

**REKONSTRUKSI CITRA
DENGAN METODE PROYEKSI BALIKAN TERFILTER**

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh:
ARIF ROHMAN R S
0310940005-94



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2008**

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI
REKONSTRUKSI CITRA
DENGAN METODE PROYEKSI BALIKAN TERFILTER

oleh :
ARIF ROHMAN RS
0310940005 – 94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal **27 Juni 2008**
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Pembimbing I

Pembimbing II

Dr. Agus Suryanto, M.Sc
NIP. 132 126 049

Dra. Trisilowati, M.Sc
NIP. 131 837 955

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Agus Suryanto, M.Sc
NIP. 132 126 049

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : ARIF ROHMAN RS
NIM : 0310940005 - 94
Jurusan : MATEMATIKA
**Penulis Skripsi berjudul : REKONSTRUKSI CITRA DENGAN
METODE PROYEKSI BALIKAN TERFILTER.**

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. Isi Skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Skripsi ini.
2. Apabila di kemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 27 Juni 2008
Yang menyatakan,

(ARIF ROHMAN RS)
NIM. 0310940005 – 94

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



REKONSTRUKSI CITRA DENGAN METODE PROYEKSI BALIKAN TERFILTER

ABSTRAK

Rekonstruksi citra dalam bidang kedokteran digunakan untuk merubah citra hasil CT scan yang berupa citra *sinogram* menjadi citra spasial. Secara matematis citra *sinogram* didapatkan dengan proyeksi transformasi Radon. Salah satu metode yang digunakan untuk rekonstruksi citra adalah metode proyeksi balikan. Metode ini menghasilkan citra yang mengalami pengaburan. Pada skripsi ini ditunjukkan bahwa efek pengaburan dapat direduksi dengan menerapkan filter, baik filter Ram-Lak maupun filter Shepp-Logan, sehingga metode ini disebut metode proyeksi balikan terfilter. Proses pemfilteran tersebut diterapkan pada domain frekuensi. Untuk melihat keefektifan dari metode proyeksi balikan terfilter, metode tersebut diaplikasikan pada citra *grayscale* dari *cranium* (tulang tengkorak).

Kata kunci : Citra *sinogram*, transformasi Radon, metode proyeksi balikan, pemfilteran, metode proyeksi balikan terfilter.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

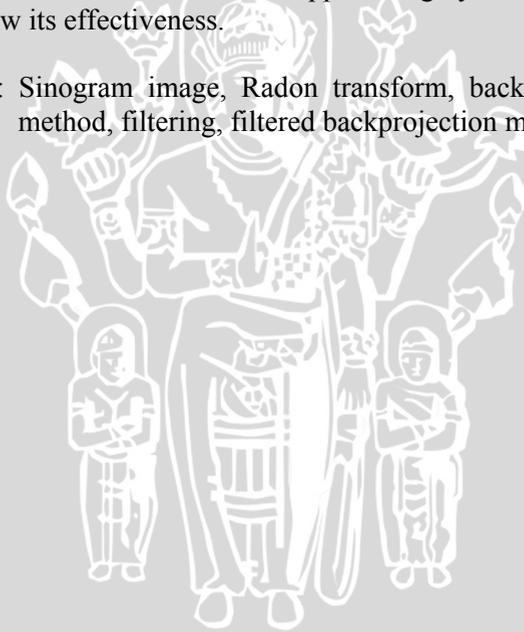


IMAGE RECONSTRUCTION WITH FILTERED BACKPROJECTION METHOD

ABSTRACT

Image reconstruction in medical imaging is used to transform a sinogram (image obtained from CT Scan) to spatial image. Sinogram can be obtained mathematically by implementing Radon transform to spatial image. One of methods that is widely used for image reconstruction is backprojection method. However this method produces blurring image. To reduce this effect, in this final project, either Ram-Lak filter or Shepp-Logan filter is applied in the frequency domain. Therefore this method is called filtered backprojection method. This method is applied to grayscale image of cranium to show its effectiveness.

Keywords : Sinogram image, Radon transform, backprojection method, filtering, filtered backprojection method.



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirobbil a'lam, ucap syukur ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan segala nikmatnya kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Shalawat dan salam tetap tercurahkan kepada Nabi Muhammad S.A.W, beserta keluarga dan para sahabat-sahabatnya.

Dalam penulisan skripsi ini, tidak mungkin penulis dapat menyelesaikan skripsi ini tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak yang sangat berperan. Oleh karena itu, rasa terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan kepada:

1. Dr. Agus Suryanto, M.Sc., selaku pembimbing I dalam penulisan skripsi ini. Terima kasih atas semua arahan dan perhatian bapak sehingga skripsi ini bisa diselesaikan, dan terima kasih atas motivasi yang telah bapak berikan kepada penulis,
2. Dra. Trisilowati, M.Sc., selaku Pembimbing II dalam penulisan skripsi ini. Terima kasih atas saran, perhatian dan bimbingan yang telah ibu berikan kepada penulis,
3. Bpk.Gancang Saroja dosen fisika atas saran dan artikelnnya sehingga penulis lebih mengerti dan memahami bahan skripsi,
4. Dr. Wuryansari M.K., M.Si, Drs. Bambang Sugandi, MSi, dan Syaiful Anam, SSi, MT, selaku dosen penguji. Terima kasih atas masukan dan saran demi sempurnanya skripsi ini,
5. Segenap staf pengajar Jurusan Matematika UB dan staf karyawan tata usaha Matematika UB yang banyak membantu selama penulis belajar di sini,
6. Ibu, Bapak dan Adikku Rista yang telah memberikan semua kasih sayang, nasehat, dukungan, dan doanya sehingga penulis bisa menyelesaikan kuliahnya,
7. The GanK Tour cew: Alvy, Evyorista, Friski, Heppy dan The GanK Tour cow: Dadang, Nonot, Rizal, Dipo, Anang terima kasih atas perjalanan tournya dan saran-sarannya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan lancar,
8. Teman-teman seperjuangan Matematika angkatan 2003, terima kasih atas semua kenangan yang terjadi selama penulis belajar disini,
9. Serta semua pihak yang tidak mungkin penulis cantumkan, yang telah membantu penulisan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa tugas skripsi masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, saran dan kritik yang membangun sangat diharapkan oleh penulis. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca.

Malang, 27 Juni 2008

Penulis,

ARIF ROHMAN RS



DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGESAHAN	iii
HALAMAN PERNYATAAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang.....	1
1.2. Rumusan Masalah.....	2
1.3. Tujuan.....	2
1.4. Batasan Masalah.....	3
1.5. Manfaat.....	3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1. Sejarah CT Scan.....	5
2.2. Pencitraan.....	6
2.3. Transformasi Fourier.....	6
2.3.1. Transformasi Fourier Satu Dimensi.....	6
2.3.2. Transformasi Fourier Dua Dimensi.....	7
2.4. Integral Garis.....	8
2.5. Fungsi Delta Dirac.....	9
2.6. Transformasi Radon.....	9
2.6.1. Transformasi Radon Titik.....	11
2.6.2. Transformasi Radon Garis.....	12
2.7. Filter.....	13
2.8. Penerapan Fungsi Filter.....	14
2.9. Teorema Proyeksi.....	15
BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN	17
3.1. Dasar-Dasar Rekonstruksi Citra.....	17
3.2. Proyeksi Transformasi Radon.....	18
3.2.1. Transformasi Radon Lingkaran.....	20
3.2.2. Transformasi Radon Bujursangkar.....	22

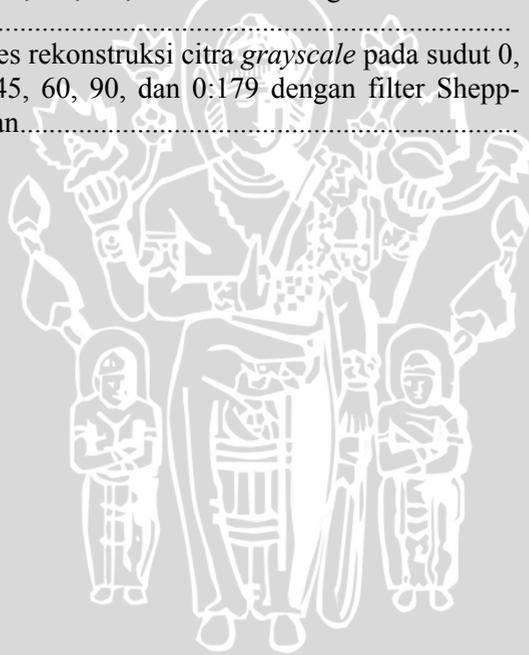
3.2.3. Transformasi Radon Diskrit.....	27
3.3. Metode Proyeksi Balikan.....	33
3.4. Metode Proyeksi Balikan Terfilter.....	36
3.5. Aplikasi Rekonstruksi Pada Citra <i>Grayscale</i>	41
BAB IV PENUTUP	47
4.1. Kesimpulan.....	47
4.2. Saran.....	48
DAFTAR PUSTAKA	49



DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1 Transformasi Fourier fungsi rect menjadi fungsi sinc	7
Gambar 2.2 Kurva C.....	8
Gambar 2.3 Proyeksi transformasi Radon sebagai integral garis	10
Gambar 2.4 Bentuk kurva $s = r \cos(\theta - \varphi)$	12
Gambar 2.5 Grafik filter dalam domain frekuensi.....	15
Gambar 3.1.a Permukaan fungsi citra	17
Gambar 3.1.b Nilai keabuannya	17
Gambar 3.2 Garis L dengan koordinat dalam s, θ	18
Gambar 3.3 Ray-sum suatu obyek dengan satu proyeksi	19
Gambar 3.4.a Citra Lingkaran.....	21
Gambar 3.4.b Grafik <i>sinogram</i> dari Lingkaran.....	21
Gambar 3.5 Lima bagian daerah bujursangkar.....	22
Gambar 3.6.a Citra bujursangkar.....	26
Gambar 3.6.b Proyeksi pada $\theta = 0^\circ$	26
Gambar 3.6.c Proyeksi pada $\theta = \frac{\pi}{12}$	26
Gambar 3.6.d Proyeksi pada $\theta = \frac{\pi}{6}$	26
Gambar 3.6.e Proyeksi pada $\theta = \frac{\pi}{4}$	26
Gambar 3.7 Citra <i>sinogram</i> lingkaran dan bujursangkar.....	33
Gambar 3.8 Diagram proses metode proyeksi balikan.....	34
Gambar 3.9.a Rekonstruksi citra lingkaran, proyeksi balikan $\theta = 0^\circ$	35
Gambar 3.9.b Rekonstruksi citra lingkaran, proyeksi balikan $\theta = 30^\circ$	35
Gambar 3.9.c Rekonstruksi citra lingkaran, proyeksi balikan $\theta = 45^\circ$	35
Gambar 3.9.d Rekonstruksi citra lingkaran, proyeksi balikan $\theta = 60^\circ$	35
Gambar 3.9.e Rekonstruksi citra lingkaran, proyeksi balikan $\theta = 90^\circ$	35

Gambar 3.9.f	Rekonstruksi citra lingkaran, proyeksi balikan $\theta = 0:179^\circ$	35
Gambar 3.10	Teorema proyeksi (<i>Fourier slice theorem</i>)	37
Gambar 3.11	Diagram metode proyeksi balikan terfilter	39
Gambar 3.12	Rekonstruksi citra bujursangkar dengan metode proyeksi balikan terfilter	40
Gambar 3.13	Data dan bentuk citra <i>grayscale</i>	41
Gambar 3.14	Citra <i>sinogram</i>	42
Gambar 3.15	Metode proyeksi balikan pada citra <i>grayscale</i>	42
Gambar 3.16	Proyeksi balikan terfilter pada citra <i>grayscale</i>	43
Gambar 3.17	Perbedaan filter pada citra biner	43
Gambar 3.18	Proses rekonstruksi citra <i>grayscale</i> pada sudut 0, 30, 45, 60, 90, dan 0:179 dengan filter Ram- Lak.....	44
Gambar 3.19	Proses rekonstruksi citra <i>grayscale</i> pada sudut 0, 30, 45, 60, 90, dan 0:179 dengan filter Shepp- Logan.....	45



BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Tomografi merupakan teknik khusus yang dapat digunakan untuk mendapatkan gambaran bagian dalam dari suatu obyek yang berupa benda padat tanpa memotong atau mengirisnya. Salah satu penerapan tomografi pada bidang kedokteran yang sangat terkenal adalah *Computed Tomography* (CT) scan sinar-x (Astuti, 2000).

CT scan ditemukan pertama kali secara matematika oleh Johann Radon pada tahun 1917. Alat CT scan pertama dibuat oleh G.N Hounsfield dan Alan McCormark pada tahun 1972. Prinsip dasar CT scan hampir sama dengan perangkat radiografi yang sudah lebih umum dikenal. Kedua perangkat ini memanfaatkan intensitas radiasi terusan setelah melewati suatu obyek untuk membentuk suatu citra/gambar. CT scan dapat memberikan sebaran kerapatan struktur internal obyek sehingga citra yang dihasilkan oleh CT scan mudah dianalisis (Nugroho, 2004).

CT scan menghasilkan citra secara tomografi (irisan) digital dari sinar-x yang menembus organ. Proses digitalisasi data yang masuk berasal dari proyeksi sinar-x yang keluar dari celah sempit (*split-scan*) yang mengitari tubuh pasien satu lingkaran penuh. Sinar-x yang menembus diterima oleh detektor yang mengubahnya menjadi data elektrik dan diteruskan ke sistem komputer untuk diolah menjadi gambar irisan organ-organ tubuh. Citra yang dihasilkan bukanlah jejak langsung dari sinar-x tetapi hasil rekonstruksi dari pengukuran nilai koefisien attenuasi linear materi yang dilaluinya berdasarkan perbandingan intensitas sinar-x sebelum dan setelah melewati materi objek. Citra yang dihasilkan dari CT scan berbentuk citra *sinogram* yang merupakan citra pada domain Radon. Karena citra *sinogram* tidak dapat memberikan informasi dengan jelas, diperlukan suatu metode untuk merekonstruksi citra *sinogram*.

Salah satu metode yang dapat digunakan untuk merekonstruksi citra tomografi adalah metode proyeksi balikan. Metode proyeksi balikan banyak digunakan dalam bidang kedokteran. Metode proyeksi balikan merupakan suatu metode yang

digunakan untuk mendapatkan kembali suatu obyek setelah dilakukan proyeksi transformasi Radon pada obyek/citra. Metode ini merupakan metode rekonstruksi tomografi termudah. Tetapi hasil rekonstruksinya kurang baik karena adanya pengaburan di bagian batas tepi citra. Hal ini disebabkan oleh penjumlahan tingkat perbedaan intensitas pada bagian tepi citra.

Untuk mereduksi efek pengaburan pada metode proyeksi balikan, perlu dilakukan proses pemfilteran. Pada skripsi ini akan dibahas bagaimana memfilter citra *sinogram*. Karena umumnya fungsi filter diterapkan pada domain frekuensi, citra *sinogram* terlebih dahulu ditransformasikan ke dalam domain frekuensi dengan mengaplikasikan transformasi Fourier. Untuk memahami proses dalam mendapatkan citra *sinogram*, secara matematis dapat dilakukan dengan proyeksi transformasi Radon.

1.2 . Rumusan Masalah

- Bagaimana mendapatkan bentuk citra *sinogram* dari suatu citra dimensi dua ?
- Bagaimana merekonstruksi citra dua dimensi dengan menggunakan metode proyeksi balikan ?
- Bagaimana mengaplikasikan filter untuk mereduksi pengaburan citra hasil metode proyeksi balikan ?
- Bagaimana perbandingan hasil citra rekonstruksi metode proyeksi balikan dan metode proyeksi balikan terfilter?

1.3. Tujuan

- Mendapatkan citra *sinogram* dengan proyeksi transformasi Radon dari suatu citra dua dimensi.
- Merekonstruksi citra dua dimensi dengan menggunakan metode proyeksi balikan.
- Mengaplikasikan filter untuk mereduksi citra akibat pengaburan citra metode proyeksi balikan.
- Mengetahui perbandingan hasil citra rekonstruksi metode proyeksi balikan dan metode proyeksi balikan terfilter.

1.4. Batasan Masalah

Rekonstruksi citra dibatasi pada kasus citra dua dimensi.

1.5. Manfaat

- Mengetahui dan menganalisis sistem rekonstruksi citra tomografi suatu data proyeksi dari suatu obyek.
- Dapat mengetahui prinsip dasar kerja CT scan pada bidang kedokteran.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Sejarah CT Scan

Sinar-x ditemukan pada 1895 oleh Wilhem C. Rongent, seorang profesor dari University of Wurzburg, Jerman. Pada saat ia sedang melakukan eksperimen dengan tabung sinar katoda dalam ruang gelap, ternyata sebuah plat berlapis bahan *barium platinacyanide* yang didekatkan di sekitar tabung sinar katoda dapat berpendar (*flourecent*). Hal itu menunjukkan adanya suatu radiasi yang pada saat itu belum diketahui jenisnya. Karena masih asing, radiasi foton itu disebut sinar-x. Belakangan diketahui bahwa radiasi itu timbul akibat adanya perlambatan elektron ketika menumbuk target dalam tabung sinar katoda. Sifat sinar-x adalah menghitamkan film dengan tingkat kehitaman film sebanding dengan intensitas yang mengenainya. Rongent pertama kali mendapatkan foto radiografi dari tulang tangannya sendiri.

Dalam dunia kedokteran, penggunaan sinar-x dan sinar gamma sering dianggap sebagai ilmu tersendiri yang dinamakan *radiology*. Sedangkan radiografi adalah suatu teknik pencitraan yang dilakukan dengan cara memotret obyek dengan menggunakan sinar-x dan sinar gamma. Pembuatan gambar struktur suatu benda tanpa merusak benda tersebut, pada mulanya dilakukan dengan proses fotografi (secara konvensional) dengan menggunakan sinar tembus yang dapat menghitamkan plat film. Proses fotografi dengan menggunakan sinar tembus disebut *radiografi konvensional*. Pada radiografi konvensional, citra struktur obyek mengalami tumpang tindih informasi, artinya bagian yang lebih dalam tertumpuk oleh citra bagian di depannya.

Dengan perkembangan komputer sebagai alat pencatat dan penganalisa data, telah terjadi perkembangan dalam teknik radiografi. Hal ini menimbulkan gagasan tentang tomografi komputer (*computerized tomography*) yang nantinya akan menggantikan kedudukan radiografi konvensional.

2.2. Pencitraan

Suatu citra (*image*) adalah suatu larik bilangan (*array of number*) dimensi dua atau lebih. Secara konseptual, citra f bisa dianggap sebagai suatu fungsi real yang terdefinisi pada domain real. Untuk kasus dua dimensi, citra bisa dituliskan sebagai $f(x, y) \rightarrow R$; dimana $x, y \in R$ dengan R himpunan bilangan real, sehingga citra tersebut bisa dinyatakan sebagai $f(x, y)$ (Suksmono, 2007).

Agar dapat diolah dengan komputer digital, citra tersebut harus direpresentasikan secara numerik dengan nilai-nilai diskrit. Representasi citra dari fungsi (kontinu) menjadi nilai-nilai diskrit disebut digitalisasi. Citra yang dihasilkan inilah yang disebut citra digital (*digital image*). Pada umumnya citra digital berbentuk empat persegi panjang, dan dimensi ukurannya dinyatakan sebagai tinggi \times lebar (atau lebar \times panjang). Citra digital berbentuk persegipanjang dengan tinggi N , lebar M akan memiliki derajat keabuan diantara 0 dan 256. Dengan demikian $D_f = \{(x, y) | 0 \leq x \leq M, 0 \leq y \leq N\} \subseteq R^2$ dan $R_f = [0, 256] \subseteq R$. Citra digital yang berukuran $N \times M$ lazim dinyatakan dengan matriks yang berukuran N baris dan M kolom sebagai berikut :

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \dots & f(0,M) \\ f(1,0) & f(1,1) & \dots & f(1,M) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f(N-1,0) & f(N-1,1) & \dots & f(N-1,M-1) \end{bmatrix}$$

2.3. Transformasi Fourier

2.3.1. Transformasi Fourier Satu Dimensi

Transformasi Fourier dari fungsi kontinu $f(x)$ didefinisikan sebagai berikut,

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi isx} dx, \quad -\infty < s < \infty$$

Bentuk eksponensial kompleks $e^{2\pi isx}$ dapat dinyatakan sebagai

$$e^{2\pi isx} = \cos(2\pi sx) + i \sin(2\pi sx), \text{ dengan } i^2 = -1.$$

Jika diketahui fungsi $F(s)$ dalam domain Fourier, fungsi $f(x)$ dimana $F(s)$ adalah transformasi Fourier dari $f(x)$ dapat ditentukan dengan menggunakan transformasi Fourier balikan yaitu

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{2\pi isx} ds, \quad -\infty < x < \infty$$

(Debnath, 2007).

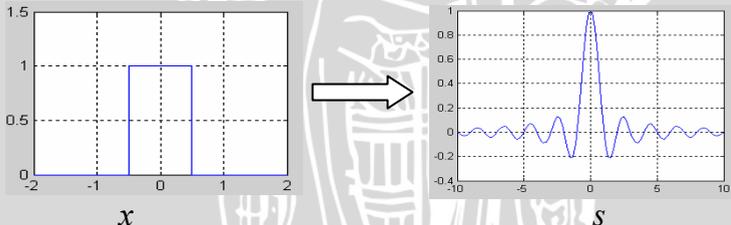
Contoh :

Perhatikan fungsi *rect* seperti pada Gambar 2.1 yang didefinisikan oleh

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{yang lainnya.} \end{cases}$$

Transformasi Fourier dari fungsi tersebut adalah fungsi sinc yang didefinisikan sebagai

$$F(s) = \text{sinc}(s) = \frac{\sin(\pi s)}{\pi s}.$$



Gambar 2.1 Transformasi fourier fungsi rect menjadi fungsi sinc

2.3.2. Transformasi Fourier Dua Dimensi

Transformasi Fourier $F(u, v)$ dari fungsi dua variabel $f(x, y)$ didefinisikan sebagai berikut :

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i(ux+vy)} dy dx .$$

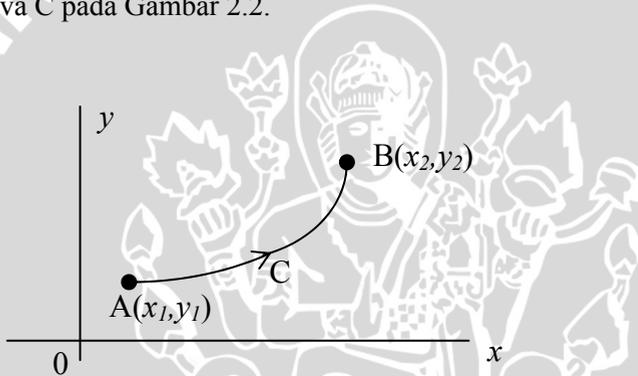
Identik dengan fungsi satu variabel, transformasi Fourier balikan dari $F(u, v)$ adalah

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{2\pi i(ux+vy)} dv du$$

(Hjouj, 2006).

2.4. Integral Garis

Misalkan $y = f(x)$ adalah fungsi real bernilai tunggal, monoton dan kontinu pada interval $x_1 < x < x_2$ yang diilustrasikan sebagai kurva C pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2 Kurva C

Jika $P(x, y)$ dan $Q(x, y)$ merupakan fungsi real kontinu dari x dan y , untuk setiap titik pada kurva C, maka integral

$$\int_c P(x, y) dx, \int_c Q(x, y) dy \quad (2.1)$$

dan penjumlahan integral

$$\int_c \{P(x, y) dx + Q(x, y) dy\} \quad (2.2)$$

disebut integral garis atau integral kurva dengan batas integrasi C sepanjang kurva $y = f(x)$ dari A ke B (Stephensen, 1990).

2.5. Fungsi Delta Dirac

Fungsi delta Dirac disebut juga fungsi denyut (impuls). Fungsi ini bernilai 0 untuk $x \neq 0$ dan lebar denyutnya sama dengan 1. Secara matematis fungsi delta Dirac didefinisikan sebagai

$$\delta(x) = 0, \quad x \neq 0 \text{ dan}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Berikut ini adalah beberapa sifat fungsi delta Dirac :

$$1. \delta(x) = \delta(-x)$$

$$2. \delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}$$

$$3. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(a) \delta(x) dx = f(a).$$

(Liang, 1961).

2.6. Transformasi Radon

Rekonstruksi tomografi yang merupakan suatu obyek irisan dengan bidang xy pada suatu sudut θ dinyatakan sebagai

$$g_{\theta}(s) = \mathfrak{R}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(s - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy \quad (2.3)$$

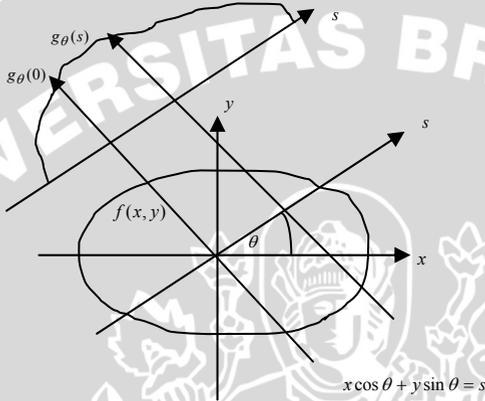
dengan $-\infty < s < \infty$, $0 \leq \theta < \pi$.

\mathfrak{R} disebut sebagai operator proyeksi. Dalam koordinat yang dirotasi (s, u) dengan

$$\begin{bmatrix} s \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

dapat dicari nilai (x, y) dengan menggunakan invers dari persamaan (2.4) sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ u \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$



Gambar 2.3 Proyeksi transformasi Radon sebagai integral garis

Persamaan (2.3) dapat dituliskan dengan mensubstitusikan persamaan (2.5) sebagai berikut

$$\begin{aligned} g_{\theta}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy \\ &= \frac{1}{|\cos \theta|} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta\left(x - \frac{s}{\cos \theta} + y \tan \theta\right) dx dy \\ &= \frac{1}{|\cos \theta|} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{s}{\cos \theta} - y \tan \theta, y\right) dy. \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (2.5), diperoleh $y = s \sin \theta + u \cos \theta$ sehingga

$$g_{\theta}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \theta - u \sin \theta, s \sin \theta + u \cos \theta) du \quad (2.6)$$

dengan $-\infty < s < \infty$, $0 \leq \theta < \pi$

(Cho, 1993).

Beberapa sifat – sifat transformasi Radon adalah

1.Linear

Jika $g(x, y) = c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2(x, y)$ maka

$$g_\theta(s) = c_1 f_{1,\theta}(s) + c_2 f_{2,\theta}(s)$$

2.Translasi

Jika $g(x, y) = f(x - x_0, y - y_0)$ maka

$$g_\theta(s) = f_\theta[(s - x_0 \cos \theta - y_0 \sin \theta)]$$

3. $g_\theta(s) = g_{\theta+\pi}(-s)$.

Jika obyek dinyatakan dalam bentuk koordinat polar (r, φ) dengan $x = r \cos \varphi$ dan $y = r \sin \varphi$ maka suatu titik (r, φ) akan dipetakan ke sebuah kurva sinusoid $s = r \cos(\theta - \varphi)$. Dengan demikian, irisan benda sebagai kumpulan titik-titik akan merupakan superposisi kurva-kurva sinusoid jika dilihat dari domain radon. Oleh karena itu, citra dalam domain Radon juga disebut sebagai *sinogram*.

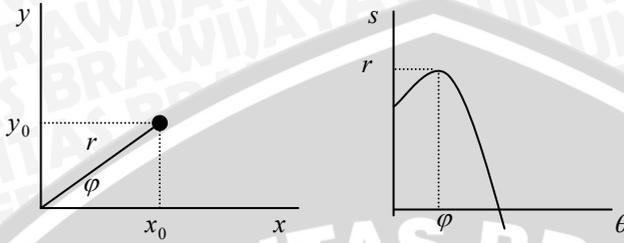
2.6.1. Transformasi Radon Titik

Titik (x_0, y_0) pada Gambar 2.4 dengan $x_0 = r \cos \varphi$ dan $y_0 = r \sin \varphi$ dapat didefinisikan sebagai fungsi

$$f(x, y) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$$

sehingga nilai proyeksi Radon $g_\theta(s)$ dapat ditentukan oleh

$$\begin{aligned} g_\theta(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(s - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y - y_0) \delta(s - x_0 \cos \theta - y \sin \theta) dy \\ &= \delta(s - x_0 \cos \theta - y_0 \sin \theta) \\ &= \delta(s - r \cos(\theta - \varphi)) . \end{aligned}$$



Gambar 2.4 Bentuk kurva sinusoid $s = r \cos(\theta - \varphi)$

2.6.2. Transformasi Radon Garis

Bentuk transformasi Radon untuk garis dengan parameter (r, φ) yang didefinisikan oleh

$$f(x, y) = \delta(r - x \cos \varphi - y \sin \varphi),$$

adalah

$$g_{\theta}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(r - x \cos \varphi - y \sin \varphi) \delta(s - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\sin \theta|} \delta\left(r - x \cos \varphi - \left(\frac{s - x \cos \theta}{\sin \theta}\right) \sin \varphi\right) dx$$

$$g_{\theta}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\sin \theta|} \delta\left(r - s \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} - x \left(\cos \varphi - \frac{\cos \theta \sin \varphi}{\sin \theta}\right)\right) dx$$

(2.7)

Dengan menggunakan sifat fungsi delta Dirac persamaan (2.7) dapat disederhanakan menjadi

$$g_{\theta}(s) = \frac{1}{|\sin \theta|} \frac{1}{\left|\cos \varphi - \frac{\cos \theta \sin \varphi}{\sin \theta}\right|}$$

$$= \frac{1}{|\sin \theta \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi|}, \quad \theta \neq \varphi, 0 < \theta < \pi.$$

Untuk $\theta = \varphi$ persamaan (2.7) dapat dituliskan sebagai

$$g_{\theta}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\sin \theta|} \delta\left(r - s \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} - x \left(\cos \varphi - \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\sin \varphi} \right)\right) dx$$

$$= \frac{1}{|\sin \theta|} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(r - s) dx ,$$

sehingga didapatkan nilai yang bergantung pada variabel s sebagai berikut

$$g_{\theta}(s) = \begin{cases} \frac{1}{|\sin \theta|} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(0) dx, & \text{jika } s = r \\ 0, & \text{jika } s \neq r \end{cases}$$

(Toft, 1996).

2.7. Filter

Pemfilteran adalah suatu cara untuk mengekstrasi suatu bagian dari suatu himpunan data (citra), dengan menghilangkan bagian-bagian data yang tidak diinginkan. Filter dalam pengolahan citra (secara khusus disebut filter digital) dirancang untuk menyaring informasi spektral, sehingga menghasilkan citra baru yang mempunyai variasi nilai spektral yang berbeda dari citra asli.

Jenis filter dalam citra digital dibagi menjadi tiga kategori, yaitu

1. *Low pass filter* (filter lolos rendah) adalah filter yang menekankan frekuensi rendah untuk meratakan keluaran *noise* pada citra atau menghilangkan *spike* pada citra. Filter lolos rendah terkadang disebut juga sebagai filter *smoothing* atau filter *averaging*.
2. *High pass filter* (filter lolos tinggi) adalah filter yang menekankan frekuensi tinggi untuk menajamkan penampakan linear pada citra, seperti jalan, patahan lingkungan air dan tanah. Filter lolos tinggi terkadang disebut juga sebagai filter *sharpening* karena secara umum digunakan untuk menajamkan citra secara detail tanpa mempengaruhi bagian dari frekuensi rendah citra.
3. *Edge detection filter*, adalah filter yang menekankan pinggir-pinggir di sekeliling (batas tepi) suatu obyek atau penampakan dalam suatu citra untuk memudahkan dalam analisis. Filter *edge*

detection biasanya membuat suatu citra dengan latar belakang abu-abu dan hitam, dan garis putih yang mengelilingi pinggir obyek atau penempakan dalam suatu citra.

Filter yang digunakan dalam rekonstruksi citra antara lain

1. Filter Ram-Lak (*Ramachandran - Lakshminarayanan*) merupakan salah satu contoh dari kategori *high pass filter* karena menajamkan bagian tepi (*edge*) citra dan *sensitive* terhadap *noise*.
2. Filter Shepp-Logan merupakan filter yang menghaluskan bagian tepi (*edge*) citra atau disebut juga filter *smoothing*, sehingga filter ini termasuk kategori *low pass filter*.

2.8. Penerapan Fungsi Filter

Filter dalam rekonstruksi citra pada domain frekuensi dinyatakan dengan $|w|$. Filter diubah sedemikian rupa agar dapat digunakan pada domain frekuensi yang terbatas, komponen frekuensi yang lebih tinggi dari pada frekuensi spasial tertinggi dari proyeksi akan terpotong, karena filter merespon frekuensi yang lebih tinggi dari pada frekuensi spasial tertinggi. Frekuensi spasial tertinggi dinyatakan dengan w_{maks} . Salah satu filter yang digunakan pada pengolahan citra adalah filter bentuk fungsi Ramachandran - Lakshminarayanan (Ram-Lak) yaitu

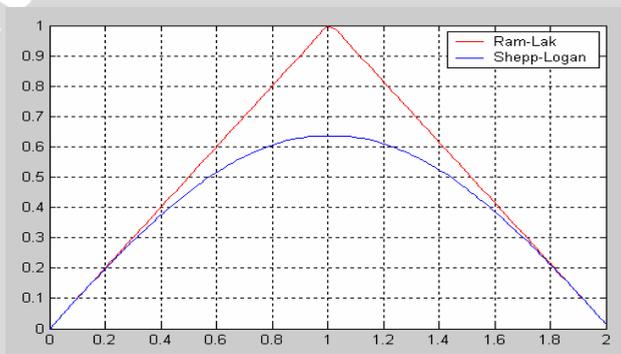
$$H(w) = \begin{cases} |w|, & |w| \leq w_{maks} \\ 0, & \text{lainnya} . \end{cases}$$

Filter Ram-Lak termasuk kategori *high pass filter* sehingga filter ini sering digunakan pada frekuensi tinggi karena berguna untuk mengurangi *noise* dan menajamkan pada citra.

Salah satu modifikasi dari filter Ram-Lak adalah filter Shepp-Logan. Bentuk fungsi dari filter Shepp – Logan adalah

$$H(w) = \begin{cases} |w| \operatorname{sinc} \left(\frac{w}{2w_{maks}} \right), & |w| \leq w_{maks} \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Filter Shepp-Logan berhubungan dengan rata-rata pemfilteran pada domain real karena perkalian antara fungsi filter Ram-Lak dengan fungsi *sinc*. Oleh karena itu, filter ini termasuk kategori *low pass filter*. Grafik fungsi filter Ram-Lak dan filter Shepp-Logan digambarkan pada Gambar (2.5) berikut



Gambar 2.5 Grafik filter dalam domain frekuensi

(Philipsen, 1998).

2.9. Teorema Proyeksi

Teorema proyeksi atau disebut juga teorema irisan Fourier (*the Fourier slice theorem*) menyatakan bahwa suatu transformasi Fourier satu dimensi terhadap s dari proyeksi Radon $g_{\theta}(s)$ sama dengan irisan sentral pada sudut θ dari transformasi Fourier dua dimensi pada obyek $f(x, y)$, yang dapat dituliskan sebagai berikut

$$S(w, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{\theta}(s) e^{-2\pi i w s} ds$$

$$F(w_x, w_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i (w_x x + w_y y)} dx dy.$$

Dengan demikian teorema proyeksi dapat dituliskan sebagai berikut

$$S(w, \theta) = F(w_x, w_y)$$

dengan $w_x = w \cos\theta$, $w_y = w \sin\theta$, $w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2}$

(Kak dan Slaney, 1999).

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB III

HASIL DAN PEMBAHASAN

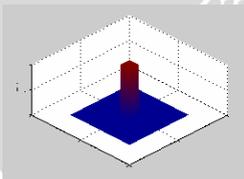
Pada bab ini akan dijelaskan tentang proses rekonstruksi citra, dengan bentuk citra lingkaran dan citra bujursangkar. Sebelum dilakukan rekonstruksi citra, citra tersebut dipoyeksikan terlebih dahulu terhadap domain Radon dengan menggunakan transformasi Radon. Pada tugas akhir juga dibahas transformasi Radon untuk mendapatkan citra *sinogram* dari citra biner. Metode yang akan digunakan untuk merekonstruksi citra adalah metode proyeksi balikan dan metode proyeksi balikan terfilter. Citra *grayscale* digunakan untuk membandingkan kedua metode tersebut.

3.1. Dasar-Dasar Rekonstruksi Citra

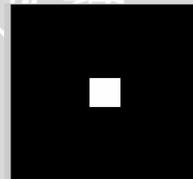
Misalkan fungsi $f(x, y)$ adalah fungsi real pada bidang dimensi dua yang didefinisikan sebagai berikut

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{jika } |x| \leq \frac{1}{2} \text{ dan } |y| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Jika fungsi $f(x, y)$ merupakan fungsi citra maka nilai dari f pada setiap (x, y) disebut intensitas atau nilai tingkat keabuan dari citra. Gambar 3.1.a dan Gambar 3.1.b mengilustrasikan persamaan (3.1). Jika x, y dan $f(x, y)$ bernilai diskrit maka citra tersebut disebut citra digital. Citra digital dibentuk oleh beberapa elemen, dan elemen tersebut mempunyai nilai pada titik tersebut yang disebut dengan *picture element* atau pixel.



(a)

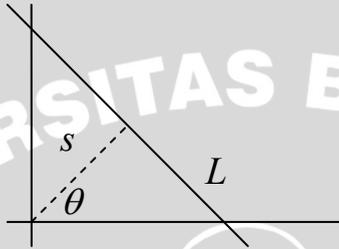


(b)

Gambar 3.1 Permukaan fungsi citra (a) dan nilai keabuannya (b)

Misalkan didefinisikan sebuah garis L dengan persamaan umum $y=mx+c$. Dalam koordinat s, θ persamaan tersebut dapat ditulis menjadi

$$L_{\theta}(s) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cos\theta + y \sin\theta = s\}$$



Gambar 3.2 Garis L dengan koordinat dalam s, θ

Gambar 3.2 mengilustrasikan bahwa sebuah sinar melalui titik pusat dengan sudut θ yang tegak lurus dengan garis L dan s merupakan jarak dari titik pusat ke garis.

3.2. Proyeksi Transformasi Radon

Jika dimisalkan $f(x, y)$ adalah suatu fungsi distribusi kerapatan pada bidang dua dimensi (x, y) maka integral garis fungsi tersebut sepanjang garis $L_{\theta}(s)$ adalah

$$g\{L\} = \int_L f(x, y) du \tag{3.2}$$

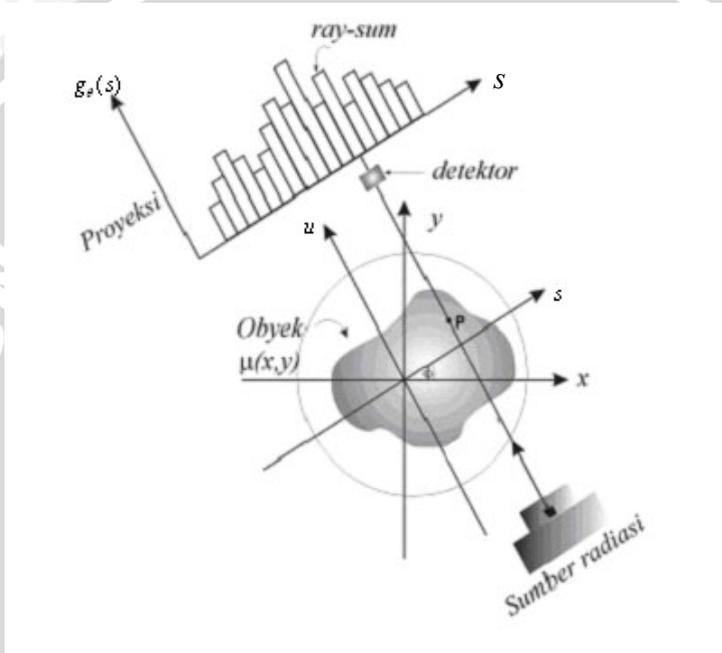
dimana du merupakan diferensial sepanjang garis L . Dengan kata lain $g\{L\}$ merupakan integral garis dari $f(x, y)$ sepanjang garis L , sehingga $g\{L\}$ disebut proyeksi transformasi Radon (*Radon transform*) dari fungsi $f(x, y)$ yang dapat dituliskan

$$g\{L\} = g(s, \theta) = g_{\theta}(s),$$

dan didefinisikan oleh

$$g_{\theta}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(s - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy$$

dengan s, θ merupakan parameter dari L, dimana $0 \leq \theta < 2\pi$ dan $0 \leq s \leq s_{maks}$.



Gambar 3.3 Raysum suatu obyek dengan satu proyeksi

Besaran $g_{\theta}(s)$ disebut *ray-sum*. Satu set *ray-sum* dengan sudut θ yang sama disebut satu proyeksi, lihat Gambar 3.3. Karena pada transformasi Radon berlaku $g(s, \theta) = g(-s, \theta + \pi)$, batas daerah domain s, θ adalah $-s_{maks} \leq s \leq s_{maks}$ dan $0 \leq \theta < \pi$.

Untuk mengetahui nilai dari $g_{\theta}(s)$ untuk setiap nilai θ , pertama akan diselidiki nilai $g_{\theta}(s)$ pada $\theta = 0$ dan $\theta = \frac{\pi}{2}$. Untuk nilai $\theta = 0$ yaitu $L_{0,s} = g_0(s)$, garis s berimpit dengan sumbu x

$(x = s)$ karena garis u tegak lurus garis s , sehingga garis u berimpit dengan sumbu y ($y = u$), yang dapat dituliskan oleh

$$g_{\theta}(s) = g_0(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s, y) dy \quad (3.3)$$

Jika $\theta = \frac{\pi}{2}$ maka $L_{\frac{\pi}{2}, s} = g_{\frac{\pi}{2}}(s)$, garis s berimpit dengan sumbu y ($y = s$) sehingga garis u berimpit dengan sumbu x ($x = u$) yaitu

$$g_{\theta}(s) = g_{\frac{\pi}{2}}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, s) dx \quad (3.4)$$

Bentuk umum integral garis dari transformasi Radon dapat dinyatakan dengan cara mensubstitusikan persamaan (2.5) ke dalam persamaan (3.2) sedemikian hingga diperoleh

$$g_{\theta}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \theta - u \sin \theta, s \sin \theta + u \cos \theta) du \quad (3.5)$$

Pada (*Computed Tomography*) CT, nilai $g_{\theta}(s)$ menunjukkan redaman dari sinar-x oleh citra (obyek) pada sudut proyeksi dan koordinat s tertentu.

3.2.1. Transformasi Radon Lingkaran

Perhatikan fungsi lingkaran dengan jari-jari $\frac{1}{2}$ sebagai berikut

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases} \quad (3.6)$$

Karena lingkaran mempunyai garis simetri, proyeksi dari lingkaran dapat dinyatakan sebagai $g_{\theta}(s) = g_0(s)$. Jika $\theta = 0$ maka dengan menggunakan persamaan (3.5) didapatkan hasil integrasi proyeksi lingkaran sebagai berikut

$$\left. \begin{aligned} x &= s \cos 0 - u \sin 0 = s \\ y &= s \sin 0 + u \cos 0 = u \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Substitusi persamaan (3.7) pada persamaan (3.6) menghasilkan

$$x^2 + y^2 = s^2 + u^2 \leq \frac{1}{4} . \quad (3.8)$$

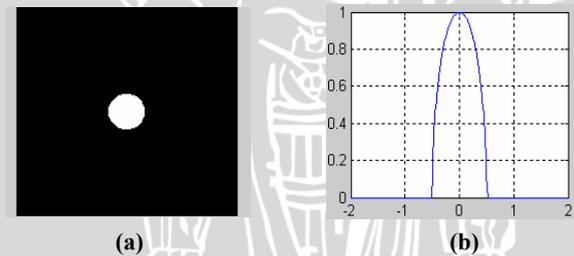
Jika batas integral garis pada fungsi lingkaran persamaan (3.8) diterapkan maka

$$\begin{aligned} g_{\theta}(s) &= \int_{-\sqrt{\frac{1}{4}-s^2}}^{\sqrt{\frac{1}{4}-s^2}} du = \sqrt{\frac{1}{4}-s^2} - (-\sqrt{\frac{1}{4}-s^2}) \\ &= 2\sqrt{\frac{1}{4}-s^2} \\ &= \sqrt{1-4s^2} , \end{aligned}$$

sehingga transformasi Radon dari lingkaran adalah

$$g_{\theta}(s) = \begin{cases} \sqrt{1-4s^2} , & |s| \leq \frac{1}{2} \\ 0 , & \text{lainnya} . \end{cases}$$

Bentuk citra lingkaran dan hasil proyeksi transformasi Radon diilustrasikan pada Gambar 3.4 .



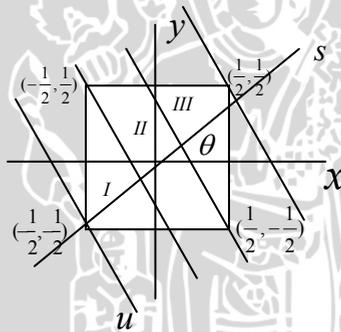
Gambar 3.4 Citra Lingkaran (a) dan grafik *sinogram* dari lingkaran (b)

3.2.2. Transformasi Radon Bujursangkar

Didefinisikan fungsi bujursangkar sebagai berikut,

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \frac{1}{2} \text{ dan } |y| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Untuk mendapatkan proyeksi transformasi Radon $g_\theta(s)$ dengan $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ bidang bujursangkar dibagi menjadi lima daerah bagian yang dibatasi oleh garis lurus yang tegak lurus melalui pojok-pojok pada bidang bujursangkar seperti dengan garis $y = x \operatorname{tg}\theta$ pada Gambar 3.5. Perhatikan bahwa $f(x, y)$ merupakan citra biner yang bernilai 1 dan 0, yaitu jika $f(x, y)$ bernilai 1 maka di dalam bidang (warna putih) dan bernilai 0 untuk di luar bidang (warna hitam).



Gambar 3.5 Lima bagian bidang bujursangkar

Dengan memperhatikan Gambar 3.5 dapat dihitung proyeksi $g_\theta(s)$ pada bagian citra bujursangkar yang dibagi menjadi tiga bagian daerah sebagai berikut :

Untuk daerah bagian I : daerah yang dibatasi garis-garis yang tegak lurus terhadap s yaitu garis yang melalui titik $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$,

$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ dan batas garis $x = -\frac{1}{2}$ dan $y = -\frac{1}{2}$ dengan menggunakan koordinat rotasi pada persamaan (2.4) dan persamaan (2.5) didapatkan

$$u_1 = \frac{s \cos \theta + \frac{1}{2}}{\sin \theta}$$

$$u_2 = \frac{-s \sin \theta - \frac{1}{2}}{\cos \theta}$$

yang merupakan batas integrasi daerah I sehingga

$$\begin{aligned} g_{\theta}(s) &= \int_{u_2}^{u_1} du = \left(\frac{s \cos \theta + \frac{1}{2}}{\sin \theta} \right) - \left(\frac{-s \sin \theta - \frac{1}{2}}{\cos \theta} \right) \\ &= \frac{s \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \cos \theta + s \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{\cos \theta + \sin \theta + 2s}{2 \sin \theta \cos \theta} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Untuk daerah bagian II : daerah ini dapat dibagi menjadi dua daerah lagi yaitu pertama, daerah-daerah yang dibatasi oleh garis-garis yang tegak lurus terhadap s yang melalui titik $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $(0, 0)$

dan batas garis $x = 0$ dan $y = -\frac{1}{2}$. Dengan menggunakan koordinat rotasi diperoleh batas-batas integrasi

$$u_1 = \frac{s \cos \theta + 0}{\sin \theta}$$

$$u_2 = \frac{-s \sin \theta - \frac{1}{2}}{\cos \theta},$$

sehingga proyeksi transformasi Radon pada daerah ini adalah

$$g_{\theta}(s) = \int_{u_2}^{u_1} du = \left(\frac{s \cos \theta}{\sin \theta} \right) - \left(\frac{-s \sin \theta - \frac{1}{2}}{\cos \theta} \right)$$

$$\begin{aligned}
 g_{\theta}(s) &= \frac{s \cos^2 \theta + s \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \sin \theta + s}{\sin \theta \cos \theta} \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

Sedangkan yang kedua adalah daerah yang dibatasi oleh garis-garis yang tegak lurus terhadap s yang melalui titik $(0,0)$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ dan batas garis $x=0$ dan $y=\frac{1}{2}$ sehingga dengan menggunakan koordinat rotasi didapatkan

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{s \cos \theta + 0}{\sin \theta} \\
 u_2 &= \frac{-s \sin \theta + \frac{1}{2}}{\cos \theta}
 \end{aligned}$$

dengan batas-batas tersebut didapatkan

$$\begin{aligned}
 g_{\theta}(s) &= \int_{u_1}^{u_2} du = \left(\frac{-s \sin \theta + \frac{1}{2}}{\cos \theta} \right) - \left(\frac{s \cos \theta}{\sin \theta} \right) \\
 &= \frac{-s \cos^2 \theta - s \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \sin \theta - s}{\sin \theta \cos \theta} \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

Kemudian dengan menjumlahkan hasil integrasi persamaan (3.10) dan (3.11) didapatkan

$$g_{\theta}(s) = \frac{\frac{1}{2} \sin \theta + s}{\sin \theta \cos \theta} + \frac{\frac{1}{2} \sin \theta - s}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{1}{\cos \theta} \quad (3.12)$$

Untuk daerah bagian III : daerah ini bentuknya sama dengan daerah bagian I yaitu dibatasi oleh garis-garis yang tegak lurus terhadap s dan melalui $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ dan batas garis $x = \frac{1}{2}$ dan $y = \frac{1}{2}$ dengan menggunakan koordinat rotasi

$$u_1 = \frac{s \cos \theta - \frac{1}{2}}{\sin \theta}$$

$$u_2 = \frac{-s \sin \theta + \frac{1}{2}}{\cos \theta}$$

dengan batas-batas tersebut didapatkan

$$g_\theta(s) = \int_{u_1}^{u_2} du = \left(\frac{-s \sin \theta + \frac{1}{2}}{\cos \theta} \right) - \left(\frac{s \cos \theta - \frac{1}{2}}{\sin \theta} \right)$$

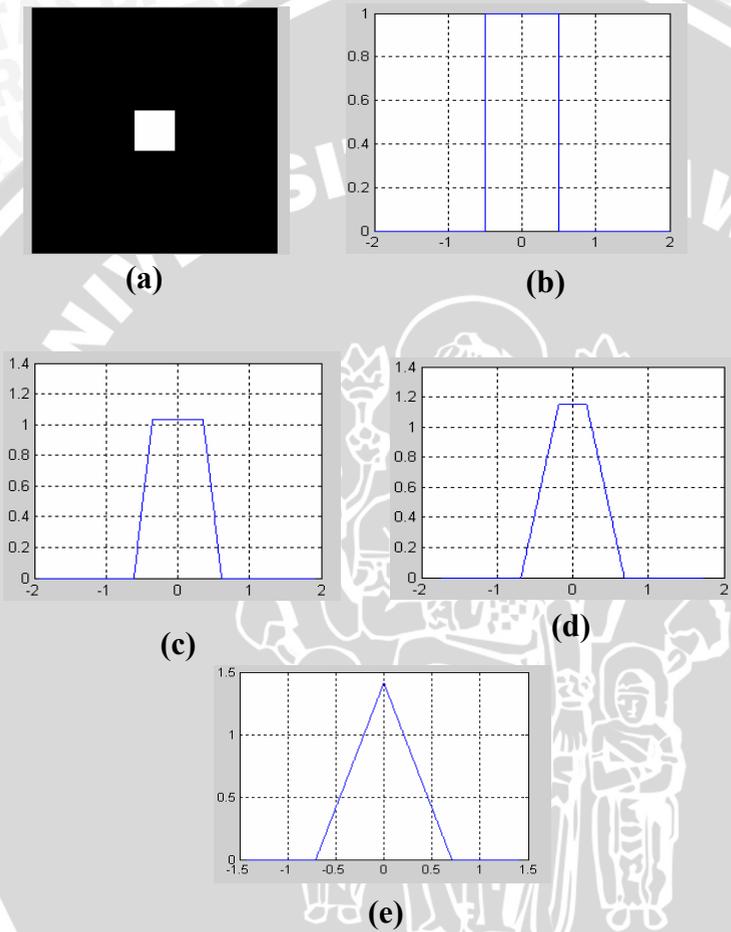
$$= \frac{-s \cos^2 \theta - s \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{\sin \theta + \cos \theta - 2s}{2 \sin \theta \cos \theta} \quad (3.13)$$

Dari hasil persamaan (3.12) nilai $g_\theta(s)$ secara umum dapat dituliskan sebagai berikut

$$g_\theta(s) = \begin{cases} \frac{\cos \theta + \sin \theta + 2s}{2 \sin \theta \cos \theta}, & -\frac{1}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \leq s \leq -\frac{1}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta \\ \frac{1}{\cos \theta}, & 0 \leq |s| \leq \frac{1}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \\ \frac{\cos \theta + \sin \theta - 2s}{2 \sin \theta \cos \theta}, & \frac{1}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \leq s \leq \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

Hasil proyeksi transformasi Radon dari citra bujursangkar dapat digambarkan pada Gambar 3.6 sebagai berikut



Gambar 3.6 (a). Citra bujursangkar (b). proyeksi pada $\theta = 0^\circ$
 (c). proyeksi pada $\theta = \frac{\pi}{12}$ (d). proyeksi pada $\theta = \frac{\pi}{6}$
 (e). proyeksi pada $\theta = \frac{\pi}{4}$

3.2.3. Transformasi Radon Diskrit

Pada pengolahan citra digital dengan menggunakan media komputer (komputasi), diperlukan pendekatan secara diskrit pada transformasi Radon. Pada tugas akhir ini yang akan dibahas adalah pendekatan diskrit transformasi Radon pada citra dengan menggunakan empat variabel linear yaitu

$$x = x_m = x_{min} + m.\Delta x, \quad m = 0, 1, \dots, M-1$$

$$y = y_n = y_{min} + n.\Delta y, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\theta = \theta_t = \theta_{min} + t.\Delta\theta, \quad t = 0, 1, \dots, T-1$$

$$s = s_r = s_{min} + r.\Delta s, \quad r = 0, 1, \dots, R-1$$

x_{min} : Posisi awal x dari pixel berukuran M .

Δx : Jarak antar pixel pada x .

m : Indeks diskrit dari pixel berukuran M pada x .

y_{min} : Posisi awal y dari pixel berukuran N .

Δy : Jarak antar pixel pada y .

n : Indeks diskrit dari pixel berukuran N pada y .

θ_{min} : Sudut awal.

$\Delta\theta$: Beda sudut (selisih antar sudut).

t : Indeks diskrit sudut .

s_{min} : Posisi awal.

Δs : Jarak antar pixel pada s .

r : Indeks diskrit dari ukuran R pada s .

Pada metode ini membutuhkan beberapa variabel bebas dan variabel tersebut perlu ditentukan terlebih dahulu, sehingga diasumsikan bahwa citra mempunyai ukuran yang sama (*square size*). Didefinisikan ukuran citra sebagai berikut

$$\left. \begin{aligned} M &= N \\ \Delta x &= \Delta y \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Untuk menghitung nilai minimum dari ukuran pixel citra dapat dilakukan dengan menggunakan nilai variabel sebagai berikut :

$$x_{min} = -x_{maks} = \frac{1}{2}(M-1).\Delta x$$

$$y_{min} = -y_{maks} = x_{min} = \frac{1}{2}(M-1).\Delta x$$

$$s_{min} = -s_{maks} = \frac{1}{2}(R-1).\Delta s .$$

Kemudian sudut θ ditentukan dalam interval $0 \leq \theta \leq \pi$, sehingga didapatkan bentuk linear

$$\theta_{min} = 0 \text{ dan } \Delta\theta = \frac{\pi}{T} .$$

Parameter seperti $\Delta s, \Delta x, M, R$ dan T harus ditentukan, namun untuk CT scan hanya parameter $\Delta s, R$ dan T yang harus ditentukan.

Persamaan transformasi Radon bentuk (2.6) bila diterapkan pada pengolahan citra digital sangat kurang efektif terutama bila diolah dengan menggunakan komputer. Menghitung transformasi Radon dalam bentuk diskrit dibutuhkan suatu pendekatan atau aproksimasi dengan menggunakan interpolasi linear (*linear interpolation*). Transformasi Radon pada persamaan (2.3) akan direduksi dengan menggunakan beberapa sifat delta Dirac, sehingga akan diperoleh hanya satu proses interpolasi. Sedangkan transformasi Radon pada persamaan (2.6) ini akan membutuhkan dua proses interpolasi karena terdapat dua fungsi sehingga waktu proses perhitungan akan lama.

Bentuk persamaan transformasi Radon diskrit dibagi menjadi

dua daerah yaitu $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$ dan $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ atau $\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \pi$.

Untuk nilai $\sin \theta > \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\begin{aligned} g_{\theta}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(s - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy \\ &= \frac{1}{|\sin \theta|} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta\left(y - \frac{s}{\sin \theta} + x \cot \theta\right) dx dy \\ &= \frac{1}{|\sin \theta|} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x, \frac{s}{\sin \theta} - x \cot \theta\right) dx . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Persamaan (3.10) akan diubah menjadi bentuk diskrit yaitu

$$g_{\theta}(s) \approx \frac{\Delta x}{|\sin \theta|} \sum_{m=0}^{M-1} f(x_m, \frac{s}{\sin \theta} - x_m \cot \theta). \quad (3.11)$$

Sedangkan untuk nilai $\sin \theta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\begin{aligned} g_{\theta}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(s - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy \\ &= \frac{1}{|\cos \theta|} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x - \frac{s}{\cos \theta} + y \tan \theta) dx dy \\ &= \frac{1}{|\cos \theta|} \int_{-\infty}^{\infty} f(\frac{s}{\cos \theta} - y \tan \theta, y) dy. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Bentuk diskrit persamaan (3.12) adalah

$$g_{\theta}(s) \approx \frac{\Delta y}{|\cos \theta|} \sum_{n=0}^{N-1} f(\frac{s}{\cos \theta} - y_n \tan \theta, y_n). \quad (3.13)$$

Persamaan (3.11) dan (3.13) dapat dihitung dengan menggunakan interpolasi linear (*linear interpolation*). Bentuk interpolasi linear dari suatu fungsi untuk $f(x_m, y_n) = f(m, n)$ diberikan sebagai berikut

$$f(m, n) = (1 - w) f(m, n) + w f(m, n + 1) \quad (3.14)$$

dengan

$$n^* = \alpha m + \beta$$

$$n = \lfloor n^* \rfloor$$

$$w = n^* - n.$$

Kemudian akan dihitung untuk setiap daerah proyeksi transformasi Radon dengan menggunakan interpolasi linear. Persamaan (3.10) dapat diubah ke dalam bentuk umum transformasi Radon yaitu

$$g_{\theta}(s) = \frac{1}{|\sin \theta|} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, px + \tau) dx$$

dengan

$$p = -\cot \theta \text{ dan } \tau = \frac{s}{\sin \theta}.$$

Bentuk interpolasi linear diskrit terhadap sumbu y diberikan oleh

$\alpha = \frac{p}{\Delta y}$ dan $\beta = \frac{px_m + \tau - y_{\min}}{\Delta y}$ untuk $x_m = x_{\min}$. Dengan definisi (3.9) diperoleh

$$\alpha = \frac{-\cot \theta}{\Delta y} = \frac{-\cot \theta}{\Delta x}$$

$$\beta = \frac{s - x_{\min}(\cos \theta + \sin \theta)}{\Delta x \sin \theta}$$

Persamaan (3.12) diubah dalam bentuk umum transformasi Radon yaitu

$$g_{\theta}(s) = \frac{1}{|\cos \theta|} \int_{-\infty}^{\infty} f(qy + \eta, y) dy$$

dengan

$$q = -\tan \theta \text{ dan } \eta = \frac{s}{\cos \theta}.$$

Sedangkan bentuk interpolasi linear terhadap sumbu x diberikan

oleh $\alpha = \frac{q}{\Delta x}$ dan $\beta = \frac{qy_n + \eta - x_{\min}}{\Delta x}$ untuk $y_n = y_{\min} = x_{\min}$.

Sehingga dapat dituliskan sebagai berikut

$$\alpha = \frac{-\tan \theta}{\Delta x}$$

$$\beta = \frac{s - x_{\min}(\cos \theta + \sin \theta)}{\Delta x \cos \theta}$$

Setelah ditentukan nilai masing-masing α, β terhadap sumbu-x dan sumbu-y pada $\alpha m + \beta$, kemudian ditentukan interval nilai m pada citra sebagai berikut

$$n = \lfloor \alpha m + \beta \rfloor,$$

karena $n \geq 0$ dan $n \leq N-1$ diperoleh

$$0 \leq n = \lfloor \alpha m + \beta \rfloor \leq N-1,$$

sehingga didapatkan interval nilai m untuk $\alpha > 0$ yaitu

$$\frac{-\beta}{\alpha} \leq m < \frac{N-1-\beta}{\alpha}$$

sedangkan untuk $\alpha < 0$ adalah diperoleh hubungan

$$\frac{N-1-\beta}{\alpha} \leq m < \frac{-\beta}{\alpha}$$

Secara garis besar algoritma transformasi Radon dapat dituliskan sebagai berikut :

Input : citra , Δx , Δs

Output : $g_{\theta}(s)$

Langkah-langkah :

Langkah 1 : hitung nilai untuk x_{\min} , s_{\min} dan $\Delta\theta$

Langkah 2 : untuk nilai $\sin \theta > \frac{1}{\sqrt{2}}$ maka

1. hitung nilai $\alpha = \frac{-\cot \theta}{\Delta x}$

2. hitung nilai $\beta = \frac{s - x_{\min} (\cos \theta + \sin \theta)}{\Delta x \sin \theta}$

3. tentukan nilai m_{\min} dan m_{\max} jika $\alpha > 0$

$$m_{\min} = \max \left\{ 0, \left\lceil \frac{-\beta}{\alpha} \right\rceil \right\}$$

$$m_{\max} = \min \left\{ N-1, \left\lfloor \frac{N-1-\beta}{\alpha} \right\rfloor \right\}$$

4. tentukan nilai m_{\min} dan m_{\max} jika $\alpha < 0$

$$m_{\min} = \max \left\{ 0, \left\lceil \frac{N-1-\beta}{\alpha} \right\rceil \right\}$$

$$m_{\max} = \min \left\{ N-1, \left\lfloor \frac{-\beta}{\alpha} \right\rfloor \right\}$$

5. jika $\beta > 0$ dan $\beta < N-1$ maka

$$m_{\min} = 0$$

$$m_{\max} = N$$

6. hitung nilai interpolasi linear pada citra

$$g_{\theta}(s) = \frac{\Delta x}{|\sin \theta|} \sum_{m=m_{\min}}^{m_{\max}-1} \text{citra}(m, [\alpha m + \beta]).$$

Langkah 3 : untuk nilai $\sin \theta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ maka

1. hitung nilai $\alpha = \frac{-\tan \theta}{\Delta x}$
2. hitung nilai $\beta = \frac{s - x_{\min}(\cos \theta + \sin \theta)}{\Delta x \cos \theta}$
3. tentukan nilai n_{\min} dan n_{\max} jika $\alpha > 0$

$$n_{\min} = \text{maks} \left\{ 0, \left\lceil -\frac{\beta}{\alpha} \right\rceil \right\}$$

$$n_{\max} = \text{min} \left\{ N-1, \left\lfloor \frac{N-1-\beta}{\alpha} \right\rfloor \right\}$$

4. tentukan nilai n_{\min} dan n_{\max} jika $\alpha < 0$

$$n_{\min} = \text{maks} \left\{ 0, \left\lfloor \frac{N-1-\beta}{\alpha} \right\rfloor \right\}$$

$$n_{\max} = \text{min} \left\{ N-1, \left\lceil \frac{-\beta}{\alpha} \right\rceil \right\}$$

5. jika $\beta > 0$ dan $\beta < N-1$ maka

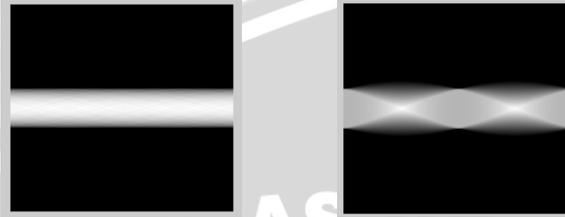
$$n_{\min} = 0$$

$$n_{\max} = N$$

6. hitung nilai interpolasi linear pada citra

$$g_{\theta}(s) = \frac{\Delta x}{|\cos \theta|} \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}-1} \text{citra}([\alpha n + \beta], n).$$

Bentuk citra lingkaran dan citra bujursangkar setelah dilakukan proyeksi transformasi Radon dapat dilihat pada Gambar 3.7 sebagai berikut



Gambar 3.7 Citra sinogram lingkaran dan bujursangkar

3.3. Metode Proyeksi Balik

Metode proyeksi balikan merupakan suatu metode yang digunakan untuk mengembalikan nilai citra $f(x, y)$ setelah dilakukan proyeksi transformasi Radon pada domain Radon. Metode ini mempunyai kelemahan dalam merekonstruksi citra yaitu mengalami pengaburan dan banyak *noise* pada citra yang dihasilkan, hal ini disebabkan oleh penjumlahan di setiap titik intensitas citra.

Transformasi Radon diproyeksikan terhadap sumbu garis dengan sudut θ dan melalui (x, y) yang didefinisikan sebagai proyeksi $g_\theta(s)$ dengan $s = x \cos \theta + y \sin \theta$. Penjumlahan dari $g_\theta(x \cos \theta + y \sin \theta)$ untuk setiap θ dinamakan rekonstruksi citra dengan metode proyeksi balikan yang dinyatakan dengan $b(x, y)$ sebagai berikut

$$b(x, y) = \int_0^\pi g_\theta(x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta. \quad (3.15)$$

Untuk menggunakan metode proyeksi balikan dalam citra, persamaan (3.15) harus dinyatakan dalam bentuk diskrit, yang dapat dituliskan sebagai berikut

$$b(x, y) = \frac{\pi}{N} \sum_{m=0}^{N-1} g_{\frac{m\pi}{N}} \left(x \cos\left(\frac{m\pi}{N}\right) + y \sin\left(\frac{m\pi}{N}\right) \right). \quad (3.16)$$

Algoritma metode proyeksi balikan

Input : citra , θ

Output : citra

Langkah-langkah :

Langkah 1 : hitung proyeksi citra dengan transformasi Radon.

Langkah 2 : untuk $m = 0$ sampai $N-1$

1. tentukan nilai $\theta_m = \frac{\pi}{180} \times \theta$
2. hitung nilai $\sin \theta_m$ dan $\cos \theta_m$
3. buat inisial x dan y pada citra

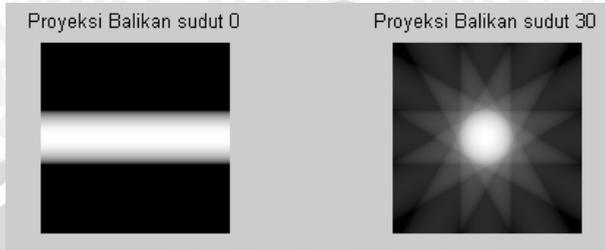
Langkah 3 : hitung nilai $b(x, y)$ dengan interpolasi linear

$$b(x, y) = \frac{\pi}{N} \sum_{m=0}^{N-1} g_{\theta_m} (x \cos(\theta_m) + y \sin(\theta_m)) .$$

Secara garis besar proses metode proyeksi balikan merupakan suatu metode yang sederhana yaitu proses citra input diproyeksikan ke dalam domain Radon dan mengembalikan kembali nilai dari domain Radon ke domain spasial (citra), yang digambarkan pada Gambar 3.8. Hasil citra keluaran dari citra lingkaran dengan menggunakan metode proyeksi balikan dengan $\theta = 0^\circ$, $\theta = 30^\circ$, $\theta = 60^\circ$, $\theta = 90^\circ$ dan $\theta = 0 : 179^\circ$ ditunjukkan pada Gambar 3.9.

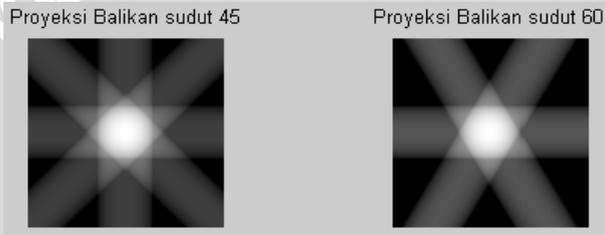


Gambar 3.8 Diagram proses metode proyeksi balikan



(a)

(b)



(c)

(d)



(e)

(f)

Gambar 3.9 Rekonstruksi citra lingkaran

- (a). Proyeksi balikan $\theta = 0$ (b). Proyeksi balikan $\theta = 30$
- (c). Proyeksi balikan $\theta = 45$ (d). Proyeksi balikan $\theta = 60$
- (e). Proyeksi balikan $\theta = 90$ (f). Proyeksi balikan $\theta = 0:179$

3.4. Metode Proyeksi Balik Terfilter

Metode proyeksi balikan terfilter merupakan hasil dari pengembangan metode proyeksi balikan, dimana dalam metode ini dilakukan pemfilteran dari hasil proyeksi. Untuk menganalisa metode proyeksi balikan terfilter diperlukan teorema proyeksi (*Fourier slice theorem*) dan transformasi Fourier balikan citra.

Teorema Proyeksi :

Suatu transformasi Fourier satu dimensi terhadap s dari proyeksi Radon $g_\theta(s)$ sama dengan irisan sentral pada sudut θ dari transformasi Fourier dua dimensi pada obyek $f(x, y)$, yang dapat diilustrasikan pada Gambar 3.10.

Bukti :

$F(w_x, w_y)$ merupakan transformasi Fourier dua dimensi dari $f(x, y)$ yang dapat dituliskan

$$F(w_x, w_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i(w_x x + w_y y)} dx dy \quad (3.17)$$

$S(w, \theta)$ adalah transformasi Fourier dimensi satu dari proyeksi Radon yang dinyatakan dengan

$$S(w, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} g_\theta(s) e^{-2\pi i w s} ds \quad (3.18)$$

dengan

$$w_x = w \cos \theta, w_y = w \sin \theta, w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} \quad (3.19)$$

Akan dibuktikan bahwa $S(w, \theta) = F(w_x, w_y) = F(w, \theta)$.

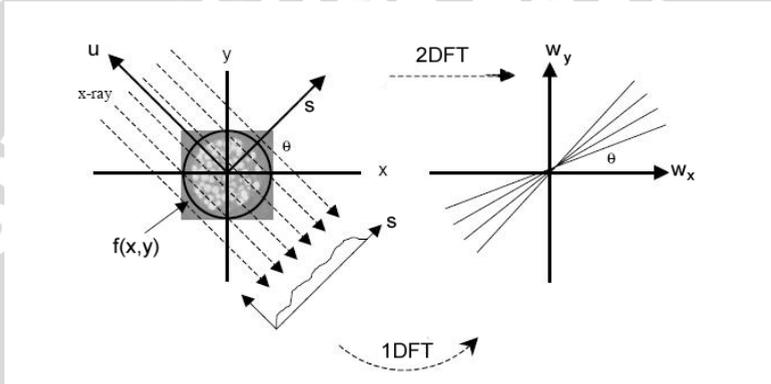
Substitusikan persamaan (2.5) dan persamaan (3.19) ke persamaan (3.17) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} w_x x + w_y y &= w \cos \theta (s \cos \theta - u \sin \theta) + w \sin \theta (s \sin \theta + u \cos \theta) \\ &= w s \cos^2 \theta - w u \sin \theta \cos \theta + w u \sin \theta \cos \theta + w s \sin^2 \theta \\ &= w s \end{aligned} \quad (3.20)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.20) ke persamaan (3.17) didapatkan

$$\begin{aligned} F(w_x, w_y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \theta - u \sin \theta, s \sin \theta + u \cos \theta) e^{-2\pi i(ws)} duds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g_{\theta}(s) e^{-2\pi i(ws)} ds \\ &= S(w, \theta). \end{aligned}$$

(Terbukti).



Gambar 3.10 Teorema proyeksi (Fourier slice theorem)

Pada rumus metode proyeksi balikan terfilter menggunakan transformasi Fourier balikan, akan didapatkan suatu nilai yang dinamakan *Fourier filtering*. Transformasi Fourier balikan dimensi dua didefinisikan sebagai berikut

$$f(x, y) = \iint F(u, v) e^{2\pi i(ux+vy)} du dv \quad (3.21)$$

dengan mengambil nilai variabel

$$u = w_x = w \cos \theta$$

$$v = w_y = w \sin \theta .$$

Persamaan (3.21) dapat dinyatakan sebagai

$$f(x, y) = \iint F(w \cos \theta, w \sin \theta) e^{2\pi w i(x \cos \theta + y \sin \theta)} |J(w, \theta)| dw d\theta \quad (3.22)$$

dengan batas integral $0 \leq \theta \leq 2\pi$ dan $0 \leq w \leq \infty$, dan matriks Jacobian sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 J(w, \theta) &= \begin{vmatrix} \frac{du}{dw} & \frac{dv}{dw} \\ \frac{du}{d\theta} & \frac{dv}{d\theta} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -w \sin \theta & w \cos \theta \end{vmatrix} \\
 &= w \cos^2 \theta - (-w \sin^2 \theta) = w.
 \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan batas integral dan nilai Jacobian pada persamaan (3.22) diperoleh

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(w \cos \theta, w \sin \theta) e^{2\pi w i(x \cos \theta + y \sin \theta)} w dw d\theta. \quad (3.23)$$

Jika batas domain $0 \leq \theta \leq 2\pi$ maka domain akan dibagi menjadi dua daerah yaitu $0 \leq \theta \leq \pi$ dan $\pi \leq \theta \leq 2\pi$. Untuk itu akan dihitung nilai $f(x, y)$ pada setiap daerah domain yaitu daerah $A = \{A : 0 \leq \theta \leq \pi\}$ dan daerah $B = \{B : \pi \leq \theta \leq 2\pi\}$.

Dengan demikian untuk daerah A dan daerah B masing-masing dapat dituliskan sebagai berikut :

$$f_A(x, y) = \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} F(w \cos \theta, w \sin \theta) e^{2\pi w i(x \cos \theta + y \sin \theta)} w dw d\theta \quad (3.24)$$

$$f_B(x, y) = \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\infty} F(w \cos \theta, w \sin \theta) e^{2\pi w i(x \cos \theta + y \sin \theta)} w dw d\theta \quad (3.25)$$

Persamaan (3.25) dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 f_B(x, y) &= \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} F(w \cos(\phi + \pi), w \sin(\phi + \pi)) e^z w dw d\phi \\
 &= \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} w F(-w \cos \phi, -w \sin \phi) e^{-z} dw d\phi \\
 &= \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^0 |w| F(w \cos \phi, w \sin \phi) e^z dw d\phi \quad (3.26)
 \end{aligned}$$

dengan $z = 2\pi i w(x \cos(\phi + \pi) + y \sin(\phi + \pi))$ dan $\theta = \phi + \pi$.

Jumlahkan hasil integral persamaan (3.24) dan persamaan (3.26) diperoleh

$$f(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} |w| F(w \cos \theta, w \sin \theta) e^{2\pi w i(x \cos \theta + y \sin \theta)} dw d\theta. \quad (3.27)$$

Berdasarkan pada teorema proyeksi persamaan (3.27) diperoleh

$$f(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} |w| S(w, \theta) e^{2\pi w i(x \cos \theta + y \sin \theta)} dw d\theta \quad (3.28)$$

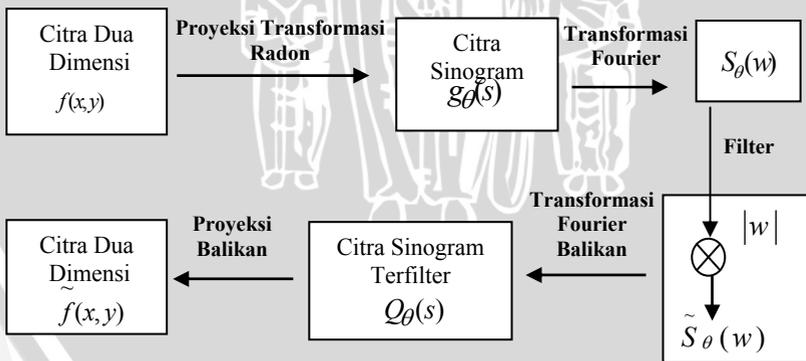
atau dapat dinyatakan

$$f(x, y) = \int_0^\pi Q(s, \theta) d\theta \quad (3.29)$$

dengan

$$Q(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} S(w, \theta) |w| e^{i2\pi w s} dw \text{ dan } s = x \cos \theta + y \sin \theta.$$

Pendekatan untuk mendapatkan kembali nilai $f(x, y)$ digunakan metode proyeksi balik dari $Q(s, \theta)$ dalam domain Radon. Fungsi $Q(s, \theta)$ merupakan hasil dari transformasi Fourier balikan setelah difilter dengan $|w|$, $|w|$ merupakan bentuk fungsi filter dimensi satu pada domain frekuensi. sehingga $Q(s, \theta)$ dinamakan dengan **proyeksi terfilterkan (filtered projection)**. Untuk lebih jelasnya proses metode proyeksi balik terfilter dapat dilihat pada Gambar 3.11.



Gambar 3.11 Diagram metode proyeksi balik terfilter

Algoritma metode proyeksi balikan terfilter

Input : citra, θ

Output : citra

Langkah-langkah

Langkah 1: hitung proyeksi citra dengan transformasi Radon

Langkah 2: hitung transformasi Fourier dari hasil proyeksi

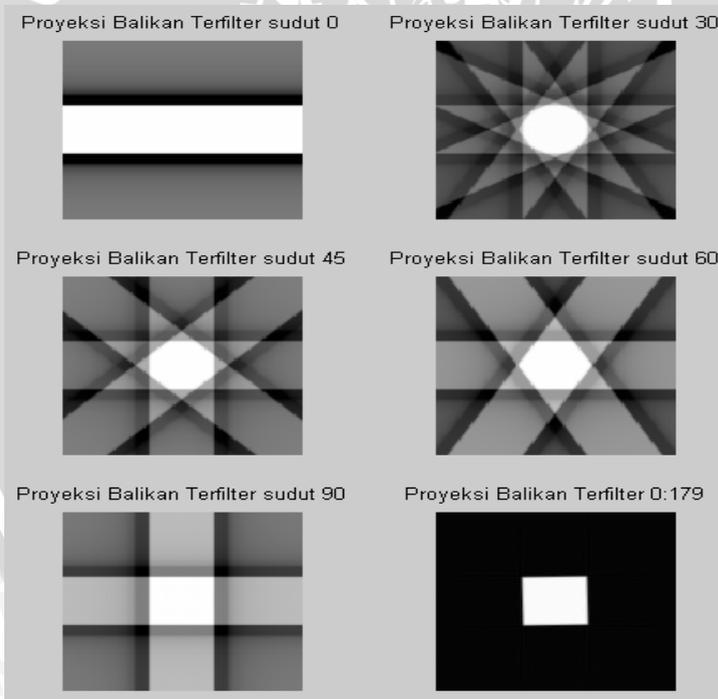
Langkah 3: tentukan ukuran filter $|w|$ dari citra *sinogram*

Langkah 4: hasil langkah 2 dikalikan dengan filter $|w|$

Langkah 5: hitung transformasi Fourier balikan setelah difilter

Langkah 6: gunakan metode proyeksi balikan untuk mendapatkan citra.

Gambar 3.12 menunjukkan hasil citra output dari bentuk citra bujursangkar dengan $\theta = 0^\circ$, $\theta = 30^\circ$, $\theta = 60^\circ$, $\theta = 90^\circ$ dan $\theta = 0:179^\circ$.

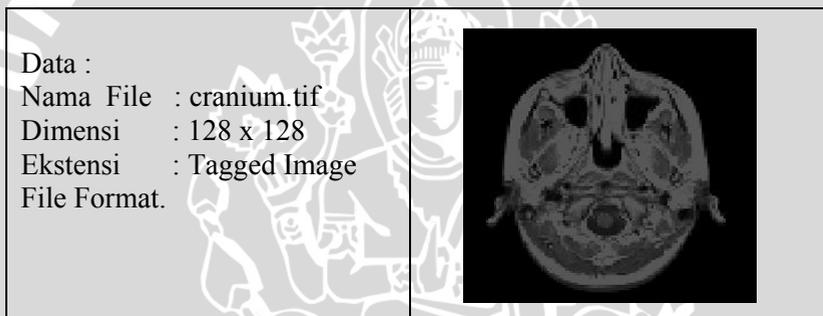


Gambar 3.12 Rekonstruksi citra bujursangkar dengan metode proyeksi balikan terfilter

Rekonstruksi citra biner berbentuk bujursangkar pada Gambar 3.12 merupakan proses rekonstruksi dengan menggunakan metode proyeksi balikan terfilter dan menggunakan filter fungsi Ram-Lak.

3.5. Aplikasi Rekonstruksi Pada Citra *Grayscale*

Metode proyeksi balikan terfilter bila digunakan dalam citra biner tidak ada kendala dalam merekonstruksi citra, dan hasilnya sangat baik. Namun, pada tugas akhir ini akan dibahas merekonstruksi citra dengan input citra *grayscale* (keabuan-abuan) dengan bentuk gambar tulang tengkorak (*cranium*). Citra tersebut diberikan pada Gambar 3.13 .



Gambar 3.13 Data dan bentuk citra *grayscale*

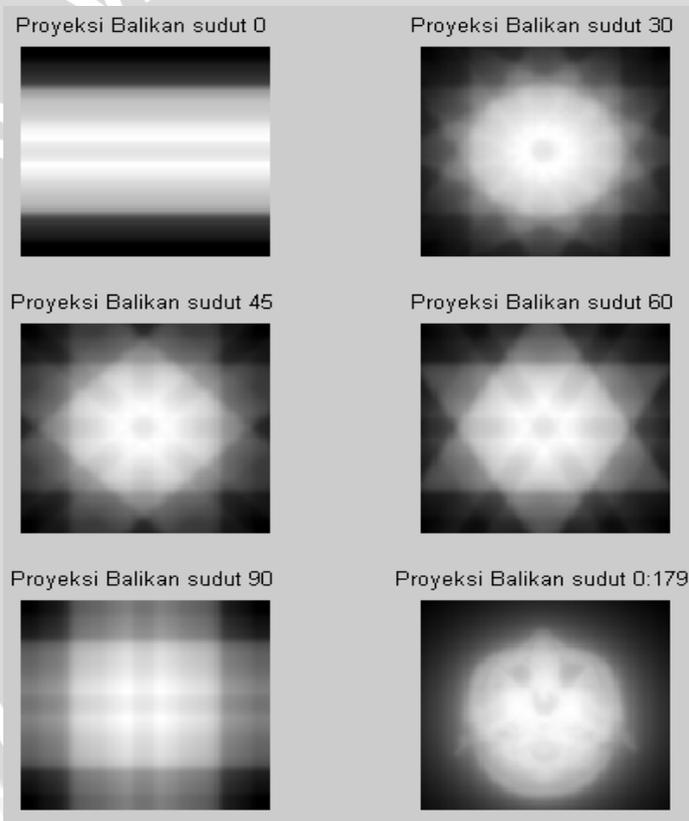
Untuk proyeksi citra pada transformasi Radon, akan diaplikasikan pada Gambar 3.13 dengan terlebih dahulu ditentukan nilai variabel sebagai berikut

$$R = 185, T = 180, \Delta s = 0.95, \Delta x = 1 \text{ dan } \theta = 0 : 179.$$

Hasil proyeksi citra dengan transformasi Radon ini dinamakan citra *sinogram*, lihat pada Gambar 3.14. Citra *sinogram* akan dilakukan proses rekonstruksi citra, baik dengan metode proyeksi balikan maupun metode proyeksi balikan terfilter. Pada metode proyeksi balikan terfilter yang menggunakan dua fungsi filter yaitu filter Ram-Lak dan filter Shepp-Logan.



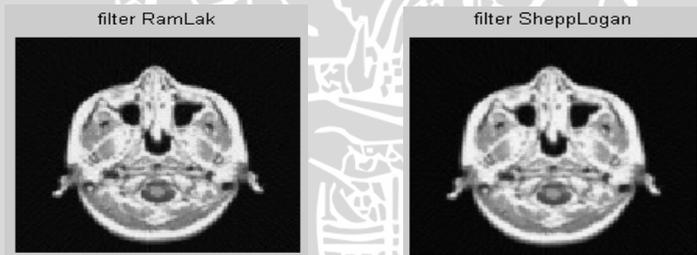
Gambar 3.14 Citra sinogram



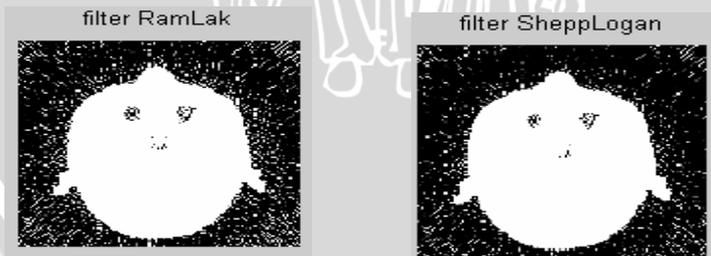
Gambar 3.15 Metode proyeksi balikan pada citra *grayscale*

Gambar 3.15 merupakan hasil dari rekonstruksi citra dengan metode proyeksi balikan, metode ini menghasilkan citra keluaran yang buruk karena terjadi pengaburan pada bagian citra, baik pada tepi maupun bagian dalam citra. Sehingga citra tersebut tidak dapat memberikan informasi yang layak, hal ini disebabkan oleh penjumlahan di setiap titik intensitas pada citra yang mengakibatkan nilai intensitas tinggi.

Metode proyeksi balikan terfilter merupakan metode yang digunakan untuk merekonstruksi citra dengan tujuan memperbaiki kualitas citra dengan cara memfilter pada setiap proyeksi dalam domain frekuensi. Didalam proses pemfilteran dipilih dua fungsi filter, yaitu fungsi Ram-Lak dan fungsi Shepp-Logan. Dan setiap filter mempunyai karakter dan sifat yang berbeda-beda terhadap citra yang dihasilkan. Tetapi, pada citra *grayscale*, citra yang dihasilkan mempunyai bentuk dan intensitas hampir sama yang diilustrasikan dalam Gambar 3.16. Untuk mengetahui pengaruh setiap filter pada citra yang dihasilkan adalah dengan cara mengubah citra *grayscale* menjadi citra biner. Untuk lebih jelasnya lihat gambar citra biner Gambar 3.17

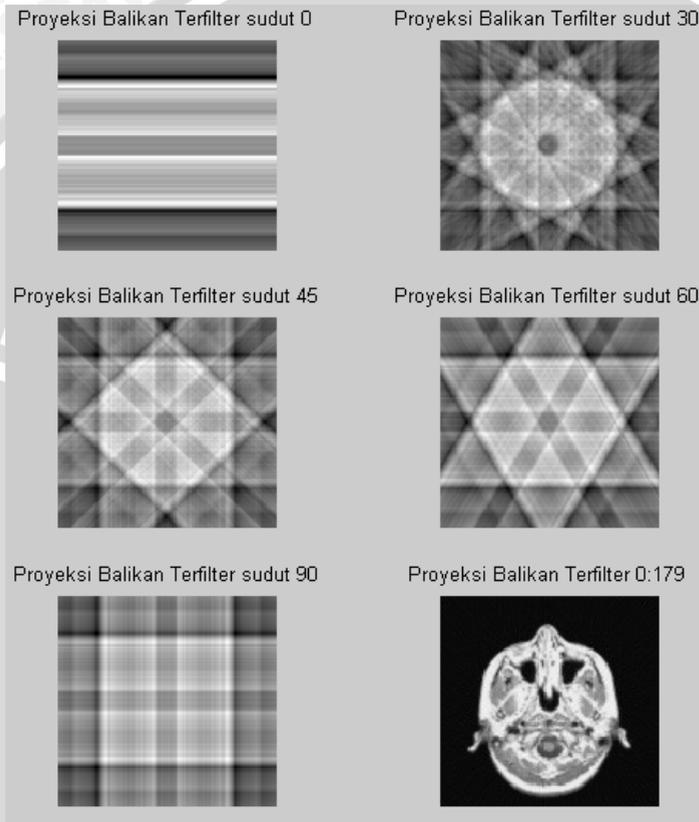


Gambar 3.16 Proyeksi balikan terfilter pada citra *grayscale*



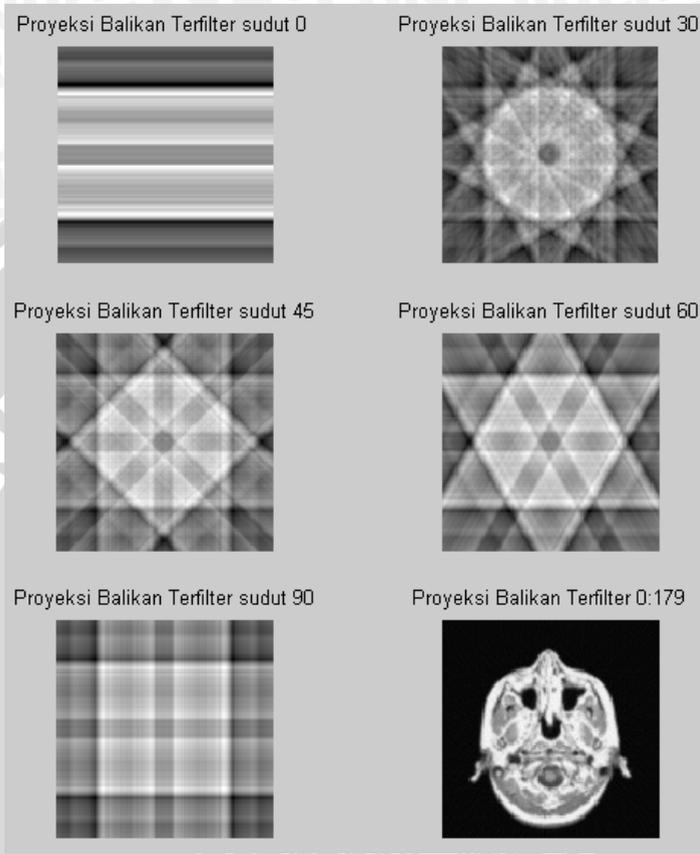
Gambar 3.17 Perbedaan filter pada citra biner

Proses gambar rekonstruksi citra menggunakan metode proyeksi balikan terfilter dengan filter Ram-Lak, dengan sudut-sudut yang telah ditentukan, diperlihatkan pada Gambar 3.18 sebagai berikut



Gambar 3.18 Proses rekonstruksi citra grayscale pada sudut $0^{\circ}, 30^{\circ}, 45^{\circ}, 60^{\circ}, 90^{\circ}$ dan $0:179^{\circ}$ dengan filter Ram-Lak

Sedangkan metode proyeksi balikan terfilter dengan filter Shepp-Logan pada Gambar 3.19 sebagai berikut



Gambar 3.19 Proses rekonstruksi citra grayscale pada sudut 0°,30°,45°,60°,90° dan 0:179° dengan filter Shepp-Logan

Hasil dari metode proyeksi balik terfilter dengan filter Ram-Lak dan filter Shepp-Logan, masing-masing diberikan pada Gambar 3.18 dan Gambar 3.19 yang menunjukkan tidak terjadi pengaburan seperti halnya pada metode proyeksi balik. Sedangkan pada metode proyeksi balik terfilter dengan filter Shepp-Logan kualitas citra lebih bagus dari pada menggunakan filter Ram-Lak, hal ini disebabkan karena fungsi filter Shepp-Logan merupakan modifikasi dari fungsi filter Ram-Lak dengan mengalikan fungsi tersebut dengan fungsi *sinc*.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa citra *sinogram* merupakan citra dimensi dua pada domain Radon dan dapat dibentuk dengan proyeksi transformasi Radon pada citra. Citra tersebut direkonstruksi dengan menggunakan metode proyeksi balikan.

Metode proyeksi balikan digunakan untuk mendapatkan kembali nilai suatu citra setelah diproyeksi dengan transformasi radon. Tetapi, hasil dari metode tersebut mengalami pengaburan di bagian citra. Hal ini disebabkan oleh penjumlahan tingkat perbedaan intensitas pada citra.

Untuk menghilangkan pengaburan pada metode proyeksi balikan dilakukan proses pemfilteran. Fungsi filter yang digunakan dalam domain frekuensi, sehingga citra *sinogram* harus terlebih dahulu ditransformasikan ke dalam domain frekuensi dengan menggunakan transformasi Fourier. Selanjutnya dilakukan proyeksi balikan untuk mendapatkan citra output. Metode tersebut dinamakan metode proyeksi balikan terfilter.

Rekonstruksi citra pada metode proyeksi balikan dan metode proyeksi balikan terfilter menghasilkan bentuk citra yang sama, tetapi hasil rekonstruksi citra metode proyeksi balikan terfilter mempunyai kualitas lebih baik dari pada metode proyeksi balikan, karena metode proyeksi balikan terfilter dilakukan proses pemfilteran yang berguna untuk menghilangkan terjadinya pengaburan pada citra.

4.2. Saran

Untuk penelitian selanjutnya, dapat digunakan untuk merekonstruksi citra dengan menggunakan transformasi radon dalam bentuk dimensi tiga untuk mendapatkan citra *sinogram*, sehingga nantinya filter yang digunakan adalah fungsi filter dalam domain frekuensi dengan dimensi dua.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR PUSTAKA

- Asano, A. 2005. *Session 13. (1) Radon Transformation and Projection Theorem*. Topic 5, Tomography – Image Reconstruction from Projection. Japan.
- Asano, A. 2005. *Session 14. (2) Image Reconstruction from Projections*. Topic 5, Computed Tomography – Image Reconstruction from Projection. Japan.
(<http://kuva.mis.hiroshima-u.ac.jp/~asano/Kougi/02a/PIP/>).
- Astuti, S.D, Siswanto, dan Rudyardjo, D.I. 2000. *Seismik Tomografi dengan Metode Invers ART untuk Merekonstruksi Struktur Lapisan Batuan Bumi*. Jurnal Peneliti Med. Eksakta, vol. 1 no.1 April 2000 : 20-25. Universitas Airlangga. Surabaya.
- Cho, H, Joiep, J. dan Manbirsingh. 1993. *Foundations of Medical Imaging*. John wiley & Sons, inc.
- Debnath, L., dan Bhatta, D. 2007. *Integral Transform and Their Applications*. Second Edition. Taylor & Francis Group. The United States of America.
- Hjouj, F. 2006. *The Mathematics of Medical X-Ray Imaging*. COMAP Module 794. Dept. of Mathematics East Carolina University Greenville.NC 27858.
- Kak, A. C., dan Slaney M . 1999 . *Principles of Computerized Tomographic Imaging*, IEEE Press 1988. Newyork
- Liang P.Z., Paul C., dan Lauterbur. 1961. *Principles of Magnetic Resonance Imaging* .IEEE press. United States of America.

Nugroho, B.S. 2004. *Inspeksi Pemalsuan Produk dengan Teropong Otak*. Fisika UGM. Yogyakarta. (<http://www.fisika.net>).

Philipsen, P.A. 1998. *Reconstruction and Restoration of PET Images*. Technical University of Denmark. Denmark.

Suksmono, A.B. 2007. *Diktat Pencitraan Digital*. Institut Teknologi Bandung. Bandung.

Suksmono, A.B. 2007. *Diktat Rekonstruksi Tomografi*. Institut Teknologi Bandung. Bandung.

Stephenson, G. 1990. *Mathematical Methods for Science Students, Second Edition*. Longman Scientific & Technical. Singapore.

Toft, P. 1996. *The Radon Transform Theory and Implementation*. Department of Mathematical Modeling Section for Digital Signal Processing Technical University of Denmark. Denmark