LEMBAR PENGESAHAN TUGAS AKHIR

IDEAL FUZZY QUASI-ASSOSIATIF
PADA BCI-ALJABAR

Oleh:
TSANIA ELIYATI
0310940056-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 24 September 2007
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang matematika

Pembimbing I	Pembimbing II
Dra. Ari Andari, MS	**Drs. M. Muslikh, MSi**
NIP. 131 652 679	**NIP. 131 871 740**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Agus Suryanto, MSc
NIP. 132 126 049

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Tsania Eliyati
NIM : 0310940056
Jurusan : Matematika
Penulis skripsi berjudul : Ideal Fuzzy Quasi-Assosiatif Pada BCI-Aljabar
Dengan ini menyatakan bahwa :

1. **Isi dari skripsi yang saya buat adalah benar - benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama – nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam skripsi ini.**
2. **Apabila dikemudian hari ternyata skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya akan bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 24 September 2007
Yang menyatakan,

(Tsania Eliyati)
NIM. 0310940056

IDEAL FUZZY QUASI-ASSOSIATIF PADA BCI-ALJABAR

ABSTRAK

Pada skripsi ini akan dibuktikan beberapa teorema yang berhubungan dengan ideal fuzzy quasi-assosiatif pada BCI-aljabar. Suatu himpunan bagian fuzzy A dari BCI-aljabar X dengan fungsi keanggotaan $\mu_A : X \to [0,1]$ disebut ideal fuzzy dari X jika untuk setiap $x, y \in X$:

(i) $\mu_A(0) \geq \mu_A(x)$.

(ii) $\mu_A(x) \geq \min\{\mu_A(x * y), \mu_A(y)\}$.

Ideal fuzzy quasi-assosiatif pada BCI-aljabar X adalah suatu himpunan bagian fuzzy A yang memenuhi $\mu_A((x*y)*z) \geq \mu_A(x*(y*z))$, untuk setiap $x, y, z \in X$. Ideal fuzzy quasi-assosiatif ini merupakan subkelas sejati dari ideal fuzzy tertutup, yaitu ideal fuzzy quasi-assosiatif pasti ideal fuzzy tertutup tetapi belum tentu sebaliknya.

Kata kunci: ideal fuzzy, ideal fuzzy quasi assosiatif, ideal fuzzy tertutup.

QUASI-ASSOCIATIVE FUZZY IDEALS IN BCI-ALGEBRAS

ABSTRACT

This study will discuss about the proof of several theorems associated with quasi-associative fuzzy ideal in BCI-Algebra. A fuzzy subset A of X with membership function $\mu_A : X \to [0,1]$ is called fuzzy ideal of X if it satisfies the following conditions:

(i). $\mu_A(0) \geq \mu_A(x)$.

(ii). $\mu_A(x) \geq \min\{\mu_A(x * y), \mu_A(y)\}$, for all $x, y \in X$.

Quasi-associative fuzzy ideal in BCI-Algebra X is a fuzzy subset A which satisfies $\mu_A((x * y) * z) \geq \mu_A(x * (y * z))$, for all $x, y, z \in X$. This quasi-associative fuzzy ideal is a proper subclass of closed ideal fuzzy which means that the quasi-associative fuzzy ideal is always closed fuzzy ideal but not otherwise.

Keywords: fuzzy ideal, quasi-associative fuzzy ideal, closed fuzzy ideal.

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat, taufik dan hidayah-Nya sehingga Skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik. Shalawat dan salam semoga tetap tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam penyusunan skripsi dengan judul “Ideal Fuzzy Quasi-Assosiatif Pada BCI-Aljabar” banyak pihak yang telah membantu, oleh karena itu penulis mengucapkan rasa terima kasih kepada :

1. Dra. Ari Andari, MS selaku Dosen Pembimbing I atas dorongan, semangat, dan bimbingan, serta waktu yang telah diberikan selama penyusunan Skripsi ini.
2. Drs. M. Muslikh, MSi selaku Dosen Pembimbing II atas dorongan, semangat, dan bimbingan, serta waktu yang telah diberikan selama penyusunan Skripsi ini.
3. Dr. Agus Suryanto, MSc selaku Ketua Jurusan Matematika dan Penasehat Akademik.
4. Bapak, Ibu, dan kakak atas kasih sayang, doa, dan dukungannya.
5. Seluruh dosen matematika yang telah memberikan bekal pengetahuan serta staf Tata Usaha Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
6. Semua teman – teman matematika angkatan 2003 atas dukungan dan semangatnya.
7. Semua teman-teman Kertas 118, terutama mbak Deni, Alis, Fero dan Peni atas segala nasehat dan semangat yang telah diberikan.
8. Semua pihak yang telah membantu proses penulisan skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, oleh karena itu segala kritik dan saran yang bersifat membangun dari pembaca sangat penulis harapkan demi perbaikan selanjutnya. Semoga tulisan ini berguna bagi penulis pada khususnya dan semua pihak pada umumnya.

Malang, 24 September 2007

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

HALAMAN JUDUL i
HALAMAN PENGESAHAN ii
HALAMAN PERNYATAAN iv
ABSTRAK vi
ABSTRACT viii
KATA PENGANTAR x
DAFTAR ISI xii
DAFTAR SIMBOL xiv

BAB I PENDAHULUAN 1
1.1. Latar Belakang 1
1.2. Rumusan Masalah 1
1.3. Batasan Masalah 2
1.3. Tujuan 2

BAB II TINJAUAN PUSTAKA 3
2.1. Grup 3
2.2. Ring dan Ideal 4
2.3. BCI-Aljabar 6
2.4. Subaljabar dan Ideal pada BCI-Aljabar 16
2.5. Himpunan Fuzzy 17
2.6. Subaljabar Fuzzy dan Ideal Fuzzy pada BCI-Aljabar 18
2.7. Hubungan Antara Ring dengan BCI-Aljabar 19

BAB III PEMBAHASAN 23
3.1. Ideal Quasi-Assosiatif pada BCI-Aljabar 23
3.2. Ideal Fuzzy Quasi-Asssosiatif pada BCI-Aljabar 32

BAB IV KESIMPULAN 47
4.1. Kesimpulan 47

BAB V DAFTAR PUSTAKA 49

DAFTAR SIMBOL

Simbol	Keterangan
$\in$	elemen
$\forall$	untuk semua/setiap
$\varnothing$	himpunan kosong
$\Rightarrow$	mengakibatkan (maka)
$\Leftrightarrow$	jika hanya jika
$\subseteq$	himpunan bagian/sub himpunan
$\subset$	himpunan bagian sejati
$\ni$	sedemikian sehingga
X	BCI-aljabar
μ_A	fungsi keanggotaan dari ideal fuzzy A
$\vee$	disjungsi
$\wedge$	konjungsi
$f : X \rightarrow Y$	pemetaan dari X ke Y

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Menurut Wahyudin (1989), aljabar dapat didefinisikan sebagai manipulasi dari simbol-simbol. Secara teoritis aljabar dibagi menjadi dua periode waktu, dengan batas waktu sekitar tahun 1800. Aljabar yang dibicarakan sebelum abad ke-19 disebut Aljabar Klasikal, sedangkan sesudah abad ke-19 (hingga sekarang) disebut Aljabar Modern atau Aljabar Abstrak.

Aljabar khususnya Aljabar Abstrak dalam perkembangannya memiliki kelas-kelas tersendiri. Pada tahun 1966, Imai dan Iseki memperkenalkan dua kelas dari Aljabar Abstrak, yaitu BCK-Aljabar dan BCI-Aljabar. BCI-Aljabar merupakan perluasan dari BCK-Aljabar. Kemudian pada tahun 1983, Hu dan Li memperkenalkan kelas yang lebih luas dari Aljabar Abstrak, yaitu BCH-Aljabar yang merupakan perluasan dari BCI-Aljabar.

Konsep himpunan bagian fuzzy diperkenalkan oleh Profesor Zadeh pada tahun 1965. Menurut Zadeh pada logika klasik tidak mempertimbangkan berbagai kondisi dalam dunia nyata. Nilai keanggotaan logika klasik hanya terbatas pada 0 atau 1, berbeda dengan nilai keanggotaan logika fuzzy yang terdiri dari bilangan riil yang terletak pada interval tertutup dari 0 sampai 1.

Ideal quasi-assosiatif pada BCI-aljabar merupakan ideal tertutup (*closed ideal*) pada BCI-aljabar. Ideal fuzzy quasi-assosiatif pada BCI-aljabar juga merupakan ideal fuzzy tertutup (*closed fuzzy ideal*). Oleh karena itu pada tugas akhir ini penulis tertarik menulis tentang konsep dari ideal fuzzy quasi-assosiatif pada BCI-aljabar.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana definisi dan teorema-teorema yang berhubungan dengan BCI-aljabar?
2. Bagaimana definisi dan teorema-teorema yang berhubungan dengan ideal fuzzy quasi-assosiatif pada BCI-Aljabar?

1.3 Tujuan

Dengan melihat rumusan masalah di atas maka tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Membuktikan teorema-teorema yang berhubungan dengan BCI-aljabar.
2. Membuktikan teorema-teorema yang berhubungan dengan ideal fuzzy quasi-assosiatif pada BCI-Aljabar.

1.4 Batasan Masalah

Pada tugas akhir ini akan dianalisa definisi dan teorema-teorema tentang ideal fuzzy quasi-assosiatif hanya pada BCI-Aljabar.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada Bab ini akan diberikan definisi-definisi dan teorema-teorema yang mendukung dalam pembahasan.

2.1 Grup

Grup merupakan salah satu struktur aljabar yang paling sederhana. Grup didefinisikan sebagai himpunan tidak kosong dengan satu buah operasi biner yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Berikut ini akan diberikan definisi-definisi yang berkaitan dengan grup.

Definisi 2.1.1 Grup (Fraleigh, 1994)

Himpunan tidak kosong G dengan operasi biner $*$ yang didefinisikan pada G disebut grup jika memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut:

1. tertutup, yaitu
$$(\forall a,b \in G).\ a*b \in G,$$
2. assosiatif, yaitu
$$(\forall a,b,c \in G).\ (a*b)*c = a*(b*c),$$
3. terdapat elemen identitas, yaitu
$$(\forall a \in G),\ (\exists e \in G).\ e*a = a*e = a,$$
4. terdapat elemen invers, yaitu
$$(\forall a \in G),\ (\exists a^{-1} \in G).\ a^{-1}*a = a*a^{-1}.$$

Grup G atas operasi biner $*$ dinotasikan dengan $(G,*)$.

Definisi 2.1.2 (Bhattacharya, 1994)

Suatu grup $(G,*)$ dengan operasi biner $*$ pada G disebut grup komutatif (abelian) jika $a*b = b*a,\ (\forall a,b \in G)$.

Definisi 2.1.2 (Bhattacharya, 1994)

Diberikan suatu grup $(G,*)$, dan himpunan bagian H dari G. H disebut subgrup dari G, ditulis $H < G$, jika H merupakan grup terhadap operasi biner pada G.

Teorema 2.1.1 Subgrup (Wahyudin, 1989)

Diberikan suatu grup $(G,*)$ dan himpunan bagian tak kosong H dari G. Jika

i. $a*b \in H, \forall a,b \in H$ (Tertutup)

ii. $a^{-1} \in H, \forall a \in H$ (Keberadaan invers)

maka $(H,*)$ adalah subgrup dari $(G,*)$.

Bukti:

Akan dibuktikan $(H,*)$ adalah subgrup dari $(G,*)$.

1. Dari (i) jelas H tertutup.
2. Karena G grup maka assosiatif berlaku. $H \subseteq G$ maka H juga bersifat assosiatif.
3. Terdapat elemen identitas, karena
$$a, a^{-1} \in H \Rightarrow a * a^{-1} = e \in H .$$
4. Dari (ii) jelas terdapat elemen invers.

Dari 1, 2, 3, 4 terbukti $(H,*)$ disebut subgrup dari $(G,*)$.

2.2. Ring dan Ideal

Ring merupakan salah satu stuktur aljabar yang didefinisikan sebagai himpunan tidak kosong dengan dua operasi biner (penjumlahan dan pergandaan) yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Berikut ini akan diberikan definisi-definisi dan teorema yang berkaitan dengan ring.

Definisi 2.2.1 Ring (Wahyudin, 1989)

Diberikan himpunan tidak kosong R, $(R,+,\bullet)$ dengan $+$ dan $\bullet$ operasi-operasi biner pada R disebut ring jika memenuhi:

1. Terhadap operasi $+$

i). $(\forall a,b \in R).\ a+b \in R,$

ii). $(\forall a,b,c \in R).\ (a+b)+c = a+(b+c),$

iii). $(\forall a \in R),\ (\exists e \in R).\ e+a = a+e,$

iv). $(\forall a \in R),\ (\exists (-a) \in G).\ a+(-a) = (-a)+a = e,$

v). $(\forall a,b \in G).\ a+b = b+a,$

2. Terhadap operasi $\bullet$

iii) $(\forall a,b \in R).\ a \bullet b \in R,$

iv) $(\forall a,b,c \in R).\ (a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c),$

3. Memenuhi hukum distributif , yaitu:

iii) $(\forall a,b,c \in R).\ a \bullet (b+c) = a \bullet b + a \bullet c,$

iv) $(\forall a,b,c \in R).\ (b+c) \bullet a = b \bullet a + c \bullet a.$

Definisi 2.2.2 Subring (Bhattacharya, 1994)

Diberikan suatu ring *R* dan himpunan bagian tidak kosong *S* dari *R*. *S* disebut subring dari *R* jika *S* adalah ring terhadap operasi yang sama dengan *R*.

Teorema 2.2.1 Subring (Bhattacharya, 1994)

Diberikan suatu ring $(R,+,\bullet)$. Suatu himpunan bagian tidak kosong *S* dari *R* disebut subring dari *R* jika hanya jika $\forall a,b \in S$ berlaku:

i) $a-b \in S$

ii) $a \bullet b \in S$

Bukti:

$(\Rightarrow)$ Jika S subring dari R maka menurut Definisi 2.2.2 jelas $\forall a,b \in S$ memenuhi $a-b \in S$ dan $a \bullet b \in S$.

$(\Leftarrow)$ Kondisi $a-b \in S$ $\forall a,b \in S$ menunjukkan $(S,+)$ adalah subgrup dari grup komutatif $(R,+)$. Kondisi $a \bullet b \in S$ $\forall a,b \in S$ menunjukkan $(S,\bullet)$ tertutup dan assosiatif. Karena *R* memenuhi dua hukum distributif dan $S \subseteq R$ maka S juga memenuhi dua hukum distributif. Jadi, terbukti $(S,+,\bullet)$ subring dari $(R,+,\bullet)$.

Definisi 2.2.3 Ideal Kanan (Bhattacharya, 1994)

Suatu himpunan bagian tidak kosong I dari ring komutatif $(R,+,\bullet)$ disebut ideal kanan pada R jika:

i). $a,b \in I \Rightarrow a-b \in I$.

ii). $a \bullet r \in I$, $\forall a \in I$ dan $r \in R$.

Definisi 2.2.4 Ideal Kiri (Bhattacharya, 1994)

Suatu himpunan bagian tidak kosong I dari ring komutatif $(R,+,\bullet)$ disebut ideal kiri pada R jika:

i). $a,b \in I \Rightarrow a-b \in I$.

ii). $r \bullet a \in I$, $\forall a \in I$ dan $r \in R$.

Jika setiap ideal pada R adalah ideal kanan dan ideal kiri, maka ideal tersebut disebut sebagai ideal dua sisi (*two-sided ideal*).

2.3. BCI-Aljabar

Definisi 2.3.1 (Liu, dkk., 2000)

Diberikan suatu BCI-aljabar *X*. Didefinisikan sebuah relasi biner $\prec$ pada X sebagai berikut $x \prec y \Leftrightarrow x * y = 0$.

Definisi 2.3.2 BCI-aljabar (Ahmad dan Khalid, 1996)

Diberikan suatu himpunan tidak kosong X dengan operasi biner $*$ dan konstanta 0, maka $(X;*,0)$ disebut BCI-aljabar jika $\forall x,y,z \in X$ memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut:

(i) $((x*y)*(x*z)) \prec (z*y)$.

(ii) $(x*(x*y)) \prec y$.

(iii) $x \prec x$.

(iv) $x \prec y$ dan $y \prec x \Rightarrow x = y$.

(v) $x \prec 0 \Rightarrow x = 0$.

Contoh 2.1:

Diberikan $X = \{0,\mathrm{a},\mathrm{b}\}$ dengan operasi biner $*$ yang didefinisikan oleh tabel Cayley berikut:

Tabel 2.1. BCI-Aljabar

*	0	a	b
0	0	0	b
a	a	0	b
b	b	b	0

Akan dibuktikan $(X;*,0)$ merupakan suatu BCI-aljabar.

(i). Akan ditunjukkan $\forall x,y,z \in X$ memenuhi

$$((x*y)*(x*z))*((z*y))=0.$$

a). Untuk $x=0,\ y=a,$ dan $z=b$, maka:

$$\begin{aligned}((0*a)*(0*b))*(b*a)&=(0*b)*b\\&=b*b\\&=0;\end{aligned}$$

b). Untuk $x=0, y=b$ dan $z=a$, maka:

$$\begin{aligned}((0*b)*(0*a))*(a*b)&=(b*0)*b\\&=b*b\\&=0;\end{aligned}$$

c). Untuk $x=a, y=0$ dan $z=b$, maka:

$$\begin{aligned}((a*0)*(a*b))*(b*0)&=(0*b)*b\\&=b*b\\&=0;\end{aligned}$$

d). Untuk $x=a, y=b$ dan $z=0$, maka:

$$\begin{aligned}((a*b)*(a*0))*(0*b)&=(b*0)*b\\&=b*b\\&=0;\end{aligned}$$

e). Untuk $x=b, y=0$ dan $z=a$, maka:

$$\begin{aligned}((b*0)*(b*a))*(a*0)&=(b*b)*0\\&=0*0\\&=0;\end{aligned}$$

f). Untuk $x=b, y=a$ dan $z=0$, maka:

$$((b*a)*(b*0))*(0*a)=(b*b)*0$$

$$= 0 * 0$$
$$= 0.$$

Jadi, aksioma (i) terpenuhi $\forall x, y, z \in X$.

(ii). Akan ditunjukkan $\forall x, y \in X$ memenuhi

$$(x * (x * y)) * y = 0.$$

a). Untuk $x = 0$ dan $y = a$, maka:

$$\begin{aligned}(0 * (0 * a)) * a &= (0 * 0) * a \\ &= 0 * a \\ &= 0;\end{aligned}$$

b). Untuk $x = 0$ dan $y = b$, maka:

$$\begin{aligned}(0 * (0 * b)) * b &= (0 * b) * b \\ &= b * b \\ &= 0;\end{aligned}$$

c). Untuk $x = a$ dan $y = 0$, maka:

$$\begin{aligned}(a * (a * 0)) * 0 &= (a * 0) * 0 \\ &= 0 * 0 \\ &= 0;\end{aligned}$$

d). Untuk $x = a$ dan $y = b$, maka:

$$\begin{aligned}(a * (a * b)) * b &= (a * b) * b \\ &= b * b \\ &= 0;\end{aligned}$$

e). Untuk $x = b$ dan $y = 0$, maka:

$$\begin{aligned}(b * (b * 0)) * 0 &= (b * b) * 0 \\ &= 0 * 0 \\ &= 0;\end{aligned}$$

f). Untuk $x = b$ dan $y = a$, maka:

$$\begin{aligned}(b * (b * a)) * a &= (b * b) * a \\ &= 0 * a \\ &= 0.\end{aligned}$$

Jadi, aksioma (ii) terpenuhi $\forall x, y \in X$.

(iii). Akan ditunjukkan $\forall x \in X$ memenuhi $x * x = 0$.
Perhatikan tabel cayley di atas, ambil $x = 0$, jelas memenuhi $x * x = 0$. Hal ini berlaku juga untuk $x = a$ dan $x = b$. Jadi, aksioma (iii) terpenuhi $\forall x \in X$.

(iv). Akan ditunjukkan $\forall x, y \in X$ memenuhi

$$x * y = 0 \text{ dan } y * x = 0 \Rightarrow x = y.$$

Pembuktian akan dilakukan dengan kontraposisi.

a). Ambil $x = 0$ dan $y = a$ jelas $x \neq y$, sehingga dari tabel cayley di atas diperoleh $x * y = 0 * a = 0$ tetapi $y * x = a * 0 = a \neq 0$.

b). Ambil $x = 0$ dan $y = b$ jelas $x \neq y$, sehingga dari tabel cayley di atas diperoleh $x * y = 0 * b = b \neq 0$ atau $y * x = b * 0 = b \neq 0$.

c). Ambil $x = a$ dan $y = b$ jelas $x \neq y$, sehingga dari tabel cayley di atas diperoleh $x * y = a * b = b \neq 0$ atau $y * x = b * a = b \neq 0$.

Jadi, aksioma (iv) terpenuhi $\forall x, y \in X$.

(v). Akan ditunjukkan $\forall x \in X$ memenuhi $x * 0 = 0 \Rightarrow x = 0$.
Dari tabel cayley di atas bisa dilihat bahwa yang memenuhi $x * 0 = 0 \Rightarrow x = 0$ adalah $x = 0$. Jadi, aksioma (v) terpenuhi $\forall x \in X$.

Jadi dari (i), (ii), (iii), (iv) dan (v) terbukti $(X;*,0)$ adalah suatu BCI-aljabar.

Contoh 2.2:
Diberikan $X = \{0,1,2\}$ dengan operasi biner $*$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$x * y = \begin{cases} 0 & \text{jika } x \leq y \\ x - y & \text{jika } y < x \end{cases}$$

Akan dibuktikan $(X;*,0)$ merupakan suatu BCI-aljabar.

(i). Akan ditunjukkan $\forall x, y, z \in X$ memenuhi

$$((x*y)*(x*z))*((z*y))=0.$$

a). Untuk $x=0,\ y=1,$ dan $z=2$, maka:

$$\begin{aligned}((0*1)*(0*2))*(2*1)&=(0*0)*1\\&=0*1\\&=0;\end{aligned}$$

b). Untuk $x=0, y=2$ dan $z=1$, maka:

$$\begin{aligned}((0*2)*(0*1))*(1*2)&=(0*0)*0\\&=0*0\\&=0;\end{aligned}$$

c). Untuk $x=1, y=0$ dan $z=2$, maka:

$$\begin{aligned}((1*0)*(1*2))*(2*0)&=(1*0)*2\\&=1*2\\&=0;\end{aligned}$$

d). Untuk $x=1, y=2$ dan $z=0$, maka:

$$\begin{aligned}((1*2)*(1*0))*(0*2)&=(0*1)*2\\&=0*2\\&=0;\end{aligned}$$

e). Untuk $x=2, y=0$ dan $z=1$, maka:

$$\begin{aligned}((2*0)*(2*1))*(1*0)&=(2*1)*1\\&=1*1\\&=0;\end{aligned}$$

f). Untuk $x=2, y=1$ dan $z=0$, maka:

$$\begin{aligned}((2*1)*(2*0))*(0*1)&=(1*2)*0\\&=0*0\\&=0.\end{aligned}$$

Jadi, aksioma (i) terpenuhi $\forall x, y, z \in X$.

(ii). Akan ditunjukkan $\forall x, y \in X$ memenuhi

$$(x*(x*y))*y=0.$$

a). Untuk $x=0$ dan $y=1$, maka:

$$\begin{aligned}(0*(0*1))*1 &= (0*0)*1 \\ &= 0*1 \\ &= 0;\end{aligned}$$

b). Untuk $x=0$ dan $y=2$, maka:

$$\begin{aligned}(0*(0*2))*2 &= (0*0)*2 \\ &= 0*2 \\ &= 0;\end{aligned}$$

c). Untuk $x=1$ dan $y=0$, maka:

$$\begin{aligned}(1*(1*0))*0 &= (1*1)*0 \\ &= 0*0 \\ &= 0;\end{aligned}$$

d). Untuk $x=1$ dan $y=2$, maka:

$$\begin{aligned}(1*(1*2))*2 &= (1*0)*2 \\ &= 1*2 \\ &= 0;\end{aligned}$$

e). Untuk $x=2$ dan $y=0$, maka:

$$\begin{aligned}(2*(2*0))*0 &= (2*2)*0 \\ &= 0*0 \\ &= 0;\end{aligned}$$

f). Untuk $x=2$ dan $y=1$, maka:

$$\begin{aligned}(2*(2*1))*1 &= (2*1)*1 \\ &= 1*1 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Jadi, aksioma (ii) terpenuhi $\forall x, y \in X$.

(iii). Akan ditunjukkan $\forall x \in X$ memenuhi $x*x=0$.
Perhatikan definisi operasi biner $*$ pada X di atas. Ambil $x=0$, jelas memenuhi $x*x=0$. Hal ini berlaku juga untuk $x=1$ dan $x=2$. Jadi, aksioma (iii) terpenuhi $\forall x \in X$.

(iv). Akan ditunjukkan $\forall x, y \in X$ memenuhi

$$x * y = 0 \text{ dan } y * x = 0 \Rightarrow x = y .$$

Pembuktian akan dilakukan dengan kontraposisi.

d). Ambil $x = 0$ dan $y = 1$ jelas $x \neq y$, sehingga dari definisi operasi biner $*$ di atas diperoleh $x * y = 0 * 1 = 0$ tetapi $y * x = 1 * 0 = 1 - 0 = 1 \neq 0$.

e). Ambil $x = 0$ dan $y = 2$ jelas $x \neq y$, sehingga dari definisi operasi biner $*$ di atas diperoleh $x * y = 0 * 2 = 0$ tetapi $y * x = 2 * 0 = 2 - 0 = 2 \neq 0$.

f). Ambil $x = 1$ dan $y = 2$ jelas $x \neq y$, sehingga dari definisi operasi biner $*$ di atas diperoleh $x * y = 1 * 2 = 0$ tetapi $y * x = 2 * 1 = 2 - 1 = 1 \neq 0$.

Jadi, aksioma (iv) terpenuhi $\forall x, y \in X$.

(v). Akan ditunjukkan $\forall x \in X$ memenuhi $x * 0 = 0 \Rightarrow x = 0$.
Dari definisi operasi biner $*$ pada X di atas bisa dilihat bahwa yang memenuhi $x * 0 = 0 \Rightarrow x = 0$ adalah $x = 0$. Jadi, aksioma (v) terpenuhi $\forall x \in X$.

Jadi dari (i), (ii), (iii), (iv) dan (v) terbukti $(X;*,0)$ adalah suatu BCI-aljabar.

Teorema 2.3.1 BCI-aljabar (Ahmad dan Khalid, 1996)

Pada BCI-aljabar X dipenuhi:

i. $x * 0 = x$.

ii. $x \prec y \Rightarrow (x * z) \prec (y * z)$ dan $(z * y) \prec (z * x)$.

iii. $(x * y) * z = (x * z) * y$.

iv. $0 * (0 * (x * y)) = (0 * y) * (0 * x)$.

v. $(0 * y) * (0 * x) = 0 * (y * x)$.

Bukti:

i. Ambil sebarang $x, y \in X$. Akan dibuktikan $x * 0 = x$. Menurut Definisi 2.3.2 (iv) maka harus ditunjukkan

$$\left(x*0\right)\prec x \text{ dan } x\prec\left(x*0\right).$$

(a) Perhatikan bahwa

$\left(x*0\right)*x=\left(x*\left(x*x\right)\right)*x$ (Definisi 2.3.1 dan 2.3.2 (iii))

$=0$ (Definisi 2.3.1 dan 2.3.2 (ii))

Maka menurut Definisi 2.3.1 berlaku

$$\left(x*0\right)\prec x \tag{2.1}$$

(b) Menurut Definisi 2.3.2 (ii), $\left(x*\left(x*y\right)\right)\prec y$.

Ambil $y=0\Rightarrow\left(x*\left(x*0\right)\right)\prec 0$.

Sehingga menurut Definisi 2.3.2 (v) belaku $x*\left(x*0\right)=0$.

Maka menurut Definisi 2.3.1 berlaku

$$x\prec\left(x*0\right) \tag{2.2}$$

Dari (2.1) dan (2.2) maka terbukti $x*0=x$.

ii. Ambil sebarang $x,y,z\in X$. Akan dibuktikan

$$x\prec y\Rightarrow\left(x*z\right)\prec\left(y*z\right) \text{ dan } \left(z*y\right)\prec\left(z*x\right).$$

(a) $x*z=\left(x*z\right)*0$ (Teorema 2.3.2 (i))

$=\left(x*z\right)*\left(x*y\right)$ (Definisi 2.3.1)

$\prec\left(y*z\right)$ (Definisi 2.3.2 (i))

Maka diperoleh

$$\left(x*z\right)\prec\left(y*z\right) \tag{2.3}$$

(b) Menurut Definisi 2.3.1, diperoleh

$$\left(z*y\right)\prec\left(z*x\right)\Leftrightarrow\left(z*y\right)*\left(z*x\right)=0.$$

Akan ditunjukkan $\left(z*y\right)*\left(z*x\right)=0$.

Perhatikan bahwa

$\left(\left(z*y\right)*\left(z*x\right)\right)\prec\left(x*y\right)$ (Definisi 2.3.2 (i))

$=0$

Maka menurut Definisi 2.3.1 berlaku

$$\left(z*y\right)\prec\left(z*x\right) \tag{2.4}$$

Dari (2.3) dan (2.4) maka terbukti

$$x\prec y\Rightarrow\left(x*z\right)\prec\left(y*z\right) \text{ dan } \left(z*y\right)\prec\left(z*x\right).$$

iii. Ambil sebarang $x, y, z \in X$. Akan dibuktikan

$$(x * y) * z = (x * z) * y.$$

Menurut Definisi 2.3.2(ii) berlaku $(x * (x * y)) \prec y$. Dari Definisi 2.3.1 maka berlaku

$$(x * (x * y)) * y = 0. \tag{2.5}$$

Andaikan $(x * y) * z \neq (x * z) * y$, maka $\exists a, b, c \in X$ sedemikian sehingga $(a * b) * c \neq (a * c) * b$. Dengan mensubstitusikan $a = x,\ b = x * y,\ c = y$ pada (2.5) maka diperoleh

$$(x * (x * y)) * y \neq (x * y) * (x * y)$$
$$= 0 \qquad \text{(Definisi 2.3.1 dan 2.3.2(iii))}$$

Kontradiksi dengan (2.5). Maka pengandaian harus diingkar, yaitu $(x * y) * z = (x * z) * y$.

Jadi terbukti $(x * y) * z = (x * z) * y$.

iv. Ambil sebarang $x, y, z \in X$.

Akan dibuktikan $0 * (0 * (x * y)) = (0 * y) * (0 * x)$.

Menurut Definisi 2.3.2 (iv) maka harus ditunjukkan

$$(0 * (0 * (x * y))) \prec ((0 * y) * (0 * x)) \text{ dan}$$
$$((0 * y) * (0 * x)) \prec (0 * (0 * (x * y))).$$

(a) Perhatikan bahwa

$$\left[(0 * (0 * (x * y))) * ((0 * y) * (0 * x))\right]$$
$$\prec \left[(x * y) * ((0 * y) * (0 * x))\right] \qquad \text{(Definisi 2.3.2 (ii) dan Teorema 2.3.2 (ii))}$$
$$\prec \left[(x * y) * (x * y)\right] \qquad \text{(Definisi 2.3.2 (i) dan Teorema 2.3.2 (ii))}$$
$$= 0 \qquad \text{(Definisi 2.3.1 dan 2.3.2 (iii))}$$

Sehingga menurut Definisi 2.3.2 (v) belaku

$$(0 * (0 * (x * y))) * ((0 * y) * (0 * x)) = 0.$$

Maka menurut Definisi 2.3.1 berlaku

$$\left(0*\left(0*(x*y)\right)\right)\prec\left((0*y)*(0*x)\right) \tag{2.6}$$

(b) Perhatikan bahwa

$$\left[\left((0*y)*(0*x)\right)*\left(0*\left(0*(x*y)\right)\right)\right]$$

$$\prec\left[(x*y)*\left(0*\left(0*(x*y)\right)\right)\right]$$ (Definisi 2.3.2 (i) dan Teorema 2.3.2 (ii))

$$\prec\left[(x*y)*(x*y)\right]$$ (Definisi 2.3.2 (ii) dan Teorema 2.3.2 (ii))

$$=0$$ (Definisi 2.3.1 dan 2.3.2 (iii))

Sehingga menurut Definisi 2.3.2 (v) belaku

$$\left((0*y)*(0*x)\right)*\left(0*\left(0*(x*y)\right)\right)=0.$$

Maka menurut Definisi 2.3.1 berlaku

$$\left((0*y)*(0*x)\right)\prec\left(0*\left(0*(x*y)\right)\right) \tag{2.7}$$

Dari (2.6) dan (2.7) maka terbukti

$$0*\left(0*(x*y)\right)=(0*y)*(0*x).$$

v. Ambil sebarang $x,y,z\in X$.

Akan dibuktikan $(0*y)*(0*x)=0*(y*x)$.

Maka

$$(0*y)*(0*x)=(0*y)*\left((y*y)*x\right)$$ (Definisi 2.3.1 dan 2.3.2 (iii))

$$=\left(\left((y*x)*(y*x)\right)*y\right)*\left((y*y)*x\right)$$ (Definisi 2.3.1 dan 2.3.2 (iii))

$$=\left(\left((y*x)*y\right)*(y*x)\right)*\left((y*x)*y\right)$$ (Teorema 2.3.2 (iii))

$$=\left(\left((y*x)*y\right)*\left((y*x)*y\right)\right)*(y*x)$$ (Teorema 2.3.2 (iii))

$$=0*(y*x)$$ (Definisi 2.3.1 dan 2.3.2 (iii))

Jadi, terbukti $(0*y)*(0*x)=0*(y*x)$.

Definisi 2.3.3 (Liu, dkk., 2000)

BCI-aljabar X dikatakan assosiatif jika $\forall x, y, z \in X$ berlaku $(x * y) * z = x * (y * z)$ atau secara ekuivalen $0 * x = x$.

Definisi 2.3.4 (Ahmad dan Khalid, 1996)

BCI-aljabar X dikatakan quasi-assosiatif jika $\forall x, y, z \in X$ berlaku $((x * y) * z) \prec (x * (y * z))$ atau secara ekuivalen $(0 * x) \prec x$.

Definisi 2.3.5 (Jun, 1994)

Suatu pemetaan $f : X \to Y$ dengan X dan Y BCI-aljabar disebut homomorphisma jika $f(x * y) = f(x) * f(y), \ \forall x, y \in X$.

Definisi 2.3.6 (Chaudry dan Fakharuddin, 1999)

Suatu BCI-aljabar X dikatakan BCK-aljabar jika $\forall x \in X$ berlaku

$$0 * x = 0.$$

Jadi setiap BCK-aljabar adalah BCI-aljabar, tetapi belum tentu sebaliknya. Karena semua aksioma-aksioma pada BCI-aljabar pasti dipenuhi oleh BCK-aljabar.

Contoh 2.3:
Contoh 2.2 merupakan BCK-Aljabar.

2.4. Subaljabar dan Ideal pada BCI-Aljabar

Pada BCI-aljabar terdapat istilah subaljabar dan ideal, namun definisi ideal pada BCI-aljabar berbeda dengan definisi ideal pada ring.

Definisi 2.4.1 (Akram, 2004)

Diberikan S himpunan bagian tidak kosong dari BCI-aljabar X. S disebut subaljabar dari X jika $\forall x, y \in S$ berlaku $x * y \in S$.

Setiap subaljabar S dari BCI-aljabar X pasti memuat 0, tetapi tidak sebaliknya. Sebab, misal $S = \{x\}$ maka $x * x = 0$.

Contoh 2.4.

Perhatikan contoh 2.1, $S = \{0, a\}$ adalah subaljabar dari $X = \{0, \mathrm{a}, \mathrm{b}\}$. Karena

- untuk $x = y = 0$ maka $x * y = 0 * 0 = 0 \in S$;
- untuk $x = y = a$ maka $x * y = a * a = 0 \in S$;
- untuk $x = 0$ dan $y = a$ maka $x * y = 0 * a = 0 \in S$;
- untuk $x = a$ dan $y = 0$ maka $x * y = a * 0 = a \in S$.

Jadi terbukti $\forall x, y \in S$ berlaku $x * y \in S$, yaitu S adalah subaljabar.

Definisi 2.4.2 (Akram, 2004)

Suatu himpunan bagian A dari BCI-aljabar $(X;*,0)$ disebut ideal dari X jika $\forall x, y \in X$, memenuhi:

i. $0 \in A$.
ii. Jika $x * y \in A$ dan $y \in A$ maka $x \in A$.

Definisi 2.4.3. (Ahmad dan Khalid, 1996)

Suatu ideal A dari BCI-aljabar X disebut quasi-assosiatif, jika $\forall x \in A$, berlaku

$$(0 * x) \prec (0 * (0 * x)).$$

Definisi 2.4.4. (Ahmad dan Khalid, 1996)

Suatu ideal A dari BCI-aljabar X disebut ideal tertutup (*closed ideal*) jika $\forall x \in A$, maka $0 * x \in A$.

2.5. Himpunan Fuzzy

Profesor Zadeh telah merumuskan konsep himpunan bagian fuzzy secara matematika. Himpunan bagian fuzzy dari sebuah himpunan tidak kosong didefinisikan sebagai himpunan dari elemen-elemen dengan tingkat keanggotaan dalam sebuah rangkaian kesatuan, masing-masing elemen-elemen tersebut diberi nilai mulai dari 0 sampai 1 melalui suatu fungsi keanggotaan. Teori himpunan fuzzy didasarkan oleh asumsi bahwa himpunan klasik tidak natural dan adanya masalah-masalah kepastian keadaan benda dalam penggambaran kehidupan nyata, karena setiap obyek yang berada dalam dunia nyata ini memiliki beberapa derajat ketidakjelasan. Namun konsep tingkat keanggotaan ini bukan konsep probabilitas (Kandasamy, 2003).

Definisi 2.5.1 Himpunan fuzzy (Kusumadewi, 2003)

Diberikan sebarang himpunan tidak kosong *X*. Himpunan $A=\{(x,\mu_A(x))|x\in X\}$ disebut himpunan fuzzy. Di mana $\mu_A(x)$ menunjukkan derajat keanggotaan x di A yang didefinisikan sebagai fungsi keanggotaan $\mu_A : X \to [0,1]$.

Contoh 2.5:

Misalkan $X=\{x|x\geq 0, x\in \text{bilangan cacah}\}$. Didefinisikan fungsi keanggotaan pada *X* sebagai berikut:

$$\mu_A(x)=\begin{cases}\dfrac{25-x}{25}, & 0\leq x<25\\ 0, & x\geq 25\end{cases}$$

Dengan demikian, didapatkan himpunan fuzzy A pada X:

$A=\{(0,\ 1),(1,\ 0{,}96),(2,\ 0{,}92),...,(24,\ 0{,}04),(25,\ 0),(26,\ 0),...\}$

Contoh 2.6:

Misalkan $X=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$. Didefinisikan fungsi keanggotaan pada *X* sebagai berikut:

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0{,}2x, & 0\leq x\leq 4\\ 1\text{ - }(0{,}2(x\text{ - }5)), & 4<x\leq 7\end{cases}$$

Dengan demikian, didapatkan himpunan fuzzy A pada X:

$A=\{(0,\ 0),(1,\ 0{,}2),(2,\ 0{,}4),(3,\ 0{,}6),(4,\ 0{,}8),(5,\ 1),(6,\ 0{,}8),(7,\ 0{,}6)\}$

2.6. Subaljabar Fuzzy dan Ideal Fuzzy pada BCI-Aljabar

Definisi 2.6.1 (Jun, 1994)

Diberikan suatu himpunan bagian fuzzy *A* dari BCI-aljabar *X* dengan fungsi keanggotaan $\mu_A : X \to [0,1]$. $\forall x, y \in X$ berlaku:

$$\mu_A(x) \wedge \mu_A(y) = \min(\mu_A(x), \mu_A(y))$$

dan

$$\mu_A(x) \vee \mu(y) = \text{maks}(\mu_A(x), \mu_A(y)).$$

Definisi 2.6.2 (Jun, 1994)

Suatu himpunan bagian fuzzy *A* dari BCI-aljabar *X* dengan fungsi keanggotaan $\mu_A : X \to [0,1]$ disebut subaljabar fuzzy dari *X* jika $\forall x, y \in X$ berlaku

$$\mu_A(x * y) \leq \mu_A(x) \vee \mu_A(y).$$

Definisi 2.6.3 (Jun, 1994)

Suatu himpunan bagian fuzzy *A* dari BCI-aljabar *X* dengan fungsi keanggotaan $\mu_A : X \to [0,1]$ disebut ideal fuzzy dari *X* jika:

(iii) $\forall x \in X$, $\mu_A(0) \geq \mu_A(x)$.

(iv) $\forall x, y \in X$, $\mu_A(x) \geq \mu_A(x * y) \wedge \mu_A(y)$.

Definisi 2.6.4 (Ahmad dan Khalid, 1996)

Ideal fuzzy *A* dalam *X* disebut quasi-assosiatif, jika $\forall x, y, z \in X$ berlaku

$$\mu_A((x * y) * z) \geq \mu_A(x * (y * z)).$$

Definisi 2.6.5 (Ahmad dan Khalid, 1996)

Suatu ideal fuzzy *A* dari *X* disebut ideal fuzzy tertutup (*closed fuzzy ideal*) jika untuk setiap $\forall x \in X$, berlaku

$$\mu_A(0 * x) \geq \mu_A(x).$$

2.7. Hubungan Ring dengan BCI-Aljabar

Pada suatu saat, suatu ring $(R, +, *)$ bisa menjadi BCI-aljabar, baik itu ring komutatif maupun ring dengan elemen satuan. $(R, +, *)$ bisa menjadi BCI-aljabar jika operasi biner $*$ pada *R* dapat didefinisikan $x * y = x - y, \forall x, y \in R$, di mana operasi biner $-$ adalah pengurangan biasa yang didefinisikan sebagai berikut:

$$x * y = x - y = \begin{cases} \text{positif} & \text{jika } y < x \\ 0 & \text{jika } x = y \\ \text{negatif} & \text{jika } x < y \end{cases}$$

Contoh 2.7:
Diberikan $Z = \{\pm 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$. $(Z, +, *)$ adalah ring terhadap operasi biner $+$ dan $*$ yang berturut-turut dinamakan operasi penjumlahan dan pergandaan biasa. Dengan mendefinisikan $x * y = x - y, \forall x, y \in Z$, maka $(Z; 0, *)$ merupakan suatu BCI-aljabar.

Bukti:

(i). $$\begin{aligned}((x*y)*(x*z))*(z*y) &= ((x-y)-(x-z))-(z-y) \\ &= (x-y-x-(-z))-(z-y) \\ &= (x-y-x+z)-(z-y) \\ &= (x-x-y+z)-z-(-y) \\ &= (x-x-y+z)-z+y \\ &= 0-y-z+z+y \\ &= 0-y+0+y \\ &= 0+0-y+y \\ &= 0+0 \\ &= 0;\end{aligned}$$

(ii). $$\begin{aligned}(x*(x*y))*y &= (x-(x-y))-y \\ &= (x-x-(-y))-y \\ &= (x-x+y)-y \\ &= (0+y)-y \\ &= 0+y-y \\ &= 0+0 \\ &= 0;\end{aligned}$$

(iii). $$\begin{aligned}x*x &= x-x \\ &= 0;\end{aligned}$$

(iv). Jika $x * y = x - y = 0$ dan $y * x = y - x = 0$ maka $x = y$;

(v). Jika $x * 0 = x - 0 = 0$ maka $x = 0$.

Jadi terbukti $(Z;0,*)$ adalah suatu BCI-aljabar.

BAB III
PEMBAHASAN

Pada Bab ini akan dibahas mengenai definisi dan teorema-teorema yang berhubungan dengan "ideal fuzzy quasi-assosiatif pada BCI-aljabar" berdasarkan paper yang telah diterbitkan oleh International Center For Theoritical Physics (Ahmad dan Khalid, 1996).

3.1. Ideal Quasi-Assosiatif pada BCI-Aljabar

Theorema 3.1.1.

Pada BCI-aljabar *X*, pernyataan berikut ini ekuivalen:

1. BCI–aljabar *X* merupakan quasi-assosiatif.
2. $\left(0*x\right) \prec \left(0*\left(0*x\right)\right)$.
3. $\left(0*x\right) \prec x$.
4. $\left(0*\left(x*y\right)\right) \prec \left(0*\left(y*x\right)\right)$.
5. $\left(\left(0*x\right)*y\right) \prec \left(0*\left(x*y\right)\right)$.

Bukti:

$\left(1 \Rightarrow 2\right)$

Diketahui X merupakan quasi-assosiatif. Akan dibuktikan $\left(0*x\right) \prec \left(0*\left(0*x\right)\right),\ \forall x \in X$.

Menurut Definisi 2.3.4, karena *X* merupakan quasi-assosiatif, maka $\forall x, y, z \in X$ berlaku

$$\left((x*y)*z\right) \prec \left(x*\left(y*z\right)\right)$$

Menurut Definisi 2.3.1 maka $\forall x, y, z \in X$ berlaku

$$\left((x*y)*z\right)*\left(x*\left(y*z\right)\right)=0 \tag{3.1}$$

Andaikan $0*x \prec 0*\left(0*x\right)$ tidak dipenuhi maka menurut Definisi 2.3.1 $\exists a \in X$ sedemikian sehingga

$$\left(0*a\right)*\left(0*\left(0*a\right)\right) \neq 0 \tag{3.2}$$

Dari Teorema 2.3.1(i) diperoleh

$$0 * a = (0 * 0) * a .$$

Maka (3.2) menjadi

$$((0 * 0) * a) * (0 * (0 * a)) \neq 0$$

Kontradiksi dengan (3.1), maka pengandaian harus diingkar yaitu $(0 * x) \prec (0 * (0 * x))$. Jadi terbukti $(0 * x) \prec (0 * (0 * x))$, $\forall x \in X$.

$(2 \Rightarrow 3)$

Diketahui $(0 * x) \prec (0 * (0 * x))$, $\forall x \in X$. Akan dibuktikan $(0 * x) \prec x$, $\forall x \in X$.

Menurut Definisi 2.3.2 (ii), karena X merupakan BCI-aljabar maka $\forall x, y \in X$ berlaku

$$(y * (y * x)) \prec x . \tag{3.3}$$

Misal $y = 0$, maka (3.3) menjadi $(0 * (0 * x)) \prec x$.

Dari yang diketahui maka diperoleh

$$(0 * x) \prec (0 * (0 * x)) \prec x .$$

Jadi terbukti $(0 * x) \prec x$, $\forall x \in X$.

$(3 \Rightarrow 4)$

Diketahui $(0 * x) \prec x$, $\forall x \in X$. Menurut Definisi 2.3.1 maka berlaku

$$(0 * x) * x = 0 \tag{3.4}$$

Akan dibuktikan $(0 * (x * y)) \prec (0 * (y * x))$, $\forall x, y \in X$. Menurut Definisi 2.3.2 (ii), karena X merupakan BCI-aljabar maka $\forall x, y \in X$ berlaku

$$(y * (y * x)) \prec x \tag{3.5}$$

Misal $y = 0$, maka (3.5) menjadi

$$(0 * (0 * x)) \prec x \tag{3.6}$$

Andaikan $\left(0*(x*y)\right) \prec \left(0*(y*x)\right)$ tidak dipenuhi maka menurut Definisi 2.3.1 $\exists a,b \in X \ni$

$$\left(0*(a*b)\right)*\left(0*(b*a)\right) \neq 0 .$$

Dari Teorema 2.3.1(i) diperoleh $0*x = 0*(x*0)$. Dengan mensubstitusikan $a = x$ dan $b = 0$ pada $0*(x*0)$ dan berdasarkan (3.6) maka diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &\neq \left[\left(0*(x*0)\right)*\left(0*(0*x)\right)\right] \\ &\prec \left[\left(0*(x*0)\right)*x\right] && \text{Teorema 2.3.1(ii)} \\ &= (0*x)*x \end{aligned}$$

Kontradiksi dengan (3.4), maka pengandaian harus diingkar yaitu $\left(0*(x*y)\right) \prec \left(0*(y*x)\right)$.

Jadi terbukti $\left(0*(x*y)\right) \prec \left(0*(y*x)\right)$, $\forall x,y \in X$.

$(4 \Rightarrow 5)$

Diketahui $\left(0*(x*y)\right) \prec \left(0*(y*x)\right)$, $\forall x,y \in X$. Menurut Definisi 2.3.1 maka $\forall x,y \in X$ berlaku

$$\left(0*(x*y)\right)*\left(0*(y*x)\right) = 0 \tag{3.7}$$

Akan dibuktikan $\left((0*x)*y\right) \prec \left(0*(x*y)\right)$, $\forall x,y \in X$.

Andaikan $\left((0*x)*y\right) \prec \left(0*(x*y)\right)$ tidak dipenuhi maka menurut Definisi 2.3.1 $\exists a,b \in X \ni$

$$\left((0*a)*b\right)*\left(0*(a*b)\right) \neq 0 .$$

Dari Teorema 2.3.1(i) diperoleh

$$0*(x*y) = (0*0)*(x*y)$$

Dengan mensubstitusikan $a = 0$ dan $b = x*y$ pada $(0*0)*(x*y)$ maka diperoleh

$$\left((0*0)*(x*y)\right)*\left(0*\left(0*(x*y)\right)\right) = \left((0*0)*(x*y)\right)*\left(0*(y*x)\right)$$

Teorema 2.3.1(iv)

$$= (0*(x*y))*(0*(y*x))$$
$$\neq 0$$

Kontradiksi dengan (3.7), maka pengandaian harus diingkar yaitu $((0*x)*y) \prec (0*(x*y))$.

Jadi terbukti $((0*x)*y) \prec (0*(x*y))$, $\forall x, y \in X$.

$(5 \Rightarrow 1)$

Diketahui $((0*x)*y) \prec (0*(x*y))$, $\forall x, y \in X$. Menurut Definisi 2.3.1 maka $\forall x, y \in X$ berlaku

$$((0*x)*y)*(0*(x*y)) = 0 \tag{3.8}$$

Akan dibuktikan X merupakan quasi-assosiatif. Menurut Definisi 2.3.4 akan ditunjukkan $((x*y)*z) \prec (x*(y*z))$, $\forall x, y, z \in X$.

Andaikan $((x*y)*z) \prec (x*(y*z))$ tidak dipenuhi maka menurut Definisi 2.3.1 $\exists a, b, c \in X \ni$

$$((a*b)*c)*(a*(b*c)) \neq 0.$$

Kontradiksi dengan (3.8), maka pengandaian harus diingkar yaitu $((x*y)*z) \prec (x*(y*z))$. Jadi terbukti $((x*y)*z) \prec (x*(y*z))$, $\forall x, y, z \in X$. Dengan kata lain *X* merupakan quasi-assosiatif.

Teorema 3.1.2.

A suatu ideal dari BCI-aljabar *X*. Pada ideal *A*, jika $x \prec y$ dan $y \in A$ maka $x \in A$.

Bukti:

Diketahui $x \prec y$ dan $y \in A$. Akan dibuktikan $x \in A$. Menurut Definisi 2.3.1. $x \prec y \Leftrightarrow x*y = 0$. Karena *A* ideal, menurut Definisi 2.4.2 (i) maka $0 \in A$, sehingga $x*y \in A$. Karena $x*y \in A$ dan $y \in A$, menurut Definisi 2.4.2 (ii) diperoleh $x \in A$. Jadi terbukti $x \in A$.

Berdasarkan Teorema 3.1.2. di atas, karena $\left(x*\left(x*y\right)\right)\prec y$ dan $y\in A$ diperoleh $x*\left(x*y\right)\in A$. Khususnya, dari (3.6) diketahui $\left(0*\left(0*x\right)\right)\prec x$, dimana $x\in A$, maka $0*\left(0*x\right)\in A$.

Teorema 3.1.3.

Misal *X* merupakan BCI-aljabar dan *A* ideal dari BCI-aljabar *X*. Pernyataan berikut ini ekuivalen:

1. *A* merupakan ideal quasi-assosiatif.
2. $\left(0*x\right)\prec x$.
3. $\left(\left(0*x\right)*y\right)\prec\left(0*\left(x*y\right)\right)$.
4. $\left(0*\left(x*y\right)\right)\prec\left(0*\left(y*x\right)\right)$.

Bukti:

$\left(1\Rightarrow 2\right)$

Diketahui *A* merupakan ideal quasi-assosiatif. Akan dibuktikan $\left(0*x\right)\prec x,\ \forall x\in A$. Menurut Definisi 2.4.3, *A* merupakan ideal quasi-assosiatif maka $\forall x\in A$ berlaku

$$\left(0*x\right)\prec\left(0*\left(0*x\right)\right) \tag{3.9}$$

Karena *A* ideal dari *X*, maka $\forall x\in A$ juga merupakan anggota *X*, sehingga *A* juga merupakan BCI-aljabar.
Menurut Definisi 2.3.2 (ii), karena *A* merupakan BCI-aljabar maka $\forall x,y\in A$ berlaku

$$\left(y*\left(y*x\right)\right)\prec x. \tag{3.10}$$

Ambil $y=0$, maka (3.12) menjadi

$$\left(0*\left(0*x\right)\right)\prec x. \tag{3.11}$$

Dari (3.9) dan (3.11) diperoleh

$$\left(0*x\right)\prec\left(0*\left(0*x\right)\right)\prec x.$$

Jadi terbukti $\left(0*x\right)\prec x,\ \forall x\in A$.

$(2 \Rightarrow 3)$

Diketahui $(0 * x) \prec x$, $\forall x \in A$. Menurut Definisi 2.3.1 maka $\forall x \in A$ berlaku

$$(0 * x) * x = 0. \tag{3.12}$$

Akan dibuktikan $((0 * x) * y) \prec (0 * (x * y))$, $\forall x, y \in A$.

Menurut Definisi 2.3.2 (ii), karena A merupakan BCI-aljabar maka $\forall x, y \in A$ berlaku

$$(y * (y * x)) \prec x. \tag{3.13}$$

Ambil $y = 0$, maka (3.13) menjadi

$$(0 * (0 * x)) \prec x. \tag{3.14}$$

Andaikan $((0 * x) * y) \prec (0 * (x * y))$ tidak dipenuhi maka menurut Definisi 2.3.1 $\exists a, b \in X \ni$

$$((0 * a) * b) * (0 * (a * b)) \neq 0.$$

Dari Teorema 2.3.1(i) diperoleh

$$0 * x = (0 * 0) * x$$

Dengan mensubstitusikan $a = 0$ dan $b = x$ pada $(0 * 0) * x$ dan berdasarkan (3.14), maka diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &\neq \left[((0 * 0) * x) * (0 * (0 * x)) \right] \\ &\prec \left[((0 * 0) * x) * x \right] && \text{Teorema 2.3.1(ii)} \\ &= (0 * x) * x \end{aligned}$$

Kontradiksi dengan (3.12), maka pengandaian harus diingkar yaitu $((0 * x) * y) \prec (0 * (x * y))$.

Jadi terbukti $((0 * x) * y) \prec (0 * (x * y))$, $\forall x, y \in A$.

$(3 \Rightarrow 4)$

Diketahui $((0 * x) * y) \prec (0 * (x * y))$, $\forall x, y \in A$. Menurut Definisi 2.3.1 maka $\forall x, y \in A$ berlaku

$$\big((0*x)*y\big)*\big(0*(x*y)\big)=0. \qquad (3.15)$$

Akan dibuktikan $\big(0*(x*y)\big)\prec\big(0*(y*x)\big),\ \forall x,y\in A$.

Andaikan $\big(0*(x*y)\big)\prec\big(0*(y*x)\big)$ tidak dipenuhi maka menurut Definisi 2.3.1 $\exists a,b\in X \ni$

$$\big(0*(a*b)\big)*\big(0*(b*a)\big)\neq 0.$$

Dari Teorema 2.3.1(i) diperoleh

$$(0*x)*y=(0*x)*(y*0)$$

Dengan mensubstitusikan $0=0*x$, $a=y$, $b=0$ pada $(0*x)*(y*0)$ maka diperoleh

$$\big((0*x)*(y*0)\big)*\big((0*x)*(0*y)\big)=\big((0*x)*y\big)*\big(0*(x*y)\big)$$

Teorema 2.3.1(v)

$$\neq 0$$

Kontradiksi dengan (3.15), maka pengandaian harus diingkar yaitu $\big(0*(x*y)\big)\prec\big(0*(y*x)\big)$.

Jadi terbukti $\big(0*(x*y)\big)\prec\big(0*(y*x)\big),\ \forall x,y\in X$.

$(4\Rightarrow 1)$

Diketahui $\big(0*(x*y)\big)\prec\big(0*(y*x)\big),\ \forall x,y\in A$. Menurut Definisi 2.3.1 maka $\forall x,y\in A$ berlaku

$$\big(0*(x*y)\big)*\big(0*(y*x)\big)=0 \qquad (3.16)$$

Akan dibuktikan A merupakan ideal quasi-assosiatif. Akan ditunjukkan $(0*x)\prec\big(0*(0*x)\big),\ \forall x\in A$.

Andaikan $(0*x)\prec\big(0*(0*x)\big)$ tidak dipenuhi maka menurut Definisi 2.3.1 $\exists a,b\in X\ni(0*a)*\big(0*(0*a)\big)\neq 0$.

Dengan mensubstitusikan $a=x*y$ pada $0*(x*y)$ maka diperoleh

$$\big(0*(x*y)\big)*\Big(0*\big(0*(x*y)\big)\Big)=\big(0*(x*y)\big)*\big(0*(y*x)\big)$$

Teorema 2.3.1(iv)

$\neq 0$.

Kontradiksi dengan (3.16), maka pengandaian harus diingkar yaitu $(0*x) \prec (0*(0*x))$. Jadi terbukti $(0*x) \prec (0*(0*x))$, $\forall x, y \in X$. Dengan kata lain *A* merupakan ideal quasi-assosiatif.

Teorema 3.1.4.

Setiap ideal quasi-assosiatif *A* pada BCI-aljabar *X* adalah ideal tertutup (*closed ideal*).

Bukti:

Diketahui *A* ideal quasi-assosiatif pada BCI-aljabar *X*. Akan dibuktikan *A* adalah ideal tertutup (*closed ideal*), yaitu menurut Definisi 2.4.4 akan ditunjukkan $0*x \in A$, $\forall x \in A$.

Dari Teorema 3.1.3 $(1 \Leftrightarrow 2)$, *A* merupakan ideal quasi-assosiatif $\Leftrightarrow$ berlaku $(0*x) \prec x, \forall x \in X$. Karena $(0*x) \prec x$ dan $x \in A$ menurut Teorema 3.1.2 maka $0*x \in A$. Jadi terbukti *A* adalah ideal tertutup (*closed ideal*).

Ideal quasi-assosiatif merupakan subkelas sejati dari ideal tertutup (*closed ideal*), yaitu setiap ideal quasi-assosiatif pada BCI-aljabar merupakan ideal tertutup (*closed ideal*), tetapi belum tentu sebaliknya. Hal ini dapat ditunjukkan dengan contoh berikut ini.

Contoh 3.1.

Diberikan BCI-aljabar *X* = {0,a,b,c,d,e} dengan $*$ didefinisikan oleh tabel Cayley berikut:

Tabel 3.1. Ideal Tertutup

$*$	0	a	b	c	d	e
0	0	a	c	b	e	d
a	a	0	e	d	c	b
b	b	d	0	e	a	c
c	c	e	d	0	b	a
d	d	b	a	c	0	e
e	e	c	b	a	d	0

Akan dibuktikan A={0,a,b,c} merupakan ideal tertutup (*closed ideal*).

Ambil $x \in A$.

Untuk $x = 0$, maka $0 * 0 = 0 \in A$;
$x = a$, maka $0 * a = a \in A$;
$x = b$, maka $0 * b = c \in A$;
$x = c$, maka $0 * c = b \in A$.

Jadi terbukti $0 * x \in A$, $\forall x \in A$, yaitu A={0,a,b,c} merupakan ideal tertutup (*closed ideal*).

Kemudian akan dibuktikan A={0,a,b,c} bukan ideal quasi-assosiatif.

Ambil $x \in A$.

Pilih $x = b$. Maka $(0 * b) * (0 * (0 * b)) = c * (0 * c) = c * b = d \neq 0$ atau menurut Definisi 2.3.1 tidak berlaku $(0 * b) \prec (0 * (0 * b))$. Jadi terbukti A={0,a,b,c} bukan ideal quasi-assosiatif.

Contoh 3.2.

Diberikan $Z_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ BCI-aljabar dengan operasi biner + yang didefinisikan oleh tabel Cayley berikut:

Tabel 3.2. Ideal Quasi-Assosiatif

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

Dalam hal ini unsur 0 pada Z_2 adalah $\bar{0}$.

(i). Akan dibuktikan $A = \{\bar{0}\}$ merupakan ideal quasi-assosiatif, yaitu $(\bar{0} + x) + (\bar{0} + (\bar{0} + x)) = \bar{0}$.

Ambil $x = \bar{0}$ maka:

$(\bar{0} + \bar{0}) + (\bar{0} + (\bar{0} + \bar{0})) = \bar{0} + (\bar{0} + \bar{0}) = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$.

Jadi terbukti $A = \{\bar{0}\}$ merupakan ideal quasi-assosiatif.

(ii). Akan dibuktikan $A = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ merupakan ideal quasi-assosiatif, yaitu $\left(\bar{0} + x\right) + \left(\bar{0} + \left(\bar{0} + x\right)\right) = \bar{0}$.

- Untuk $x = \bar{0}$ maka:
  $\left(\bar{0} * \bar{0}\right) * \left(\bar{0} * \left(\bar{0} * \bar{0}\right)\right) = \bar{0} * \left(\bar{0} * \bar{0}\right) = \bar{0} * \bar{0} = \bar{0}$.
- Untuk $x = \bar{1}$ maka:
  $\left(\bar{0} * \bar{1}\right) * \left(\bar{0} * \left(\bar{0} * \bar{1}\right)\right) = \bar{1} * \left(\bar{0} * \bar{1}\right) = \bar{1} * \bar{1} = \bar{0}$.

Jadi terbukti $A = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ merupakan ideal quasi-assosiatif.

3.2. Ideal Fuzzy Quasi-Assosiatif pada BCI-Aljabar

Teorema 3.2.1.

Jika *A* merupakan ideal fuzzy dari BCI-aljabar *X* dan $x \prec y$, maka diperoleh $\mu_A(x) \geq \mu_A(y),\ \forall x, y \in X$.

Bukti:

Diketahui *A* merupakan ideal fuzzy pada BCI-aljabar *X* dan $x \prec y$.
Akan dibuktikan $\mu_A(x) \geq \mu_A(y),\ \forall x, y \in X$.
Menurut Definisi 2.3.1 $\forall x, y \in X$ berlaku

$$x \prec y \Leftrightarrow x * y = 0 \qquad (3.17)$$

Karena *A* merupakan ideal fuzzy pada BCI-aljabar, maka menurut Definisi 2.6.3(ii) $\forall x, y \in X$ berlaku $\mu(x) \geq \mu(x * y) \wedge \mu(y)$.
Sehingga, berdasarkan (3.17) diperoleh

$$\begin{aligned} \mu_A(x) &\geq \mu_A(x * y) \wedge \mu_A(y) \\ &= \mu_A(0) \wedge \mu_A(y) \end{aligned}$$

Dari Definisi 2.6.3(i), $\forall y \in X$ berlaku $\mu(0) \geq \mu(y)$, maka $\mu(y) = \mu(0) \wedge \mu(y)$. Sehingga diperoleh $\mu_A(x) \geq \mu_A(y)$.
Jadi terbukti $\mu_A(x) \geq \mu_A(y),\ \forall x, y \in X$.

Teorema 3.2.2.

Diberikan A ideal fuzzy pada BCI-aljabar X dengan fungsi keanggotaan $\mu_A : X \to [0,1]$, maka $\forall x, y \in X$, pernyataan berikut ini ekuivalen:

1. $\mu_A(0*x) \geq \mu_A(0*(0*x))$.
2. $\mu_A(0*x) \geq \mu_A(x)$.
3. $\mu_A(0*(x*y)) \geq \mu_A(0*(y*x))$.

Bukti:

$(1 \Rightarrow 2)$

Diketahui $\mu_A(0*x) \geq \mu_A(0*(0*x))$, $\forall x \in X$. Akan dibuktikan $\mu_A(0*x) \geq \mu_A(x)$, $\forall x \in X$.

Karena X merupakan BCI-aljabar, maka menurut Definisi 2.3.2 (ii) $\forall x, y \in X$ berlaku

$$(y*(y*x)) \prec x \tag{3.18}$$

Ambil $y = 0$, maka (3.18) menjadi $(0*(0*x)) \prec x$.

Karena $(0*(0*x)) \prec x$ maka dari Teorema 3.2.1 berlaku

$$\mu_A(0*(0*x)) \geq \mu_A(x) \tag{3.19}$$

Diketahui $\mu_A(0*x) \geq \mu_A(0*(0*x))$

Maka dari (3.19) dan dari yang diketahui diperoleh

$$\mu_A(0*x) \geq \mu_A(0*(0*x)) \geq \mu_A(x) \text{ atau } \mu_A(0*x) \geq \mu_A(x).$$

Jadi terbukti $\mu_A(0*x) \geq \mu_A(x)$, $\forall x \in X$.

$(2 \Rightarrow 3)$

Diketahui $\mu_A(0*x) \geq \mu_A(x)$, $\forall x \in X$. Akan dibuktikan $\mu_A(0*(x*y)) \geq \mu_A(0*(y*x))$, $\forall x, y \in X$.

Andaikan $\mu_A(0*(x*y)) \geq \mu_A(0*(y*x))$ tidak dipenuhi maka $\exists a, b \in X \ni \mu_A(0*(a*b)) < \mu_A(0*(b*a))$.

Dari Teorema 2.3.1(i) diperoleh

$$0 * x = 0 * (x * 0)$$

Dengan mensubstitusikan $a = x$ dan $b = 0$ pada $0 * (x * 0)$ maka diperoleh

$$\mu_A(0 * x) = \mu_A(0 * (x * 0))$$
$$< \mu_A(0 * (0 * x))$$

Karena X merupakan BCI-aljabar, maka menurut Definisi 2.3.2 (ii) $\forall x, y \in X$ berlaku

$$(y * (y * x)) \prec x \qquad (3.20)$$

Ambil $y = 0$, maka (3.20) menjadi $(0 * (0 * x)) \prec x$.

Karena $(0 * (0 * x)) \prec x$ maka dari Teorema 3.3.1 berlaku

$$\mu_A(0 * (0 * x)) \geq \mu_A(x)$$

Sehingga ada 2 kemungkinan, yaitu:

1. $\mu_A(0 * x) = \mu_A(0 * (x * 0)) < \mu_A(0 * (0 * x)) > \mu_A(x)$

   Maka diperoleh $\mu_A(0 * x) \geq \mu_A(x)$ atau $\mu_A(0 * x) < \mu_A(x)$.

Atau

2. $\mu_A(0 * x) = \mu_A(0 * (x * 0)) < \mu_A(0 * (0 * x)) = \mu_A(x)$

   Maka diperoleh $\mu_A(0 * x) < \mu_A(x)$.

Kontradiksi dengan yang diketahui, maka pengandaian harus diingkar, yaitu $\mu_A(0 * (a * b)) \geq \mu_A(0 * (b * a))$, sehingga analog dengan $\mu_A(0 * (x * y)) \geq \mu_A(0 * (y * x))$. Jadi terbukti $\mu_A(0 * (x * y)) \geq \mu_A(0 * (y * x))$, $\forall x, y \in X$.

$(3 \Rightarrow 1)$

Diketahui $\mu_A(0 * (x * y)) \geq \mu_A(0 * (y * x))$, $\forall x, y \in X$. Akan dibuktikan $\mu_A(0 * x) \geq \mu_A(0 * (0 * x))$, $\forall x \in X$.

Andaikan $\mu_A(0*x) \geq \mu_A(0*(0*x))$ tidak dipenuhi maka $\exists a \in X \ni$ $\mu_A(0*a) < \mu_A(0*(0*a))$.

Dari Teorema 2.3.1(i) diperoleh

$$0*a = 0*(a*0).$$

Sehingga $\mu_A(0*a) = \mu_A(0*(a*0)) < \mu_A(0*(0*a))$.

Kontradiksi dengan yang diketahui. Jadi pengandaian harus diingkar, yaitu $\mu_A(0*x) \geq \mu_A(0*(0*x))$.

Jadi terbukti $\mu_A(0*x) \geq \mu_A(0*(0*x))$, $\forall x \in X$.

Dari definisi ideal fuzzy quasi assosiatif (Definisi 2.6.4) dan Teorema 3.2.1. di atas dapat diperoleh Teorema berikut.

Teorema 3.2.3.

Jika *X* quasi-assosiatif, maka setiap ideal fuzzy pada *X* adalah quasi-assosiatif.

Bukti:

Karena *X* quasi-assosiatif menurut Definisi 2.3.4 maka $\forall x, y, z \in X$ berlaku $((x*y)*z) \prec (x*(y*z))$. Dari Teorema 3.2.1 maka diperoleh $\mu_A((x*y)*z) \geq \mu_A(x*(y*z))$, $\forall x, y, z \in X$. Menurut Definisi 2.6.4 terbukti ideal fuzzy pada *X* adalah quasi-assosiatif.

Teorema 3.2.4.

Setiap ideal fuzzy quasi-assosiatif *A* pada BCI-aljabar *X* adalah ideal fuzzy tertutup (*closed fuzzy ideal*) pada BCI-aljabar *X*.

Bukti:

Karena *A* merupakan ideal fuzzy quasi-assosiatif pada BCI-aljabar *X*, maka $\forall x, y, z \in X$ berlaku

$$\mu_A((x*y)*z) \geq \mu_A(x*(y*z)) \qquad (3.21)$$

Andaikan A bukan ideal fuzzy tertutup (*closed fuzzy ideal*) maka $\exists a \in A \ni \mu_A(0*a) < \mu_A(a)$.

Karena X merupakan BCI-aljabar, maka menurut Definisi 2.3.2 (ii) $\forall x, y \in X$ berlaku

$$(y*(y*x)) \prec x \tag{3.22}$$

Ambil $y = 0$, maka (3.22) menjadi $(0*(0*x)) \prec x$. Karena $(0*(0*x)) \prec x$ maka dari Teorema 3.3.1 berlaku

$$\mu_A(0*(0*x)) \geq \mu_A(x)$$

Sehingga untuk $x = a$ berlaku $\mu_A(0*(0*a)) \geq \mu_A(a)$. Dari Definisi 2.3.2 (iii) diperoleh $\mu_A((0*0)*a) = \mu_A(0*a)$. Sehingga

$$\mu_A((0*0)*a) = \mu_A(0*a) < \mu_A(a) \leq \mu_A(0*(0*a)).$$

Kontradiksi dengan (3.21). Jadi pengandaian harus diingkar, yaitu $\mu_A(0*x) \geq \mu_A(x)$, $\forall x \in X$. Terbukti.

Contoh berikut menunjukkan bahwa ideal fuzzy tertutup (*closed fuzzy ideal*) pada umumnya belum tentu ideal fuzzy quasi-assosiatif .

Contoh 3.3.

Diberikan $X = \{0,a,b,c\}$ dengan $*$ didefinisikan sebagai berikut:

*	0	a	b	c
0	0	0	c	b
a	a	0	c	b
b	b	b	0	c
c	c	c	b	0

Definisikan $\mu_A : X \to [0,1]$ sebagai berikut:

$\mu_A(a) = t_1, \mu_A(c) = \mu_A(b) = t_2$ dan $\mu_A(0) = t_0$, dimana $t_0 > t_1 > t_2$.

Akan dibuktikan $A=\{(0,t_0),(a,t_1),(b,t_2),(c,t_2)\}$ merupakan ideal fuzzy tertutup (*closed fuzzy ideal*).
Ambil $x \in X$.

- Untuk $x=0$, maka $\mu_A(0*x)=\mu_A(0*0)=\mu_A(0)=t_0$ dan $\mu_A(x)=\mu_A(0)=t_0$. Jadi $\mu_A(0*x)=\mu_A(x)$.
- Untuk $x=a$, maka $\mu_A(0*x)=\mu_A(0*a)=\mu_A(0)=t_0$ dan $\mu_A(x)=\mu_A(a)=t_1$. Jadi $\mu_A(0*x)>\mu_A(x)$.
- Untuk $x=b$, maka $\mu_A(0*x)=\mu_A(0*b)=\mu_A(c)=t_2$ dan $\mu_A(x)=\mu(b)=t_2$. Jadi $\mu_A(0*x)=\mu_A(x)$.
- Untuk $x=c$, maka $\mu_A(0*x)=\mu_A(0*c)=\mu_A(b)=t_2$ dan $\mu_A(x)=\mu(c)=t_2$. Jadi $\mu_A(0*x)=\mu_A(x)$.

Jadi $\forall x \in X$ berlaku $\mu_A(0*x)\geq\mu_A(x)$. Terbukti A merupakan ideal fuzzy tertutup (*closed fuzzy ideal*).

Selanjutnya akan dibuktikan A bukan ideal fuzzy quasi-assosiatif.
Ambil $x=a, y=z=b$, maka

$\mu_A((a*b)*b)=\mu_A(c*b)=\mu_A(b)=t_2$;

$\mu_A(a*(b*b))=\mu_A(a*0)=\mu_A(a)=t_1$.

Diketahui $t_1>t_2$, maka $\mu_A((a*b)*b)<\mu_A(a*(b*b))$.

Jadi $\mu_A((a*b)*b)\geq\mu_A(a*(b*b))$ tidak dipenuhi. Terbukti A bukan ideal fuzzy quasi-assosiatif .

Contoh 3.4.
Perhatikan Contoh 3.2. Jika pada $Z_2=\{\bar{0},\bar{1}\}$ didefinisikan $\mu_A : Z_2 \to [0,1]$ sebagai berikut: $\mu_A(\bar{0})=0,7$ dan $\mu_A(\bar{1})=0,5$.
Akan dibuktikan $A=\{(\bar{0},\ 0,7),(\bar{1},\ 0,5)\}$ merupakan ideal fuzzy quasi-assosiatif.

- Untuk $x=\bar{0}, y=\bar{0}, z=\bar{0}$ maka

  $\mu_A\left(\left(\bar{0}+\bar{0}\right)+\bar{0}\right)=\mu_A\left(\bar{0}+\bar{0}\right)=\mu_A\left(\bar{0}\right)=0,7$ dan

  $\mu_A\left(\bar{0}+\left(\bar{0}+\bar{0}\right)\right)=\mu_A\left(\bar{0}+\bar{0}\right)=\mu_A\left(\bar{0}\right)=0,7.$

  Jadi, $\mu_A\left(\left(\bar{0}*\bar{0}\right)*\bar{0}\right)=\mu_A\left(\bar{0}*\left(\bar{0}*\bar{0}\right)\right)=0,7$.

- Untuk $x=\bar{0}, y=\bar{1}, z=\bar{0}$ maka

  $\mu_A\left(\left(\bar{0}+\bar{1}\right)+\bar{0}\right)=\mu_A\left(\bar{1}+\bar{0}\right)=\mu_A\left(\bar{1}\right)=0,5$ dan

  $\mu_A\left(\bar{0}+\left(\bar{1}+\bar{0}\right)\right)=\mu_A\left(\bar{0}+\bar{1}\right)=\mu_A\left(\bar{1}\right)=0,5$.

  Jadi, $\mu_A\left(\left(\bar{0}+\bar{1}\right)+\bar{0}\right)=\mu_A\left(\bar{0}+\left(\bar{1}+\bar{0}\right)\right)=0,5$.

- Untuk $x=\bar{0}, y=\bar{0}, z=\bar{1}$ maka

  $\mu_A\left(\left(\bar{0}+\bar{0}\right)+\bar{1}\right)=\mu_A\left(\bar{0}+\bar{1}\right)=\mu_A\left(\bar{1}\right)=0,5$ dan

  $\mu_A\left(\bar{0}+\left(\bar{0}+\bar{1}\right)\right)=\mu_A\left(\bar{0}+\bar{1}\right)=\mu_A\left(\bar{1}\right)=0,5$.

  Jadi, $\mu_A\left(\left(\bar{0}+\bar{0}\right)+\bar{1}\right)=\mu_A\left(\bar{0}+\left(\bar{0}+\bar{1}\right)\right)=0,5$.

- Untuk $x=\bar{1}, y=\bar{0}, z=\bar{0}$ maka

  $\mu_A\left(\left(\bar{1}+\bar{0}\right)+\bar{0}\right)=\mu_A\left(\bar{1}+\bar{0}\right)=\mu_A\left(\bar{1}\right)=0,5$ dan

  $\mu_A\left(\bar{1}+\left(\bar{0}+\bar{0}\right)\right)=\mu_A\left(\bar{1}+\bar{0}\right)=\mu_A\left(\bar{1}\right)=0,5$.

  Jadi, $\mu_A\left(\left(\bar{1}+\bar{0}\right)+\bar{0}\right)=\mu_A\left(\bar{1}+\left(\bar{0}+\bar{0}\right)\right)=0,5$.

- Untuk $x=\bar{1}, y=\bar{0}, z=\bar{1}$ maka

  $\mu_A\left(\left(\bar{1}+\bar{0}\right)+\bar{1}\right)=\mu_A\left(\bar{1}+\bar{1}\right)=\mu_A\left(\bar{0}\right)=0,7$ dan

  $\mu_A\left(\bar{1}+\left(\bar{0}+\bar{1}\right)\right)=\mu_A\left(\bar{1}+\bar{1}\right)=\mu_A\left(\bar{0}\right)=0,7$.

  Jadi, $\mu_A\left(\left(\bar{1}+\bar{0}\right)+\bar{1}\right)=\mu_A\left(\bar{1}+\left(\bar{0}+\bar{1}\right)\right)=0,7$.

- Untuk $x=\bar{1}, y=\bar{1}, z=\bar{0}$ maka

$\mu_A\left(\left(\bar{1}+\bar{1}\right)+\bar{0}\right)=\mu_A\left(\bar{0}+\bar{0}\right)=\mu_A\left(\bar{0}\right)=0,7$ dan

$\mu_A\left(\bar{1}+\left(\bar{1}+\bar{0}\right)\right)=\mu_A\left(\bar{1}+\bar{1}\right)=\mu_A\left(\bar{0}\right)=0,7$.

Jadi, $\mu_A\left(\left(\bar{1}+\bar{1}\right)+\bar{0}\right)=\mu_A\left(\bar{1}+\left(\bar{1}+\bar{0}\right)\right)=0,7$.

- Untuk $x=\bar{0}, y=\bar{1}, z=\bar{1}$ maka

  $\mu_A\left(\left(\bar{0}+\bar{1}\right)+\bar{1}\right)=\mu_A\left(\bar{1}+\bar{1}\right)=\mu_A\left(\bar{0}\right)=0,7$ dan

  $\mu_A\left(\bar{0}+\left(\bar{1}+\bar{1}\right)\right)=\mu_A\left(\bar{0}+\bar{0}\right)=\mu_A\left(\bar{0}\right)=0,7$.

  Jadi, $\mu_A\left(\left(\bar{1}+\bar{0}\right)+\bar{1}\right)=\mu_A\left(\bar{1}+\left(\bar{0}+\bar{1}\right)\right)=0,7$.

- Untuk $x=\bar{1}, y=\bar{1}, z=\bar{1}$ maka

  $\mu_A\left(\left(\bar{1}+\bar{1}\right)+\bar{1}\right)=\mu_A\left(\bar{0}+\bar{1}\right)=\mu_A\left(\bar{1}\right)=0,5$ dan

  $\mu_A\left(\bar{1}+\left(\bar{1}+\bar{1}\right)\right)=\mu_A\left(\bar{1}+\bar{0}\right)=\mu_A\left(\bar{1}\right)=0,5$.

  Jadi, $\mu_A\left(\left(\bar{1}+\bar{1}\right)+\bar{1}\right)=\mu_A\left(\bar{1}+\left(\bar{1}+\bar{1}\right)\right)=0,5$.

Terbukti $\forall x, y, z \in Z_2$ berlaku $\mu_A\left(\left(x*y\right)*z\right)\geq\mu_A\left(x*\left(y*z\right)\right)$, yaitu A merupakan ideal fuzzy quasi-assosiatif.

Teorema 3.2.5.

Diberikan BCI-aljabar *X*. Maka $\forall t\in\left[0,1\right]$, himpunan level yang didefinisikan $\mu_t=\left\{x\in X \middle| \mu_A\left(x\right)\geq t\right\}$ merupakan ideal.

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa himpunan level $\mu_t=\left\{x\in X \middle| \mu_A\left(x\right)\geq t\right\}$, $\forall t\in\left[0,1\right]$ merupakan ideal dari *X*. Diketahui *X* BCI-aljabar.

Andaikan μ_t bukan ideal maka menurut Definisi 2.4.2(i) $\exists t_0 \in [0.1] \ni 0 \notin \mu_{t_0}$. Sehingga menurut definisi himpunan level μ_{t_0} maka $0 \notin X$.
Diketahui X BCI-aljabar maka $0 \in X$, hal ini kontradiksi dengan $0 \notin X$. Maka pengandaian harus diingkar, jadi μ_t merupakan ideal dari *X*.

Teorema 3.2.6.

Diberikan BCI-aljabar *X*. Jika $\forall t \in [0,1]$, himpunan level $\mu_t = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq t\}$ merupakan ideal quasi-assosiatif, dimana $\mu_t \neq \phi$, maka ideal fuzzy *A* pada BCI-aljabar *X* juga merupakan quasi-assosiatif.

Bukti:

Akan dibuktikan *A* merupakan ideal fuzzy quasi-assosiatif.
Andaikan ideal fuzzy *A* bukan quasi-assosiatif, maka $\exists x_0, y_0, z_0 \in A \ni$

$$\mu_A((x_0 * y_0) * z_0) < \mu_A(x_0 * (y_0 * x_0))$$

Misal $t_0 = \dfrac{\left[\mu_A((x_0 * y_0) * z_0) + \mu_A(x_0 * (y_0 * z_0))\right]}{2} \in [0,1]$, maka

$$\mu_A((x_0 * y_0) * z_0) < t_0 \tag{3.23}$$

dan

$$\mu_A(x_0 * (y_0 * z_0)) > t_0 \tag{3.24}$$

Dari (3.24) diperoleh $x_0 * (y_0 * z_0) \in \mu_{t_0}$. Karena μ_t merupakan ideal quasi-assosiatif dari *X*, maka menurut Teorema 3.2.3 $(1 \Leftrightarrow 2)$, yaitu jika μ_t adalah ideal quasi-assosiatif maka berlaku $0 * x \prec x$, $\forall x \in \mu_t$. Berdasarkan Definisi 2.3.4, karena $\forall x \in \mu_t$ berlaku $(0 * x) \prec x$ maka μ_t adalah quasi-assosiatif. Sehingga $\forall x_0, y_0, z_0 \in \mu_t$ berlaku

$$\left(\left(x_0 * y_0\right) * z_0\right) \prec \left(x_0 * \left(y_0 * z_0\right)\right),$$

sehingga $\left(x_0 * y_0\right) * z_0 \in \mu_{t_0}$ dan mengakibatkan $\mu_A\left(\left(x_0 * y_0\right) * z_0\right) \geq t_0$, hal ini kontradiksi dengan (3.23). Maka pengandaian harus diingkar, yaitu A merupakan ideal fuzzy quasi-assosiatif.

Akibat 3.2.1.

Diberikan A ideal fuzzy dari BCI-aljabar X. Jika $I = \left\{x \in X \middle| \mu_A(x) = \mu_A(0)\right\}$ merupakan ideal quasi-assosiatif, maka A juga merupakan quasi-assosiatif.

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa $I = \left\{x \in X \middle| \mu_A(x) = \mu_A(0)\right\}$, merupakan ideal dari X. Diketahui X BCI-aljabar.

Andaikan I bukan ideal maka menurut Definisi 2.4.2(i) $\exists \mu'_A(0) \in [0.1] \ni 0 \notin I$. Sehingga menurut definisi himpunan level I maka $0 \notin X$.

Diketahui X BCI-aljabar maka $0 \in X$, hal ini kontradiksi dengan $0 \notin X$. Maka pengandaian harus diingkar, jadi I merupakan ideal dari X.

Kemudian akan dibuktikan A merupakan ideal fuzzy quasi-assosiatif.

Andaikan ideal fuzzy A bukan quasi-assosiatif, maka $\exists x_0, y_0, z_0 \in A \ni$

$$\mu_A\left(\left(x_0 * y_0\right) * z_0\right) < \mu_A\left(x_0 * \left(y_0 * x_0\right)\right)$$

Misal $\mu_A(0) > \dfrac{\left[\mu_A\left(\left(x_0 * y_0\right) * z_0\right) + \mu_A\left(x_0 * \left(y_0 * z_0\right)\right)\right]}{2} \in [0,1]$,

maka

$$\mu_A\left(\left(x_0 * y_0\right) * z_0\right) < \mu_A(0) \tag{3.25}$$

dan

$$\mu_A\left(x_0 * \left(y_0 * z_0\right)\right) = \mu_A(0) \tag{3.26}$$

Dari (3.26) diperoleh $x_0 * (y_0 * z_0) \in I$. Karena I merupakan ideal quasi-assosiatif dari *X*, maka menurut Teorema 3.2.3 $(1 \Leftrightarrow 2)$, yaitu jika I adalah ideal quasi-assosiatif maka berlaku $(0 * x) \prec x$, $\forall x \in I$. Berdasarkan Definisi 2.3.4, karena $\forall x \in I$ berlaku $(0 * x) \prec x$ maka I adalah quasi-assosiatif. Sehingga $\forall x_0, y_0, z_0 \in I$ berlaku

$$((x_0 * y_0) * z_0) \prec (x_0 * (y_0 * z_0))$$

sehingga $(x_0 * y_0) * z_0 \in I$ dan mengakibatkan $\mu_A((x_0 * y_0) * z_0) = \mu_A(0)$, hal ini kontradiksi dengan (3.25). Maka pengandaian harus diingkar, yaitu A merupakan ideal fuzzy quasi-assosiatif. Jadi terbukti *A* merupakan ideal fuzzy quasi-assosiatif.

Definisi 3.2.1. Supremum (Soemantri, 2000)

Diberikan S suatu himpunan terurut, dan $T \subseteq S$, dan T terbatas ke atas. Misal $\exists a \in S$ yang memenuhi sifat-sifat berikut:

(i). a adalah suatu batas atas *T*

(ii). jika $r < a$ maka r bukan batas atas *T*

maka a disebut batas atas terkecil dari *T* atau supremum himpunan *T*, dan dinotasikan

$$a = \sup T.$$

Definisi 3.2.2.

Diberikan $f : X \to Y$ suatu pemetaan dari BCI-aljabar *X* dan *Y*. Jika A merupakan ideal fuzzy dari *X* dengan fungsi keanggotaan μ_A, maka $f(A)$ merupakan ideal fuzzy dari *Y* dengan fungsi keanggotaan $\mu_{f(A)}$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\mu_{f(A)}(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x), y \in Y$$

dan

$$\mu_{f(A)}(y) = 0, \text{ jika } f^{-1}(y) = \phi.$$

Definisi 3.2.3.

Suatu himpunan fuzzy A dengan fungsi keanggotaan μ_A pada BCI-aljabar X dikatakan mempunyai sup properti (sifat supremum), jika untuk setiap himpunan bagian T dari X, $\exists t_0 \in T \ni$

$$\mu_A(t_0) = \sup_{t \in T} \mu_A(t).$$

Kemudian A disebut sebagai himpunan sup fuzzy (supremum fuzzy).

Teorema 3.2.7.

Diberikan $f : X \to Y$ suatu pemetaan yang homomorfisma surjektif dari BCI-aljabar X dan Y, dan A merupakan ideal fuzzy quasi-assosiatif pada X yang mempunyai sup properti (sup ideal fuzzy quasi-assosiatif), maka $f(A)$ merupakan ideal fuzzy quasi assosiatif pada Y.

Bukti:

Diketahui f merupakan pemetaan surjektif, maka $\forall y_0, y_1, y_2 \in Y$ $\exists x_0, x_1, x_2 \in X \ni y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$ dan $y_2 = f(x_2)$. Jadi setiap anggota di Y mempunyai kawan di X, sehingga dapat dinyatakan $x_0 \in f^{-1}(y_0), x_1 \in f^{-1}(y_1), x_2 \in f^{-1}(y_2)$.

Karena A merupakan ideal fuzzy quasi-assosiatif, maka menurut Definisi 2.6.4 $\forall x_0, x_1, x_2 \in X$ berlaku

$$\mu_A((x_0 * x_1) * x_2) \geq \mu_A(x_0 * (x_1 * x_2)),$$

di mana $(x_0 * x_1) * x_2 \in (f^{-1}(y_0) * f^{-1}(y_1)) * f^{-1}(y_2)$ dan $x_0 * (x_1 * x_2) \in f^{-1}(y_0) * (f^{-1}(y_1) * f^{-1}(y_2))$.

Diketahui f homomorfisma maka f^{-1} juga homomorfisma, maka dapat dinyatakan $(x_0 * x_1) * x_2 \in f^{-1}((y_0 * y_1) * y_2)$ dan $x_0 * (x_1 * x_2) \in f^{-1}(y_0 * (y_1 * y_2))$.

Karena A mempunyai sup properti maka menurut Definisi 3.2.3 untuk setiap himpunan bagian T dari X, $\exists t_0 \in T \ni$

$$\mu_A(t_0) = \sup_{t \in T} \mu_A(t).$$

$f^{-1}\left((y_0 * y_1) * y_2\right)$ dan $f^{-1}\left(y_0 * (y_1 * y_2)\right)$ merupakan himpunan bagian dari *X*, maka

$$\mu_A\left((x_0 * x_1) * x_2\right) = \sup_{t \in f^{-1}\left((y_0 * y_1) * y_2\right)} \mu_A(t)$$

$$\text{dan } \mu_A\left(x_0 * (x_1 * x_2)\right) = \sup_{t \in f^{-1}\left(y_0 * (y_1 * y_2)\right)} \mu_A(t)$$

Akan dibuktikan

$$\mu_{f(A)}\left((y_0 * y_1) * y_2\right) \geq \mu_{f(A)}\left(y_0 * (y_1 * y_2)\right)$$

Maka

$$\begin{aligned}
\mu_{f(A)}\left((y_1 * y_2) * y_3\right) &= \sup_{t \in f^{-1}\left((y_1 * y_2) * y_3\right)} \mu_A(t) && \text{(Definisi 3.2.2)} \\
&= \mu_A\left((x_0 * x_1) * x_2\right) \\
&\geq \mu_A\left(x_0 * (x_1 * x_2)\right) \\
&= \sup_{t \in f^{-1}\left(y_0 * (y_1 * y_2)\right)} \mu_A(t) && \text{(Definisi 3.2.2)} \\
&= \mu_{f(A)}\left(y_0 * (y_1 * y_2)\right).
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $\mu_{f(A)}\left((y_0 * y_1) * y_2\right) \geq \mu_{f(A)}\left(y_0 * (y_1 * y_2)\right)$.

Definisi 3.2.4.

Diberikan $f : X \to Y$ pemetaan surjektif dari BCI-aljabar *X* dan *Y*. Misal *B* merupakan himpunan fuzzy dari *Y* dengan fungsi keanggotaan μ_B, maka $f^{-1}(B)$ merupakan himpunan fuzzy dari *X* dengan fungsi keanggotaan $\mu_{f^{-1}(B)}$ yang didefinisikan oleh $\mu_{f^{-1}(B)}(x) = \mu_B f(x),\ \forall x \in X.$

Teorema 3.2.8.

Diberikan $f : X \to Y$ yang homomorfisma surjektif dari BCI-aljabar *X* dan *Y*. Jika ideal fuzzy *B* dari *Y* dengan fungsi keanggotaan μ_B

merupakan quasi-assosiatif, maka ideal fuzzy $f^{-1}(B)$ dari *X* dengan fungsi keanggotaan $\mu_{f^{-1}(B)}$ juga merupakan quasi-assosiatif.

Bukti:

Karena f merupakan pemetaan surjektif, maka $\forall y_0, y_1, y_2 \in Y$ $\exists x_0, x_1, x_2 \in X \ni y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1)$ dan $y_2 = f(x_2)$.

Karena *B* merupakan ideal fuzzy quasi-assosiatif dari *Y*, maka menurut Definisi 2.6.4 $\forall f(x_0), f(x_1), f(x_2) \in Y$ berlaku

$$\mu_B\left(\left(f(x_0) * f(x_1)\right) * f(x_2)\right) \geq \mu_B\left(f(x_0) * \left(f(x_1) * f(x_2)\right)\right).$$

Akan dibuktikan $\forall x_0, x_{1,} x_2 \in X$ berlaku

$$\mu_{f^{-1}(B)}\left((x_0 * x_1) * x_2\right) \geq \mu_{f^{-1}(B)}\left(x_0 * (x_1 * x_2)\right).$$

Maka

$$\begin{aligned}
\mu_{f^{-1}(B)}\left((x_0 * x_1) * x_2\right) &= \mu_B f\left((x_0 * x_1) * x_2\right) && \text{(Definisi 3.2.4)}\\
&= \mu_B\left(\left(f(x_0) * f(x_1)\right) * f(x_2)\right) && (f \text{ homomorfisma})\\
&\geq \mu_B\left(f(x_0) * \left(f(x_1) * f(x_2)\right)\right) &&\\
&= \mu_B f\left(x_0 * (x_1 * x_2)\right) && (f \text{ homomorfisma})\\
&= \mu_{f^{-1}(B)}\left(x_0 * (x_1 * x_2)\right) && \text{(Definisi 3.2.4)}
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa

$$\mu_{f^{-1}(B)}\left((x_0 * x_1) * x_2\right) \geq \mu_{f^{-1}(B)}\left(x_0 * (x_1 * x_2)\right), \forall x_0, x_{1,} x_2 \in X.$$

Yaitu $f^{-1}(B)$ merupakan ideal fuzzy quasi-assosiatif pada *X*.

BAB IV
KESIMPULAN

4.1. Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dari pembahasan adalah sebagai berikut:

1). Ideal fuzzy A pada BCI-aljabar dikatakan quasi-assosiatif jika $\forall t \in [0,1]$, himpunan level $\mu_t = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq t\}$ merupakan ideal quasi-assosiatif, dimana $\mu_t \neq \phi$ atau $I = \{x \in X, \mu_A(x) = \mu_A(0)\}$ merupakan ideal quasi-assosiatif.

2). Diberikan $f: X \rightarrow Y$ suatu pemetaan homomorfisma surjektif dengan X dan Y BCI-aljabar. Kedua pernyataan berikut akan berlaku.

(i). A sup ideal fuzzy quasi-assosiatif pada X dengan fungsi keanggotaan $\mu_A \Rightarrow f(A)$ ideal fuzzy quasi assosiatif pada Y dengan fungsi keanggotaan $\mu_{f(A)}$.

(ii). B ideal fuzzy quasi-assosiatif pada Y dengan fungsi keanggotaan $\mu_B \Rightarrow f^{-1}(B)$ Ideal fuzzy quasi-assosiatif pada X dengan fungsi keanggotaan $\mu_{f^{-1}(B)}$.

DAFTAR PUSTAKA

Ahmad, B. dan H.M. Khalid. 1996. *Quasi-Associative Fuzzy Ideal in BCI-Algebras*. http://streaming.ictp.trieste.it/preprints/P/96/160.pdf. International Center for Theoritical Physics. Pakistan. Tanggal akses: 12 Februari 2007.

Akram, M. dan K.H. Dar. 2005. On Fuzzy d-Algebras. *Journal of Mathematics.* Punjab University. 37:61-67

Aziz, S.H. dan J. Parthiban. 1996. Fuzzy Logic. *Surprise 96 Volume 4 (Final Reports)*. Department of Computing, Department of Electrical and Electronic Engineering, Imperial College of Science Technology and Medicine. London.

Bhattacharya, P.B., S.K. Jain dan S.R. Nagpul. 1994. *Basic Abstract Agebra*. Crambridge University Press. Crambidge.

Chaudry, M.A. dan H. Fakharuddin. 1999. On Some classes of BCH-Algebras. *Hindawi Publishing Crop.* 25:205-211

Dummit, D.S., 1999. *Abstract Algebra*. Second Edition. JohnWiley and Sons. New York.

Fraleigh, J. 1994. *A First Course In Abstract Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, New York.

Huang, W dan Y.B. Jun. 2002. Ideal and Subalgebras in BCI-Algebras. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*. 26:567-573

Jun, Y. B. 1994. Doubt Fuzzy BCK/BCI-Algebras. *Soochow Journal of Mathematics*. Korea. 20:351-358

Kandasamy, W. B., 2003. *Semarandache Fuzzy Algebra*. http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/Vasantha-

Book9.pdf. American Research Press. Rehoboth. Tanggal akses: 8 April 2007.

Liu, Y.L., J. Meng, X.H. Zhang dan Z.C. Yue. 2000. q-Ideals and a-Ideals in BCI-Algebras. *Southest Asian Bulletin of Mathematics*. China. 24:243-253

Soemantri, R. 2000. *Analisis Real I.* Pusat Penerbitan Universitas Terbuka. Jakarta.

Wahyudin. 1989. *Aljabar Modern*. Tarsito. Bandung.