

**ANALISIS DINAMIK MODEL EPIDEMIK PENYAKIT  
CAMPAK**

**TUGAS AKHIR**

Oleh:

**Yuanita Asri Wulandari**

**0310940061-94**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**

**JURUSAN MATEMATIKA**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS BRAWIJAYA**

**MALANG**

**2007**

**ANALISIS DINAMIK MODEL EPIDEMIK PENYAKIT  
CAMPAK**

**TUGAS AKHIR**

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh:

**Yuanita Asri Wulandari**

**0310940061-94**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**

**JURUSAN MATEMATIKA**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS BRAWIJAYA**

**MALANG**

**2007**

**LEMBAR PENGESAHAN TUGAS AKHIR**

**ANALISIS DINAMIK MODEL EPIDEMIK PENYAKIT  
CAMPAK**

Oleh:  
**YUANITA ASRI WULANDARI**  
**0310940061-94**

Setelah dipertahankan di depan majelis penguji  
pada tanggal 3 Agustus 2007  
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Sains dalam Bidang Matematika

**Dosen Pembimbing I**

**Dosen Pembimbing II**

**Drs. Marsudi, MS**  
**NIP. 131 759 585**

**Dr. Agus Suryanto, MSc**  
**NIP. 132 126 049**

**Mengetahui,**  
**Ketua Jurusan Matematika**  
**Fakultas MIPA Universitas Brawijaya**

**Dr. Agus Suryanto, MSc**  
**NIP. 132 126 049**

## LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Yuanita Asri Wulandari  
NIM : 0310940061-94  
Program Studi : Matematika  
Penulis Tugas Akhir berjudul : Analisis Dinamik Model  
Epidemik Penyakit Campak

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. Isi Tugas Akhir yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Tugas Akhir ini.
2. Apabila dikemudian hari ternyata Tugas Akhir yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan segala kesadaran.

Malang, 03 Agustus 2007

Yang menyatakan,

( Yuanita Asri Wulandari )

NIM 0310940061-94

# ANALISIS DINAMIK MODEL EPIDEMIK PENYAKIT CAMPAK

## ABSTRAK

Pada tugas akhir ini dibahas konstruksi dan analisis model SEIR untuk epidemik penyakit campak. Model yang diperoleh berupa sistem persamaan diferensial non-linier. Berdasarkan hasil analisis diperoleh dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit ( $U_0$ ) dan titik kesetimbangan endemik ( $U_e$ ). Jenis kestabilan kedua titik kesetimbangan tersebut ditentukan dengan cara melinierkan sistem di sekitar titik kesetimbangan. Titik kesetimbangan bebas penyakit merupakan titik stabil asimtotik untuk  $R_0 < 1$ , sedangkan titik kesetimbangan endemik merupakan titik stabil untuk  $R_0 > 1$ .  $R_0$  didefinisikan sebagai angka reproduksi dasar, yaitu suatu angka yang menunjukkan tingkat penularan infeksi campak. Pada saat  $R_0 < 1$ , populasi terbebas dari penyakit. Sedangkan pada saat  $R_0 > 1$ , di dalam populasi terjadi epidemik. Nilai  $R_0 = 1$  merupakan nilai kritis. Untuk memberikan gambaran yang lebih nyata tentang model digunakan data kasus campak di Kabupaten Malang tahun 2000. Secara geometris, dinamik dari model dapat dilihat dari simulasi untuk beberapa nilai laju infeksi.

**Kata kunci** : *epidemik, angka reproduksi dasar, kesetimbangan, kestabilan.*

# DYNAMICAL ANALYZE OF MEASLES EPIDEMIC MODEL

## ABSTRACT

In this final project we construct and analyze SEIR model for measles epidemic. This model is a non-linear differential equation system. According to our analysis, the model has two equilibrium states, namely disease-free equilibrium ( $U_0$ ) and endemic equilibrium ( $U_e$ ). By linearizing the system around each equilibrium, stability of the equilibrium can be determined. The disease-free equilibrium is asymptotically stable for  $R_0 < 1$ . On the other hand, the endemic equilibrium is stable for  $R_0 > 1$ .  $R_0$  is defined as basic reproduction number, i.e the number of measles infection spread degree. When  $R_0 < 1$ , the population is free from disease and when  $R_0 > 1$ , epidemic is occurred.  $R_0 = 1$  is a critical value. To give more real view about the model, we implement our model to the case of measles at Malang in year 2000. Geometrically, the dynamic of the model can be seen from the simulation using some values of infection rate.

**Key words:** *epidemic, basic reproduction number, equilibrium, stability.*

## KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirobbil'alamin, tiada kata yang lebih indah selain ucap syukur kepada Allah SWT, yang memberi petunjuk bagi hamba-hambanya. Segala puji bagi Allah SWT atas segala nikmat dan karunia yang diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini.

Dalam proses penyusunan tugas akhir yang berjudul “**Analisis Dinamik Model Epidemik Penyakit Campak**” penulis tidak dapat menyelesaikannya sendiri tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak. Untuk itu penghargaan serta rasa terima kasih, penulis sampaikan kepada:

1. Drs.Marsudi MS, selaku dosen pembimbing I atas dorongan, semangat dan bimbingannya, serta waktu yang telah diberikan kepada penulis selama penyusunan tugas akhir ini.
2. Dr. Agus Suryanto, MSc, selaku dosen pembimbing II dan Ketua Jurusan Matematika atas dorongan, semangat dan bimbingannya, serta waktu yang telah diberikan kepada penulis selama penulisan tugas akhir ini.
3. Bapak dan ibu tercinta, atas segala doa, kasih sayang, dorongan serta fasilitas yang telah diberikan dengan tulus. Semoga Tuhan memberikan waktu kepada penulis untuk membalasnya.
4. Saudara-saudaraku, mbak yopi dan adikku David, serta semua keluargaku, terima kasih atas doa, kasih sayang, perhatian serta pengertian yang diberikan.
5. Abangku (Biqi), terima kasih atas motivasi, dukungan dan kasih sayang yang diberikan. Semoga Tuhan meridhoi segala proses kehidupan kita dan memberikan hikmah tersendiri buat kita.
6. Segenap Staf pengajar jurusan Matematika dan karyawan Tata Usaha Matematika Universitas Brawijaya yang banyak membantu selama penulis menempuh studi disini.
7. Sahabatku Illiyu, Diah, Siska dan teman sekamarku Atiq, terima kasih atas bantuan dan persahabatan yang diberikan.
8. Teman-teman Matematika 2003, terima kasih atas bantuan dan persahabatan yang terjalin.
9. Teman-teman Matematika 2002 dan 2001, terima kasih atas bantuan yang diberikan kepada penulis.
10. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu

Akhirnya, semoga Allah SWT yang akan membalas semuanya. Penulis menyadari tugas akhir ini masih terdapat banyak kekurangan, untuk itu masukan yang membangun penulis harapkan untuk kesempurnaan tugas akhir ini. Semoga tulisan ini dapat bermanfaat bagi pembaca.

Penulis

UNIVERSITAS BRAWIJAYA





## DAFTAR ISI

	Halaman
<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	i
<b>LEMBAR PENGESAHAN</b> .....	ii
<b>LEMBAR PERNYATAAN</b> .....	iii
<b>ABSTRAK</b> .....	iv
<b>ABSTRACT</b> ..	v
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	vi
<b>DAFTAR ISI</b> ..	viii
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	x
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xi
<b>BAB I PENDAHULUAN</b> .....	1
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	2
1.3 Tujuan Penelitian .....	2
1.4 Batasan Masalah .....	2
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA</b> .....	3
2.1 Persamaan Diferensial .....	3
2.2 Sistem Persamaan Diferensial .....	4
2.3 Sistem Otonomus .....	4
2.4 Titik Keseimbangan Sistem Otonomus .....	4
2.5 Kestabilan Sistem Otonomus .....	5
2.5.1 Kestabilan Sistem Otonomus Linier .....	5
2.5.2 Kestabilan Sistem Otonomus Non-linier .....	7
<b>BAB III PEMBAHASAN</b> .....	11
3.1 Model Kompartemen Penyebaran Penyakit Campak .....	11
3.2 Konstruksi Model .....	12
3.3 Titik Keseimbangan .....	15
3.3.1 Titik Keseimbangan Bebas Penyakit.....	16
3.3.2 Titik Keseimbangan Endemik .....	17
3.4 Kestabilan Titik Keseimbangan .....	18
3.4.1 Titik Keseimbangan Bebas Penyakit.....	19
3.4.2 Titik Keseimbangan Endemik .....	20
3.5 Angka Reproduksi Dasar .....	22
3.6 Implementasi Model .....	23

<b>BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN</b> .....	30
4.1 Kesimpulan .....	30
4.2 Saran .....	31
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	32

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## DAFTAR TABEL

Halaman

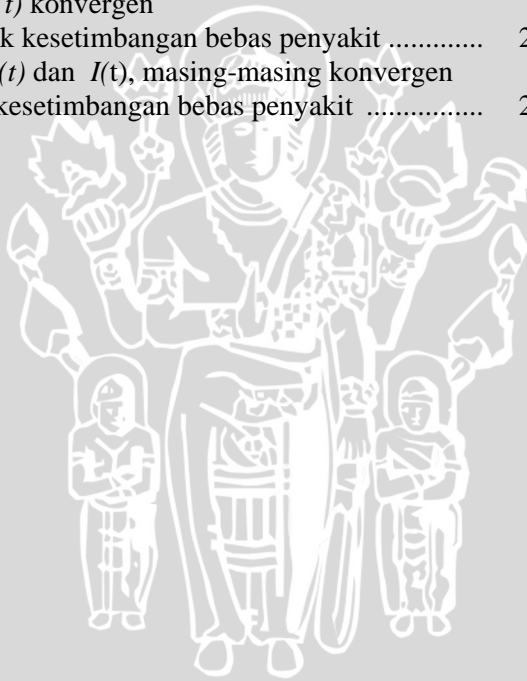
Tabel 3.1 Parameter model penyebaran penyakit campak ..... 25

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 3.1 Diagram kompartemen dari aliran host.....	11
Gambar 3.2 Grafik $S(t)$ konvergen ke titik kesetimbangan 52.173 .....	25
Gambar 3.3 Grafik $E(t)$ dan $I(t)$ , berturut-turut konvergen ke titik kesetimbangan 729 dan 638 .....	26
Gambar 3.4 Grafik $S(t)$ konvergen ke titik kesetimbangan 2.382.258 .....	27
Gambar 3.5 Grafik $E(t)$ dan $I(t)$ , masing-masing konvergen ke titik kesetimbangan nol .....	28
Gambar 3.6 Grafik $S(t)$ konvergen pada titik kesetimbangan bebas penyakit .....	29
Gambar 3.7 Grafik $E(t)$ dan $I(t)$ , masing-masing konvergen ke titik kesetimbangan bebas penyakit .....	29



# BAB 1

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Campak (*Measles*) adalah penyakit yang disebabkan oleh virus khususnya *Paramyxovirus* dari jenis *Morbillivirus*. Penyakit ini sangat berbahaya karena dapat menyebabkan cacat dan kematian yang diakibatkan oleh komplikasi seperti radang paru (*pneumonia*), berak-berak (diare), radang telinga (otitis media) dan radang otak (*ensefalitis*), terutama pada anak dengan gizi buruk. Penyakit ini ditularkan melalui kontak fisik dengan orang yang terinfeksi campak.

Model yang sering digunakan dalam mengkaji masalah epidemik adalah model deterministik dan model stokastik. Model deterministik adalah suatu model matematika di mana keadaan sebelumnya menentukan keadaan berikutnya secara pasti. Sedangkan model stokastik adalah suatu model matematika di mana keadaan sebelumnya dapat menghasilkan bermacam-macam keadaan berikutnya dengan peluangnya masing-masing. Model yang digunakan dalam penelitian ini adalah model deterministik SEIR untuk epidemik campak. Model *SEIR* ini memuat empat kompartemen, yaitu *Susceptibles*, *Exposed*, *Infectious* dan *Recovery*. *Susceptibles* adalah kelompok individu dalam keadaan sehat tetapi mempunyai kemungkinan untuk tertular penyakit. *Exposed* adalah kelompok individu yang telah tertular penyakit tetapi belum mempunyai kemampuan untuk menularkan penyakitnya pada individu lain. *Infectious* adalah kelompok individu yang telah tertular penyakit dan sudah mempunyai kemampuan untuk menularkan penyakitnya pada individu lainnya. *Recovery* adalah kelompok individu yang telah sembuh dari penyakitnya.

Model sejenis yang sebelumnya pernah dibahas oleh Sari (2006) memfokuskan pada penggunaan teori Markov untuk model epidemik campak yang berupa sistem persamaan diferensi.

Selanjutnya, dalam penelitian ini dilakukan proses pemodelan epidemik campak yang menghasilkan sistem persamaan diferensial. Pada model ini dipelajari perilaku kualitatif berupa analisis sistem dinamik untuk menentukan adanya titik kesetimbangan dan jenis kestabilannya.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang permasalahan di atas, pokok permasalahan yang dibahas dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana mengkonstruksi model *SEIR* untuk epidemik penyakit campak?
2. Bagaimana menentukan kestabilan titik kesetimbangan model *SEIR* untuk epidemik penyakit campak?
3. Bagaimana implementasi model tersebut untuk kasus campak yang terjadi di kabupaten Malang?

## 1.3 Tujuan

Tujuan tugas akhir ini adalah untuk:

1. Mengkonstruksi model *SEIR* untuk epidemik penyakit campak.
2. Menganalisis kestabilan titik kesetimbangan model *SEIR* untuk epidemik penyakit campak.
3. Mengimplementasikan model *SEIR* untuk kasus campak yang terjadi di kabupaten Malang.

## 1.4 Batasan Masalah

Penulisan tugas akhir ini difokuskan pada pembahasan dengan beberapa batasan masalah, yaitu.

1. Populasi diasumsikan homogen
2. Populasi bersifat tertutup artinya terjadinya penambahan atau pengurangan jumlah individu hanya melalui kelahiran dan kematian, sedangkan penambahan atau pengurangan jumlah individu melalui migrasi diabaikan.
3. Jumlah populasi konstan  $N$  (tingkat kelahiran alami = tingkat kematian alami).
4. Individu yang telah sembuh dari penyakit tidak akan tertular kembali oleh penyakit campak.
5. Laju perubahan individu dari kelas *Recovery* tidak diperhatikan.

## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA

#### 2.1 Persamaan Diferensial

##### Definisi 2.1:

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat hubungan antara fungsi yang tidak diketahui (variabel tak bebas) dengan satu atau lebih turunannya (Edward dan Penny, 2001).

##### Definisi 2.2:

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang memuat turunan biasa dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebasnya (Boyce dan DiPrima, 1986).

Persamaan diferensial biasa linier orde  $n$  adalah persamaan berbentuk  $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$  yang menyatakan hubungan antara peubah bebas  $x$ , peubah tak bebas  $y(x)$  dan turunannya yaitu  $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ .

Persamaan diferensial biasa linier ordo  $n$ , dalam variabel tak bebas  $y$  dan variabel bebas  $x$  adalah persamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x) y = f(x) \quad (2.1)$$

dengan  $a_0(x) \neq 0$ . Jika  $f(x) = 0$ , maka persamaan (2.1) disebut sebagai persamaan diferensial linier homogen (Finizio dan Ladas, 1982).

##### Definisi 2.3:

Persamaan diferensial biasa non-linier adalah persamaan diferensial biasa di mana variabel tak bebas  $y$  dan turunannya, berderajat lebih dari satu dan ada perkalian antara variabel tak bebas  $y$  dan turunannya (Ross, 1984).

## 2.2 Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang memuat  $n$  buah persamaan diferensial dengan  $n$  buah fungsi yang tidak diketahui, di mana  $n$  merupakan bilangan bulat positif dengan  $\geq 2$ . Bentuk umum sistem persamaan diferensial ordo  $n$  adalah  $\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n)$ ,  $i=1, \dots, n$  di mana  $\dot{x}_i$  merupakan turunan fungsi  $x_i$  terhadap  $t$ , dengan  $x_i$  adalah fungsi dari  $t$  yang tidak diketahui dan  $f_i$  adalah fungsi yang diberikan dalam  $n+1$  variabel (Finizio dan Ladas, 1982).

## 2.3 Sistem Otonomus

Sistem otonomus mempunyai bentuk:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \dot{y} &= \frac{dy}{dt} = g(x, y)\end{aligned}\tag{2.2}$$

di mana turunan  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  dan  $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$  hanya bergantung pada titik  $(x, y)$  dan tidak bergantung secara eksplisit pada parameter  $t$  (Giordano, 1994).

## 2.4 Titik Kesetimbangan Sistem Otonomus

### Definisi 2.4:

Titik kritis sistem (2.2) adalah titik  $(x^*, y^*)$  sedemikian sehingga  $f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$ . Titik kritis  $(x^*, y^*)$  merupakan solusi sistem (2.2) yang bernilai konstan sebab  $\frac{dx}{dt} = 0$  dan  $\frac{dy}{dt} = 0$ . Keadaan yang menyebabkan  $\frac{dx}{dt} = 0$  dan  $\frac{dy}{dt} = 0$  disebut sebagai keadaan setimbang, dan titik yang memenuhi disebut titik kesetimbangan (Edward-Penney, 2001).



## 2.5 Kestabilan Sistem Otonomus

### Definisi 2.5.

Titik kesetimbangan  $(x^*, y^*)$  disebut stabil jika untuk  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  sedemikian sehingga

$\|(x(0), y(0)) - (x^*, y^*)\| < \delta \Rightarrow \|(x(t), y(t)) - (x^*, y^*)\| < \varepsilon$   
untuk  $t \geq 0$  (Robinson, 2004).

### Definisi 2.6.

Suatu titik kesetimbangan  $(x^*, y^*)$  yang tidak memenuhi Definisi 2.5 disebut tidak stabil.

### Definisi 2.7.

Suatu titik kesetimbangan  $(x^*, y^*)$  disebut stabil asimtotik jika.

1. Titik  $(x^*, y^*)$  stabil
2. Ada  $0 < \delta_0$  dengan  $0 < \delta_0 < \delta$  sedemikian sehingga untuk setiap solusi  $x = x(t)$  dan  $y = y(t)$ , pada  $t=0$  berlaku  $\|(x(0), y(0)) - (x^*, y^*)\| < \delta_0$ , untuk  $t \geq 0$
3.  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$  dan  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y^*$

(Boyce dan DiPrima, 1986).

### 2.5.1 Kestabilan Sistem Otonomus Linier

Perhatikan sistem persamaan diferensial otonomus linier berikut

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Persamaan (2.3) dapat ditulis dalam bentuk matriks, yaitu

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

atau

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, \quad (2.5)$$

dengan  $a, b, c, d$  adalah konstanta riil dan  $\det A \neq 0$ . Titik  $(0, 0)$  adalah titik kesetimbangan sistem (2.3). Solusi yang berbentuk eksponensial dari sistem (2.3) adalah

$$\vec{x} = \vec{\zeta} e^{\lambda t}, \quad \vec{\zeta} = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

di mana  $\lambda$  adalah konstanta skalar dan  $\vec{\zeta}$  adalah vektor. Dengan mensubstitusikan (2.6) ke sistem (2.5) akan diperoleh

$$\lambda \vec{\zeta} e^{\lambda t} = A \vec{\zeta} e^{\lambda t} \quad (2.7)$$

Jika persamaan (2.7) dibagi dengan  $e^{\lambda t}$  maka persamaan tersebut menjadi  $\lambda \vec{\zeta} = A \vec{\zeta}$ , atau

$$(A - \lambda I) \vec{\zeta} = 0. \quad (2.8)$$

Persamaan (2.8) dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Persamaan (2.9) mempunyai penyelesaian non-trivial jika

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

yaitu

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0. \quad (2.10)$$

Persamaan (2.10) dikenal sebagai persamaan karakteristik, dan akar persamaannya disebut dengan nilai eigen.

### **Teorema 2.1**

- a) Titik kesetimbangan dari sistem (2.3) adalah stabil, jika semua nilai eigen pada persamaan karakteristik adalah real dan negatif atau mempunyai bagian real tak positif.
- b) Titik kesetimbangan dari sistem (2.3) adalah stabil asimtotik, jika semua nilai eigen pada persamaan karakteristik adalah real dan negatif atau mempunyai bagian real negatif
- c) Titik kesetimbangan dari sistem (2.3) adalah tidak stabil, jika semua nilai eigen pada persamaan karakteristik adalah real dan positif atau jika paling sedikit satu akar mempunyai bagian real yang positif.

(Finizio dan Ladas, 1982).

### **2.5.2 Kestabilan Sistem Otonomus Non-Linier**

Perhatikan sistem otonomus non-linier berikut

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \dot{y} &= \frac{dy}{dt} = g(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Anggap bahwa fungsi  $f$  dan  $g$  mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik  $(x^*, y^*)$ , maka deret Taylor fungsi  $f$  dan  $g$  disekitar  $(x^*, y^*)$  adalah

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x^*, y^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x}(x - x^*) + \\ &\quad \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y}(y - y^*) + \eta_1(x, y) \end{aligned} \quad (2.12)$$

dan

$$f(x, y) = g(x^*, y^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y}(y - y^*) + \eta_2(x, y), \quad (2.13)$$

di mana  $\eta_1(x, y)$  dan  $\eta_2(x, y)$  merupakan suku sisa. Untuk hampiran order satu atau linier di atas, suku sisa tersebut memenuhi

$$\lim_{\vec{w} \rightarrow (x^*, y^*)} \frac{\eta_1(x, y)}{\|\vec{w}\|} = 0 \quad \text{dan} \quad \lim_{\vec{w} \rightarrow (x^*, y^*)} \frac{\eta_2(x, y)}{\|\vec{w}\|} = 0, \quad (2.14)$$

dengan

$$\vec{w} = (x - x^*, y - y^*).$$

Dengan menggunakan  $\frac{dx}{dt} = \frac{d(x - x^*)}{dt}$  dan  $\frac{dy}{dt} = \frac{d(y - y^*)}{dt}$ , persamaan (2.12) dan (2.13) dapat ditulis dalam bentuk matriks, yaitu

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f(x^*, y^*) \\ g(x^*, y^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y}(y - y^*) \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y}(y - y^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(x, y) \\ \eta_2(x, y) \end{bmatrix}$$

atau

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f(x^*, y^*) \\ g(x^*, y^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(x, y) \\ \eta_2(x, y) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Matriks

$$DF(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

disebut matriks Jacobi atau *derivative matrix*.

Jika dimisalkan  $u = x - x^*$ ,  $v = y - y^*$ , sehingga  $\vec{w} = (u, v)$  dan mengingat  $f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$ , maka persamaan (2.14) dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

atau

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = DF\vec{w} + \vec{\eta}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Untuk  $(x, y)$  yang cukup dekat dengan  $(x^*, y^*)$ ,  $(u, v)$  bernilai kecil, berdasarkan persamaan (2.14) diperoleh  $\|\vec{\eta}\| \leq \|\vec{w}\|$ . Oleh karena itu  $\vec{\eta}$  dapat diabaikan dan sistem non-linier (2.11) dapat dihampiri oleh sistem linier

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = DF\vec{w}. \quad (2.19)$$

Untuk  $x = x^*$ ,  $y = y^*$  diperoleh  $(u^*, v^*) = (0, 0)$ , sehingga sistem linier (2.18) memiliki titik kesetimbangan  $(u^*, v^*) = (0, 0)$  dan  $DF$  identik dengan  $A$  dalam persamaan (2.5).

### **Teorema 2.2**

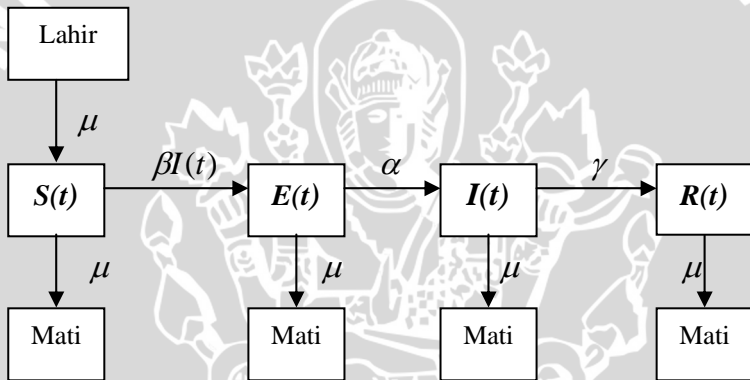
1. Titik kesetimbangan dari sistem otonomus non-linier (2.11) adalah stabil asimtotik jika titik kesetimbangan dari sistem yang dilinierkan adalah stabil asimtotik.
2. Titik kesetimbangan dari sistem otonomus non-linier (2.11) adalah takstabil jika titik kesetimbangan dari sistem yang dilinierkan adalah takstabil.
3. Jika satu nilai eigen dari matriks  $DF(x^*, y^*)$  bernilai nol dan lainnya mempunyai bagian real negatif, maka titik kesetimbangannya adalah stabil tapi tidak stabil asimtotik.

(Robinson, 2004).

## BAB III PEMBAHASAN

### 3.1 Model Kompartemen Penyebaran Penyakit Campak

Epidemik penyakit campak dapat digambarkan dengan menggunakan model deterministik atau model kompartemen. Model deterministik ini membagi populasi ke dalam empat kompartemen, yaitu *Suseptibles*, *Exposed*, *Infectious*, dan *Recovery*. Secara skematis, perubahan dari kompartemen *Susceptibles* ke dalam *Exposed*, *Infectious* dan akhirnya ke dalam kompartemen *Recovery* disajikan dalam Gambar 3.1 berikut.



Gambar 3.1 Diagram kompartemen dari aliran host

dengan

$S(t)$  = jumlah *Susceptible* pada waktu  $t$

$E(t)$  = jumlah *Exposed* pada waktu  $t$

$I(t)$  = jumlah *Infectious* pada waktu  $t$

$R(t)$  = jumlah *Recovery* pada waktu  $t$

$\beta$  = laju infeksi per unit waktu

$\alpha$  = laju perubahan individu *Exposed* menjadi *Infectious* dalam satuan waktu

$\gamma$  = laju perubahan individu *Infectious* menjadi *Recovery* dalam satuan waktu

$\mu$  = laju kematian (kelahiran) per unit waktu.

Untuk mendapatkan parameter model SEIR, Trotier dan Philippe (2002) telah mengestimasi rumus laju  $\alpha, \gamma, \mu$  adalah sebagai berikut:

- Laju infektivitas ( $\alpha$ ) = 1/ rata-rata periode laten;
- Laju *recovered* ( $\gamma$ ) = 1/ rata-rata periode infeksius;
- Laju kematian/kelahiran ( $\mu$ ) = 1/rata-rata nilai harapan hidup.

### 3.2 Konstruksi Model

Model SEIR untuk epidemik campak diperoleh dengan menerjemahkan model kompartemen di atas ke dalam model matematika. Penyebaran penyakit campak diasumsikan memenuhi hukum aksi massa yaitu perubahan subtansi dalam suatu lingkungan tertutup sama dengan jumlah materi yang masuk dikurangi dengan jumlah materi yang keluar. Misalkan  $S(t)$ ,  $E(t)$ , dan  $I(t)$  berturut-turut menyatakan banyaknya individu *Susceptible*, *Exposed* dan *Infectious* pada saat  $t$ , maka  $S(t), E(t), I(t), R(t) \geq 0$ . Laju perubahan dari individu *Susceptible*, *Exposed*, *Infectious* dan *Recovery* diperoleh dengan asumsi berikut.

1. Misalkan  $N$  menyatakan banyaknya individu dalam populasi. Semua individu dalam populasi yang lahir sehat mempunyai kemungkinan terinfeksi oleh penyakit campak pada saat  $t$  dan disebut individu *Susceptible*. Laju perubahannya berbanding lurus dengan banyaknya individu dalam populasi pada saat  $t$ , yaitu

$$\frac{dS(t)}{dt} = \mu N \quad (3.1)$$

dengan  $\mu > 0$  menyatakan koefisien laju kelahiran.

2. Penyebaran penyakit campak terjadi melalui kontak langsung dengan penderita campak. Jika individu *Susceptible* melakukan kontak langsung dengan individu *Infectious*, maka individu *Susceptible* akan terinfeksi. Individu yang telah terinfeksi oleh penyakit campak belum mampu menularkan penyakit pada individu lain, dan disebut sebagai individu *Exposed*. Keadaan ini menyebabkan berkurangnya individu *Susceptible*, sedangkan individu *Exposed* bertambah. Kemudian, berkurangnya Individu *Susceptible* juga bisa disebabkan oleh kematian alami dengan



kecepatan  $\mu$ , sehingga laju perubahan individu *Susceptible* berbanding lurus dengan berkurangnya individu *Susceptible* karena kematian alami dan akibat melakukan kontak langsung dengan individu *Infectious* pada saat  $t$ , yaitu

$$\frac{dS(t)}{dt} = -(\mu + \beta I(t))S(t) \quad (3.2)$$

dengan  $\mu$  menyatakan koefisien laju kematian dan  $\beta > 0$  menyatakan koefisien laju infeksi. Dari persamaan (3.1) dan (3.2) dapat dibuat model laju perubahan dari individu *Susceptible* terhadap waktu, yaitu

$$\frac{dS(t)}{dt} = \mu N - (\mu + \beta I(t))S(t) \quad (3.3)$$

3. Semakin banyak individu *Susceptible* yang melakukan kontak dengan individu *Infectious* menyebabkan bertambahnya individu *Exposed*. Laju perubahan individu *Exposed* berbanding lurus dengan jumlah individu *Susceptible* yang melakukan kontak dengan individu *Infectious* pada saat  $t$ , yaitu

$$\frac{dE(t)}{dt} = \beta I(t)S(t), \quad (3.4)$$

dengan  $\beta$  menyatakan koefisien laju infeksi. Setelah periode laten yaitu waktu pada saat individu mulai terinfeksi sampai munculnya gejala, individu *Exposed* akan berubah menjadi individu *Infectious*. Individu *Exposed* akan berkurang sedangkan individu *Infectious* akan bertambah. Kemungkinan lain yang menyebabkan berkurangnya individu *Exposed* adalah adanya kematian alami dengan laju  $\mu$ , sehingga dapat dibuat model laju perubahan berkurangnya individu *Exposed* sebagai

$$\frac{dE(t)}{dt} = -(\mu + \alpha)E(t) \quad (3.5)$$

dengan  $\alpha > 0$  menyatakan koefisien laju infektivitas dan  $\mu$  menyatakan koefisien laju kematian. Dari persamaan (3.4) dan (3.5) dapat dibuat model laju perubahan dari individu *Exposed* terhadap waktu, yaitu

$$\frac{dE(t)}{dt} = \beta I(t)S(t) - (\mu + \alpha)E(t) \quad (3.6)$$

4. Perubahan individu *Exposed* menjadi individu *Infectious* menyebabkan bertambahnya individu *Infectious*. Laju perubahannya berbanding lurus dengan jumlah individu *Exposed* pada saat  $t$ , yaitu

$$\frac{dI(t)}{dt} = \alpha E(t). \quad (3.7)$$

Terdapat dua kemungkinan yang menyebabkan berkurangnya individu *Infectious*, kemungkinan yang pertama individu *Infectious* akan sembuh dari penyakit dengan laju  $\gamma > 0$  dan kemungkinan yang kedua individu *Infectious* akan mati secara alami dengan laju  $\mu$ , sehingga laju perubahan berkurangnya individu *Infectious* berbanding lurus dengan jumlah individu *Infectious* pada saat  $t$ , yaitu

$$\frac{dI(t)}{dt} = -(\mu + \gamma)I(t), \quad (3.8)$$

di mana  $\mu$  menyatakan koefisien laju kematian dan  $\gamma$  menyatakan koefisien laju kesembuhan (*Recovery*). Dari persamaan (3.7) dan (3.8) dapat dibuat model laju perubahan individu *Infectious* terhadap waktu sebagai

$$\frac{dI(t)}{dt} = \alpha E(t) - (\mu + \gamma)I(t). \quad (3.9)$$

5. Berkurangnya jumlah individu *Infectious* karena sembuh dari penyakit, menyebabkan jumlah individu *Recovery* meningkat. Karena adanya kematian alami, maka pada suatu ketika individu *Recovery* akan berkurang, sehingga laju perubahan individu dari kelas *Recovery* yaitu

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \mu R(t) \quad (3.10)$$

Dengan demikian laju perubahan dari masing-masing individu memenuhi sistem persamaan diferensial non-linier berikut.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= \mu N - (\mu + \beta I(t))S(t) \\ \frac{dE(t)}{dt} &= \beta I(t)S(t) - (\mu + \alpha)E(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \alpha E(t) - (\mu + \gamma)I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \gamma I(t) - \mu R(t) \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

dengan  $t \geq 0$ .

Untuk dapat menyelesaikan sistem persamaan diferensial (3.11) diperlukan adanya nilai awal. Misalkan jumlah individu *Susceptible*, *Exposed*, *Infectious* dan *Recovery* pada keadaan awal berturut-turut adalah  $S_0$ ,  $E_0$ ,  $I_0$  dan  $R_0$ , maka nilai awal dari sistem (3.11) yaitu

$$S(0) = S_0, \quad E(0) = E_0, \quad I(0) = I_0 \quad \text{dan} \quad R(0) = R_0$$

di dalam domain

$$D = \{(S, E, I, R) \in \mathbb{R}_+^4 \mid S + E + I + R = N\}. \quad (3.12)$$

Dari sistem (3.11) terlihat bahwa individu *Recovery* tidak mempengaruhi laju perubahan dari individu *Susceptible*, *Exposed* dan *Infectious*, sehingga di dalam analisis laju perubahan individu *Recovery* tidak diperhatikan.

(Jansen,1994)

### 3.3 Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan sistem persamaan (3.11) dapat diperoleh dengan cara membuat ruas kanan sistem persamaan (3.11) sama dengan nol, yaitu

$$\frac{dS(t)}{dt} = \mu N - (\mu + \beta I(t))S(t) = 0 \quad (3.13)$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \beta I(t)S(t) - (\mu + \alpha)E(t) = 0 \quad (3.14)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \alpha E(t) - (\mu + \gamma)I(t) = 0. \quad (3.15)$$

Dari persamaan (3.15) diperoleh

$$\begin{aligned} \alpha E(t) &= (\mu + \gamma)I(t) \\ E(t) &= \frac{(\mu + \gamma)}{\alpha} I(t). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.16) ke dalam persamaan (3.14) didapatkan

$$\begin{aligned} \beta I(t)S(t) - \frac{(\mu + \alpha)(\mu + \gamma)}{\alpha} I(t) &= 0 \\ I(t)\left(\beta S(t) - \frac{(\mu + \alpha)(\mu + \gamma)}{\alpha}\right) &= 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

sehingga  $I(t) = 0$  atau  $\beta S(t) - \frac{(\mu + \alpha)(\mu + \gamma)}{\alpha} = 0$ .

### 3.3.1 Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Untuk kasus  $I(t) = 0$ , persamaan (3.13) menjadi

$$\begin{aligned} \mu N - \mu S(t) &= 0 \\ \mu(N - S(t)) &= 0. \end{aligned}$$

Karena  $\mu > 0$ , diperoleh  $S(t) = N$ .

Dengan mensubstitusikan  $I(t) = 0$  ke dalam persamaan (3.16) didapatkan

$$E(t) = 0,$$

sehingga diperoleh titik keseimbangan awal (trivial) dari sistem (3.11), yaitu

$$U_0 = (S_1^*, E_1^*, I_1^*) = (N, 0, 0).$$

Titik kesetimbangan  $U_0$  menjelaskan bahwa pada keadaan ini terdapat individu *Susceptible* sebanyak jumlah individu dalam populasi yaitu  $N$ , sedangkan jumlah individu *Exposed* dan individu *Infectious* sama dengan nol. Hal ini menunjukkan bahwa tidak terdapat individu *Exposed* dan individu *Infectious* dalam populasi, sehingga tidak pernah terjadi kontak antara individu *Susceptible* dengan individu *Infectious* atau dengan kata lain semua individu dalam keadaan sehat. Keadaan seperti ini disebut keadaan bebas penyakit. Oleh karena itu jumlah individu *Susceptible* tidak pernah berkurang dan selalu bernilai  $N$ , sedangkan jumlah individu *Exposed* dan individu *Infectious* tidak pernah bertambah dan selalu berjumlah nol. Dengan demikian, titik kesetimbangan ini disebut sebagai titik kesetimbangan bebas penyakit.

### 3.3.2 Titik Kesetimbangan Endemik

Dari persamaan (3.17), untuk kasus  $I(t) \neq 0$ , diperoleh

$$\begin{aligned} \beta S(t) - \frac{(\mu + \alpha)(\mu + \gamma)}{\alpha} &= 0 \\ \beta S(t) &= \frac{(\mu + \alpha)(\mu + \gamma)}{\alpha} \\ S(t) &= \frac{(\mu + \alpha)(\mu + \gamma)}{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Persamaan (3.18) disubstitusikan ke dalam persamaan (3.13) untuk memperoleh

$$\begin{aligned} \mu N - (\mu + \beta I(t)) \frac{(\mu + \alpha)(\mu + \gamma)}{\alpha\beta} &= 0 \\ (\mu + \beta I(t)) &= \frac{\mu N \alpha \beta}{(\mu + \alpha)(\mu + \gamma)} \\ \beta I(t) &= \frac{\mu N \alpha \beta}{(\mu + \alpha)(\mu + \gamma)} - \mu \\ I(t) &= \frac{\mu N \alpha}{(\mu + \alpha)(\mu + \gamma)} - \frac{\mu}{\beta}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (3.19) ke dalam persamaan (3.16), didapatkan

$$E(t) = \frac{(\mu + \gamma)}{\alpha} \left( \frac{\mu N \alpha}{(\mu + \alpha)(\mu + \gamma)} - \frac{\mu}{\beta} \right)$$

$$E(t) = \frac{\mu N}{(\mu + \alpha)} - \frac{\mu(\mu + \gamma)}{\beta \alpha}. \quad (3.20)$$

Dengan demikian diperoleh titik kesetimbangan non-trivial, yaitu

$$U_e = (S_2^*, E_2^*, I_2^*)$$

dengan

$$S_2^* = \frac{(\mu + \alpha)(\mu + \gamma)}{\alpha \beta}$$

$$E_2^* = \frac{\mu N}{(\mu + \alpha)} - \frac{\mu(\mu + \gamma)}{\beta \alpha} \quad (3.21)$$

$$I_2^* = \frac{\mu N \alpha}{(\mu + \alpha)(\mu + \gamma)} - \frac{\mu}{\beta}.$$

Titik kesetimbangan  $U_e$  terjadi pada saat jumlah individu *Infectious* menjadi  $I_2^* > 0$ , yaitu bila dalam populasi mulai terdapat individu *Infectious*. Hal ini memungkinkan individu *Susceptible* melakukan kontak dengan individu *Infectious*, sehingga mengakibatkan terjadinya perubahan individu dari *Susceptible* menjadi *Exposed*. Jika ini terjadi, maka jumlah individu *Exposed* akan bertambah, sedangkan individu *Susceptible* berkurang. Kemudian individu *Exposed* akan mengalami perubahan menjadi individu *Infectious* sehingga menyebabkan jumlah individu *Exposed* berkurang, sedangkan individu *Infectious* bertambah. Keadaan seperti ini akan terus berlangsung sampai pada jumlah tertentu di mana masing-masing individu tidak akan mengalami penambahan atau pengurangan. Karena dalam populasi telah terdapat infeksi, sehingga titik kesetimbangan ini disebut titik kesetimbangan endemik

### 3.4 Kestabilan Titik Kesetimbangan

Linierisasi sistem persamaan (3.11) menggunakan matriks Jacobi menghasilkan

$$DF(S, E, I) = \begin{bmatrix} -(\mu + \beta I) & 0 & -\beta S \\ \beta I & -(\mu + \alpha) & \beta S \\ 0 & \alpha & -(\mu + \gamma) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

### 3.4.1 Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Dari persamaan (3.22), dengan memasukkan  $U_0 = (S_1^*, E_1^*, I_1^*) = (N, 0, 0)$  diperoleh

$$DF(U_0) = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & -\beta N \\ 0 & -(\mu + \alpha) & \beta N \\ 0 & \alpha & -(\mu + \gamma) \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Nilai eigen dari (3.23) diperoleh dari

$$\begin{vmatrix} -\mu - \lambda & 0 & -\beta N \\ 0 & -(\mu + \alpha) - \lambda & \beta N \\ 0 & \alpha & -(\mu + \gamma) - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Dengan demikian persamaan karakteristiknya adalah

$$(-\mu - \lambda)(-\mu + \alpha - \lambda)(-\mu + \gamma - \lambda) - \alpha\beta N(-\mu - \lambda) = 0$$

$$(-\mu - \lambda)((\mu + \alpha) + \lambda)((\mu + \gamma) + \lambda) - \alpha\beta N = 0$$

$$(-\mu - \lambda)(\lambda^2 + ((\mu + \alpha) + (\mu + \gamma))\lambda + (\mu + \alpha)(\mu + \gamma) - \alpha\beta N) = 0$$

sehingga diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1 = -\mu$$

$$\lambda_2 = \frac{-((\mu + \alpha) + (\mu + \gamma)) + \sqrt{((\mu + \alpha) + (\mu + \gamma))^2 - 4((\mu + \alpha)(\mu + \gamma) - \alpha\beta N)}}{2}$$

$$\lambda_3 = \frac{-((\mu + \alpha) + (\mu + \gamma)) - \sqrt{((\mu + \alpha) + (\mu + \gamma))^2 - 4((\mu + \alpha)(\mu + \gamma) - \alpha\beta N)}}{2}$$

Titik keseimbangan  $U_0$  akan stabil asimtotik jika ketiga nilai eigennya adalah real negatif. Jelas  $\lambda_1 = -\mu < 0$  dan  $\lambda_3 < 0$ .

Kemudian,  $\lambda_2 < 0$  jika memenuhi

$$\alpha\beta N - (\mu + \alpha)(\mu + \gamma) < 0. \quad (3.24)$$

Persamaan (3.24) dapat ditulis dalam bentuk

$$\alpha\beta N - (\mu + \alpha)(\mu + \gamma) < 0$$

$$\frac{\alpha\beta N}{(\mu + \gamma)(\mu + \alpha)} < 1. \quad (3.25)$$

Misal

$$R_0 = \frac{\alpha\beta N}{(\mu + \gamma)(\mu + \alpha)}, \quad (3.26)$$

persamaan (3.25) dapat dinyatakan dalam bentuk  $R_0 < 1$ . Dengan demikian, ketiga nilai eigen dari  $DF(U_0)$  adalah real negatif jika  $R_0 < 1$  dan menurut Teorema 2.1, titik kesetimbangan  $U_0$  adalah stabil asimtotik. Keadaan ini mengakibatkan bahwa apabila sejumlah kecil populasi dari individu *Infectious* di masukkan ke dalam sistem tidak akan menyebabkan infeksi itu menetap. Ini berarti, jika sejumlah kecil individu *Infectious* ditambahkan ke dalam populasi, maka populasi tersebut akan kembali ke titik kesetimbangan bebas penyakit.

Sebaliknya,  $\alpha\beta N - (\mu + \alpha)(\mu + \gamma) > 0$  menyebabkan  $R_0 > 1$ , sehingga titik kesetimbangan  $U_0$  menjadi tidak stabil. Keadaan ini menyebabkan apabila sejumlah kecil individu *Infectious* di masukkan ke dalam populasi, akan menyebabkan infeksi tersebut menetap sehingga dapat menimbulkan epidemik.

### 3.4.2 Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik ( $U_e$ )

Dari penjelasan sebelumnya, sistem (3.11) mempunyai titik kesetimbangan endemik ( $U_e$ ), yaitu

$$S_2^* = \frac{(\mu + \alpha)(\mu + \gamma)}{\alpha\beta}$$

$$E_2^* = \frac{\mu N}{(\mu + \alpha)} - \frac{\mu(\mu + \gamma)}{\beta\alpha}$$

$$I_2^* = \frac{\mu N\alpha}{(\mu + \alpha)(\mu + \gamma)} - \frac{\mu}{\beta}$$

Titik kesetimbangan endemik ( $U_e$ ) dapat dinyatakan dalam bentuk



$$S_2^* = \frac{(\mu + \alpha)(\mu + \gamma)}{\alpha\beta}$$

$$E_2^* = \frac{\mu(\mu + \gamma)}{\alpha\beta} (R_0 - 1) \quad (3.27)$$

$$I_2^* = \frac{\mu}{\beta} (R_0 - 1).$$

Titik kesetimbangan ini terjadi pada saat  $I_2^* > 0$ , yaitu bila  $R_0 > 1$ . Untuk memeriksa kestabilan titik kesetimbangan endemik, titik  $U_e = (S_2^*, E_2^*, I_2^*)$  disubstitusikan ke dalam persamaan (3.22), yaitu

$$DF(U_e) = \begin{bmatrix} -(\mu + \beta I_2^*) & 0 & -\beta S_2^* \\ \beta I_2^* & -(\mu + \alpha) & \beta S_2^* \\ 0 & \alpha & -(\mu + \gamma) \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen ( $\lambda$ ) dari  $DF(U_e)$  memenuhi persamaan karakteristik

$$\begin{vmatrix} -(\mu + \beta I_2^*) - \lambda & 0 & -\beta S_2^* \\ \beta I_2^* & -(\mu + \alpha) - \lambda & \beta S_2^* \\ 0 & \alpha & -(\mu + \gamma) - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

yang dapat dituliskan dalam bentuk polinom sebagai berikut

$$0 = (-(\mu + \beta I_2^*) - \lambda)(-\mu + \alpha - \lambda)(-\mu + \gamma - \lambda) - \alpha\beta S_2^*(-(\mu + \beta I_2^*) - \lambda)$$

$$0 = (-(\mu + \beta I_2^*) - \lambda)((-\mu + \alpha) - \lambda)(-\mu + \gamma - \lambda) - \alpha\beta S_2^*$$

$$0 = (-(\mu + \beta I_2^*) - \lambda)((\mu + \alpha) + \lambda)((\mu + \gamma) + \lambda) - (\mu + \alpha)(\mu + \gamma)$$

$$0 = (-(\mu + \beta I_2^*) - \lambda)(\lambda^2 + ((\mu + \alpha) + (\mu + \gamma))\lambda)$$

$$0 = \lambda(-(\mu + \beta I_2^*) - \lambda)(\lambda + ((\mu + \alpha) + (\mu + \gamma))). \quad (3.28)$$

Dari persamaan (3.28) didapatkan nilai eigen, yaitu

$$\lambda_1 = 0 \quad (3.29)$$

$$\lambda_2 = -(\mu + \beta I_2^*) \quad (3.30)$$

$$\lambda_3 = -(\mu + \alpha)(\mu + \gamma), \quad (3.31)$$

dengan  $I_2^* = \frac{\mu}{\beta} (R_0 - 1)$ .

Selanjutnya,  $I_2^*$  dimasukkan ke dalam persamaan (3.30), sehingga diperoleh

$$\lambda_2 = -(\mu + \beta \frac{\mu}{\beta} (R_0 - 1))$$

$$\lambda_2 = -(\mu + \mu R_0 - \mu)$$

$$\lambda_2 = -\mu R_0.$$

Karena  $\mu > 0$  dan  $R_0 > 1$ , nilai  $\lambda_2$  bernilai negatif. Kemudian karena  $\alpha, \gamma > 0$ , sehingga  $\lambda_3$  juga bernilai negatif. Diperoleh  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$ , dan  $\lambda_3 < 0$ . Berdasarkan Teorema 2.1, titik kesetimbangan  $U_e$  stabil.

### 3.5 Angka Reproduksi Dasar ( $R_0$ )

Dari analisis kestabilan kedua titik kesetimbangan di atas, dapat disimpulkan bahwa pada saat  $R_0 < 1$ , populasi terbebas dari penyakit, sedangkan pada saat  $R_0 > 1$  dalam populasi terjadi epidemik. Dengan demikian,  $R_0$  disebut sebagai angka reproduksi dasar yaitu suatu angka yang menunjukkan tingkat penularan terhadap suatu penyakit.

Dari persamaan (3.26), dapat dilihat bahwa salah satu parameter yang dapat dikontrol untuk mengurangi tingkat penyebaran infeksi campak adalah tingkat terjadinya kontak dengan individu *Infectious* ( $\beta$ ). Dari nilai  $R_0 < 1$ , diperoleh

$$\beta < \frac{(\mu + \alpha)(\mu + \gamma)}{\alpha N}, \quad (3.32)$$

sehingga titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotik,

jika nilai  $\beta < \frac{(\mu + \alpha)(\mu + \gamma)}{\alpha N}$ . Kemudian jika  $R_0 > 1$ , maka

$$\beta > \frac{(\mu + \alpha)(\mu + \gamma)}{\alpha N}. \quad (3.33)$$

Hal ini berarti, titik kesetimbangan bebas penyakit menjadi tidak stabil untuk nilai  $\beta > \frac{(\mu + \alpha)(\mu + \gamma)}{\alpha N}$ , sedangkan titik

kesetimbangan endemik menjadi stabil. Perubahan nilai parameter  $\beta$  menentukan jenis kestabilan dari titik kesetimbangan tersebut sehingga  $\beta$  disebut sebagai parameter bifurkasi. Nilai  $R_0 = 1$  merupakan nilai kritis (*threshold*) di mana sistem mengalami perubahan dari titik kesetimbangan bebas penyakit yang stabil menjadi titik kesetimbangan endemik yang tidak stabil, demikian juga sebaliknya dari titik kesetimbangan bebas penyakit yang tidak stabil menjadi titik kesetimbangan endemik yang stabil.

$R_0$  didefinisikan sebagai angka rata-rata banyaknya kasus infeksi sekunder (kasus baru) yang dihasilkan oleh kasus infeksi primer selama periode infektivitas bila berada dalam populasi *Susceptible* total. Dari definisi di atas  $R_0 < 1$ , berarti setiap individu *Infectious* rata-rata menginfeksi kurang dari satu individu *Susceptible*, sehingga tidak akan menimbulkan epidemik. Kemudian  $R_0 > 1$ , berarti setiap individu *Infectious* rata-rata menginfeksi lebih dari satu individu *Susceptible*, sehingga dapat menimbulkan epidemik, sedangkan untuk  $R_0 = 1$  berarti individu *Infectious* rata-rata menginfeksi tepat satu individu *Susceptible*.

Jika diberikan suatu kondisi yang dekat dengan titik kesetimbangan bebas penyakit dan satu individu *Infectious* ditambahkan ke dalam populasi maka  $R_0$  dapat dinyatakan sebagai banyaknya individu *Infectious* baru yang dihasilkan dari penambahan satu individu *Infectious*. Oleh karena itu, jika penambahan satu individu *Infectious* tersebut menghasilkan lebih dari satu individu *Infectious* baru, maka infeksi akan menetap. Sebaliknya jika penambahan satu individu *Infectious* tersebut menghasilkan kurang dari satu individu *Infectious* baru, maka penyakit akan hilang.

### 3.6 Implementasi Model

Untuk memberikan gambaran yang nyata tentang dinamika penyebaran penyakit campak digunakan data tentang banyaknya kasus campak yang terjadi di kabupaten Malang pada tahun 2000. Data diperoleh dari Sari (2006). Berdasarkan data yang diperoleh,

banyaknya kasus campak di kabupaten Malang pada tahun 2000 adalah 155 jiwa dari total jumlah penduduk di kabupaten Malang sebesar 2.382.258 jiwa. Diasumsikan dari 155 jiwa tersebut , 40% (=62 jiwa ) diantaranya adalah kelompok individu *Exposed* dan 60% (=93 jiwa ) adalah kelompok individu *Infectious*, sedangkan sisa jumlah penduduk yang tidak terserang penyakit campak termasuk dalam kelompok individu *Susceptible* yaitu 2.382.103 jiwa. Asumsi di atas digunakan untuk memperoleh nilai awal yaitu  $S(0)=2.382.103$ ,  $E(0)=62$  dan  $I(0)=93$  yang selanjutnya akan digunakan dalam simulasi.

Rata-rata harapan hidup orang Indonesia adalah 70 tahun (Haryono, 2007). Periode laten dan periode infeksius untuk penyakit campak, telah diestimasi oleh Trotier dan Phillipe (2002) yaitu masing-masing adalah 8 hari dan 7 hari, sehingga dapat ditentukan nilai parameter  $\mu$ ,  $\alpha$  dan  $\gamma$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \text{Laju kelahiran / kematian } (\mu) &= \frac{1}{\text{rata - rata nilai harapan hidup}} \\ &= \frac{1}{70} = 0,014285714 / \text{tahun} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Laju infektivitas } (\alpha) &= \frac{1}{\text{rata - rata periode laten}} \\ &= \frac{1}{8} \times 365 \text{ hari} = 45,625 / \text{tahun} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Laju recovery } (\gamma) &= \frac{1}{\text{rata - rata periode infeksius}} \\ &= \frac{1}{7} \times 365 \text{ hari} = 52,14285714 / \text{tahun} . \end{aligned}$$

Untuk laju infeksi  $\beta$  yang merupakan parameter bifurkasi akan dikaji tiga kasus, yaitu  $\beta = 0,001$ ,  $\beta = 0,000001$  dan  $\beta = 0,0000219$ .

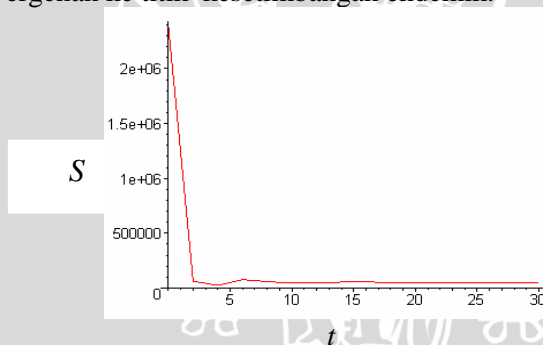
Dari perhitungan di atas parameter-parameter dari model epidemik penyakit campak seperti diberikan pada Tabel 3.1.

Tabel 3.1 Parameter model epidemik penyakit campak

No	Parameter	Nilai
1	$N$	2.382.258 jiwa
2	$\mu$	0,014285714 / tahun
3	$\alpha$	45,625 / tahun
4	$\gamma$	52,14285714 / tahun

### 3.6.1 Kasus $\beta = 0,001$

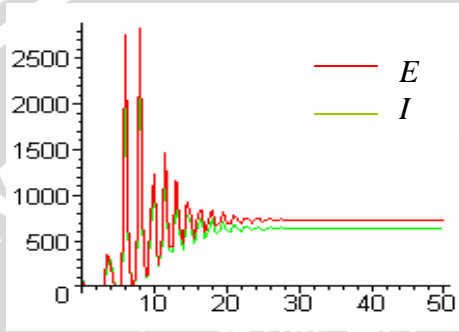
Jumlah individu *Infectious* di kabupaten Malang adalah sebesar 93 jiwa. Berdasarkan nilai parameter yang diberikan pada Tabel 3.1 dengan nilai  $\beta = 0,001$ , menghasilkan angka reproduksi dasar  $R_0 = 45 > 1$ . Hal ini menunjukkan bahwa rata-rata individu *Infectious* menghasilkan 45 individu *Infectious* baru, ini artinya tiap individu *Infectious* rata-rata menginfeksi lebih dari satu individu *Susceptible*, sehingga menyebabkan dalam populasi terjadi epidemik. Dalam kasus ini, sistem stabil pada titik kesetimbangan endemik yaitu (52173, 729, 638). Dengan menggunakan program Maple dapat digambarkan grafik solusi  $S(t)$ ,  $E(t)$  dan  $I(t)$  terhadap waktu yang dapat dilihat pada Gambar 3.2-3.3 yang menunjukkan kekonvergenan ke titik kesetimbangan endemik.



Gambar 3.2. Grafik  $S(t)$  konvergen ke titik kesetimbangan 52.173

Pada Gambar 3.2 dapat dilihat bahwa individu *Susceptible* dengan diberikan nilai awal sebesar 2.382.103 mengalami perubahan seiring bertambahnya waktu. Karena mulai terdapat individu yang terinfeksi, mengakibatkan jumlah individu *Susceptible* berkurang, sedangkan jumlah individu *Exposed* dan *Infectious* bertambah. Pada saat tertentu individu *Susceptible* akan mengalami sedikit

peningkatan karena terdapat individu *Infectious* yang telah sembuh atau mati. Keadaan ini akan terus berlangsung sampai pada kondisi kesetimbangan yaitu pada saat jumlah individu *Susceptible* mencapai nilai 52.173. Pada titik ini jumlah individu *Susceptible* tidak akan mengalami peningkatan atau penurunan lagi.



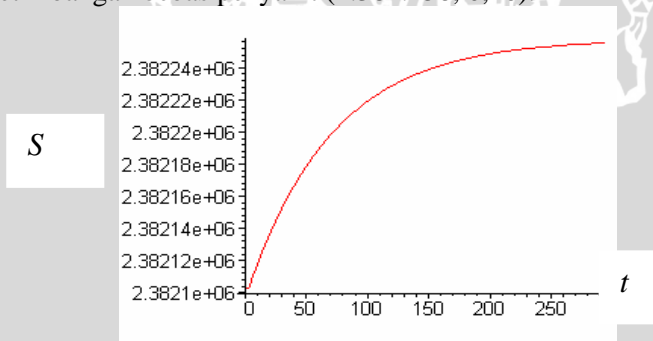
Gambar 3.3. Grafik  $E(t)$  dan  $I(t)$ , berturut-turut konvergen ke titik kesetimbangan 729 dan 638

Pada Gambar 3.3, terlihat bahwa dengan diberikan nilai awal sebesar 62, individu *Exposed* dalam populasi mengalami perubahan seiring bertambahnya waktu. Pada keadaan awal jumlah individu *Exposed* sesuai dengan nilai awal yang diberikan, kemudian dengan bertambahnya waktu individu *Exposed* mulai mengalami penurunan, ini disebabkan karena adanya individu *Exposed* yang berubah menjadi individu *Infectious* dan karena adanya kematian alami. Pada saat tertentu, individu *Exposed* akan mengalami peningkatan yang diakibatkan kontak yang terjadi antara individu *Susceptible* dengan individu *Infectious*. Keadaan tersebut mengakibatkan terjadinya osilasi yang berlangsung terus sampai menuju kondisi kesetimbangan, yaitu mendekati 729. Pada kondisi tersebut jumlah individu *Exposed* akan selalu bernilai tetap untuk jangka waktu yang lama. Demikian juga dengan Individu *Infectious*, pada Gambar 3.3 dapat dilihat bahwa pada awalnya banyaknya individu *Infectious* dalam populasi sesuai dengan nilai awal yang diberikan. Dengan berjalannya waktu, banyaknya individu *Infectious* dalam populasi mengalami penurunan seiring dengan terjadinya peningkatan banyaknya individu yang sembuh dan adanya kematian alami oleh individu *Infectious*. Kemudian setelah mencapai nilai tertentu,

banyaknya individu *Infectious* dalam populasi mengalami peningkatan akibat bertambahnya individu *Exposed*, dan pada suatu nilai tertentu akan menurun kembali seiring dengan penurunan jumlah individu *Exposed*. Keadaan tersebut akan terus berlangsung hingga menuju nilai kesetimbangan untuk waktu yang lama, yaitu 638.

### 3.6.2 Kasus $\beta = 0,000001$

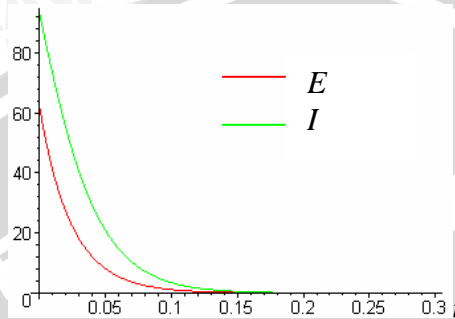
Dengan nilai  $\beta = 0,000001$ , menggunakan perhitungan yang sama dengan kasus sebelumnya diperoleh angka reproduksi dasar  $R_0 = 0,046 < 1$ . Hal ini menunjukkan bahwa rata-rata individu *Infectious* menghasilkan nol individu *Infectious* baru, ini artinya masing-masing individu *Infectious* tidak menginfeksi satu pun dari individu *Susceptible*, sehingga tidak dihasilkan individu *Infectious* baru. Keadaan ini mengakibatkan populasi terbebas dari penyakit. Dengan menggunakan program Maple dapat digambarkan grafik solusi  $S(t)$ ,  $E(t)$  dan  $I(t)$  terhadap waktu yang dapat dilihat pada Gambar 3.4-3.5 yang menunjukkan kekonvergenan ke titik kesetimbangan bebas penyakit (2.382.258, 0, 0).



Gambar 3.4. Grafik  $S(t)$ , konvergen ke titik kesetimbangan 2.382.258

Pada Gambar 3.4 dapat dilihat bahwa banyaknya individu *Susceptible* pada awalnya dalam populasi sesuai dengan nilai awal yang diberikan yaitu sebesar 2.382.103. Seiring bertambahnya waktu, banyaknya individu *Susceptible* mengalami peningkatan, hal ini disebabkan karena bertambahnya individu *Susceptible* yang lahir. Peningkatan jumlah individu *Susceptible* akan terus berlangsung sampai pada kondisi kesetimbangan, yaitu 2.382.258. Pada kondisi

ini jumlah individu *Susceptible* akan selalu bernilai tetap untuk jangka waktu yang lama.



Gambar 3.5 Grafik  $E(t)$  dan  $I(t)$ , masing-masing konvergen ke titik kesetimbangan nol

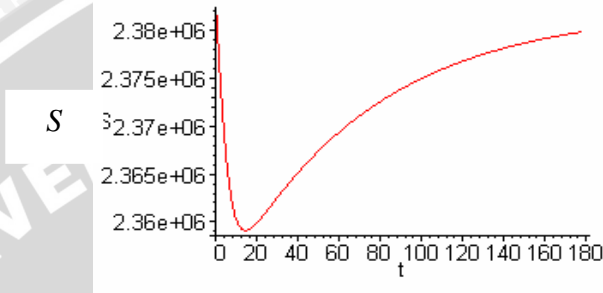
Pada Gambar 3.5, dapat dilihat pada awalnya dalam populasi tidak terdapat individu *Exposed*. Seiring dengan bertambahnya waktu, dalam populasi mulai terdapat individu *Susceptible* yang terinfeksi virus campak akibat kontak dengan individu *Infectious*. Individu tersebut akan berubah menjadi individu *Exposed*. Dengan diberikan nilai awal sebesar 62, individu *Exposed* dalam populasi mengalami penurunan, hal ini disebabkan individu *Exposed* berubah menjadi individu *Infectious* dan karena kematian alami. Keadaan ini akan terus berlangsung hingga menuju kondisi kesetimbangan untuk jangka waktu yang lama, yaitu pada saat jumlah individu *Exposed* sama dengan nol. Demikian juga dengan individu *Infectious*, pada Gambar 3.5, terlihat bahwa banyaknya individu *Infectious* terus berkurang seiring dengan bertambahnya waktu, ini terjadi karena mulai adanya individu *Infectious* yang sembuh atau mengalami kematian alami. Karena  $R_0 < 1$ , dengan bertambahnya waktu, banyaknya individu *Infectious* tidak akan bertambah dan akan terus berkurang hingga menuju kondisi kesetimbangan untuk waktu yang lama, yaitu pada saat jumlah individu *Infectious* sama dengan nol.

### 3.6.3 Kasus $\beta = 0,0000219$

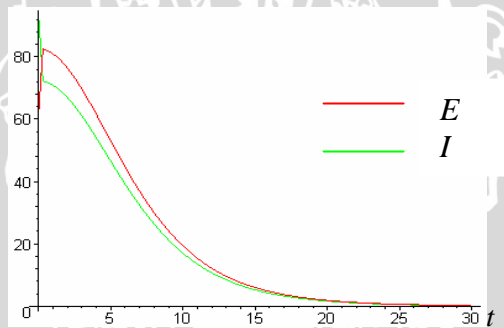
Pada kasus ini, dengan menggunakan nilai parameter yang diberikan pada Tabel 3.1, diperoleh  $R_0 \approx 1$ . Hal ini menunjukkan



bahwa rata-rata individu *Infectious* menginfeksi tepat satu individu *Susceptible*. Dengan menggunakan program Maple dapat digambarkan grafik solusi  $S(t)$ ,  $E(t)$  dan  $I(t)$  terhadap waktu yang dapat dilihat pada Gambar 3.6-3.7



Gambar 3.6. Grafik  $S(t)$ , konvergen ke titik kesetimbangan bebas penyakit.



Gambar 3.7. Grafik  $E(t)$  dan  $I(t)$ , masing-masing konvergen ke titik kesetimbangan bebas penyakit.

Dari Gambar 3.6 dan 3.7 ditunjukkan bahwa solusi  $S(t)$  menuju titik kesetimbangan 2.382.258 dengan bertambahnya waktu, sedangkan  $E(t)$  dan  $I(t)$  menuju nol yang merupakan titik kesetimbangan bebas penyakit untuk  $E(t)$  dan  $I(t)$ , sehingga dengan  $\beta = 0,0000219$  yang menghasilkan nilai  $R_0 = 1$ , sistem akan menuju titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu jika dalam populasi terdapat satu individu *Infectious* baru maka tidak akan menyebabkan infeksi tersebut endemik, sehingga dengan bertambahnya waktu populasi akan terbebas dari penyakit.

## BAB IV

### KESIMPULAN DAN SARAN

#### 4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan tugas akhir ini dapat disimpulkan hal-hal berikut.

1. Model deterministik SEIR untuk epidemik penyakit campak diperoleh dengan menterjemahkan model kompartemen ke dalam model matematika berdasarkan asumsi-asumsi tertentu dan diperoleh sistem persamaan diferensial non-linier sebagai berikut:

$$\frac{dS(t)}{dt} = \mu N - (\mu + \beta I(t))S(t)$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \beta I(t)S(t) - (\mu + \alpha)E(t)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \alpha E(t) - (\mu + \gamma)I(t)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \mu R(t)$$

2. Model matematika tersebut mempunyai dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit  $U_0 = (S_1^*, E_1^*, I_1^*) = (N, 0, 0)$  dan titik kesetimbangan endemik  $U_e = (S_2^*, E_2^*, I_2^*)$ . Titik kesetimbangan bebas penyakit adalah stabil asimtotik jika angka reproduksi dasar  $R_0 < 1$ . Titik kesetimbangan endemik terjadi jika angka reproduksi dasar  $R_0 > 1$ . Dari hasil analisis diperoleh bahwa titik kesetimbangan endemik adalah stabil.
3. Di kabupaten Malang pada tahun 2000 terdapat 93 individu *Infectious*. Dengan nilai  $\beta = 0,001$ , rata-rata individu *Infectious* menghasilkan jumlah individu *Infectious* baru sebesar 45 jiwa, sehingga sistem stabil pada titik kesetimbangan endemik yaitu (52.173, 729, 638), sedangkan dengan nilai  $\beta = 0,000001$ , tidak dihasilkan individu *Infectious* baru atau populasi terbebas dari penyakit, sehingga sistem stabil pada titik kesetimbangan bebas

penyakit yaitu  $(2.382.258, 0, 0)$ . Dengan nilai  $\beta = 0,0000219$ , dalam populasi terdapat satu individu *Infectious* baru, tetapi ini tidak menyebabkan infeksi endemik, sehingga dengan bertambahnya waktu populasi terbebas dari penyakit.

#### 4.2 Saran

1. Untuk mendapatkan model yang sesuai dengan keadaan sebenarnya, dapat ditambahkan faktor lain seperti adanya migrasi.
2. Pada penulisan tugas akhir selanjutnya dapat digunakan model stokastik untuk epidemik penyakit campak.



## DAFTAR PUSTAKA

- Boyce, W dan R. Diprima. 1986. *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problem*. Prentice Hall. New York.
- Edward, C. H. dan D. E. Penny. 2001. *Differential Equation and Linier Algebra*. Prentice Hall Inc. New Jersey.
- Finizio, N and G. Ladas. 1982. *Persamaan Differensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Edisi kedua. Terjemahan Widiarti Santoso. Erlangga. Jakarta.
- Jansen, H. 1994. The Numerical Modelling of Measles Dynamics. *Dissertation*, (Online), ([http://www.muk.uni-hannover.de/master\\_hjansen.pdf/publication.html](http://www.muk.uni-hannover.de/master_hjansen.pdf/publication.html)), Akses : 7 juli 2007, jam 08.00 wib)
- Robinson, R. C. 2004. *An Introduction to Dynamical Systems Continous and Discrete*. Pearson Education, Inc. New Jersey.
- Ross, S. L. 1984. *Differential Equation*. John Wiley & Sons. United State of America.
- Sari, D.N. 2006. *Teori Markov pada Model Deterministik Dinamika Penyebaran Penyakit Campak*. Skripsi. MIPA Universitas Brawijaya. Malang.
- Suyono, H. 2007. <http://prasetya.ac.id/mei'07.html>, Akses: 27 Mei 2007, jam 09.00 wib.
- Trotier, H dan P. Phillippe. 2002. Deterministic Modeling of Infectious Diseases: Applications To Measles and Other Similar Infections. *Journal of Infectious Diseases*, (Online), vol 2, no.1, (<http://www.ispub.com/journals/ijid/volln2/model.xml>), Akses: 14 April 2007, jam 16.00 wib)