gamma x & 0 \end{pmatrix} \in S\Gamma Q$. Sebaliknya, $\overline{M}\overline{\Phi}\overline{K} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\gamma a & x\gamma b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in Q\Gamma S$. Dengan demikian, $S\Gamma Q = \left\{ \begin{pmatrix} a\gamma x & 0 \\ c\gamma x & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a,c,\gamma, \text{dan } x \in Z^+ \cup \{0\} \right\}$ dan $Q\Gamma S = \left\{ \begin{pmatrix} x\gamma a & x\gamma b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a,b,\gamma,x \in Z^+ \cup \{0\} \right\}$. Jika $S\Gamma Q$ diiriskan

dengan $Q\Gamma S$, maka $a\gamma x = x\gamma a$, $x\gamma b = 0$, dan $c\gamma x = 0$, sehingga $S\Gamma Q \cap Q\Gamma S = \left\{ \begin{pmatrix} a\gamma x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, \gamma, x \in Z^+ \cup \{0\} \right\} \subseteq Q$. Karena Q subsemigrup dari $(S, +)$ dan $S\Gamma Q \cap Q\Gamma S \subseteq Q$, terbukti Q adalah quasi-ideal dalam Γ-semiring S. ■

Lemma 3.1 (Chinram, 2008)
Misalkan S adalah semiring, Q adalah quasi-ideal dalam S, dan Γ adalah sebarang himpunan tak kosong. Jika diberikan pemetaan $S \times \Gamma \times S \to S$ yang didefinisikan dengan $a\gamma b = ab$, $\forall\, a, b \in S$, dan $\forall\, \gamma \in \Gamma$, maka Q adalah quasi-ideal dalam Γ-semiring S.

Bukti:
Karena Q adalah quasi-ideal dalam semiring S, jelas Q adalah subsemigrup dari $(S, +)$ dan $SQ \cap QS \subseteq Q$. Selanjutnya, menurut Lemma 2.4.1, S adalah Γ-semiring. Misalkan diberikan sebarang $a \in S$, $\gamma \in \Gamma$, dan $q \in Q \subseteq S$. Jadi $a\gamma q = aq \in SQ$, atau dengan kata lain $S\Gamma Q \subseteq SQ$. Demikian juga, $q\gamma a = qa \in QS$, atau dengan kata lain $Q\Gamma S \subseteq QS$. Jadi, $S\Gamma Q \cap Q\Gamma S \subseteq SQ \cap QS \subseteq Q$. Karena Q adalah subsemigrup dari $(S, +)$ dan $S\Gamma Q \cap Q\Gamma S \subseteq Q$, terbukti Q adalah quasi-ideal dalam Γ-semiring S. ■

Corollary 3.2 (Chinram, 2008)
Jika R adalah ring, Q adalah quasi-ideal dalam R, Γ adalah sebarang himpunan tak kosong, dan didefinisikan pemetaan seperti pada Lemma 3.1, maka Q adalah quasi-ideal dalam Γ-semiring R.

Bukti:
Karena setiap ring adalah semiring, jadi R adalah semiring. Menurut Lemma 3.1, Q adalah quasi-ideal dalam Γ-semiring R. ■

Teorema 3.3 (Chinram, 2008)
Misalkan S adalah suatu Γ-semiring, X adalah subset tak kosong dari S, dan N adalah himpunan bilangan asli. Himpunan

$\mathrm{N}X + (S\Gamma X \cap X\Gamma S)$ adalah quasi-ideal terkecil dalam S yang memuat X, dan dinotasikan dengan $(X)_q$.

Bukti:

Misalkan $Q = (X)_q = \mathrm{N}X + (S\Gamma X \cap X\Gamma S)$.

i) Akan dibuktikan $X \subseteq Q$.

Misalkan diberikan sebarang $x \in X$. Karena S mempunyai Γ-*absorbing zero* 0, yaitu $0\gamma x = x\gamma 0 = 0$, untuk setiap $\gamma \in \Gamma$, jadi $x = 1x + 0 \in Q$. Terbukti $X \subseteq Q$.

ii) Akan dibuktikan Q adalah quasi-ideal dalam S.

Misalkan diberikan sebarang $a, b \in Q$. Jadi $a = a_1 + a_2$ dan $b = b_1 + b_2$, untuk suatu $a_1, b_1 \in \mathrm{N}X$ dan $a_2, b_2 \in S\Gamma X \cap X\Gamma S$. $a_1 \in \mathrm{N}X \Rightarrow a_1 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$, untuk suatu $p_i \in \mathrm{N}$ dan $x_i \in X$, untuk setiap $i = 1, 2, ..., n$. $b_1 \in \mathrm{N}X \Rightarrow b_1 = \sum_{i=1}^{n} q_i x_i$, untuk suatu $q_i \in \mathrm{N}$ dan $x_i \in X$, untuk setiap $i = 1, 2, ..., n$. $a_1 + b_1 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i + \sum_{i=1}^{n} q_i x_i$ $= \sum_{i=1}^{n} (p_i + q_i) x_i$. Karena N tertutup terhadap penjumlahan, jadi $p_i + q_i \in \mathrm{N}$, untuk setiap $i = 1, 2, ..., n$, sehingga

$$a_1 + b_1 = \sum_{i=1}^{n} (p_i + q_i) x_i \in \mathrm{N}X.$$

$a_2 \in S\Gamma X \cap X\Gamma S$ maka $a_2 \in S\Gamma X \Rightarrow a_2 = \sum_{i=1}^{n} k_i \gamma_i x_i$ dan $a_2 \in X\Gamma S \Rightarrow a_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \gamma_i k_i$, untuk suatu $k_i \in S$, $\gamma_i \in \Gamma$, dan $x_i \in X$, $\forall\, i = 1, 2, ..., n$. $b_2 \in S\Gamma X \cap X\Gamma S$ maka

$b_2 \in S\Gamma X \Rightarrow b_2 = \sum_{i=1}^{n} l_i \gamma_i x_i$ dan $b_2 \in X\Gamma S \Rightarrow b_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \gamma_i l_i$,

untuk suatu $l_i \in S$, $\gamma_i \in \Gamma$, dan $x_i \in X$, $\forall\, i = 1, 2, ..., n$.

$a_2 + b_2 = \sum_{i=1}^{n} k_i \gamma_i x_i + \sum_{i=1}^{n} l_i \gamma_i x_i = \sum_{i=1}^{n} (k_i + l_i)\gamma_i x_i$, dan juga

$a_2 + b_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \gamma_i k_i + \sum_{i=1}^{n} x_i \gamma_i l_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \gamma_i (k_i + l_i)$. Karena S adalah semigrup, jadi $k_i + l_i \in S$, $\forall\, i = 1, 2, ..., n$, sehingga

$$a_2 + b_2 = \sum_{i=1}^{n} (k_i + l_i)\gamma_i x_i \in S\Gamma X$$

dan

$$a_2 + b_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \gamma_i (k_i + l_i) \in X\Gamma S .$$

Dengan demikian, $a_2 + b_2 \in S\Gamma X \cap X\Gamma S$. Karena $a_1 + b_1 \in \mathrm{N}X$ dan $a_2 + b_2 \in S\Gamma X \cap X\Gamma S$, jadi $a + b \in Q$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $S\Gamma Q \cap Q\Gamma S \subseteq Q$.

$$\begin{aligned} S\Gamma Q \cap Q\Gamma S \subseteq S\Gamma Q &= S\Gamma(\mathrm{N}X + (S\Gamma X \cap X\Gamma S)) \\ &\subseteq S\Gamma(\mathrm{N}X + S\Gamma X) = S\Gamma \mathrm{N}X + S\Gamma S\Gamma X \\ &= \mathrm{N}S\Gamma X + S\Gamma S\Gamma X = (\mathrm{N} + S\Gamma)S\Gamma X \\ &\subseteq S\Gamma X . \end{aligned}$$

Juga,

$$\begin{aligned} S\Gamma Q \cap Q\Gamma S \subseteq Q\Gamma S &= (\mathrm{N}X + (S\Gamma X \cap X\Gamma S))\Gamma S \\ &\subseteq (\mathrm{N}X + X\Gamma S)\Gamma S = \mathrm{N}X\Gamma S + X\Gamma S\Gamma S \\ &= X\Gamma S\mathrm{N} + X\Gamma S\Gamma S = X\Gamma S(\mathrm{N} + \Gamma S) \\ &\subseteq X\Gamma S . \end{aligned}$$

Dengan demikian, $S\Gamma Q \cap Q\Gamma S \subseteq S\Gamma X \cap X\Gamma S \subseteq Q$. Terbukti Q adalah quasi-ideal dalam S.

iii) Akan dibuktikan Q adalah quasi-ideal terkecil dalam S yang memuat X.

Misalkan K adalah sebarang quasi-ideal dalam S yang memuat X. Oleh karena $X \subseteq K$, maka $NX \subseteq K$, dan $(S\Gamma X \cap X\Gamma S) \subseteq (S\Gamma K \cap K\Gamma S) \subseteq K$. Dengan demikian, $Q = NX + (S\Gamma X \cap X\Gamma S) \subseteq K$. Terbukti Q adalah quasi-ideal terkecil dalam S yang memuat X.

Jadi, terbukti $(X)_q = Q = NX + (S\Gamma X \cap X\Gamma S)$. ◘

Teorema 3.4 (Chinram, 2008)
Irisan dari ideal kiri L dan ideal kanan R dalam suatu Γ-semiring S adalah suatu quasi-ideal dalam S.

Bukti:
Misalkan $K = L \cap R$. Akan dibuktikan K adalah quasi-ideal dalam Γ-semiring S.

i) Akan dibuktikan K adalah subsemigrup dari $(S, +)$.
Misalkan diberikan sebarang $a, b \in K = L \cap R$. Jadi $a \in L$ dan $a \in R$, serta $b \in L$ dan $b \in R$. Karena L adalah ideal kiri dalam S, dan R adalah ideal kanan dalam S, jadi $a + b \in L$ dan $a + b \in R$, sehingga $a + b \in L \cap R = K$. Terbukti K adalah subsemigrup dari $(S, +)$.

ii) Akan dibuktikan $S\Gamma K \cap K\Gamma S \subseteq K$.

$$\begin{aligned} S\Gamma K \cap K\Gamma S &= (S\Gamma(L \cap R)) \cap ((L \cap R)\Gamma S) \\ &= (S\Gamma L \cap S\Gamma R) \cap (L\Gamma S \cap R\Gamma S) \\ &\subseteq S\Gamma L \cap R\Gamma S \subseteq L \cap R = K. \end{aligned}$$

Dari i) dan ii), terbukti $K = L \cap R$ adalah quasi-ideal dalam S. ◘

Definisi 3.6 k **-ideal** (Chinram, 2008)
Suatu ideal kiri (kanan, ideal) T dalam Γ-semiring S disebut suatu k-ideal kiri (kanan, ideal) dalam S jika $a, a + x \in T$, maka $x \in T$.

Contoh 3.6

Misalkan diberikan $S=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a,b,c,d \in Z\right\}$ adalah semiring, $\Gamma=\left\{\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \middle| \, \gamma \in Z^{+} \cup \{0\}\right\}$, $L=\left\{\begin{pmatrix} k & 0 \\ l & 0 \end{pmatrix} \middle| \, k,l \in Z\right\}$ adalah ideal kiri dalam S, dan $R=\left\{\begin{pmatrix} m & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, m,n \in Z\right\}$ adalah ideal kanan dalam S. Jika diberikan pemetaan $S \times \Gamma \times S \to S$, maka L adalah k-ideal kiri dalam Γ-semiring S dan R adalah k-ideal kanan dalam Γ-semiring S.

Bukti:

Menurut Lemma 2.4.1, S adalah Γ-semiring dan menurut Lemma 2.4.5, L adalah ideal kiri dalam Γ-semiring S dan R adalah ideal kanan dalam Γ-semiring S. Selanjutnya, misalkan diberikan sebarang $\overline{A}, \overline{A}+\overline{X} \in L$ dan $\overline{B}, \overline{B}+\overline{Y} \in R$. Jadi $\overline{A}=\begin{pmatrix} k & 0 \\ l & 0 \end{pmatrix}$, $\overline{A}+\overline{X}=\begin{pmatrix} p & 0 \\ q & 0 \end{pmatrix}$, $\overline{B}=\begin{pmatrix} m & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, dan $\overline{B}+\overline{Y}=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, untuk suatu k,l,p,q,m,n,x, dan y adalah bilangan bulat, sehingga diperoleh

$$\overline{X}=\begin{pmatrix} p & 0 \\ q & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} k & 0 \\ l & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p-k & 0 \\ q-l & 0 \end{pmatrix} \in L$$

dan

$$\overline{Y}=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} m & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-m & y-n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R.$$

Dengan demikian, terbukti L adalah k-ideal kiri dalam Γ-semiring S dan R adalah k-ideal kanan dalam Γ-semiring S. ◘

Teorema 3.5 (Chinram, 2008)

Misalkan Q adalah suatu quasi-ideal dalam Γ-semiring S. Pernyataan-pernyataan berikut benar:

1. Jika $Q \subseteq S\Gamma Q$ dan $S\Gamma Q$ adalah k-ideal kiri dalam S, maka Q adalah irisan dari ideal kiri $Q + S\Gamma Q$ dan ideal kanan $Q + Q\Gamma S$
2. Jika $Q \subseteq Q\Gamma S$ dan $Q\Gamma S$ adalah k-ideal kanan dalam S, maka Q adalah irisan dari ideal kiri $Q + S\Gamma Q$ dan ideal kanan $Q + Q\Gamma S$.

Bukti:

Menurut Corollary 2.4.8, $Q + S\Gamma Q$ adalah ideal kiri dalam S yang memuat Q dan $Q + Q\Gamma S$ adalah ideal kanan dalam S yang memuat Q. Misalkan $A = (Q + S\Gamma Q) \cap (Q + Q\Gamma S)$. Akan dibuktikan $A = Q$.

1. Dari permisalan $A = (Q + S\Gamma Q) \cap (Q + Q\Gamma S)$ jelas bahwa $Q \subseteq A$. ...i)

   Selanjutnya, karena $Q \subseteq S\Gamma Q$, maka $Q + S\Gamma Q = S\Gamma Q$, sehingga $A = S\Gamma Q \cap (Q + Q\Gamma S)$. Misalkan diberikan sebarang $d \in A = S\Gamma Q \cap (Q + Q\Gamma S)$. Dengan demikian, $d \in S\Gamma Q$ dan $d \in (Q + Q\Gamma S)$. $d \in (Q + Q\Gamma S) \Rightarrow d = q + \sum_{i=1}^{n} q_i \gamma_i a_i$, untuk suatu $q, q_i \in Q$, $\gamma_i \in \Gamma$, dan $a_i \in S$, $\forall i = 1, 2, ..., n$. Karena $d \in S\Gamma Q$ dan $q \in Q \subseteq S\Gamma Q$, serta $S\Gamma Q$ adalah k-ideal kiri dalam S, jadi $\sum_{i=1}^{n} q_i \gamma_i a_i \in S\Gamma Q$. Juga, $\sum_{i=1}^{n} q_i \gamma_i a_i \in Q\Gamma S$.

   Dengan demikian, $\sum_{i=1}^{n} q_i \gamma_i a_i \in S\Gamma Q \cap Q\Gamma S \subseteq Q$. Karena $q \in Q$ dan $\sum_{i=1}^{n} q_i \gamma_i a_i \in Q$, jadi $d = q + \sum_{i=1}^{n} q_i \gamma_i a_i \in Q$. Terbukti $A \subseteq Q$. ...ii)

Dari i) dan ii), terbukti $A = Q$.

2. Dari permisalan $A=(Q+S\Gamma Q)\cap(Q+Q\Gamma S)$ jelas bahwa $Q\subseteq A$. ...i)

Selanjutnya, karena $Q\subseteq Q\Gamma S$, maka $Q+Q\Gamma S=Q\Gamma S$, sehingga $A=(Q+S\Gamma Q)\cap Q\Gamma S$. Misalkan diberikan sebarang $d\in A=(Q+S\Gamma Q)\cap Q\Gamma S)$. Jadi, $d\in(Q+S\Gamma Q)$ dan $d\in Q\Gamma S$. $d\in(Q+S\Gamma Q)\Rightarrow d=q+\sum_{i=1}^{n}a_i\gamma_i q_i$, untuk suatu $q,q_i\in Q$, $\gamma_i\in\Gamma$, dan $a_i\in S$, $\forall\, i=1,2,.....,n$. Karena $d\in Q\Gamma S$ dan $q\in Q\subseteq Q\Gamma S$, serta $Q\Gamma S$ adalah k-ideal kanan dalam S, jadi $\sum_{i=1}^{n}a_i\gamma_i q_i\in Q\Gamma S$. Juga, $\sum_{i=1}^{n}a_i\gamma_i q_i\in S\Gamma Q$.

Dengan demikian, $\sum_{i=1}^{n}a_i\gamma_i q_i\in Q\Gamma S\cap S\Gamma Q\subseteq Q$. Karena $q\in Q$ dan $\sum_{i=1}^{n}a_i\gamma_i q_i\in Q$, jadi $d=q+\sum_{i=1}^{n}a_i\gamma_i q_i\in Q$. Terbukti $A\subseteq Q$. ...ii)

Dari i) dan ii), terbukti $A=Q$. ■

Definisi 3.7 Elemen Identitas dari Γ-semiring (Chinram, 2008)
Misalkan S adalah suatu Γ-semiring. Suatu elemen $a\in S$ disebut identitas kiri (kanan) dari S, jika $x=a\gamma x$ $(x=x\gamma a)$, $\forall\, x\in S$, dan $\forall\,\gamma\in\Gamma$. Jika a adalah identitas kiri dan identitas kanan, maka a disebut identitas dari S.

Contoh 3.7

Misalkan $S=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\middle|\ a,b,c,d \text{ bilangan real positif}\right\}$ adalah semiring dan $\Gamma=\left\{\begin{pmatrix}\gamma & 0\\ 0 & \gamma\end{pmatrix}\middle|\ \gamma\in Z^{+}\right\}$. Jika diberikan pemetaan

$S \times \Gamma \times S \to S$, maka $\overline{M} = \begin{pmatrix} 1/\gamma & 0 \\ 0 & 1/\gamma \end{pmatrix} \in S$ adalah elemen identitas dari Γ-semiring S.

Bukti:

Menurut Lemma 2.4.1, S adalah Γ-semiring. Selanjutnya, misalkan diberikan sebarang $\overline{K} \in S$ dan $\overline{\Phi} \in \Gamma$. Jadi $\overline{K} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan $\overline{\Phi} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$, untuk suatu a, b, c, d bilangan real positif, dan $\gamma \in Z^+$. Terdapat $\overline{M} = \begin{pmatrix} 1/\gamma & 0 \\ 0 & 1/\gamma \end{pmatrix} \in S$, sedemikian sehingga $\overline{M}\overline{\Phi}\overline{K} = \begin{pmatrix} 1/\gamma & 0 \\ 0 & 1/\gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \overline{K}$. Terbukti $\overline{M}$ adalah identitas kiri dari Γ-semiring S. ...i)

Sebaliknya, $\overline{K}\overline{\Phi}\overline{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\gamma & 0 \\ 0 & 1/\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \overline{K}$.

Terbukti $\overline{M}$ adalah identitas kanan dari Γ-semiring S. ...ii)

Karena $\overline{M}$ adalah identitas kiri dan kanan dari Γ-semiring S, terbukti $\overline{M}$ adalah identitas dari Γ-semiring S. ■

Corollary 3.6 (Chinram, 2008)

Misalkan S adalah suatu Γ-semiring. Pernyataan–pernyataan berikut benar:

1. Jika S mempunyai identitas kiri dan setiap ideal kiri dalam S adalah k-ideal kiri dalam S, maka setiap quasi-ideal dalam S adalah irisan dari ideal kiri dan ideal kanan dalam S;
2. Jika S mempunyai identitas kanan dan setiap ideal kanan dalam S adalah k-ideal kanan dalam S, maka setiap quasi-ideal dalam S adalah irisan dari ideal kiri dan ideal kanan dalam S.

Bukti:

1. Misalkan Q adalah quasi-ideal dalam S. Akan ditunjukkan Q adalah irisan dari ideal kiri dan ideal kanan dalam S. Karena S mempunyai identitas kiri, jadi $\forall\, q \in Q$ dan $\forall\, \gamma \in \Gamma$, berlaku $q = a\gamma q$, untuk suatu $a \in S$, sehingga $Q \subseteq S\Gamma Q$. Menurut Corollary 2.4.8, $Q + S\Gamma Q$ adalah ideal kiri dalam S yang memuat Q. Karena $Q \subseteq S\Gamma Q$, jadi $Q + S\Gamma Q = S\Gamma Q$. Dengan demikian, $S\Gamma Q$ adalah ideal kiri dalam S. Selanjutnya, menurut asumsi, $S\Gamma Q$ adalah k-ideal kiri dalam S. Menurut Teorema 3.5 (1), jika $Q \subseteq S\Gamma Q$ dan $S\Gamma Q$ adalah k-ideal kiri dalam S, maka terbukti Q adalah irisan dari ideal kiri dan ideal kanan dalam S.

2. Misalkan Q adalah quasi-ideal dalam S. Akan ditunjukkan Q adalah irisan dari ideal kiri dan ideal kanan dalam S. Karena S mempunyai identitas kanan, maka $\forall\, q \in Q$ dan $\forall\, \gamma \in \Gamma$, berlaku $q = q\gamma a$, untuk suatu $a \in S$, sehingga $Q \subseteq Q\Gamma S$. Menurut Corollary 2.4.8, $Q + Q\Gamma S$ adalah ideal kanan dalam S yang memuat Q. Karena $Q \subseteq Q\Gamma S$, jadi $Q + Q\Gamma S = Q\Gamma S$. Dengan demikian, $Q\Gamma S$ adalah ideal kanan dalam S. Selanjutnya, menurut asumsi, $Q\Gamma S$ adalah k-ideal kanan dalam S. Menurut Teorema 3.5 (2), jika $Q \subseteq Q\Gamma S$ dan $Q\Gamma S$ adalah k-ideal kanan dalam S, maka terbukti Q adalah irisan dari ideal kiri dan ideal kanan dalam S. ■

Teorema 3.7 (Chinram, 2008)
Misalkan S adalah suatu Γ-semiring dengan elemen identitas. Setiap quasi-ideal dalam S adalah irisan dari ideal kiri dan ideal kanan dalam S.

Bukti:

Misalkan Q adalah quasi-ideal dalam S. Akan dibuktikan $Q = L \cap R$, untuk suatu ideal kiri L dalam S dan ideal kanan R dalam S.

i) Menurut Corollary 2.4.8, $Q + S\Gamma Q$ adalah ideal kiri dalam S yang memuat Q dan $Q + Q\Gamma S$ adalah ideal kanan dalam S yang memuat Q. Misalkan $L = Q + S\Gamma Q$ dan $R = Q + Q\Gamma S$. Jelas bahwa $Q \subseteq L$ dan $Q \subseteq R$, sehingga $Q \subseteq L \cap R$.

ii) Karena S mempunyai elemen identitas, maka menurut bukti pada Corollary 3.6, $Q \subseteq S\Gamma Q$ dan $Q \subseteq Q\Gamma S$, sehingga $L = Q + S\Gamma Q = S\Gamma Q$ dan $R = Q + Q\Gamma S = Q\Gamma S$. Dengan demikian, $L \cap R = S\Gamma Q \cap Q\Gamma S$. Karena Q adalah quasi-ideal dalam S, jadi $L \cap R = S\Gamma Q \cap Q\Gamma S \subseteq Q$.

Dari i) dan ii), terbukti $Q = L \cap R$. ■

Contoh 3.8

Pada contoh 3.7, jika diberikan $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathrm{R}^+ \right\}$, maka Q adalah quasi-ideal dalam Γ-semiring S.

Bukti:

Misalkan diberikan sebarang $\overline{M}, \overline{N} \in Q$. Jadi $\overline{M} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dan $\overline{N} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, untuk suatu x dan y merupakan bilangan real positif, sehingga $\overline{M} + \overline{N} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in Q$.

Dengan demikian, Q subsemigrup dari $(S, +)$. Selanjutnya, misalkan diberikan sebarang $\overline{K} \in S$ dan $\overline{\Phi} \in \Gamma$. Jadi $\overline{K} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

dan $\overline{\Phi} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$, untuk suatu $a, b, c, d \in \mathrm{R}^+$ dan $\gamma \in Z^+$, sehingga $\overline{K}\overline{\Phi}\overline{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\gamma x & 0 \\ c\gamma x & 0 \end{pmatrix} \in S\Gamma Q$ dan $\overline{M}\overline{\Phi}\overline{K} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\gamma a & x\gamma b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in Q\Gamma S$. Dengan demikian, diperoleh himpunan ideal kiri $S\Gamma Q = \left\{ \begin{pmatrix} a\gamma x & 0 \\ c\gamma x & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, c, x \in \mathrm{R}^+ \text{ dan } \gamma \in Z^+ \right\}$ dan himpunan ideal kanan $Q\Gamma S = \left\{ \begin{pmatrix} x\gamma a & x\gamma b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b, x \in \mathrm{R}^+ \text{ dan } \gamma \in Z^+ \right\}$. Jika $S\Gamma Q$ diiriskan dengan $Q\Gamma S$, maka $a\gamma x = x\gamma a$, $x\gamma b = 0$, dan $c\gamma x = 0$, sehingga $S\Gamma Q \cap Q\Gamma S = \left\{ \begin{pmatrix} a\gamma x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, x \in \mathrm{R}^+ \text{ dan } \gamma \in Z^+ \right\} \subseteq Q$.

Karena Q subsemigrup dari $(S, +)$ dan $S\Gamma Q \cap Q\Gamma S \subseteq Q$, terbukti Q adalah quasi-ideal dalam Γ-semiring S. ■

Definisi 3.8 Γ-semiring Regular (Chinram, 2008)
Misalkan S adalah Γ-semiring. Suatu elemen $a \in S$ dikatakan regular jika terdapat $x \in S$ dan $\alpha, \beta \in \Gamma$ sedemikian sehingga $a = a\alpha x\beta a$. Suatu Γ-semiring S dikatakan regular jika setiap elemen dalam S adalah elemen regular.

Contoh 3.9
Misalkan diberikan himpunan bilangan real R adalah semiring dan $\Gamma = Z^+ \cup \{0\}$. Jika diberikan pemetaan $\mathrm{R} \times \Gamma \times \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, maka R adalah Γ-semiring regular, tetapi R tidak mempunyai elemen identitas.

Bukti:

i) Menurut Lemma 2.4.1, R adalah Γ-semiring. Misalkan diberikan sebarang $a \in \mathrm{R}$, $a \neq 0$. Pilih $\alpha = \beta = 1 \in \Gamma$ dan $x = 1/a \in \mathrm{R}$, sedemikian sehingga $a\alpha x\beta a = a \cdot 1 \cdot \frac{1}{a} \cdot 1 \cdot a = a$.

Jika $a = 0$, maka bisa dipilih sebarang $\alpha, \beta \in \Gamma$ dan $x \in \mathrm{R}$, sedemikian sehingga $a\alpha x\beta a = 0 \cdot \alpha \cdot x \cdot \beta \cdot 0 = 0$. Dengan demikian, untuk setiap $a \in \mathrm{R}$, a adalah elemen regular dalam R. Terbukti R adalah Γ-semiring regular.

ii) Misalkan diberikan sebarang $x \in \mathrm{R}$ dan $\gamma \in \Gamma$. Andaikan R adalah Γ-semiring dengan elemen identitas a, sehingga $x = a\gamma x$ dan $x = x\gamma a$. Hal ini hanya dapat terpenuhi jika $a = 1/\gamma$, sebab $x = 1/\gamma \cdot \gamma \cdot x$ dan $x = x \cdot \gamma \cdot 1/\gamma$. Akan tetapi, jika dipilih $\gamma = 0$, maka $a = 1/0 \notin \mathrm{R}$. Dengan demikian, terjadi kontradiksi, sehingga terbukti R tidak mempunyai elemen identitas.

Dari i) dan ii), terbukti bahwa R adalah Γ-semiring regular, tetapi tidak mempunyai elemen identitas. ■

Teorema 3.8 (Chinram, 2008)
Setiap quasi-ideal dalam Γ-semiring regular S dapat ditulis dalam bentuk $Q = L \cap R$, untuk suatu ideal kiri L dalam S dan ideal kanan R dalam S.

Bukti:
Misalkan Q adalah quasi-ideal dalam S. Akan dibuktikan $Q = L \cap R$, untuk suatu ideal kiri L dalam S dan ideal kanan R dalam S.

i) Menurut Corollary 2.4.8, $Q + S\Gamma Q$ adalah ideal kiri dalam S yang memuat Q dan $Q + Q\Gamma S$ adalah ideal kanan dalam S yang memuat Q. Misalkan $L = Q + S\Gamma Q$ dan $R = Q + Q\Gamma S$. Jelas bahwa $Q \subseteq L$ dan $Q \subseteq R$, sehingga $Q \subseteq L \cap R$.

ii) Misalkan diberikan sebarang $q \in Q$. Karena S adalah Γ-semiring regular, jadi terdapat $x \in S$ dan $\alpha, \beta \in \Gamma$ sedemikian sehingga $q = q\alpha x\beta q$. $q = q\alpha x\beta q = (q\alpha x)\beta q \in S\Gamma Q$, atau $Q \subseteq S\Gamma Q$. Juga, $q = q\alpha x\beta q = q\alpha(x\beta q) \in Q\Gamma S$, atau dengan kata lain $Q \subseteq Q\Gamma S$. Sehingga $L = Q + S\Gamma Q = S\Gamma Q$ dan $R = Q + Q\Gamma S = Q\Gamma S$. Jadi, $L \cap R = S\Gamma Q \cap Q\Gamma S$. Karena Q adalah quasi-ideal dalam S, jadi $L \cap R = S\Gamma Q \cap Q\Gamma S \subseteq Q$.

Dari i) dan ii), terbukti $Q = L \cap R$. ■

Contoh 3.10

Pada contoh 3.9, jika diberikan $Q = \{2x \mid x \in \mathrm{R}\}$, maka Q adalah quasi-ideal dalam Γ-semiring R.

Bukti:

Misalkan diberikan sebarang m dan $n \in Q$. Jadi $m = 2x$ dan $n = 2y$, untuk suatu x dan $y \in \mathrm{R}$, sehingga diperoleh $m + n = 2x + 2y = 2(x + y) \in Q$. Dengan demikian, Q adalah subsemigrup dari $(\mathrm{R}, +)$. Selanjutnya, misalkan diberikan sebarang $a \in \mathrm{R}$ dan $\gamma \in \Gamma$. Jadi $a\gamma m = a\gamma 2x = 2(a\gamma x) \in \mathrm{R}\Gamma Q$ dan $m\gamma a = 2x\gamma a = 2(x\gamma a) \in Q\Gamma\mathrm{R}$, sehingga diperoleh ideal kiri

$$\mathrm{R}\Gamma Q = \{2(a\gamma x) \mid a, x \in \mathrm{R}, \gamma \in \Gamma\}$$

dan ideal kanan

$$\mathrm{Q}\Gamma\mathrm{R} = \{2(x\gamma a) \mid a, x \in \mathrm{R}, \gamma \in \Gamma\}.$$

Jika $\mathrm{R}\Gamma Q$ diiriskan dengan $Q\Gamma\mathrm{R}$, maka $2(a\gamma x) = 2(x\gamma a)$, sehingga $\mathrm{R}\Gamma Q \cap Q\Gamma\mathrm{R} = \{2k \mid k \in \mathrm{R}\} \subseteq Q$, untuk suatu $k = a\gamma x = x\gamma a$. Karena Q subsemigrup dari $(\mathrm{R}, +)$ dan $\mathrm{R}\Gamma Q \cap Q\Gamma\mathrm{R} \subseteq Q$, terbukti Q adalah quasi-ideal dalam Γ-semiring R. ■

BAB IV
KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan dapat diambil kesimpulan:

1. Suatu quasi-ideal Q dalam suatu Γ-semiring S didefinisikan sebagai suatu subsemigrup dari $(S,+)$ sedemikian sehingga $S\Gamma Q \cap Q\Gamma S \subseteq Q$.
2. Setiap quasi-ideal dalam suatu semiring S merupakan quasi-ideal dalam Γ-semiring S.
3. Setiap quasi-ideal dalam suatu Γ-semiring merupakan irisan dari ideal kiri dan ideal kanan dalam Γ-semiring tersebut.

repository.ub.ac

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

DAFTAR PUSTAKA

Andhikari, M. R. and M. K. Sen. 2000. Semiring of Formal Power Series. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics 24*: 173–181.

Chinram, R. and Y. Kemprasit. 2005. Minimal Quasi-Ideals and Minimal Bi-Ideals of Generalized Rings of Strictly Upper Triangular Matrices. *Thai Journal of Mathematics Vol. 3 No. 1*: 1–6.

Chinram, R. 2006. On Quasi-Gamma-Ideals in Gamma-Semigroups. *Research Article Science Asia 32*: 351-353.

Chinram, R. and C. Jirojkul. 2007. On Bi-Γ-Ideals in Γ-Semigroups. *Songklanakarin J. Science Technology 29 No. 1*: 231–234.

Chinram, R. 2008. A Note on Quasi-Ideals in Γ-Semirings. *International Mathematical Forum 3 No. 26*: 1253–1259.

Dummit, D. S. and R. M. Foote. 2002. *Abstract Algebra 2nd ed*. John Wiley & Sons, Inc. Singapore.

Jun, Y. B. 2003. Roughness of Gamma-Subsemigroups/Ideals in Gamma-Semigroups. *Bulletin Korean Mathematics Society No. 3*: 531–536.

Lallement, G. 1979. *Semigroups and Combinatorial Applications*. John Wiley & Sons, Inc. New York.

Rao, M. K. 1995. Γ-Semiring I. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics 19*: 49–54.

Sen, M. K. and N. K. Saha. 1986. On Γ-Semigroups I. *Bulletin California Mathematics Society 78*: 181–186.

Shabir, M., A. Ali, and S. Batool. 2004. A Note on Quasi-Ideals in Semirings. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics 27*: 923–928.