MASALAH *NEWSBOY* MULTIPRODUK DENGAN KAPASITAS TERBATAS DAN *OUTSOURCING*

SKRIPSI

Oleh:
NUR ANISA KHAIRATINA
0710940008-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2011

MASALAH *NEWSBOY* MULTIPRODUK DENGAN KAPASITAS TERBATAS DAN *OUTSOURCING*

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh:

NUR ANISA KHAIRATINA

0710940008-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

MALANG

2011

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

MASALAH *NEWSBOY* MULTIPRODUK DENGAN KAPASITAS TERBATAS DAN *OUTSOURCING*

Oleh:
NUR ANISA KHAIRATINA
0710940008-94

Setelah dipertahankan di depan majelis penguji
pada tanggal 12 Desember 2011
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam Bidang Matematika

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dra. Endang Wahyu H., MSi	**Prof. Dr. Marjono, M.Phil**
NIP. 196611121991032001	**NIP. 196211161988031004**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Abdul Rouf Alghofari, MSc
NIP. 196709071992031001

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	**:**	**Nur Anisa Khairatina**
NIM	**:**	**0710940008-94**
Jurusan	**:**	**Matematika**
Penulis Skripsi berjudul	**:**	**Masalah *Newsboy* Multiproduk dengan Kapasitas Terbatas dan *Outsourcing***

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. **Isi skripsi yang saya buat benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka skripsi ini.**
2. **Apabila di kemudian hari ternyata skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 12 Desember 2011
Yang menyatakan,

(Nur Anisa Khairatina)
NIM. 0710940008

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

MASALAH *NEWSBOY* MULTIPRODUK DENGAN KAPASITAS TERBATAS DAN *OUTSOURCING*

ABSTRAK

Dalam teori persediaan terdapat suatu masalah persediaan yang memiliki ciri bahwa keputusan jumlah pesanan merupakan masalah satu keputusan dan meskipun terdapat ketidakpastian dalam permintaan, keputusan yang tepat harus dicapai. Hal ini sering dialami oleh seorang tukang koran (*newsboy*) sehingga masalah ini dikenal juga dengan nama masalah *newsboy*. Skripsi ini membahas tentang suatu sistem *newsboy* yang memproduksi beberapa produk untuk memenuhi permintaan yang bebas dan tidak pasti, yang berbagi kapasitas produksi yang sama. Untuk mengatasi kemungkinan kekurangan karena terbatasnya kapasitas, produk dapat dipesan dari sumber lain. Cara tersebut dikenal dengan istilah *outsourcing*. Strategi *outsourcing* yang digunakan adalah *nonzero lead time outsourcing strategy* (NO) dimana dalam strategi ini keputusan harus diambil dalam satu tahap sebelum permintaan tiba. Keputusan yang dimaksud adalah keputusan banyaknya produk yang diproduksi secara *in-house* dan *outsourcing* sehingga diperoleh keuntungan maksimal. Fungsi keuntungan yang diharapkan merupakan suatu fungsi *concave* sehingga masalah optimasi ini adalah masalah *convex programming*. Masalah ini merupakan salah satu kasus dari *nonlinear programming*. Untuk memperoleh keputusan yang optimal digunakan syarat optimasi Karush-Kuhn-Tucker. Dengan menganalisis sifat-sifat strukturalnya diperoleh beberapa proposisi yang digunakan untuk membangun suatu prosedur penyelesaian. Untuk memberikan wawasan manajerial, diberikan pula suatu studi numerik tentang penggunaan prosedur penyelesaian tersebut. Dalam studi numerik yang diberikan, digunakan suatu kasus dasar yang mempunyai parameter-parameter yang telah ditentukan berdasarkan distribusi permintaan yang digunakan yaitu distribusi normal.

Kata kunci : masalah *newsboy*, *nonzero lead time outsourcing strategy* (NO), syarat optimasi Karush-Kuhn-Tucker

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

MULTI-PRODUCT NEWSBOY PROBLEM WITH LIMITED CAPACITY AND OUTSOURCING

ABSTRACT

In the inventory theory, there is a problem which has a characteristic that the decision of quantity order is a single decision problem and the right decision must be reached although there are the uncertainty of demands. This is often experienced by a newsboy so this problem is also known by the name newsboy problem. This paper discuss about a newsboy system that produces multiple products for fulfilling independently uncertain demands, which share the same production capacity. To deal with possible shortage of limited capacity, products can be ordered from other sources. This way is known as outsourcing. Outsourcing strategy used in this paper is nonzero lead time outsourcing strategy (NO) which is in this strategy the decision must be made in one stage before the demand arrives. The decision intended is a decision the quantity of products manufactured in-house and outsourcing in order to obtain maximum profit. The expected profit function is a concave function, so this optimization problem is a convex programming problem. This problem is a case of nonlinear programming. The Karush-Kuhn-Tucker optimization conditions are used to obtain the optimal decision. By analyzing the structural properties can be obtained some propositions that are used to develop a solution procedure. For obtaining some managerial insights, a numerical study of the using of solution procedure is given. In the numerical study given, the base case used had parameters that has been determined based on the used demand distribution (in this case normal distribution).

Keywords : Karush-Kuhn-Tucker optimization conditions, newsboy problem, nonzero lead time outsourcing strategy (NO)

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan bimbingan dan petunjuk-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik dan lancar. Shalawat serta salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW sebagai suri tauladan bagi penulis.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan serta motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada:

1. Dra. Endang Wahyu Handamari, MSi., selaku pembimbing I dan Prof. Dr. Marjono, M.Phil., selaku pembimbing II atas segala bimbingan, nasihat, motivasi serta kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini.
2. Kwardiniya A., S.Si, M.Si, Drs. Marsudi, MS., **dan** Drs. Imam Nurhadi P., MT. selaku dosen penguji atas segala saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
3. Seluruh bapak/ibu dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
4. Ayahanda, ibunda, kakak-kakak dan keponakan-keponakan tersayang atas segala doa, kasih sayang, dukungan, dan nasihat yang telah diberikan.
5. Ristika, Nova, Yuni, Resthi, Novi, Dwi, Andicha, Fadli, dan teman-teman Matematika 2007 yang tercinta atas bantuan yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini.
6. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat banyak kekurangan. Oleh karena itu, penulis sangat mengharapkan kritik dan saran melalui email penulis nuranisakhairatina@yahoo.com. Akhir kata, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak.

Malang, 12 Desember 2011

Penulis

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

DAFTAR ISI

Halaman

HALAMAN JUDUL i
LEMBAR PENGESAHAN iii
LEMBAR PERNYATAAN v
ABSTRAK vii
ABSTRACT ix
KATA PENGANTAR xi
DAFTAR ISI xiii
DAFTAR TABEL xv
DAFTAR GAMBAR xvii
DAFTAR LAMPIRAN xix
DAFTAR SIMBOL xxi

BAB I PENDAHULUAN 1
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 2
1.3 Batasan Masalah 2
1.4 Tujuan Penulisan 2

BAB II TINJAUAN PUSTAKA 3
2.1 Teori Persediaan 3
2.2 Model Persediaan 4
2.3 *Outsourcing* 6
2.4 *Nonlinear Programming* 12
2.5 Fungsi *Concave* dan Fungsi *Convex* 14
2.6 Nilai Eigen dan Vektor Eigen 15
2.7 Syarat Optimasi Karush-Kuhn-Tucker untuk NLP 16
2.8 Distribusi Peluang 17
2.9 Ekspektasi Matematis 18
2.10 Distribusi Normal 19
2.11 Fungsi *Error* 20

BAB III PEMBAHASAN 21
3.1 Proses Pengambilan Keputusan 21
3.2 Model Matematika 21
3.3 Prosedur Penyelesaian 22
3.4 Studi Numerik 36

BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN 51
5.1 Kesimpulan 51
5.2 Saran..... 51

DAFTAR PUSTAKA 53
LAMPIRAN 55

DAFTAR TABEL

Halaman

Tabel 3.1 Parameter kasus dasar..... 37
Tabel 3.2 Hasil penerapan algoritma pada kasus dasar 49

DAFTAR GAMBAR

Halaman

Gambar 2.1 Alur waktu kejadian pada strategi ZO 10
Gambar 2.2 Alur waktu kejadian pada strategi NO 12
Gambar 3.1 Diagram alir algoritma penyelesaian 35

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

Lampiran 1. Manipulasi matematika untuk fungsi keuntungan yang diharapkan 55
Lampiran 2. Tabel Fungsi *Error* 59
Lampiran 3. Listing program pencarian nilai integral fungsi distribusi kumulatif distribusi normal 61
Lampiran 4. Listing program penerapan algoritma penyelesaian dengan *software Matlab*..... 62

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

DAFTAR SIMBOL

n	: banyaknya produk
τ_i	: kapasitas produksi deterministic produk *i*
t	: total kapasitas
Y_i	: jumlah produksi *in-house* produk *i*
Z_i	: jumlah produk *i* yang di*outsource*
D_i	: permintaan produk *i*
$f_i(\cdot)$	: fungsi kepadatan peluang
$F_i(\cdot)$	: fungsi distribusi kumulatif
$F_i^{-1}(\cdot)$	: invers fungsi distribusi kumulatif
p_i	: harga jual per satuan produk *i*
c_i	: biaya produksi *in-house* per satuan produk *i*
d_i	: biaya *outsourcing* per satuan produk *i*
s_i	: *salvage value* per satuan produk *i*
γ_i	: biaya kapasitas marginal *outsourcing* produk *i*
π_1	: fungsi keuntungan pada *strategi ZO*
π_2	: fungsi keuntungan pada strategi NO
μ_i	: *mean*
σ_i^2	: variansi
ZO	: *zero lead time outsourcing strategy*
NO	: *nonzero lead time outsourcing stratgey*

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Salah satu kelas dalam masalah persediaan mensyaratkan bahwa keputusan jumlah pesanan dilakukan hanya sekali untuk proses permintaan keseluruhan. Dengan kata lain, tidak ada kesempatan untuk mengisi persediaan yang habis. Mengingat bahwa permintaan total selama periode yang dimaksud adalah tidak pasti, hal ini menimbulkan dilema untuk memesan cukup barang, sehingga keuntungan maksimal dapat diperoleh, tetapi barang tidak dipesan terlalu banyak, sehingga terhindar dari kerugian akibat kelebihan barang. Seorang penjual surat kabar (*newsboy*) sering menghadapi dilema ini. Oleh karena itu, model dari masalah ini dikenal dengan nama masalah *newsboy* (Ravindran dkk, 1987).

Masalah *newsboy* multiproduk dengan keterbatasan kapasitas merupakan masalah klasik dalam manajerial produksi dan persediaan, yang pertama kali dipelajari oleh Hadley dan Whitin (1963). Setelah itu, masalah *newsboy* multiproduk dengan kendala kapasitas dipelajari secara luas dalam penelitian masalah persediaan. Beberapa penelitian fokus pada masalah dengan kendala tunggal karena terdapat kesulitan untuk memecahkan masalah berskala besar dengan berbagai kendala.

Dalam sistem persediaan modern, *outsourcing* telah diakui secara luas sebagai cara penting untuk meningkatkan daya saing perusahaan dalam perubahan lingkungan yang cepat. *Outsourcing* sendiri dapat diartikan sebagai pengambilan sumber daya dari luar perusahaan. Pada sistem persediaan, sumber daya yang dimaksud berupa produk atau barang. Untuk mengatasi kemungkinan kekurangan kapasitas dan memperluas kapasitas perusahaan dapat meng-*outsource* beberapa produksi dari luar perusahaan secara fleksibel. Keuntungan utama dari *outsourcing* yaitu mengurangi biaya investasi tetap, mengurangi resiko penyusutan teknologi, meminimalkan dampak perubahan cepat dalam teknologi tanpa mengubah infrastruktur dan meningkatkan fleksibilitas keputusan.

Dalam skripsi ini, dibahas sistem *newsboy* multiproduk dengan kendala kapasitas untuk memenuhi permintaan bebas dan stokastik, dimana semua produk dapat di*outsource* dari sumber lain tanpa kendala kapasitas dengan biaya produksi yang lebih tinggi dan

menerapkan strategi *outsourcing nonzero lead time outsourcing strategy*. Tujuan secara keseluruhan adalah untuk memutuskan jumlah produksi *in-house* dan *outsourcing* untuk memaksimalkan total keuntungan yang diharapkan dengan menerapkan strategi *outsourcing* yang ditawarkan.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang sebelumnya, maka dapat dirumuskan permasalahan dari penulisan skripsi ini yaitu:

1. Bagaimana prosedur penyelesaian masalah *newsboy* multiproduk dengan *nonzero lead time outsourcing strategy*?
2. Bagaimana implementasi prosedur penyelesaian masalah *newsboy* multiproduk dengan *nonzero lead time outsourcing strategy* yang diterapkan pada studi numerik?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah dari penulisan skripsi ini antara lain:

1. Setiap produk menggunakan strategi *outsourcing* yang sama.
2. Kapasitas *outsourcing* tidak terbatas.

1.4 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah

1. Membangun prosedur penyelesaian masalah *newsboy* multiproduk dengan *nonzero lead time outsourcing strategy*.
2. Mengetahui implementasi prosedur penyelesaian masalah *newsboy* multiproduk dengan *nonzero lead time outsourcing strategy* yang diterapkan pada studi numerik.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Teori Persediaan

Teori persediaan telah melalui beberapa tahap perkembangan sejak mulai diperkenalkan pada era tahun 1920. Pada awalnya, berupa model sangat sederhana yang menggunakan sedikit parameter untuk memperoleh faktor-faktor utama dalam masalah persediaan ini. Kemudian ditambahkan lebih banyak parameter untuk memberikan lebih banyak informasi pada model ini, namun mengabaikan keragaman dan ketidakpastian. Secara bertahap, dikembangkan model probabilistik pada era tahun 1950 untuk menangkap akibat permintaan yang tidak bisa diprediksi dan tenggang waktu (Ravindran dkk, 1987).

Bukan hanya toko ritel yang harus mengelola persediaan. Pada kenyataannya, persediaan meliputi dunia usaha. Mempertahankan persediaan diperlukan untuk setiap perusahaan yang bergerak dengan produk fisik, termasuk produsen, distributor, dan pengecer. Sebagai contoh, produsen memerlukan persediaan untuk bahan-bahan yang diperlukan dalam pembuatan produknya. Selain itu diperlukan juga persediaan produk jadi yang siap untuk dikirim. Demikian pula dengan grosir dan pengecer perlu untuk mengurus persediaan barang agar tetap tersedia untuk dibeli oleh pelanggan (Hiller dan Lieberman, 2005).

Banyak perusahaan di dunia telah membenahi cara mengelola persediaannya. Penerapan teknik riset operasi di bidang ini (kadang-kadang disebut ilmu manajemen persediaan) menyediakan alat yang ampuh untuk memperoleh keunggulan kompetitif. Langkah-langkah ilmu manajemen persediaan yang digunakan adalah sebagai berikut:

1. Merumuskan model matematika yang menggambarkan perilaku dari sistem persediaan.
2. Mencari suatu kebijakan yang optimal sehubungan dengan model tersebut.
3. Menggunakan sistem informasi yang terkomputerisasi untuk memelihara catatan tentang tingkat persediaan saat ini.
4. Menerapkan kebijakan persediaan yang optimal mengenai waktu dan jumlah pengisian persediaan dengan memanfaatkan catatan tentang persediaan saat ini.

(Hiller dan Lieberman, 2005)

2.2 Model Persediaan

2.2.1 Masalah Newsboy: Model Periode Tunggal

Model periode tunggal akan ada jika sebuah item di-order-kan hanya sekali saja untuk mencukupi permintaan yang diberikan dari periode dari sebuah waktu (di sini tidak ada pengisian kembali dari sebuah item selama periode). Sebuah tipe dari contoh item yang bisa diklasifikasikan pada inventori periode tunggal adalah pohon natal, peralatan kebun, ban salju, dan mantel musim dingin. Sebuah analisa dari model-model inventori periode tunggal untuk spontanitas dan seragam dari permintaan telah dikenalkan (Ristono, 2009).

Model periode tunggal juga digunakan untuk menangani pemesanan dari barang-barang yang mudah rusak atau *perishable goods* (seperti, buah-buahan segar, sayuran, ikan laut, bunga potong) atau jenis-jenis produk lainnya yang memiliki masa pakai relatif lebih pendek (seperti koran dan majalah). Apabila jenis produk seperti yang telah disebutkan tidak laku terjual atau tidak terpakai, jenis barang tersebut kadang-kadang dijual dengan harga miring. Selain itu, model periode tunggal juga dapat berkaitan dengan barang-barang yang sudah kadaluarsa. Komponen mesin tertentu untuk suatu mesin juga dapat dimasukkan ke dalam kategori periode tunggal (Rangkuti, 1998).

Karakteristik utama yang menjadi ciri masalah *newsboy* adalah keputusan jumlah pesanan merupakan masalah satu keputusan dan meskipun terdapat ketidakpastian dalam permintaan, keputusan yang tepat harus dicapai dengan konsekuensi pemesanan terlalu banyak dan terlalu sedikit. Misalkan c melambangkan biaya per satuan barang dan p harga jual per satuan barang. Maka $p-c$ akan mewakili keuntungan per satuan barang. Misalkan s adalah *salvage value* per satuan barang, s mungkin bernilai nol jika kelebihan item sama sekali tidak berguna, atau bahkan negatif jika diperlukan biaya untuk membuangnya. Dalam kasus apapun, s diasumsikan lebih kecil dari p, karena jika tidak, produsen akan mendapatkan keuntungan dari selisih tersebut dan memutuskan untuk memproduksi atau memesan barang dalam jumlah tidak terbatas. Nilai $c-s$ dapat disebut potensi kerugian per item yang tidak terjual (Ravindran dkk, 1987).

2.2.2 Masalah Newsboy Multiproduk dengan kendala kapasitas

Pandang sistem *newsboy* multiproduk yang memproduksi n produk berbeda, setiap produk memerlukan kapasitas produksi deterministik $\tau_i, i = 1, 2, ..., n$ dan total kapasitas dilambangkan dengan t. Produsen membuat keputusan untuk produksi *in-house* $Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ dan *outsourcing* $Z = (Z_1, Z_2, ..., Z_n)$ agar memaksimalkan keuntungan yang diharapkan. Dalam masalah *newsboy*, variabel keputusan harus memenuhi kendala kapasitas dan kendala non-negatif sebagai berikut :

$$\sum_{i=1}^{n} \tau_i Y_i \leq t \tag{2.1}$$

$$Y_i, Z_i \geq 0, i = 1, 2, ..., n \tag{2.2}$$

Misalkan D_i melambangkan permintaan acak untuk produk $i = 1, 2, ..., n$, yang memiliki fungsi kepadatan peluang kontinu $f_i(\cdot)$, fungsi distribusi kumulatif $F_i(\cdot)$ dan invers fungsi distribusi $F_i^{-1}(\cdot)$. Dengan menggunakan suatu teknik approksimasi, setiap distribusi permintaan kontinu (seperti normal, uniform), jika mempunyai nilai negatif, diaproksimasi sebagai distribusi permintaan non-negatif. Kemudian dapat diasumsikan bahwa $F_i(x) = 0$ untuk semua $x < 0$, dan $F_i(0) \geq 0$.

Selanjutnya, diasumsikan parameter-parameter biaya sebagai berikut :

p_i = harga jual satuan produk i;
c_i = biaya produksi $in - house$ satuan produk i;
d_i = biaya $outsourcing$ satuan produk i;
s_i = harga kelebihan satuan produk i.

Sebagai tambahan, biaya penyimpanan untuk semua produk diasumsikan akan diabaikan. Untuk menghindari kasus yang sederhana, diasumsikan bahwa $p_i > d_i > c_i > s_i$, $i = 1, 2, ..., n$. Dengan kata lain, harga jual satuan produk lebih besar dibanding biaya *outsourcing* produk . Jika tidak, *outsourcing* tidak akan pernah digunakan. Biaya produksi *in-house* per satuan barang lebih kecil dibanding biaya *outsourcing* per satuan barang, namun lebih besar dibanding harga kelebihan per satuan barang atau *salvage value*.

Dinyatakan juga bahwa $\gamma_i = (d_i - c_i)/\tau_i$ merupakan biaya marginal kapasitas *outsourcing* untuk produk $i = 1, 2, ..., n$ (Zhang dan Du, 2009).

2.3 *Outsourcing*

2.3.1 Konsep *outsourcing*

Pada permulaan tahun 1990-an muncul kosakata baru dalam bisnis, yaitu *outsourcing*. Namun, jauh sebelumnya, banyak perusahaan sudah lama mempraktikkan *outsourcing* tanpa menyebutnya *outsourcing*. *Outsourcing* dalam pengertiannya yang paling luas adalah langkah perusahaan untuk menggunakan jasa perusahaan lain dalam melakukan salah satu aktivitasnya seperti penagihan utang, pembukuan, pengembangan teknologi informasi, kebersihan kantor, jasa boga, dan penyediaan karyawan kontrak. *Outsourcing* sendiri sebetulnya adalah terminologi baru yang dapat digunakan untuk berbagai hubungan komersial, termasuk hubungan antara pembeli dan penjual. *Outsourcing* adalah salah satu cara atau usaha untuk melaksanakan sesuatu. Yang menarik sehingga ini banyak digunakan oleh perusahaan ialah karena *outsourcing* dapat meningkatkan efisiensi dan efektivitas perusahaan serta meningkatkan produktivitas secara keseluruhan. *Outsourcing* dapat diumpamakan sebagai sebuah mesin mobil yang tangguh, tetapi yang paling penting bukan mesinnya, tetapi sopir yang mengendarai mobil. *Outsourcing* hanyalah alat manajemen, yang keberhasilannya sangat tergantung dari yang menggunakannya.

Menurut statistik, lebih dari 90% perusahaan di Amerika Serikat melakukan *outsourcing* pada salah satu kegiatannya. Banyak perusahaan mengadopsi *outsourcing* sebagai salah satu strategi perusahan. Pada tahun 1999, *Outsourcing World Summit* mencatat bahwa area yang sangat cepat perkembangannya dalam *outsourcing* adalah:

1. Sumber daya manusia;
2. Manajemen media;
3. Teknologi informasi;
4. Pelayanan pelanggan;
5. *Marketing*.

Namun, belakangan ini area lain seperti logistik, termasuk pembelian, juga sangat berkembang dalam memanfaatkan konsep *outsourcing* ini. Pandangan tradisional suatu organisasi berakar pada model revolusi pascaindustri, yang ditandai oleh perusahaan raksasa seperti General Motors dan DuPont di era tahun 1920 dan 1930. Dalam model ini, organisasi perusahaan yang berhasil digambarkan sebagai organisasi yang mempunyai dan mengawasi hampir semua sumber daya dan kegiatan. Keberhasilan usaha ditandai dengan penguasaan produksi. Perkembangan dalam tahun-tahun selanjutnya menunjukkan bahwa organisasi perusahaan berkembang menjadi makin kompleks, dan sumber daya juga berjalan dengan cara yang sama, yaitu lebih menuju pada spesialisasi yang terfokus pada berbagai elemen dari operasi perusahaan, yaitu desain produk, rekayasa, pembuatan barang, sumber daya manusia, teknologi informasi, logistik, penjualan, dan lain-lain.

Spesialisasi ini membuka jalan *outsourcing* terhadap tugas-tugas yang bersifat bukan tugas utama atau *non core activites*, yang menantang para pimpinan perusahaan untuk mengevaluasi kembali niat tradisional untuk melakukan integrasi vertikal dan memenuhi segala keperluan perusahaan dari satu atap atau dalam perusahaan sendiri. Potensi keuntungan dari *outsourcing* adalah memperoleh kesempatan untuk mengatur organisasi yang lebih fleksibel dalam melakukan kegiatan bisnis utamanya. Pada akhir abad ke-20 dan dalam era abad ke-21 ini, usaha untuk memperoleh jasa dari luar atau dari pihak ketiga menjadi makin mudah. Perbedaan antara perusahaan yang satu dengan perusahaan yang lain adalah terutama mengenai modal intelektual, pengetahuan, dan pengalaman, dan bukan lagi dari besar dan ruang lingkup sumber daya yang mereka miliki dan kuasai. Sebagai hasilnya, banyak perusahan dari hampir semua jenis memilih untuk mengontrakkan berbagai jenis pekerjaannya, dengan tujuan untuk memfokuskan diri pada aktivitas utamanya dan memanfaatkan kemampuan dan kemahiran mitra usahanya dalam menangani aktivitas penunjangnya. Tidak ada satu perusahaan pun yang terlalu kecil atau terlalu besar untuk mempertimbangkan penerapan *outsourcing* ini (Indrajit dan Djokopranoto, 2005).

2.3.2 Bentuk *outsourcing*

Menurut Indrajit dan Djokopranoto (2005), tedapat 5 tipe atau bentuk dalam keluarga *outsourcing*. Tipe yang banyak digunakan oleh perusahaan meliputi *contracting*, *outsourcing*, *insourcing*, *co-sourcing*, dan *benefit-based relationship*.

1. *Contracting*
   Contracting merupakan pengalihan atau penyerahan aktivitas perusahaan kepada perusahaan lain dalam hal kegiatan yang kecil-kecil dan kurang penting seperti kebersihan taman, kebersihan kantor, dan sebagainya. Tipe ini menyangkut kontrak jangka pendek dan tidak berkaitan dengan strategi perusahaan, tetapi lebih berfungsi sebagai jalan keluar untuk keperluan jangka pendek.
2. *Outsourcing*
   Outsourcing adalah tindakan menyerahkan kegiatan perusahaan pada penyedia jasa terpilih dengan maksud menggunakan pengalaman dan keunggulan penyedia jasa sehingga mendapatkan kinerja unggul pula. Tindakan ini adalah langkah strategis yang berjangka panjang, dengan tujuan agar bisa lebih memfokuskan pada tugas utama perusahaan dan meningkatkan daya kompetisi.
3. *Insourcing*
   Insourcing adalah tindakan meningkatkan kualitas dan kinerja salah satu kegiatan dalam perusahaan yang tidak hanya berguna untuk perusahaan sendiri, tapi juga menawarkan jasa untuk kegiatan tersebut kepada perusahaan lain. Jadi, *insourcing* adalah kebalikan dari *outsourcing*. Kegiatan ini adalah pemanfaatan kapasitas berlebih perusahaan yang terlalu besar untuk digunakan sendiri namun terlalu kecil untuk dapat di-*outsource*-kan. Selain itu dapat juga terjadi apabila pekerjaan agak sepi sehingga ada kapasitas lebih.
4. *Co-sourcing*
   Co-sourcing adalah bentuk kerja sama antarperusahaan, yang satu menerima jasa dan yang satunya memberikan jasa tertentu, yang lebih erat daripada outsourcing belaka. Kerja sama erat ini mungkin dalam bentuk meminjamkan tenaga ahli untuk periode tertentu, tanpa harus mengalihkan, karena dalam hal ini perusahaan tidak mau kehilangan tenaga ahli tersebut untuk seterusnya.

5. *Benefit-based relationship*
   Benefit-based relationship adalah bentuk hubungan antarperusahaan yang lebih erat lagi daripada *co-sourcing*, misalnya dua perusahaan selain mempunyai hubungan *co-sourcing*, juga sama-sama melakukan investasi untuk kepentingan bersama.

2.3.3 Keuntungan outsourcing

Menurut Indrajit dan Djokopranoto (2005), berdasarkan studi para ahli manajemen yang dilakukan sejak tahun 1991, termasuk survei yang dilakukan terhadap lebih dari 1.200 perusahaan, *Outsourcing Institute* mengumpulkan sejumlah alasan mengapa perusahaan-perusahaan melakukan *outsourcing* terhadap aktivitas-aktivitasnya dan potensi keuntungan yang diharapkan. Potensi keuntungan atau alasan-alasan tersebut antara lain adalah untuk:

1. Meningkatkan fokus perusahaan;
2. Memanfaatkan kemampuan kelas dunia;
3. Sumber daya sendiri dapat digunakan untuk kebutuhan lain;
4. Mengurangi dan mengendalikan biaya operasi;
5. Memperoleh sumber daya yang tidak dimiliki sendiri;
6. Memecahkan masalah yang sulit dikendalikan atau dikelola.

2.3.4 Strategi *outsourcing*

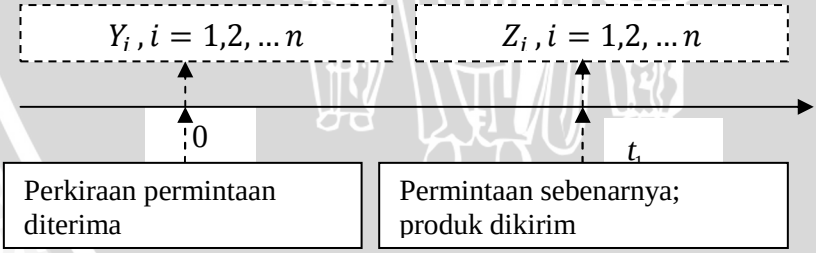
2.3.4.1 *Zero Lead Time Outsourcing Strategy* (ZO)

Dalam strategi *zero lead time outsourcing* (*ZO*), keputusan produsen dibuat dalam dua tahap (lihat Gambar 2.1). Pada saat waktu 0, perusahaan menerima ramalan permintaan untuk semua produk, dan membuat keputusan produksi *in-house* $Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_n)$. Pada saat t_1, produsen menerima permintaan, dan memenuhi permintaan dengan produksi *in-house*, kemudian memutuskan jumlah *outsourcing* $Z = (Z_1, Z_2, ..., Z_n)$ untuk memenuhi sisa permintaan.

Dalam strategi ini, karena *lead time* produksi dari *outsourcing* adalah nol, semua permintaan dapat dipenuhi baik dengan produksi *in-house* maupun *outsourcing*. *Outsourcing* dapat dilihat sebagai sebuah tindakan darurat produksi untuk memenuhi kelebihan permintaan, dan kuantitas *outsourcing* harus $Z_i = \left(D_i - Y_i\right)^+$,

$i = 1, 2, ..., n$, di mana $(\cdot)^+ = \max\{0, \cdot\}$. Oleh karena itu, tujuan produsen adalah memaksimalkan keuntungan yang diharapkan dengan membuat keputusan $Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_n)$. Fungsi keuntungan yang diharapkan diperoleh dari selisih antara pendapatan yang diterima dengan biaya-biaya yang dikeluarkan. Dalam masalah *newsboy* ini, pendapatan diperoleh dari banyaknya permintaan yang diterima (D_i) dikalikan dengan harga jual produk (p_i) ditambah dengan nilai sisa atau *salvage value* produk (s_i) dikalikan banyaknya produk yang tersisa yaitu $(Y_i - D_i)^+$ dimana nilai ini ada jika $Y_i > D_i$. Sementara biaya yang dikeluarkan dalam strategi ini ada dua yaitu biaya produksi *in-house* dan biaya *outsourcing*. Besarnya biaya produksi in-house adalah biaya produksi in-house per produk (c_i) dikalikan dengan banyaknya produk yang diproduksi secara in-house (Y_i). Sedangkan besarnya biaya outsourcing diperoleh dari biaya outsourcing per produk (d_i) dikalikan dengan banyaknya outsourcing yang dilakukan $(D_i - Y_i)^+$. Dengan demikian fungsi keuntungan yang diharapkan dapat diberikan sebagai maksimum dari π_1 dengan

$$\pi_1 = \sum_{i=1}^{n} E_{D_i}\left[p_i D_i + s_i (Y_i - D_i)^+ - c_i Y_i - d_i (D_i - Y_i)^+ \right] \qquad (2.3).$$



Gambar 2.1 Alur waktu kejadian pada strategi ZO.

(Zhang dan Du, 2009).

2.3.4.2 *Nonzero Lead Time Outsourcing Strategy* (NO)

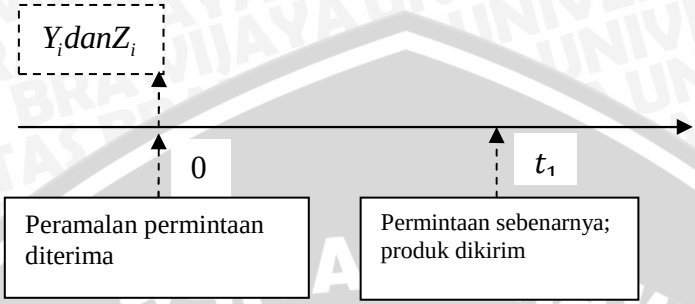
Pada strategi *NO* (*nonzero lead time outsourcing*), *lead time* produk *outsourcing* tidak sama dengan nol. Artinya, terdapat waktu tenggang antara proses pemesanan produk hingga produk dikirim ke produsen. Karena terdapat *lead time*, semua produk yang akan di-*outsource* harus dipesan sebelum realisasi permintaan.

Dalam strategi ini, keputusan produsen harus dibuat dalam satu tahap (lihat Gambar 2.2). Pada waktu nol, produsen menerima peramalan permintaan untuk semua produk, dan membuat keputusan produksi *in-house* $Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ dan produk *outsourcing* $Z = (Z_1, Z_2, ..., Z_n)$. Pada waktu t_1, produsen menerima pesanan sebenarnya, dan mengirimkan produk. Tujuan keseluruhan produsen adalah menentukan jumlah optimal produksi *in-house* dan *outsourcing* untuk memaksimalkan keuntungan yang diharapkan.

Fungsi keuntungan pada strategi ini terbentuk dari beberapa faktor. Faktor pertama yaitu pendapatan yang diperoleh dari harga jual produk. Karena keputusan telah diambil sebelum datangnya permintaan, maka banyaknya produk yang dapat dijual merupakan minimal antara banyaknya permintaan (D_i) dan banyaknya produksi $(Y_i + Z_i)$ sehingga harga jual produk merupakan perkalian antara harga masing-masing produk (p_i) dengan minimal $(D_i, Y_i + Z_i)$. Faktor kedua dalam fungsi keuntungan adalah nilai sisa (*salvage value*) produk. Faktor ini ada jika terdapat kelebihan produk sehingga nilainya diperoleh dari nilai masing-masing produk (s_i) dikalikan dengan $((Y_i + Z_i) - D_i)^+$. Sedangkan faktor ketiga dan faktor keempat dalam fungsi keuntungan ini merupakan biaya produksi, baik *in-house* $(c_i Y_i)$ maupun *outsourcing* $(d_i Z_i)$. Selanjutnya dibentuk model optimalisasi keuntungan berdasarkan strategi ini yaitu maksimum π_2, di mana

$$\pi_2 = \sum_{i=1}^{n} E_{D_i}\left[p_i \min(D_i, Y_i + Z_i) + s_i\left((Y_i + Z_i) - D_i\right)^+ - c_i Y_i - d_i Z_i \right] \quad (2.4)$$

dengan π_2 adalah keuntungan yang diharapkan pada strategi *outsourcing* NO.



Gambar 2.2 Alur waktu kejadian pada strategi NO.

(Zhang dan Du, 2009).

2.4 *Nonlinear Programming*

Menurut Bradley dkk (1977), masalah umum optimasi adalah memilih n variabel keputusan $x_1, x_2, ..., x_n$ dari daerah *feasible* yang diberikan sedemikian rupa untuk mengoptimalkan (meminimalkan atau memaksimalkan) sebuah fungsi tujuan yang diberikan $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ dari variabel keputusan. Masalah tersebut disebut *nonlinear programming* (NLP) jika fungsi tujuannya nonlinear dan/atau daerah *feasible* ditentukan oleh kendala nonlinear. Dengan demikian, pada bentuk maksimasi, masalah umum program nonlinear dinyatakan sebagai:

maksimumkan $f(x_1, x_2, ..., x_n)$,

dengan kendala:

$$g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_1$$
$$\vdots$$
$$g_m(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_m$$

Untuk kenyamanan notasi, biasanya x dimisalkan sebagai vektor dari n variabel keputusan $x_1, x_2, ..., x_n$ yaitu $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dan permasalahan NLP dapat ditulis secara singkat sebagai

maksimumkan $f(\vec{x})$, (2.5)

dengan kendala:

$g_i(\vec{x}) \le b_i$, $(i = 1, 2, ..., m)$. (2.6)

Banyak prosedur penyelesaian pemrograman nonlinear yang telah dikembangkan tidak menyelesaikan masalah umum seperti pada persamaan (2.5) dan (2.6) tetapi beberapa kasus khusus. Berikut daftar kasus khusus yang dimaksud.

1. Optimasi tanpa kendala :

   f bebas, $m = 0$ (tidak ada kendala).

2. Pemrograman Linear :

   $$f\left(\vec{x}\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j \overrightarrow{x_j}, g_i\left(\vec{x}\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \overrightarrow{x_j} \qquad \text{(i=1,2,…,m)},$$

   $$g_{m+i}\left(\vec{x}\right) = -\overrightarrow{x_i} \qquad \text{(i=1,2,…,n)}.$$

3. Pemrograman Kuadratik :

   $$f\left(\vec{x}\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} q_{ij} x_i x_j \qquad \text{(kendala kasus 2)}$$

   (q_{ij} konstanta yang diberikan).

4. Masalah kendala Linear :

   $$f\left(\vec{x}\right) \text{ umum, } g_i\left(\vec{x}\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad \text{(i=1,2,…,m)}$$

   (mungkin $x_j \geq 0$ juga dimasukkan).

5. *Separable Programming*:

   $$f(x) = \sum_{j=1}^{m} f_j(x_j), g_i\left(\vec{x}\right) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}\left(x_j\right) \qquad \text{(i=1,2,…,m)}.$$

   Masalah dipisahkan menjadi fungsi dengan peubah tunggal. Fungsi f_j dan g_{ij} diberikan.

6. *Convex Programming:*

   f adalah fungsi *concave* (dalam masalah minimasi, f dapat berupa fungsi *convex*).

   Semua fungsi $g_i\,(i = 1, 2, ..., m)$ adalah fungsi *convex*.

2.5 Fungsi *Concave* dan Fungsi *Convex*

Definisi 2.1.

Sebuah fungsi $f(x)$ dikatakan *convex* jika pertidaksamaan berikut berlaku untuk setiap dua titik $x^{(1)}$ dan $x^{(2)}$

$f(\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}) \le \lambda f(x^{(1)}) + (1-\lambda) f(x^{(2)})$ untuk semua $\lambda \in [0,1]$. Sebuah fungsi $f(x)$ adalah *concave* jika $-f(x)$ adalah *convex*. Hal ini dapat dinyatakan kembali sebagai berikut:
$f(\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}) \ge \lambda f(x^{(1)}) + (1-\lambda) f(x^{(2)})$ untuk semua $\lambda \in [0,1]$.

Definisi 2.2.

Masalah berikut

minimal $z = f(x)$ dengan kendala $g_i(x) \le b_i$, $i = 1, 2, ..., m$ adalah masalah *convex* jika $f(x)$ dan $g_i(x)$, $i = 1, 2, ..., m$ adalah fungsi *convex*. Jika masalahnya adalah masalah maksimasi, maka masalah tersebut juga disebut masalah *convex* jika $f(x)$ adalah fungsi *concave* dan $g_i(x)$, $i = 1, 2, ..., m$ adalah fungsi *convex* (Bradley dkk, 1977).

Jika $f(x)$ terdiferensiabel dua kali di x , maka matriks Hessian dari $f(x)$ diberikan oleh

$$H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Teorema 2.1.

Misalkan $f(x)$ mempunyai turunan orde ke dua yang kontinu di setiap titik $x \in X$, maka

1. $f(x)$ adalah fungsi *convex* di X jika matriks Hessian H adalah semidefinit positif untuk semua $x \in X$.

2. $f(x)$ adalah fungsi *strictly convex* di X jika matriks Hessian H adalah definit positif untuk semua $x \in X$.
3. $f(x)$ adalah fungsi *concave* di X jika matriks Hessian H adalah semidefinit negatif untuk semua $x \in X$.
4. $f(x)$ adalah fungsi *strictly concave* di X jika matriks Hessian H adalah definit negatif untuk semua $x \in X$.

Jika keempat kasus tersebut tidak berlaku, maka dikatakan bahwa H adalah *indefinite* dan fungsinya bukan *convex* maupun *concave*.

Teorema 2.2

1. Matriks H adalah semidefinit positif jika semua nilai eigennya nonnegatif.
2. Matriks H adalah definit positif jika semua nilai eigennya positif.
3. Matriks H adalah semidefinit negatif jika semua nilai eigennya nonpositif.
4. Matriks H adalah definit negatif jika semua nilai eigennya negatif.
5. Matriks H adalah indefinit jika paling tidak terdapat satu nilai eigen positif dan satu nilai eigen negatif.

(Anonimus1, 2011).

2.6 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.3

Jika A adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol x di dalam R^n dinamakan vector eigen dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x yaitu $Ax = \lambda x$ untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan nilai eigen dari A dan x dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Untuk mencari nilai eigen matriks A yang berukuran $n \times n$ maka $Ax = \lambda x$ dapat dituliskan kembali sebagai

$$Ax = \lambda Ix$$

atau secara ekuivalen

$$(A - \lambda I)x = 0.$$

Supaya λ menjadi nilai eigen, maka harus ada pemecahan tak nol dari persamaan ini. Persamaan $(A-\lambda I)x=0$ akan mempunyai pemecahan tak nol jika dan hanya jika

$$\det(A-\lambda I)=0.$$

Persamaan yang didapat dari hasil determinan tersebut dinamakan persamaan karakteristik A; skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai eigen dari A.

(Anton, 1994).

2.7 Syarat Optimasi Karush-Kuhn-Tucker (KKT) untuk NLP

Pandang masalah umum NLP berikut:

[NLP] max (atau min) $z = f\left(\overline{x}\right)$

dengan kendala $g_i(\vec{x}) \le b_i$ dan $x \ge 0$, $i=1,2,...,m$

di mana $f(\vec{x})$ dan $g_i(\vec{x})$, $i=1,2,...,m$ adalah fungsi yang diferensiabel. Untuk menerapkan teorema pada bagian ini, semua kendala harus berbentuk kendala $\le$. Suatu kendala dalam bentuk $g_i(\vec{x}) \ge b_i$ harus ditulis sebagai $-g_i(\vec{x}) \le -b_i$.

(Anonimus1, 2011).

Teorema 2.3 (Syarat Perlu KKT)

Misalkan [NLP] adalah masalah maksimasi, dan $f(\vec{x})$ dan $g_i(\vec{x})$ $i=1,2,...,m$ memenuhi kondisi regulasi tertentu. Maka $\overline{x}=\left(\overline{x_1},\overline{x_2},...,\overline{x_n}\right)$ dapat menjadi penyelesaian optimal untuk hanya [NLP] jika terdapat m pengali $u_1,u_2,...,u_m$ sedemikian sehingga semua syarat berikut terpenuhi:

(1) $\nabla f\left(\overline{x}\right) - \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla g_i(\overline{x}) \le 0$

(dengan kata lain $\dfrac{\partial f\left(\overline{x}\right)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} u_i \dfrac{\partial g_i\left(\overline{x}\right)}{\partial x_j} \le 0$, $j=1,2,...,n$)

(2) $\bar{x}_j \left(\frac{\partial f\left(\bar{x}\right)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial g_i\left(\bar{x}\right)}{\partial x_j} \right) = 0, \quad j = 1, 2, ..., n$

(3) $g_i\left(\bar{x}\right) \le b_i, \qquad i = 1, 2, ..., m$

(4) $u_i\left(b_i - g_i\left(\bar{x}\right)\right) = 0, \qquad i = 1, 2, ..., m$

(5) $x_j \ge 0, \qquad j = 1, 2, ..., n$

(6) $u_i \ge 0, \qquad i = 1, 2, ..., m.$

Pada kondisi KKT terdahulu, pengali u_i dapat dianggap sebagai harga bayangan (variabel dual) untuk kendala ke-*i* dalam [NLP]. Syarat (1) dan (6) memastikan dual *feasibility* dan syarat (3) dan (5) memastikan primal *feasibility*. Syarat (2) dan (4) menggambarkan *slackness* komplementer. Sebagai catatan, dengan memenuhi syarat-syarat tersebut tidak menjamin bahwa penyelesaiannya optimal. Perlu ditambahkan asumsi-asumsi kecembungan tertentu untuk memperoleh jaminan bahwa penyelesaian tersebut optimal.

Teorema 2.4 (Syarat Cukup KKT)

Anggap $f(\vec{x})$ adalah fungsi *concave* dan $g_i(\vec{x})$, $i = 1, 2, ..., m$ adalah fungsi *convex* (dengan kata lain masalah ini adalah masalah pemrograman *convex*), di mana semua fungsi memenuhi syarat regulasi. Maka setiap titik $\vec{x}$ yang memenuhi syarat KKT adalah penyelesaian yang optimal untuk [NLP] (Anonimus1, 2011).

2.7 Distribusi Peluang

Distribusi peluang berasal dari eksperimen di mana hasil dari distribusi peluang adalah berupa peluang/kesempatan data memiliki nilai tertentu. Ada dua tipe distribusi peluang yaitu kontinu dan diskrit.

1. Variabel acak diskrit X menentukan distribusi peluang jika nilai-nilai $X : x_1, x_2, ..., x_n$ memiliki peluang $p\left(x_i\right) = P(X = x_i)$ dan memberikan fungsi: $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$.

2. Variabel acak yang kontinu, contohnya untuk menyatakan waktu dan hasil pengukuran. Jika X adalah variabel acak kontinu, maka nilai $X = x$ dibatasi oleh $-\infty < x < \infty$. Fungsi densitas $f(x)$ yang dapat menghasilkan peluang harga-harga x berlaku $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Peluang nilai $X = x$ antara a dan b adalah

$$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

(Lasfeto dan Nurhayati, 2008).

2.8 Ekspektasi Matematis

Satu konsep yang sangat penting dalam probabilitas dan statistik adalah konsep ekspektasi matematis, nilai ekspektasi, atau disingkat ekspektasi, dari suatu variabel acak. Untuk suatu variabel acak diskrit X yang memiliki nilai-nilai yang mungkin $x_1, ..., x_n$, ekspektasi dari X didefinisikan sebagai

$$E(X) = x_1 P(X = x_1) + ... + x_n P(X = x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j P(X = x_j)$$

atau ekuivalennya, jika $P(X = x_j) = f(x_j)$,

$$E(X) = x_1 f(x_1) + ... + x_n f(x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(x_j) = \sum_{x} xf(x)$$

di mana penjumlahan yang terakhir dilakukan terhadap semua nilai-nilai yang mungkin dari x.

Jika x memiliki nilai-nilai $x_1, x_2, ...$ yang berjumlah tak hingga, maka $E(X) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j f(x_j)$ dengan syarat deret infinit ini konvergen absolut. Untuk suatu variabel acak kontinu X dengan fungsi kepadatan $f(x)$ ekspektasi dari X didefinisikan sebagai $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ dengan syarat integralnya kontinu secara absolut. Beberapa sifat ekspektasi yaitu sebagai berikut.

1. $E\left[g\left(X\right)\right]=\sum_{x} g(x)f(x)$ untuk variabel acak diskrit, dan

   $E\left[g\left(x\right)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$ untuk variabel acak kontinu.
2. Jika c adalah suatu konstanta sembarang, maka $E(cX)=cE(X)$.
3. Jika X dan Y adalah variabel-variabel acak sembarang, maka $E\left(X+Y\right)=E(X)+E(Y)$.
4. Jika X dan Y adalah variabel-variabel acak yang *independent*, maka $E(XY)=E(X)E(Y)$.

(Spiegel dkk, 2004).

2.9 Distribusi Normal

Salah satu contoh penting dari distribusi probabilitas kontinu adalah distribusi normal, kadang-kadang disebut distribusi *Gaussian*. Fungsi kepadatan peluang untuk distribusi ini ditentukan oleh

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad -\infty<x<\infty \qquad (2.7)$$

,

di mana μ dan σ adalah berturut-turut *mean* dan deviasi standar.

Fungsi distribusi kumulatif untuk distribusi normal diberikan oleh

$$F(x)=P(X\le x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-(\upsilon-\mu)^2/2\sigma^2}\,d\upsilon$$

Jika X memiliki fungsi distribusi yang ditentukan oleh persamaan di atas, dapat dikatakan bahwa variabel X terdistribusi normal dengan *mean* μ dan variansi σ^2.

Jika Z adalah variabel terstandarisasi yang sesuai dengan X, yaitu jika $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ maka nilai mean atau nilai ekspektasi dari Z adalah 0 dan variansinya adalah 1. Dalam kasus semacam ini fungsi kepadatan untuk Z dapat diperoleh dari persamaan (2.7) dengan memasukkan $\mu=0$ dan $\sigma=1$, menghasilkan

$$f(z)=P(Z\le z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}$$

Fungsi ini seringkali dinyatakan sebagai fungsi kepadatan normal standar. Fungsi distribusi untuk ini ditentukan oleh

$$F(z) = P(Z \le z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-u^2/2} du = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-u^2/2} du$$

Nilai z dari variabel terstandarisasi Z dapat disebut sebagai nilai standar. Fungsi $F(z)$ berkaitan dengan fungsi *error* (*error function*) yang telah ditabulasikan secara rinci, *erf*(z) sehingga terdapat

$$erf(z) = \frac{z}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{z} e^{-u^2} du \text{ dan } F(z) = \frac{1}{2}\left[1 + erf\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

(Spiegel dan kawan-kawan, 2002).

Dalam distribusi normal, terdapat invers dari fungsi distribusi kumulatif, yang sering disebut sebagai fungsi quantil atau fungsi probit. Untuk sebuah variabel acak normal dengan *mean* μ dan variansi σ^2 fungsi quantilnya adalah:

$$\mathrm{F}^{-1}\left(p;\mu,\sigma^2\right) = \mu + \sigma\sqrt{2} erf^{-1}\left(2p-1\right), p \in (0,1)$$

(Anonimus2, 2011).

2.10 Fungsi *Error*

Dalam matematika, fungsi *error* (disebut juga fungsi *error* Gauss atau integral peluang) merupakan fungsi khusus dari bentuk sigmoid yang didefinisikan sebagai

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} e^{-t^2} dt .$$

Fungsi *error* merupakan fungsi ganjil sehingga

$$erf(-x) = -erf(x).$$

Invers fungsi *error* memiliki deret

$$erf^{-1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{2k+1} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} x\right)^{2k+1}$$

$$erf^{-1}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,(x + \frac{\pi}{12}x^3 + \frac{7\pi^2}{480}x^5 + \ldots)$$

dengan $c_0 = 1$ dan $c_k = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{c_m c_{k-1-m}}{(m+1)(2m+1)} = \left\{1, 1, \frac{7}{6}, \frac{127}{90}, \ldots\right\}$

(Anonimus3, 2011).

BAB III
HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Proses Pengambilan Keputusan

Dalam skripsi ini, dibahas mengenai masalah *newsboy* multiproduk dengan *nonzero outsourcing strategy* (strategi NO). Pada strategi NO, keputusan produsen dilakukan dalam satu tahap. Terdapat dua asumsi dalam strategi NO yaitu (a) bahwa tidak ada perbedaan waktu sedemikian sehingga produk dipesan dan dikirimkan pada waktu yang sama baik produk *outsourced* maupun produksi *in-house* atau (b) jika terdapat perbedaan waktu, bahwa tidak ada biaya untuk mendapatkan produk tercepat lebh dahulu atau tidak ada manfaat untuk menunggu pemesanan produk tercepat , misalnya perubahan permintaan. Berdasarkan asumsi ini, produk *outsourcing* dapat dipesan pada waktu nol tanpa mengorbankan optimalitas. Dalam situasi ini, tidak ada keuntungan untuk menunggu atau bergegas melakukan pesanan atau produksi.

Pada waktu nol, produsen menerima peramalan permintaan untuk semua produk akhir, dan membuat keputusan produksi *in-house* dan *outsourcing* $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ dan $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$; pada waktu t_1, produsen menerima pesanan sebenarnya, dan mengirimkan produk. Tujuan keseluruhan produsen adalah menentukan jumlah optimal produksi *in-house* dan *outsourcing* untuk memaksimalkan keuntungan yang diharapkan.

3.2 Model Matematika

Fungsi keuntungan pada strategi NO diberikan sebagai

maksimum $$\pi_2 = \sum_{i=1}^{n} E_{D_i}\left[p_i\left(\min\left(D_i, Y_i + Z_i\right)\right) + s_i\left(\left(Y_i + Z_i\right) - D_i\right)^{+} - c_i Y_i - d_i Z_i \right] \quad (3.1)$$

dengan kendala

$$T = \sum_{i=1}^{n} \tau_i Y_i \le t \quad (3.2)$$

$$Y_i, Z_i \ge 0\,,\ i = 1, 2, \dots, n \quad (3.3)$$

Total keuntungan pada persamaan (3.1) merupakan jumlahan pendapatan produk *i* dan nilai sisa produk *i*, dikurangi biaya produksi

in-house dan biaya *outsourcing*. Dengan manipulasi matematika (lihat Lampiran 1), persamaan (3.1) dapat ditulis sebagai

$$\pi_2 = \sum_{i=1}^{n} \left[(p_i - c_i) Y_i + (p_i - d_i) Z_i - (p_i - s_i) \int_0^{Y_i + Z_i} F_i(x_i) dx_i \right] \quad (3.4)$$

3.3 Prosedur Penyelesaian

Untuk membangun suatu prosedur penyelesaian masalah persamaan (3.4), diperlukan beberapa sifat struktural keputusan optimal.

Proposisi 3.1.

Fungsi keuntungan yang diharapkan π_2 *jointly concave* di (Y, Z).

Bukti.

Untuk membuktikan bahwa fungsi keuntungan π_2 *jointly concave* di (Y, Z) perlu dicari matriks Hessian dari persamaan (3.4). Menurut teorema 2.1, jika matriks Hessian dari fungsi π_2 merupakan semidefinit negatif, maka fungsi tersebut merupakan fungsi *concave*.

Langkah pertama yang dilakukan untuk mencari matriks Hessian fungsi π_2 adalah menemukan turunan ke dua terhadap kedua variabel *Y* dan *Z*.

Turunan pertama fungsi π_2 terhadap Y_i adalah

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial Y_i} = \frac{\partial}{\partial Y_i} \left(\sum_{i=1}^{n} (p_i - c_i) Y_i + (p_i - d_i) Z_i - (p_i - s_i) \int_0^{Y_i + Z_i} F_i(x_i) dx_i \right)$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial Y_i} = (p_i - c_i) - (p_i - s_i) F_i(Y_i + Z_i)$$

Sedangkan turunan pertama fungsi π_2 terhadap Z_i adalah

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial Z_i} = \frac{\partial}{\partial Z_i} \left(\sum_{i=1}^{n} (p_i - c_i) Y_i + (p_i - d_i) Z_i - (p_i - s_i) \int_0^{Y_i + Z_i} F_i(x_i) dx_i \right)$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial Z_i} = (p_i - d_i) - (p_i - s_i) F_i(Y_i + Z_i)$$

Turunan ke dua fungsi π_2 masing-masing terhadap Y_i dan Z_i adalah

$$\frac{\partial^2 \pi_2}{\partial Y_i^2} = \frac{\partial}{\partial Y_i} \left(\frac{\partial \pi_2}{\partial Y_i} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \pi_2}{\partial Y_i^2} = \frac{\partial}{\partial Y_i}\left(\left(p_i - c_i\right) - \left(p_i - s_i\right) F_i(Y_i + Z_i)\right)$$

$$\frac{\partial^2 \pi_2}{\partial Y_i^2} = -\left(p_i - s_i\right) f_i(Y_i + Z_i)\,,$$

$$\frac{\partial^2 \pi_2}{\partial Z_i^2} = \frac{\partial}{\partial Z_i}\left(\frac{\partial \pi_2}{\partial Z_i}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \pi_2}{\partial Z_i^2} = \frac{\partial}{\partial Z_i}\left(\left(p_i - d_i\right) - \left(p_i - s_i\right) F_i(Y_i + Z_i)\right)$$

$$\frac{\partial^2 \pi_2}{\partial Z_i^2} = -\left(p_i - s_i\right) f_i(Y_i + Z_i)\,,$$

$$\frac{\partial^2 \pi_2}{\partial Y_i \partial Z_i} = \frac{\partial}{\partial Y_i}\left(\frac{\partial \pi_2}{\partial Z_i}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \pi_2}{\partial Y_i \partial Z_i} = \frac{\partial}{\partial Y_i}\left(\left(p_i - d_i\right) - \left(p_i - s_i\right) F_i(Y_i + Z_i)\right)$$

$$\frac{\partial^2 \pi_2}{\partial Y_i \partial Z_i} = -\left(p_i - s_i\right) f_i(Y_i + Z_i)\,,$$

$$\frac{\partial^2 \pi_2}{\partial Z_i \partial Y_i} = \frac{\partial}{\partial Z_i}\left(\frac{\partial \pi_2}{\partial Y_i}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \pi_2}{\partial Z_i \partial Y_i} = \frac{\partial}{\partial Z_i}\left(\left(p_i - c_i\right) - \left(p_i - s_i\right) F_i(Y_i + Z_i)\right)$$

$$\frac{\partial^2 \pi_2}{\partial Z_i \partial Y_i} = -\left(p_i - s_i\right) f_i(Y_i + Z_i)\,.$$

Setelah diketahui turunan ke dua fungsi π_2 maka dapat dibentuk matriks Hessiannya dimana

$$H_i(Y_i, Z_i) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \pi_2}{\partial Y_i^2} & \dfrac{\partial^2 \pi_2}{\partial Y_i \partial Z_i} \\ \dfrac{\partial^2 \pi_2}{\partial Z_i \partial Y_i} & \dfrac{\partial^2 \pi_2}{\partial Z_i^2} \end{bmatrix}$$

$$H_i(Y_i, Z_i) = \begin{bmatrix} -\left(p_i - s_i\right) f_i(Y_i + Z_i) & -\left(p_i - s_i\right) f_i(Y_i + Z_i) \\ -\left(p_i - s_i\right) f_i(Y_i + Z_i) & -\left(p_i - s_i\right) f_i(Y_i + Z_i) \end{bmatrix}$$

Menurut Teorema 2.2, suatu matriks Hessian H adalah semidefinit negatif jika semua nilai eigennya nonpositif. Maka langkah selanjutnya adalah pencarian nilai eigen matriks H.

$$|H-\lambda I|=0$$

$$\left|\begin{bmatrix} -(p_i-s_i)f_i(Y_i+Z_i) & -(p_i-s_i)f_i(Y_i+Z_i) \\ -(p_i-s_i)f_i(Y_i+Z_i) & -(p_i-s_i)f_i(Y_i+Z_i) \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -(p_i-s_i)f_i(Y_i+Z_i)-\lambda & -(p_i-s_i)f_i(Y_i+Z_i) \\ -(p_i-s_i)f_i(Y_i+Z_i) & -(p_i-s_i)f_i(Y_i+Z_i)-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Misalkan $-(p_i-s_i)f_i(Y_i+Z_i)=a$, maka

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & a \\ a & a-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(a-\lambda)(a-\lambda)-a^2=0$$

$$a^2-2a\lambda+\lambda^2-a^2=0$$

$$\lambda^2-2a\lambda=0$$

$$\lambda(\lambda-2a)=0$$

$\lambda=0$ atau $\lambda=2a=-2(p_i-s_i)f_i(Y_i+Z_i)$.

Terbukti semua nilai eigennya adalah nonpositif, maka matriks Hessian tersebut merupakan semidefinit negatif, sehingga fungsi π_2 *jointly concave* di (Y,Z).

Karena π_2 *concave* dan daerah hasilnya *convex*, maka merupakan syarat perlu dan syarat cukup kondisi *Karush-Kuhn-Tucker* untuk optimalitas. Berdasarkan Teorema 2.3 (syarat perlu KKT), untuk mendapat solusi optimal perlu dipenuhi syarat-syarat berikut.

1. a. $\dfrac{\partial \pi_2}{\partial Y_i} - u_1 \dfrac{\partial T}{\partial Y_i} \le 0$

$$(p_i-c_i)-(p_i-s_i)F_i(Y_i+Z_i)-u_1\tau_i \le 0$$

b. $\dfrac{\partial \pi_2}{\partial Z_i} - u_1 \dfrac{\partial T}{\partial Z_i} \le 0$

$$(p_i-d_i)-(p_i-s_i)F_i(Y_i+Z_i) \le 0$$

2. a. $Y_i\left(\dfrac{\partial \pi_2}{\partial Y_i} - u_1 \dfrac{\partial T}{\partial Y_i}\right) = 0$

$$Y_i\left[\left(p_i-c_i\right)-\left(p_i-s_i\right)F_i\left(Y_i+Z_i\right)-u_1\tau_i\right]=0$$

b. $Z_i\left(\dfrac{\partial\pi_2}{\partial Z_i}-u_1\dfrac{\partial T}{\partial Z_i}\right)=0$

$$Z_i\left[\left(p_i-d_i\right)-\left(p_i-s_i\right)F_i\left(Y_i+Z_i\right)\right]=0$$

3. $\sum_{i=1}^{n}\tau_i Y_i\le t$

4. $u_1\left(t-\sum_{i=1}^{n}\tau_i Y_i\right)=0$

5. $Y_i, Z_i\ge 0$

6. $u_1\ge 0$

Dengan menambahkan variabel w_i dan v_i, syarat 1(a) dan 1(b) dapat diubah menjadi

$$\left(p_i-c_i\right)-\left(p_i-s_i\right)F_i\left(Y_i+Z_i\right)-u_1\tau_i+w_i=0 \qquad (3.5),$$

$$\left(p_i-d_i\right)-\left(p_i-s_i\right)F_i\left(Y_i+Z_i\right)+v_i=0 \qquad (3.6).$$

Dengan mengalikan persamaan (3.5) dengan Y_i diperoleh

$$Y_i\left[\left(p_i-c_i\right)-\left(p_i-s_i\right)F_i\left(Y_i+Z_i\right)-u_1\tau_i+w_i\right]=0,$$

$$Y_i\left[\left(p_i-c_i\right)-\left(p_i-s_i\right)F_i\left(Y_i+Z_i\right)-u_1\tau_i\right]+Y_iw_i=0.$$

Menurut syarat 2(a), maka diperoleh $Y_iw_i=0$.

Selanjutnya, dengan mengalikan persamaan (3.6) dengan Z_i diperoleh

$$Z_i\left[\left(p_i-d_i\right)-\left(p_i-s_i\right)F_i\left(Y_i+Z_i\right)+v_i\right]=0,$$

$$Z_i\left[\left(p_i-d_i\right)-\left(p_i-s_i\right)F_i\left(Y_i+Z_i\right)\right]+Z_iv_i=0.$$

Menurut syarat 2(b), maka diperoleh $Z_iv_i=0$. Karena Y_iw_i dan Z_iv_i berlaku untuk $\mathrm{i}=1,2,\ldots,n$, maka $\sum_{i=1}^{n}Y_iw_i=0$ dan $\sum_{i=1}^{n}Z_iv_i=0$ sehingga

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i w_i + \sum_{i=1}^{n} Z_i v_i = 0 \qquad (3.7).$$

Diketahui pula bahwa pada syarat ke empat berlaku

$$u_1\left(t - \sum_{i=1}^{n} \tau_i Y_i\right) = 0 \qquad (3.8).$$

Maka u_1, w_i, dan v_i merupakan variabel dual yang berhubungan dengan persamaan (3.2) dan (3.3). Suatu penyelesaian (Y, Z) merupakan penyelesaian optimal jika dan hanya jika terdapat variabel dual u_1, w_i, dan v_i sedemikian sehingga memenuhi persamaan (3.5)-(3.8).

Sebagai catatan, $u_1 \geq 0$ pada persamaan (3.8) menunjukkan harga bayangan dari kendala kapasitas pada persamaan (3.2). $u_1 > 0$ menunjukkan bahwa kendala kapasitas dalam persamaan (3.2) berlaku sebagai persamaan.

Solusi optimal untuk masalah tanpa kendala diperoleh melalui analisis turunan parsial dari fungsi objektif π_2. Diketahui turunan pertama fungsi π_2 masing-masing terhadap Y_i dan Z_i adalah

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial Y_i} = (p_i - c_i) - (p_i - s_i) F_i(Y_i + Z_i)$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial Z_i} = (p_i - d_i) - (p_i - s_i) F_i(Y_i + Z_i).$$

Solusi optimal produksi *in-house* (misal $\hat{Y}_i$) diperoleh dari

$$(p_i - c_i) - (p_i - s_i) F_i(Y_i + Z_i) = 0$$

$$(p_i - c_i) = (p_i - s_i) F_i(Y_i + Z_i)$$

$$F_i(Y_i + Z_i) = \frac{(p_i - c_i)}{(p_i - s_i)}$$

$$\hat{Y}_i = F_i^{-1}\left(\frac{p_i - c_i}{p_i - s_i}\right).$$

Sedangkan solusi optimal produk *outsourcing* (misal $\tilde{Z}_i$) diperoleh dari

$$(p_i - d_i) - (p_i - s_i) F_i (Y_i + Z_i) = 0$$

$$(p_i - d_i) = (p_i - s_i) F_i (Y_i + Z_i)$$

$$F_i (Y_i + Z_i) = \frac{(p_i - d_i)}{(p_i - s_i)}$$

$$\tilde{Z}_i = F_i^{-1}\left(\frac{p_i - d_i}{p_i - s_i}\right)$$

Karena $d_i > c_i$, maka $\tilde{Z}_i < \tilde{Y}_i$, $i = 1, \dots, n$. Misal $Y^*, Z^*, u_1{}^*, w^*, v^*$ merupakan solusi dari kondisi *KKT* di persamaan (3.5)-(3.8). Dengan menganalisis turunan parsial dari fungsi objektif π_2 dan kondisi *KKT* pada persamaan (3.5)-(3.8), maka dibentuklah proposisi berikut:

Proposisi 3.2.

(a) $Y_i^* \leq \tilde{Y}_i$ dan $Z_i^* = (\tilde{Z}_i - Y_i^*)^+ \leq \tilde{Z}_i$, $i = 1, \dots, n$;

(b) Jika $\sum_{i=1}^n \tau_i \tilde{Y}_i \leq t$, maka $Y_i^* = \tilde{Y}_i$ dan $Z_i^* = 0$ $i = 1, \dots, n$;

(c) Jika $\sum_{i=1}^n \tau_i \tilde{Y}_i > t$, maka $\sum_{i=1}^n \tau_i Y_i^* = t$.

Bukti.

(a) Jika $Y_i^* > \tilde{Y}_i$, maka turunan fungsi keuntungan terhadap Y^* yaitu $\frac{\partial \pi_2}{\partial Y^*} = (p_i - c_i) - (p_i - s_i) F(Y^*)$ akan lebih kecil nilainya dari turunan fungsi keuntungan terhadap $\tilde{Y}$ yaitu $\frac{\partial \pi_2}{\partial \tilde{Y}} = (p_i - c_i) - (p_i - s_i) F(\tilde{Y}) = 0$. Dengan kata lain diperoleh $\frac{\partial \pi_2}{\partial Y_i^*} < (p_i - c_i) - (p_i - s_i) F_i(\tilde{Y}_i) = 0$, karena untuk $Y_i^* > \tilde{Y}_i$, nilai fungsi distribusi kumulatifnya $F(Y^*) > F(\tilde{Y})$ (karena F fungsi monoton naik). Dengan demikian, penurunan Y_i yang cukup kecil akan meningkatkan keuntungan yang diharapkan.

Jika $Y_i^* \leq \tilde{Z}_i$ dan $Y_i^* + Z_i^* < \tilde{Z}_i$, maka $Z^* < \tilde{Z}$ sehingga $\frac{\partial \pi_2}{\partial Z_i^*} > (p_i - d_i) - (p_i - s_i) F_i(\tilde{Z}_i) = 0$ karena $F(Z^*) < F(\tilde{Z})$

, dan peningkatan Z_i yang cukup kecil akan meningkatkan keuntungan yang diharapkan.

Jika $Y_i^* \leq \tilde{Z}_i$ dan $Y_i^* + Z_i^* > \tilde{Z}_i$, maka $Z^* > \tilde{Z}$ sehingga $F\left(Z^*\right) > F\left(\tilde{Z}\right)$ dan didapatkan nilai turunan π_2 terhadap Z_i^* yaitu $\frac{\partial \pi_2}{\partial Z_i^*} < (p_i - d_i) - (p_i - s_i)F_i(\tilde{Z}_i) = 0$, dan penurunan nilai Z_i yang cukup kecil akan meningkatkan keuntungan yang diharapkan.

Jika $Y_i^* > \tilde{Z}_i$ dan $Z_i^* > 0$, maka $F\left(Y^*\right) > F\left(\tilde{Z}\right)$ dan $F\left(Y^* + Z^*\right) > F\left(\tilde{Z}\right)$ sehingga turunan fungsi keuntungan terhadap Z^* yaitu $\frac{\partial \pi_2}{\partial Z^*} = \left(p_i - d_i\right) - \left(p_i - c_i\right) F\left(Z^*\right)$ akan lebih kecil dari turunan fungsi keuntungan terhadap $\tilde{Z}$ yaitu $\frac{\partial \pi_2}{\partial \tilde{Z}} = \left(p_i - d_i\right) - \left(p_i - c_i\right) F\left(\tilde{Z}\right)$. Dengan kata lain, diperoleh $\frac{\partial \pi_2}{\partial Z_i^*} < (p_i - d_i) - (p_i - s_i)F_i(\tilde{Z}_i) = 0$, dan perubahan Z_i yang cukup kecil akan meningkatkan keuntungan. Sehingga dihasilkan $Z_i^* = \left(\tilde{Z}_i - Y_i^*\right)^+ \leq \tilde{Z}_i$.

(b) Kondisi $\sum_{i=1}^{n} \tau_i Y_i \leq t$ menyiratkan bahwa kendala kapasitas tidak aktif, sehingga $Y_i^* = \tilde{Y}_i$. Sesuai dengan $Z_i^* = \left(\tilde{Z}_i - Y_i^*\right)^+$ dan $\tilde{Z}_i < \tilde{Y}_i$, maka $Z_i^* = 0$.

(c) Jika $\sum_{i=1}^{n} \tau_i Y_i^* < t$, maka kondisi $\sum_{i=1}^{n} \tau_i \tilde{Y}_i > t$ menyiratkan bahwa terdapat setidaknya satu $k \in \{1, \dots, n\}$ sedemikian sehingga $Y_k^* < \tilde{Y}_k$. Jika $Y_k^* \geq \tilde{Z}_k$, menurut persamaan $Z_i^* = \left(\tilde{Z}_i - Y_i^*\right)^+$, maka menghasilkan $Z_k^* = 0$, karena itu didapatkan $\frac{\partial \pi_2}{\partial Y_k^*} > (p_k - c_k) - (p_k - s_k)F_k(\tilde{Y}_k) = 0$, dan kenaikan Y_k yang cukup kecil akan meningkatkan keuntungan yang diharapkan. Jika $Y_k^* < \tilde{Z}_k$, menurut $Z_k^* = \left(\tilde{Z}_k - Y_k^*\right)^+$, maka $Y_k^* + Z_k^* = \tilde{Z}_k$, dan kenaikan yang cukup kecil pada $Y_k$dan penuruan Z_k akan menghemat biaya *outsourcing*. Proposisi ini berarti jika terdapat kondisi $\sum_{i=1}^{n} \tau_i \tilde{Y}_i > t$, maka harus ditemukan suatu Y_i^*

sedemikian sehingga memenuhi persamaan $\sum_{i=1}^{n} \tau_i Y_i^* = t$ yang telah memenuhi kendala kapasitas.

Proposisi 3.2(a) menentukan jumlah maksimal produksi *in-house* dan *outsourcing* setiap produk. Proposisi 3.2(b) berarti bahwa jika terdapat cukup kapasitas produksi, maka semua produk akan diproduksi *in-house* dan *outsourcing* tidak pernah digunakan. Proposisi 3.2(c) menggambarkan bahwa kapasitas yang terbatas harus sepenuhnya digunakan jika tidak ada kapasitas produksi yang cukup.

Untuk setiap $u_1 \geq 0$ yang diberikan, proposisi berikut mendefinisikan solusi untuk persamaan (3.5)-(3.7) sebagai fungsi harga bayangan u_1, yaitu $Y_i(u_1)$ dan $Z_i(u_1)$, $i = 1, \dots, n$.

Proposisi 3.3

Dengan setiap $u_1 \geq 0$, $Y_i(u_1)$ dan $Z_i(u_1)$, $i = 1, \dots, n$ yang diberikan memenuhi persamaan (3.6)-(3.8) jika dan hanya jika

$$Y_i(u_1) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } u_1 > \gamma_i \\ \theta_i & \text{untuk } u_1 = \gamma_i \\ F_i^{-1}\left(\dfrac{p_i - c_i - u_1\tau_i}{p_i - s_i}\right) & \text{untuk } u_1 < \gamma_i \end{cases} \tag{3.9}$$

$$Z_i(u_1) = \begin{cases} F_i^{-1} = \left(\dfrac{p_i - d_i}{p_i - s_i}\right) & \text{untuk } u_1 > \gamma_i \\ F_i^{-1} = \left(\dfrac{p_i - d_i}{p_i - s_i}\right) - \theta_i & \text{untuk } u_1 = \gamma_i \\ 0 & \text{untuk } u_1 < \gamma_i \end{cases} \tag{3.10}$$

untuk semua $i = 1, \dots, n$, di mana θ_i merupakan bilangan *real* yang memenuhi $\theta_i \in \left[0, F_i^{-1}\left(\frac{p_i - d_i}{p_i - s_i}\right)\right]$.

Bukti.

Dengan mengurangkan persamaan (3.6) dengan persamaan (3.5) didapat $v_i - w_i = (\gamma_i - u_1)\tau_i$, $i = 1, \dots, n$, dengan menggunakan

persamaan ini, proposisi ini dapat dibuktikan dalam tiga kasus yaitu $u_1 > \gamma_i$, $u_1 = \gamma_i$, dan $u_1 < \gamma_i$ secara berurutan

(a) Jika $u_1 > \gamma_i$, maka didapat $w_i = (u_1 - \gamma_i)\tau_i + v_i > 0$. Sesuai dengan kondisi *slackness komplementer* pada persamaan (3.7) diketahui $w_i Y_i = 0$, karena $w_i > 0$ maka haruslah $Y_i(u_1) = 0$, dan karena itu berdasarkan persamaan $Z_i = \left(\tilde{Z}_i - Y_i\right)^+$ maka diperoleh $Z_i(u_1) = \tilde{Z}_i = F_i^{-1}\left(\frac{p_i - d_i}{p_i - s_i}\right)$.

(b) Jika $u_1 = \gamma_i$, dari $v_i - w_i = (\gamma_i - u_1)\tau_i$, diperoleh persamaan $w_i = (\gamma_i - u_1)\tau_i + v_i$. Karena $u_1 = \gamma_i$ maka $\gamma_i - u_1 = 0$ sehingga $w_i = v_i$. Menurut persamaan (3.7) diketahui $w_i Y_i = 0$ dan $v_i Z_i = 0$. Jika $w_i = v_i \neq 0$, maka diperoleh nilai $Y_i = 0$, dan $Z_i = 0$, yang bertentangan dengan persamaan $Z_i = \left(\tilde{Z}_i - Y_i\right)^+$ karena diketahui bahwa $\tilde{Z}_i \neq 0$. Sehingga harus ada $w_i = v_i = 0$ sedemikian sehingga memenuhi persamaan (3.7). Menurut persamaan (3.6), maka $Y_i(u_1) + Z_i(u_1) = \tilde{Z}_i$. Jadi, didapat model $Y_i(u_1) = \theta_i \in \left[0, F_i^{-1}\left(\frac{p_i - d_i}{p_i - s_i}\right)\right]$ dan $Z_i(u_1) = F_i^{-1}\left(\frac{p_i - d_i}{p_i - s_i}\right) - \theta_i$.

(c) Jika $u_1 < \gamma_i$, maka diperoleh $v_i = (\gamma_i - u_1) + w_i > 0$. Dari kondisi *slacknesss complementary* $v_i Z_i = 0$ pada persamaan (3.7), karena $v_i > 0$ maka didapatkan $Z_i(u_1) = 0$. Karena $Z_i(u_1) = 0$, maka haruslah nilai $Y_i(u_1) \neq 0$ sehingga menurut kondisi $w_i Y_i = 0$ didapatkan $w_i = 0$. Dengan demikian, menurut persamaan (3.5) didapatkan $\left(p_i - c_i\right) - \left(p_i - s_i\right) F_i(Y_i + Z_i) - u_1 \tau_i = 0$ sehingga diperoleh $Y_i(u_1) = F_i^{-1}\left(\frac{p_i - c_i - u_1 \tau_i}{p_i - s_i}\right)$.

Hasil proposisi 3.3 dapat dijelaskan dengan wawasan manajerial. Pada kasus tanpa kendala, terdapat $\tilde{Y}_i = F_i^{-1}\left(\frac{p_i - c_i}{p_i - s_i}\right)$, dan $\tilde{Z}_i = F_i^{-1}\left(\frac{p_i - d_i}{p_i - s_i}\right)$, dan perbedaan antara dua nilai ini tergantung pada nilai c_i dan d_i. Menurut Zhang dan kawan-kawan (2009), keputusan optimal model *newsvendor* kendala tunggal tanpa *outsourcing* adalah

$Y_i = F_i^{-1}\left(\frac{p_i - c_i - u_1\tau_i}{p_i - s_i}\right)$, dimana $c_i + u_1\tau_i$ dapat dilihat sebagai biaya yang disesuaikan dari produksi *in-house* dengan kendala kapasitas.

Dengan membandingkan biaya unit produksi kendala yang disesuaikan $c_i + u_1\tau_i$ dan biaya unit *outsourcing* d_i, maka kebijakan yang optimal dalam Proposisi 3.3 dapat dikelompokkan. Jika $u_1 > \gamma_i$, dengan kata lain $c_i + u_1\tau_i > d_i$, maka biaya produksi lebih besar dari biaya unit *outsourcing*, semua unit harus di *outsourcing*, artinya $Y_i(u_1) = 0$ dan $Z_i(u_1) = \tilde{Z}_i$. Jika $u_1 < \gamma_i$, yang berarti pula $d_i >$ *ci+u1τi*, maka pilihan *outsourcing* lebih mahal jika dibandingkan dengan produksi *in-house*, sehingga *outsourcing* tidak pernah dipakai, sehingga $Y_i(u_1) = F_i^{-1}\left(\frac{p_i - c_i - u_1\tau_i}{p_i - s_i}\right)$, dan $Z_i(u_1) = 0$.

Pada kasus $u_1 = \gamma_i$ yang berarti $d_i = c_i + u_1\tau_i$, maka tidak ada perbedaan antara produksi *in-house* dan *outsourcing*, dan produsen dapat menggunakan kedua cara produksi sedemikian sehingga $Y_i(u_1) + Z_i(u_1) = \tilde{Z}_i$. Dengan menggunakan perbandingan serupa, dapat dijelaskan hasil pada Proposisi 3.2(b). Karena kendala kapasitas tidak aktif, maka $u_1 = 0$. Karenanya $d_i > c_i$ *outsourcing* tidak akan pernah digunakan, dengan kata lain $Y_i^* = \tilde{Y}_i$ dan $Z_i^* = 0$.

Pada proposisi selanjutnya akan dicari penyelesaian untuk kondisi $\sum_{i=1}^{n} \tau_i \tilde{Y}_i > t$. Misal Φ menunjukkan sebuah himpunan kosong, dan diberikan himpunan-himpunan $I_1(u_1) = \{i | \gamma_i < u_1, i = 1, \dots, n\}$, $I_2(u_1) = \{i | \gamma_i = u_1, i = 1, \dots, n\}$, $I_3(u_1) = \{i | \gamma_i > u_1, i = 1, \dots, n\}$, maka proposisi berikut mencirikan struktur solusi optimal bedasarkan kondisi $\sum_{i=1}^{n} \tau_i \tilde{Y}_i > t$ dan $I_2(u_1^*) \neq \Phi$.

Proposisi 3.4

Jika $\sum_{i=1}^{n} \tau_i \tilde{Y}_i > t$ dan $I_2(u_1^*) \neq \Phi$, maka terdapat satu $k \in I_2(u_1^*)$ sedemikian sehingga

(a) $Y_i^* = 0, dan\ Z_i^* = \tilde{Z}_i\ untuk\ semua\ i = 1, \dots, k-1;$

(b) $Y_i^* \geq \tilde{Z}_i\ dan\ Z_i^* = 0\ untuk\ semua\ i = k+1, \dots, n;$

(c) $Y_k^* + Z_k^* \geq \tilde{Z}_k.$

Bukti.

Jika banyaknya anggota himpunan $I_2(u_1^*)$ adalah satu, maka terdapat $k \in I_2(u_1^*)$, dan proposisi ini dapat didapat secara langsung dari proposisi 3.3. Jika tidak, berdasarkan proposisi 3.2 dan 3.3,

terdapat $\sum_{i=1}^{n} \tau_i \tilde{Y}_i = t$, $Y_i^* = 0$, untuk $i \in I_1(u_1^*)$, dan diperoleh $Y_i^* + Z_i^* = \tilde{Z}_i$ untuk $i \in I_2(u_1^*)$. Karena banyaknya anggota himpunan $I_2(u_1^*)$ lebih besar dari satu, maka harus ada satu $k \in I_2(u_1^*)$ yang unik sedemikian sehingga

$$\sum_{i>k, i \in I_2(u_1^*)} \tau_i \tilde{Z}_i \leq t - \sum_{i \in I_3(u_1^*)} \tau_i Y_i^* \leq \sum_{i>k, i \in I_2(u_1^*)} \tau_i \tilde{Z}_i.$$

Jadi, dapat dibangun sebuah penyelesaian yang mungkin sebagai berikut : $Y_k^* = \frac{t - \sum_{i \in I_3(u_1^*)} \tau_i Y_i^* - \sum_{i>k, i \in I_2(u_1^*)} \tau_i \tilde{Z}_i}{\tau_k}$, $Z_k^* = \tilde{Z}_k - Y_k^*$; $Y_i^* = 0$, $Z_i^* = \tilde{Z}_i$ untuk semua $i < k$ dan $i \in I_2(u_1^*)$; dan $Y_i^* = \tilde{Z}_i$, $Z_i^* = 0$ untuk semua $i > k$ dan $i \in I_2(u_1^*)$. Dengan mudah dapat dibuktikan bahwa solusi ini memenuhi persamaan (3.8)-(3.10).

Proposisi 3.4 menandakan bahwa keputusan optimal dapat selalu diatur sedemikian sehingga terdapat paling banyak satu produk diproduksi dengan produksi *in-house* dan *outsourcing*, dan produk sisanya selalu diproduksi dengan menerapkan satu cara, produksi *in-house* atau *outsourcing*.

Berdasarkan sifat-sifat struktural dalam proposisi-proposisi yang diajukan, dapat dibangun sebuah algoritma penyelesaian untuk memecahkan masalah persamaan (3.4).

Mengacu pada Proposisi 3.2, jika $\sum_{i=1}^{n} \tau_i \tilde{Y}_i \leq t$, maka Proposisi 3.2(b) menyajikan suatu penyelesaian optimal. Jika $\sum_{i=1}^{n} \tau_i \tilde{Y}_i > t$, maka penyelesaian optimal harus memenuhi $\sum_{i=1}^{n} \tau_i Y_i^* = t$. Dari persamaan (3.9) pada proposisi 3.3, diketahui bahwa $\sum_{i=1}^{n} \tau_i Y_i$ menurun dalam u_1. Dengan menggunakan sifat ini dan proposisi 3.4, dapat dibangun sebuah prosedur pencarian biner untuk memecahkan penyelesaian optimal masalah persamaan 3.4 ketika $\sum_{i=1}^{n} \tau_i \tilde{Y}_i > t$. Dari kondisi *KKT* diketahui bahwa $w_i^* = (u_1^* - \gamma_i)\tau_i + v_i$. Jika $u_1^* > \gamma_n$, maka didapatkan $w_i^* > 0$ dan $Y_i^* = 0$ untuk semua $i = 1, 2, \ldots, n$, yang tidak akan pernah optimal. Jadi haruslah $u_1 \in [0, \gamma_n]$.

Berdasarkan hasil-hasil proposisi 3.1-3.4, penyelesaian masalah persamaan 3.4 dapat dipecahkan dengan menggunakan algoritma berikut ini.

1. Menghitung $\bar{Y}_i, \bar{Z}_i$, $i = 1, 2, ..., n$.
2. Jika kondisi $\sum_{i=1}^{n} \tau_i \bar{Y}_i \le t$ terpenuhi, maka diperoleh penyelesaian optimal yaitu $Y_i^* = \bar{Y}_i$ dan $Z_i^* = 0$, $i = 1, 2, ..., n$. Dengan kata lain, sesuai dengan proposisi 3.2 (b) kendala kapasitas pada kondisi ini tidak aktif sehingga diperoleh penyelesaian optimal dan perhitungan dihentikan. Jika kondisi $\sum_{i=1}^{n} \tau_i \bar{Y}_i \le t$ tidak terpenuhi, maka perhitungan dilanjutkan pada langkah berikutnya.
3. Dilakukan inisialisasi untuk batas bawah dan batas atas u_1 yaitu $u_{1L} = 0$ dan $u_{1U} = \gamma_n$.
4. Menghitung nilai u_1 terbaru dengan rumus $u_1 = (u_{1L} + u_{1U})/2$ dan menentukan anggota himpunan-himpunan $I_1(u_1)$, $I_2(u_1)$, dan $I_3(u_1)$. Selanjutnya, sesuai dengan proposisi 3.3 untuk semua $i \in I_1(u_1)$ diperoleh nilai $Y_i = 0$ dan $Z_i = \bar{Z}_i$, sementara untuk semua $i \in I_3(u_1)$ diperoleh nilai $Y_i = \left(\frac{p_i - c_i - u_1 \tau_i}{p_i - s_i} \right)$ dan $Z_i = 0$.
5. Jika kondisi $\sum_{i \in I_2(u_1)} \tau_i \bar{Z}_i < \left(t - \sum_{i \in I_3(u_1)} \tau_i Y_i \right)$ terpenuhi, maka dilakukan *update* untuk batas atas u_1 yaitu $u_{1U} = u_1$ dan perhitungan kembali ke langkah 4. Jika kondisi $\sum_{i \in I_2(u_1)} \tau_i \bar{Z}_i < \left(t - \sum_{i \in I_3(u_1)} \tau_i Y_i \right)$ tidak terpenuhi, maka akan

dilakukan pengecekan apakah $\sum_{i \in I_3(u_1)} \tau_i Y_i > t$. Jika terpenuhi, dilakukan *update* batas bawah u_1 yaitu $u_{1L} = u_1$ dan perhitungan kembali ke langkah 4. Jika tidak terpenuhi, perhitungan dilanjutkan ke langkah selanjutnya.

6. Dilakukan pengecekan apakah $I_2(u_1) = \Phi$. Jika iya, maka penyelesaian optimal telah diperoleh dari perhitungan sebelumnya yaitu $Y_i^* = Y_i$ dan $Z_i^* = Z_i$ dan perhitungan dihentikan. Jika tidak, perhitungan dilanjutkan ke langkah selanjutnya.
7. Karena $I_2(u_1) \neq \Phi$ maka harus ditemukan suatu nilai k yang memenuhi ketentuan berikut.

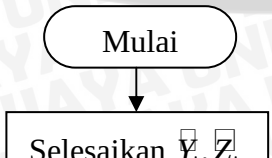
$$k = \arg\left\{ k \left| \sum_{i>k, i \in I_2(u_1)} \tau_i \bar{Z}_i \leq t - \sum_{i \in I_3(u_1)} \tau_i Y_i^* \leq \sum_{i \geq k, i \in I_2(u_1)} \tau_i \bar{Z}_i, k \in I_2(u_1) \right. \right\}.$$

Setelah ditemukan nilai k, sesuai dengan proposisi 3.4, untuk semua $i < k, i \in I_2(u_1)$ maka diperoleh nilai $Y_i = 0$ dan $Z_i = \bar{Z}_i$, sedangkan untuk semua $i > k, i \in I_2(u_1)$, diperoleh nilai $Y_i = \bar{Z}_i$ dan $Z_i = 0$. Sedangkan untuk $i = k$ sendiri, diperoleh nilai-nilai yaitu $Y_k = \dfrac{t - \sum_{i \in I_3(u_1)} \tau_i Y_i - \sum_{i>k, i \in I_2(u_1)} \tau_i \bar{Z}_i}{\tau_k}$ dan $Z_k = \bar{Z}_k - Y_k$.

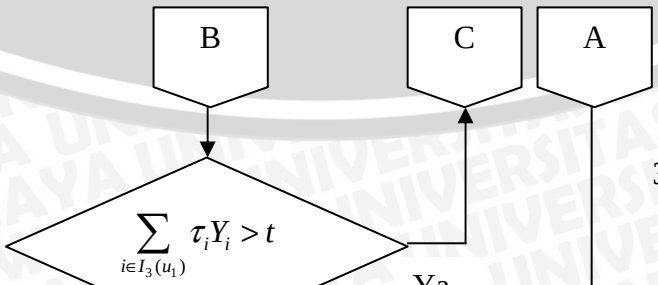
Selanjutnya, diperoleh suatu penyelesaian optimal yaitu $Y_i^* = Y_i$ dan $Z_i^* = Z_i$ dan proses perhitungan dihentikan.

Dalam algoritma di atas, langkah 1-2 berkaitan dengan proposisi 3.2(a). Langkah 3-7 menerapkan prosedur pencarian biner atas $u_1 \in [0, \gamma_n]$ dengan kondisi berhenti $\sum_{i=1}^{n} \tau_i Y_i = t$, untuk menentukan penyelesaian optimal pada kasus $\sum_{i=1}^{n} \tau_i \bar{Y}_i > t$.

Untuk mengilustrasikan algoritma lebih jelas, algoritma tersebut digambarkan dalam suatu diagram alir sebagai berikut.



Gambar 3.1 Diagram alir algoritma penyelesaian persamaan (3.4)



Gambar 3.1 Diagram alir algoritma penyelesaian persamaan (3.4) (lanjutan)

3.4 Studi Numerik

Untuk mengetahui penerapan algoritma yang telah diberikan, dapat digunakan dua cara yaitu dengan cara manual dan implementasi algoritma dengan *software Matlab* dengan menggunakan suatu contoh kasus. Contoh kasus yang dibahas adalah suatu masalah *newsboy* dengan *outsourcing* yang menggunakan 3 produk, dengan permintaan berdistribusi normal dan parameter-parameter seperti pada tabel berikut.

Tabel 3.1 Parameter contoh kasus

i	p_i	d_i	c_i	s_i	τ_i	μ_i	σ_i
1	73	53	39	19	5	107	24
2	75	60	35	15	3	106	26

3	71	51	32	15	1	109	23

Pertama, algoritma di atas diterapkan dengan cara perhitungan manual mengikuti langkah-langkah yang tersedia. Pada perhitungan manual ini digunakan contoh untuk kapasitas total $t = 200$. Berikut adalah proses perhitungannya.

1. Proses pertama yang dilakukan adalah menyelesaikan masalah tanpa kendala yaitu dengan menemukan nilai $\bar{Y}_i$ dan $\bar{Z}_i$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\bar{Y}_1 &= F_1^{-1}\left(\frac{p_1 - c_1}{p_1 - s_1}\right) \\
&= F_1^{-1}\left(\frac{73-39}{73-19}\right) \\
&= F_1^{-1}\left(0,6296\right) \\
&= \mu_1 + \sigma_1\sqrt{2}erf^{-1}\left(2\times 0,6296 - 1\right) \\
&= 107 + 24\sqrt{2}erf^{-1}\left(0,2592\right) \\
&= 114,9387
\end{aligned}$$

Sebagai catatan, nilai $erf^{-1}(x)$ dapat diperoleh dari tabel *error function* atau dengan memasukkan perintah $erfinv(x)$ pada bahasa pemrograman *Matlab* dan nilai $\sqrt{2} = 1,4142$. Untuk memperoleh nilai $\bar{Y}_2$ dan $\bar{Y}_3$ dilakukan cara yang sama namun dengan menyesuaikan parameter-parameter yang digunakan sesuai dengan tabel 3.1. Berdasarkan perhitungan diperoleh nilai $\bar{Y}_1 = 117,1998$ dan $\bar{Y}_3 = 121,7764$.

Untuk $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \bar{Z}_3$ perhitungannya adalah sebagai berikut.

$$\bar{Z}_1 = F_1^{-1}\left(\frac{p_1 - d_1}{p_1 - s_1}\right)$$
$$= F_1^{-1}\left(\frac{73-53}{73-19}\right)$$
$$= F_1^{-1}(0,3703)$$
$$= \mu_1 + \sigma_1\sqrt{2}erf^{-1}(2\times 0,3703 - 1)$$
$$= 107 + 24\sqrt{2}erf^{-1}(-0,2594)$$
$$= 107 + 24\sqrt{2}\,(\text{-}0,2341)$$
$$= 99,0545$$

Dengan penyesuaian parameter, diperoleh $\bar{Z}_2 = 88,4647$ dan $\bar{Z}_3 = 100,5756$.

2. Selanjutnya dilakukan pengecekan terhadap suatu kondisi yang diberikan yaitu jika $\sum_{i=1}^{n} \tau_i \bar{Y}_i \le t$ yang artinya kendala kapasitas tidak aktif maka diperoleh nilai $Y_i^* = \bar{Y}_i$ dan $Z_i^* = 0$ dan perhitungan dihentikan. Namun jika kondisi tersebut tidak berlaku maka perhitungan dilanjutkan ke proses selanjutnya. Berdasarkan parameter yang digunakan diperoleh perhitungan sebagai berikut.

$$\sum_{i=1}^{3} \tau_i \bar{Y}_i = \tau_1\bar{Y}_1 + \tau_2\bar{Y}_2 + \tau_3\bar{Y}_3$$
$$= 5(114,9387) + 3(117,1998) + 1(121,7764)$$
$$= 1.048,0693$$

Karena $t = 200$, maka kondisi $\sum_{i=1}^{n} \tau_i \bar{Y}_i \le t$ tidak terpenuhi sehingga perhitungan dilanjutkan pada langkah selanjutnya.

3. Dilakukan inisialisasi nilai awal untuk u_1 yaitu $u_{1L} = 0$ dan $u_{1U} = \max(\gamma_i)$. Diketahui $\gamma_i = (d_i - c_i)/\tau_i$ sehingga diperoleh perhitungan berikut.

$$\gamma_1 = (d_1 - c_1)/\tau_1$$
$$= (53 - 39)/5 \quad ,$$
$$= 2,8$$
$$\gamma_2 = (d_2 - c_2)/\tau_2$$
$$= (60 - 35)/3 \quad ,$$
$$= 8,3333$$
$$\gamma_3 = (d_3 - c_3)/\tau_3$$
$$= (51 - 32)/1 \quad .$$
$$= 19$$

Jadi, $u_{1L} = 0$ dan $u_{1U} = 19$.

4. Langkah ini merupakan penerapan dari proposisi 3.4. Proses pertama yang dilakukan yaitu mencari nilai u_1 sebagai berikut.

$$u_1 = (u_{1L} + u_{1U})/2$$
$$= (0 + 19)/2$$
$$= 9,5$$

Kemudian dilakukan perhitungan untuk menemukan $I_1(u_1), I_2(u_1), I_3(u_1)$. Diketahui $I_1(u_1) = \{i \mid \gamma_i < u_1, i = 1,...,n\}$, $I_2(u_1) = \{i \mid \gamma_i = u_1, i = 1,...,n\}$, dan $I_3(u_1) = \{i \mid \gamma_i > u_1, i = 1,...,n\}$. Berdasarkan perhitungan sebelumnya diketahui pula $\gamma_1 < u_1, \gamma_2 < u_1, \gamma_3 > u_1$ sehingga diperoleh hasil berikut.

$I_1(u_1) = \{1, 2\}$, $I_2(u_1) = \Phi$, dan $I_3(u_1) = \{3\}$.

Berdasarkan proposisi 3.4, maka dilakukan proses selanjutnya sebagai berikut.

Untuk semua $i \in I_1(u_1)$ maka nilai $Y_i = 0$ dan $Z_i = \bar{Z}_i$. Jadi, $Y_1 = 0, Z_1 = 99,0545, Y_2 = 0, Z_2 = 88,4647$.

Untuk semua $i \in I_3(u_1)$ maka nilai $Y_i = F_i^{-1}(\frac{p_i - c_i - u_1\tau_i}{p_i - s_i})$ dan $Z_i = 0$. Selanjutnya dilakukan perhitungan untuk menemukan Y_3 dan Z_3 sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
Y_3 &= F_3^{-1}\left(\frac{p_3 - c_3 - u_1\tau_3}{p_3 - s_3}\right) \\
&= F_3^{-1}\left(\frac{71-32-9,5(1)}{71-15}\right) \\
&= F_3^{-1}(0,5268) \\
&= \mu_3 + \sigma_3\sqrt{2}erf^{-1}(2\times 0,5268-1) \\
&= 109 + 23\sqrt{2}erf^{-1}(0,0536) \\
&= 110,5450
\end{aligned}
$$

,

$Z_3 = 0$.

5. Proses pertama yang dilakukan adalah mengecek apakah kondisi $\sum_{i\in I_{2(u_1)}} \tau_i \bar{Z}_i < t - \sum_{i\in I_3(u_1)} \tau_i Y_i$ terpenuhi. Jika kondisi terpenuhi , maka $u_{1U} = u_1$ dan kembali ke proses sebelumnya. Jika tidak, dilakukan pengecekan kembali untuk kondisi $\sum_{i\in I_3(u_1)} \tau_i Y_i > t$. Jika terpenuhi, maka $u_{1L} = u_1$ dan kembali ke langkah 4. Untuk contoh kasus ini berikut perhitungannya.

   Diketahui $\sum_{i\in I_2(u_1)} \tau_i \bar{Z}_i = 0$ karena $I_2(u_1) = \Phi$ dan

$$t - \sum_{i \in I_3(u_1)} \tau_i Y_i = 200 - \tau_3 Y_3$$
$$= 200 - 1(110,5450)$$
$$= 89,4550$$

sehingga $\sum_{i \in I_2(u_1)} \tau_i \bar{Z}_i < t - \sum_{i \in I_3(u_1)} \tau_i Y_i$ terpenuhi. Maka $u_{1U} = u_1 = 9,5$.

6. Dilakukan pembaruan nilai u_1 sebagai berikut.

$$u_1 = \left(u_{1L} + u_{1U}\right)/2$$
$$= \left(0 + 9,5\right)/2$$
$$= 4,75$$

Diperoleh kondisi $\gamma_1 < u_1, \gamma_2 > u_1, \gamma_3 > u_1$ sehingga didapatkan $I_1(u_1) = \{1\}$, $I_2(u_1) = \Phi$, dan $I_3(u_1) = \{2,3\}$. Untuk semua $i \in I_1(u_1)$ maka nilai $Y_i = 0$ dan $Z_i = \bar{Z}_i$. Jadi, $Y_1 = 0, Z_1 = 99,0545$. Untuk semua $i \in I_3(u_1)$ maka nilai $Y_i = F_i^{-1}(\frac{p_i - c_i - u_1 \tau_i}{p_i - s_i})$ dan $Z_i = 0$. Selanjutnya dilakukan perhitungan untuk menemukan Y_2, Y_3 dan Z_2, Z_3 sebagai berikut.

$$Y_2 = F_2^{-1}\left(\frac{p_2 - c_2 - u_1 \tau_2}{p_2 - s_2}\right)$$
$$= F_3^{-1}\left(\frac{75 - 35 - 4,75(3)}{75 - 15}\right)$$
$$= F_3^{-1}\left(0,4292\right)$$
$$= \mu_2 + \sigma_2 \sqrt{2} erf^{-1}\left(2 \times 0,4292 - 1\right)$$
$$= 106 + 26\sqrt{2} erf^{-1}\left(-0,1416\right)$$
$$= 101,3597$$

$$Y_3 = F_3^{-1}\left(\frac{p_3 - c_3 - u_1\tau_3}{p_3 - s_3}\right)$$

$$= F_3^{-1}\left(\frac{71-32-4,75(1)}{71-15}\right)$$

$$= F_3^{-1}\left(0,6116\right)$$

$$= \mu_3 + \sigma_3\sqrt{2}erf^{-1}\left(2\times 0,6116-1\right)$$

$$= 109 + 23\sqrt{2}erf^{-1}\left(0,2232\right)$$

$$= 115,5216$$

$$Z_2 = Z_3 = 0.$$

7. $\sum_{i\in I_2(u_1)} \tau_i Z_i = 0$ karena $I_2(u_1) = \Phi$ dan

$$t - \sum_{i\in I_3(u_1)} \tau_i Y_i = 200 - \left(\tau_2 Y_2 + \tau_3 Y_3\right)$$

$$= 200 - \left(3\left(101,3597\right) + 1(115,5216)\right)$$

$$= 200 - 419,6007$$

$$= -219,6007$$

Maka kondisi $\sum_{i\in I_{2(u_1)}} \tau_i Z_i < t - \sum_{i\in I_3(u_1)} \tau_i Y_i$ tidak terpenuhi. Dilakukan pengecekan kondisi selanjutnya yaitu apakah $\sum_{i\in I_3(u_1)} \tau_i Y_i > t$. Berdasarkan perhitungan sebelumnya diketahui bahwa $\sum_{i\in I_3(u_1)} \tau_i Y_i = 419,6007$ dan $t = 200$ maka jelas kondisi $\sum_{i\in I_3(u_1)} \tau_i Y_i > t$ terpenuhi sehingga $u_{1L} = u_1 = 4,75$.

8. Dilakukan proses pembaruan nilai u_1

$$u_1 = \left(u_{1L} + u_{1U}\right)/2$$

$$= \left(4,75 + 9,5\right)/2$$

$$= 7,125$$

Diperoleh kondisi $\gamma_1 < u_1, \gamma_2 > u_1, \gamma_3 > u_1$ sehingga didapatkan $I_1(u_1) = \{1\}$, $I_2(u_1) = \Phi$, dan $I_3(u_1) = \{2,3\}$. Untuk semua $i \in I_1(u_1)$ maka nilai $Y_i = 0$ dan $Z_i = Z_i$. Jadi, $Y_1 = 0, Z_1 = 99,0545$. Untuk semua $i \in I_3(u_1)$ maka nilai $Y_i = F_i^{-1}(\frac{p_i - c_i - u_1\tau_i}{p_i - s_i})$ dan $Z_i = 0$. Selanjutnya dilakukan perhitungan untuk menemukan $Y_{2,}Y_3$ dan Z_2, Z_3 sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
Y_2 &= F_2^{-1}\left(\frac{p_2 - c_2 - u_1\tau_2}{p_2 - s_2}\right) \\
&= F_3^{-1}\left(\frac{75 - 35 - 7,125(3)}{75 - 15}\right) \\
&= F_3^{-1}\left(0,3104\right) \\
&= \mu_2 + \sigma_2\sqrt{2}erf^{-1}\left(2 \times 0,3104 - 1\right) \\
&= 106 + 26\sqrt{2}erf^{-1}(-0,3792) \\
&= 93,1381
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_3 &= F_3^{-1}\left(\frac{p_3 - c_3 - u_1\tau_3}{p_3 - s_3}\right) \\
&= F_3^{-1}\left(\frac{71 - 32 - 7,125(1)}{71 - 15}\right) \\
&= F_3^{-1}\left(0,5692\right) \\
&= \mu_3 + \sigma_3\sqrt{2}erf^{-1}\left(2 \times 0,5692 - 1\right) \\
&= 109 + 23\sqrt{2}erf^{-1}\left(0,1384\right) \\
&= 113,0105
\end{aligned}
$$

$Z_2 = Z_3 = 0$.

9. $\sum_{i \in I_2(u_1)} \tau_i \boxed{Z}_i = 0$ karena $I_2(u_1) = \Phi$ dan

$$t - \sum_{i \in I_3(u_1)} \tau_i Y_i = 200 - \left(\tau_2 Y_2 + \tau_3 Y_3\right)$$

$$= 200 - \left(3\left(93{,}1381\right) + 1(113{,}0105)\right)$$

$$= 200 - 392{,}4248$$

$$= -192{,}4248$$

Maka kondisi $\sum_{i \in I_{2(u_1)}} \tau_i \boxed{Z}_i < t - \sum_{i \in I_3(u_1)} \tau_i Y_i$ tidak terpenuhi. Dilakukan pengecekan kondisi selanjutnya yaitu apakah $\sum_{i \in I_3(u_1)} \tau_i Y_i > t$. Berdasarkan perhitungan sebelumnya diketahui bahwa $\sum_{i \in I_3(u_1)} \tau_i Y_i = 392{,}4248$ dan $t = 200$ maka jelas kondisi $\sum_{i \in I_3(u_1)} \tau_i Y_i > t$ terpenuhi sehingga $u_{1L} = u_1 = 7{,}125$.

10. Pembaruan nilai u_1

$$u_1 = \left(u_{1L} + u_{1U}\right)/2$$

$$= \left(7{,}125 + 9{,}5\right)/2$$

$$= 8{,}3125 \approx 8{,}3$$

Diperoleh kondisi $\gamma_1 < u_1, \gamma_2 = u_1, \gamma_3 > u_1$ sehingga didapatkan $I_1(u_1) = \{1\}$, $I_2(u_1) = \{2\}$, dan $I_3(u_1) = \{3\}$. Untuk semua $i \in I_1(u_1)$ maka nilai $Y_i = 0$ dan $Z_i = \boxed{Z}_i$. Jadi, $Y_1 = 0, Z_1 = 99{,}0545$. Untuk semua $i \in I_3(u_1)$ maka nilai $Y_i = F_i^{-1}\left(\frac{p_i - c_i - u_1 \tau_i}{p_i - s_i}\right)$ dan $Z_i = 0$. Selanjutnya dilakukan perhitungan untuk menemukan Y_3 dan Z_3 sebagai berikut.

$$Y_3 = F_3^{-1}\left(\frac{p_3 - c_3 - u_1\tau_3}{p_3 - s_3}\right)$$

$$= F_3^{-1}\left(\frac{71-32-8,3(1)}{71-15}\right)$$

$$= F_3^{-1}\left(\frac{30,7}{56}\right)$$

$$= F_3^{-1}\left(0,5482\right)$$

$$= \mu_3 + \sigma_3\sqrt{2}erf^{-1}\left(2\times 0,5692-1\right)$$

$$= 109 + 23\sqrt{2}erf^{-1}\left(0,0964\right)$$

$$= 111,7843$$

$$Z_3 = 0.$$

11. Dilakukan proses perhitungan berikut.

$$\sum_{i\in I_2(u_1)} \tau_i \boxed{Z_i} = \tau_2 \boxed{Z_2}$$

$$= 3(88,4647)$$

$$= 265,3941$$

$$t - \sum_{i\in I_3(u_1)} \tau_i Y_i = 200 - \tau_3 Y_3$$

$$= 200 - 1(111,7843)$$

$$= 200 - 111,7843$$

$$= 88,2157$$

Maka kondisi $\sum_{i\in I_{2(u_1)}} \tau_i \boxed{Z_i} < t - \sum_{i\in I_3(u_1)} \tau_i Y_i$ tidak terpenuhi. Dilakukan pengecekan kondisi selanjutnya yaitu apakah $\sum_{i\in I_3(u_1)} \tau_i Y_i > t$. Berdasarkan perhitungan sebelumnya diketahui bahwa $\sum_{i\in I_3(u_1)} \tau_i Y_i = 111,7843$ dan $t = 200$ maka jelas kondisi

$\sum_{i \in I_3(u_1)} \tau_i Y_i > t$ tidak terpenuhi sehingga perhitungan dilanjutkan ke langkah berikutnya.

12. Pada proses ini diterapkan proposisi 3.4. Proses dalam langkah ini yaitu dilakukan pengecekan kondisi apakah $I_2(u_1) = \Phi$. Jika terpenuhi, maka $Y_i^* = Y_i, Z_i^* = Z_i$ dan perhitungan dihentikan. Jika tidak, perhitungan dilanjutkan ke langkah berikutnya. Berdasarkan langkah sebelumnya diketahui bahwa $I_2(u_1) \neq \Phi$. Jadi perhitungan dilanjutkan ke langkah berikutnya.
13. Dilakukan proses pencarian k yang memenuhi

$$k = \arg\left\{ k \left| \sum_{i>k, i \in I_2(u_1)} \tau_i \bar{Z}_i \leq t - \sum_{i \in I_3(u_1)} \tau_i Y_i^* \leq \sum_{i \geq k, i \in I_2(u_1)} \tau_i \bar{Z}_i, k \in I_2(u_1) \right. \right\};$$

untuk semua $i < k, i \in I_2(u_1)$, $Y_i = 0, Z_i = \bar{Z}_i$;

untuk semua $i > k, i \in I_2(u_1)$, $Y_i = \bar{Z}_i, Z_i = 0$;

$$Y_k = \frac{t - \sum_{i \in I_3(u_1)} \tau_i Y_i - \sum_{i>k, i \in I_2(u_1)} \tau_i \bar{Z}_i}{\tau_k}, \quad Z_k = \bar{Z}_k - Y_k;$$

$Y_i^* = Y_i, Z_i^* = Z_i$, berhenti.

Pada contoh ini $I_2(u_1) = \{2\}$, yang berarti anggota himpunan $I_2(u_1)$ adalah satu, maka nilai k langsung ditemukan yaitu $k = 2$. Karena itu pula proses untuk $i > k$ dan $i < k$ tidak dilakukan sehingga proses langsung dilanjutkan pada perhitungan berikut.

$$Y_k = \frac{t - \sum_{i \in I_3(u_1)} \tau_i Y_i - \sum_{i>k, i \in I_2(u_1)} \tau_i \bar{Z}_i}{\tau_k}$$

$$Y_2 = \frac{t - \tau_3 Y_3 - 0}{\tau_2}$$

$$= \frac{200 - 1(111,7843)}{3}$$

$$= 29,4052$$

$$Z_2 = \bar{Z}_2 - Y_2$$

$$= 88,4647 - 29,4052 .$$

$$= 59,0595$$

Selanjutnya diperoleh penyelesaian optimal pada kasus ini yaitu $Y_i^* = Y_i$ dan $Z_i^* = Z_i$ sehingga diperoleh nilai-nilai berikut.

$Y_1^* = 0, Z_1^* = 99,0545$

$Y_2^* = 29,4052, Z_2^* = 59,0545$, dan

$Y_3^* = 111,7843, Z_3^* = 0$.

Dari hasil perhitungan di atas, dapat dicari nilai dari keuntungan yang diharapkan dengan memasukkan nilai-nilai yang diperoleh ke persamaan (3.4) yaitu sebagai berikut.

$$\pi_2 = \sum_{i=1}^{n} \left[(p_i - c_i) Y_i + (p_i - d_i) Z_i - (p_i - s_i) \int_0^{Y_i + Z_i} F_i(x_i) dx_i \right].$$

$$\pi_2 = (p_1 - c_1) Y_1 + (p_1 - d_1) Z_1 - (p_1 - s_1) \int_0^{Y_1 + Z_1} F_1(x_1) dx_1$$

$$+ (p_2 - c_2) Y_2 + (p_2 - d_2) Z_2 - (p_2 - s_2) \int_0^{Y_2 + Z_2} F_2(x_2) dx_2$$

$$+ (p_3 - c_3) Y_3 + (p_3 - d_3) Z_3 - (p_3 - s_3) \int_0^{Y_3 + Z_3} F_3(x_3) dx_3$$

$$\pi_2 = (73-39)0 + (73-53)99,0545 - (73-19)\int_0^{0+99,0545} F_1(x_1)dx_1 +$$

$$(75-35)29,4052 + (75-60)59,0545 - (75-15)\int_0^{29,4052+59,0545} F_2(x_2)dx_2 +$$

$$(71-32)111,7843 + (71-51)0 - (71-15)\int_0^{111,7843+0} F_3(x_3)dx_3$$

$$\pi_2 = 0 + 20(99,0545) - 54\left(\int_0^{99,0545} F_1(x_1)dx_1\right) + 40(29,4052) +$$

$$15(59,0545) - 60\left(\int_0^{88,4597} F_2(x_2)dx_2\right) + 39(111,7843) + 0 -$$

$$56\left(\int_0^{111,7843} F_3(x_3)dx_3\right)$$

$$\pi_2 = 8402,7032 - 54\left(\int_0^{99,0545} F_1(x_1)dx_1\right) - 60\left(\int_0^{88,4597} F_2(x_2)dx_2\right) -$$

$$56\left(\int_0^{111,7843} F_3(x_3)dx_3\right)$$

$$\pi_2 = 8.402,7032 - 54(6,1214) - 60(3,8750) - 56(10,6348)$$

$$\pi_2 = 7.244,0988$$

$F_1(x_1)$, $F_2(x_2)$, dan $F_3(x_3)$ adalah fungsi distribusi kumulatif distribusi normal. Karena proses perhitungan integral dari fungsi-fungsi tersebut sulit diselesaikan secara manual, maka perhitungannya dilakukan dengan bantuan *software Matlab* (program terdapat pada Lampiran 3).

Dari perhitungan manual di atas, diketahui bahwa perhitungan akan memakan waktu yang lama karena banyaknya proses yang dilewati. Karena itu, untuk mempermudah, dilakukan implementasi algoritma dengan *software Matlab*. Dengan menggunakan beberapa nilai kapasitas (t), diperoleh hasil komputasi berupa banyaknya produksi *in-house*, produk yang harus

di*outsourcing* dan nilai keuntungan yang diharapkan seperti pada tabel berikut.

Tabel 3.2 Hasil penerapan algoritma pada contoh kasus dengan berbagai nilai kapasitas (t)

t	Y_1^*	Y_2^*	Y_3^*	Z_1^*	Z_2^*	Z_3^*	π_2^*
100	0,0	0,0	100,0	99,1	88,5	0,6	6.344,3
200	0,0	29,4	111,8	99,1	59,0	0,0	7.243,9
300	0,0	62,7	111,8	99,1	25,7	0,0	8.077,3
400	0,0	95,4	113,7	99,1	0,0	0,0	8.890,0
500	11,8	107,7	117,6	87,2	0,0	0,0	9.246,3

Dari Tabel 3.2, diketahui bahwa dengan meningkatnya kapasitas produksi, maka akan terjadi peningkatan jumlah produksi *in-house* untuk produk kedua dan ketiga, sedangkan untuk produk pertama hampir selalu dilakukan *outsourcing* kecuali pada saat $t = 500$. Selain itu, meningkatnya kapasitas produksi juga diiringi dengan meningkatnya keuntungan yang diharapkan. Hal ini wajar, karena dengan meningkatnya kapasitas produksi, produksi *in-house* juga mengalami peningkatan sehingga akan menghemat biaya *outsourcing.*

Pada saat $t = 100$, permintaan produk pertama dan kedua dipenuhi dengan melakukan *outsourcing*. Sedangkan produk ketiga diproduksi secara *in-house* dengan memaksimalkan kapasitas produksi serta dilakukan *outsourcing* namun dengan jumlah yang sangat kecil.

Pada saat $t = 200$, produk pertama dipenuhi dengan cara *outsourcing* saja. Sedangkan produk kedua dipenuhi dengan kedua cara yaitu *in-house* dan *outsourcing*. Pada produk ketiga hanya dilakukan produksi secara *in-house*. Pada keadaan ini terdapat peningkatan keuntungan sebesar 899,6 jika dibandingkan dengan $t = 100$. Dengan demikian, terjadi peningkatan keuntungan sebesar 14,18%.

Pada saat $t = 300$, produk pertama dipenuhi dengan cara *outsourcing* saja. Sedangkan produk kedua dipenuhi dengan kedua cara yaitu *in-house* dan *outsourcing*. Pada produk ketiga hanya dilakukan produksi secara *in-house*. Karena terdapat perbedaan kapasitas, maka terdapat perbedaan pada jumlah produk kedua yang

diproduksi *in-house* dan di*outsourcing* jika dibandingkan dengan $t = 200$. Perbedaan jumlah ini juga mengakibatkan perbedaan keuntungan dimana pada $t = 300$ keuntungan yang didapatkan meningkat sebesar 833,4 atau 11,5% daripada keuntungan pada saat $t = 200$. Hal ini terjadi karena adanya penghematan biaya *outsourcing*.

Pada keadaan keempat yaitu $t = 400$, *outsourcing* hanya dilakukan pada produk pertama. Dengan demikian, pada produk kedua dan ketiga dilakukan produksi *in-house* saja dan terjadi penghematan biaya *outsourcing*. Hal ini menyebabkan terjadinya peningkatan keuntungan sebesar 812,7 atau 10,06% jika dibandingkan pada saat $t = 300$.

Pada keadaan terakhir yaitu $t = 500$, keuntungan yang diperoleh semakin besar. Hal ini terjadi karena pada produk pertama, tidak hanya dilakukan *outsourcing*, tetapi dilakukan juga produksi *in-house*. Dengan demikian, biaya *outsourcing* yang dikeluarkan juga menurun sehingga meningkatkan keuntungan yang diharapkan. Pada keadaan ini terjadi peningkatan keuntungan sebesar 356,3 atau 4% jika dibandingkan pada saat $t = 400$.

Dari lima keadaan yang diambil menjadi kasus dasar, diketahui bahwa seiring meningkatnya kapasitas produksi, maka terjadi pula peningkatan keuntungan yang diharapkan. Dari perhitungan diperoleh bahwa jika terjadi peningkatan kapasitas produksi sebesar 100, maka terjadi peningkatan keuntungan sebesar 4%-14,18% untuk keadaan $t = 100$ hingga $t = 500$.

Jika kapasitas produksi yang dimiliki terbatas, maka pemenuhan permintaan dapat dilakukan dengan *outsourcing*. Semakin sedikit kapasitas produksi, semakin banyak *outsourcing* yang dilakukan, sehingga keuntungan yang didapatkan lebih sedikit karena terdapat perbedaan antara biaya produksi *in-house* dan biaya *outsourcing* dimana biaya *outsourcing* setiap produk lebih besar daripada biaya produksi *in-house*.

Dari Tabel 3.2 juga terlihat bahwa paling banyak hanya satu produk yang diproduksi dengan cara *in-house* dan *outsourcing*. Sisa produk lainnya hanya diproduksi dengan satu cara yaitu *in-house* atau *outsourcing*. Hal ini merupakan penerapan dari proposisi 3.4.

BAB IV
KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang didapat dari penulisan skripsi ini yaitu dengan menetapkan beberapa sifat struktural dari suatu penyelesaian optimal dapat dibangun suatu prosedur penyelesaian yang optimal untuk masalah *newsboy* multiproduk dengan kapasitas terbatas dan *outsourcing* dengan menerapkan *nonzero outsourcing strategy*. Dengan menetapkan empat proposisi yang memuat sifat-sifat penyelesaian optimal, didapatkan suatu algoritma penyelesaian yang dapat menyelesaikan permasalahan dalam skripsi ini.

Setelah didapatkan suatu algoritma penyelesaian, dilakukan suatu studi numerik dengan parameter-parameter dasar yang telah ditetapkan. Berdasarkan studi numerik yang diterapkan pada algoritma yang diperoleh, diketahui bahwa setiap kenaikan kapasitas produksi sebesar 100 untuk keadaan $t = 100$ hingga $t = 500$, diperoleh peningkatan keuntungan antara 4%-14,18%. Selain itu, diketahui pula dari tiga produk yang ada, paling banyak hanya terdapat satu produk yang diproduksi dengan dua cara *in-house* dan *outsourcing*. Sisa dua produk yang lain hanya diproduksi dengan menerapkan salah satu cara yaitu *in-house* atau *outsourcing*.

4.2 Saran

Skripsi ini dapat dikembangkan dengan menerapkan strategi *zero lead time outsourcing*. Selain itu dapat dilakukan pengembangan dengan menerapkan strategi *outsourcing* yang berbeda-beda untuk setiap produk. Skripsi ini dapat pula dikembangkan dengan menerapkan kendala yang tidak tunggal.

DAFTAR PUSTAKA

Anonimus1. 2011. *Introduction to Nonlinear Programming. http://www.itn.liu.se/~zhliu/TNK053/lecturenotes8.pdf,* tanggal akses: 20 Mei 2011.

Anonimus2. 2011. *Normal Distribution. http://en.wikipedia.org/wiki /Normal_distribution#cumulative_distribution_function,* tanggal akses : 20 Mei 2011.

Anonimus3. 2011. *Error Function http://.en.wikipedia.org/wiki /Errorfuntion,* tanggal akses: 20 Mei 2011.

Anton, H. *Aljabar Linear Elementer Edisi Kelima.* 1994. Erlangga. Jakarta.

Bradley, S.P., Hax, A.C., dan Magnanti, T.L. 1977. *Applied Mathematical Programming*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Phillipina.

Hillier, F.S. dan Lieberman, G.J. 2005. *Introduction to Operations Research Eighth Edition.* Mc Graw-Hill Book. Singapore.

Indrajit, R.E. dan Djokopranoto, R. 2005. *Strategi Manajemen Pembelian dan Supply Chain*. PT Grasindo. Jakarta.

Lasfeto, D.B. dan Nurhayati, O.D. 2008. *Analisis Statistika Deskriptif Menggunakan Matlab*. Graha Ilmu. Yogyakarta.

Rangkuti, F. 1998. *Manajemen Persediaan : Aplikasi di Bidang Bisnis*. PT Raja Grafindo Persada. Jakarta.

Ravindran, A., Philips, D.T., dan Solberg, J.J.1987.*Operation Research: Principles and Practice Second Edition.* John Wiley & Sons, Inc. Singapore.

Ristono, A. 2009. Manajemen Persediaan. Graha Ilmu. Yogyakarta.

Spiegel, M.R., Schiller, J., dan Srinivasan, R.A. 2004. *Probabilistik dan Statistik Edisi Kedua*. Erlangga. Jakarta.

Zhang, Bin, dan Du, Shaofu. 2009. *Multi-product newsboy problem with limited capacity and outsourcing*. European Journal of Operational Research 202 (2010) 107–113.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Manipulasi matematika fungsi keuntungan π_2.

Diketahui bentuk awal fungsi π_2 seperti pada persamaan (3.1) yaitu

$$\pi_2 = \sum_{i=1}^{n} E_{D_i}\left[p_i \min(D_i, Y_i + Z_i) + s_i((Y_i + Z_i) - D_i)^+ - c_i Y_i - d_i Z_i \right]$$

Dengan menjabarkan notasi sigma diperoleh

$$\pi_2 = E_{D_1}\left[p_1 \min(D_1, Y_1 + Z_1) + s_1((Y_1 + Z_1) - D_1)^+ - c_1 Y_1 - d_1 Z_1 \right]$$

$$+ \cdots + E_{D_2}\left[p_2 \min(D_2, Y_2 + Z_2) + s_2((Y_2 + Z_2) - D_2)^+ - c_2 Y_2 - d_2 Z_2 \right]$$

$$+ E_{D_n}\left[p_n \min(D_n, Y_n + Z_n) + s_n((Y_n + Z_n) - D_n)^+ - c_n Y_n - d_n Z_n \right]$$

Selanjutnya dimisalkan

$$p_i \min(D_i, Y_i + Z_i) + s_i((Y_i + Z_i) - D_i)^+ - c_i Y_i - d_i Z_i = P(D_1)$$

Maka didapatkan

$P(D_1) = p_1 D_1 + s_1((Y_1 + Z_1) - D_1) - c_1 Y_1 - d_1 Z_1$ untuk $D_1 < Y_1 + Z_1$

dan $P(D_1) = p_1(Y_1 + Z_1) - c_1 Y_1 - d_1 Z_1$ untuk $D_1 \geq Y_1 + Z_1$.

Untuk selanjutnya, D_1 akan ditulis sebagai x_1 sehingga

$$E_{D_1}\left[P(D_1)\right] = \int_0^{Y_1+Z_1} \left[p_1 x_1 + s_1((Y_1 + Z_1) - x_1) - c_1 Y_1 - d_1 Z_1 \right] f_1(x_1) dx_1$$

$$+ \int_{Y_1+Z_1}^{\infty} \left[p_1(Y_1 + Z_1) - c_1 Y_1 - d_1 Z_1 \right] f_1(x_1) dx_1$$

$$= \int_0^{Y_1+Z_1} p_1 x_1 f_1(x_1) dx_1 + \int_0^{Y_1+Z_1} s_1((Y_1 + Z_1) - x_1) f_1(x_1) dx_1 - \int_0^{Y_1+Z_1} c_1 Y_1 f_1(x_1) dx_1$$

$$+ \int_{Y_1+Z_1}^{\infty} p_1(Y_1 + Z_1) f_1(x_1) dx_1 - \int_{Y_1+Z_1}^{\infty} c_1 Y_1 f_1(x_1) dx_1 - \int_{Y_1+Z_1}^{\infty} d_1 Z_1 f_1(x_1) dx_1$$

$$= \int_0^{Y_1+Z_1} p_1 x_1 f_1(x_1) dx_1 + \int_0^{Y_1+Z_1} s_1((Y_1+Z_1)-x_1) f_1(x_1) dx_1$$

$$+ \int_{Y_1+Z_1}^{\infty} p_1(Y_1+Z_1) f_1(x_1) dx_1 - \int_0^{\infty} c_1 Y_1 f_1(x_1) dx_1 - \int_0^{\infty} d_1 Z_1 f_1(x_1) dx_1$$

Dari definisi fungsi kepadatan untuk variabel acak non negatif diketahui bahwa

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = 1$$

Maka

$$-\int_0^{\infty} c_1 Y_1 f_1(x_1) dx_1 = -c_1 Y_1 \int_0^{\infty} f_1(x_1) dx_1 = -c_1 Y_1$$

dan

$$-\int_0^{\infty} d_1 Z_1 f_1(x_1) dx_1 = -d_1 Z_1 \int_0^{\infty} f_1(x_1) dx_1 = -d_1 Z_1 .$$

Diketahui pula bahwa

$$\int_0^{Y_1+Z_1} p_1 x_1 f_1(x_1) dx_1 = \int_0^{\infty} p_1 x_1 f_1(x_1) dx_1 - \int_{Y_1+Z_1}^{\infty} p_1 x_1 f_1(x_1) dx_1$$

Jadi,

$$E_{D_1}(P(D_1)) = \int_0^{Y_1+Z_1} p_1 x_1 f_1(x_1) dx_1 + \int_0^{Y_1+Z_1} s_1((Y_1+Z_1)-x_1) f_1(x_1) dx_1$$

$$+ \int_{Y_1+Z_1}^{\infty} p_1(Y_1+Z_1) f_1(x_1) dx_1 - c_1 Y_1 - d_1 Z_1$$

$$= \int_0^{Y_1+Z_1} p_1 x_1 f_1(x_1) dx_1 + \int_0^{Y_1+Z_1} s_1((Y_1+Z_1)-x_1) f_1(x_1) dx_1 + \int_{Y_1+Z_1}^{\infty} p_1 Y_1 f_1(x_1) dx_1$$

$$+ \int_{Y_1+Z_1}^{\infty} p_1 Z_1 f_1(x_1) dx_1 - c_1 Y_1 - d_1 Z_1$$

$$= \int_0^{Y_1+Z_1} p_1 x_1 f_1(x_1) dx_1 + \int_0^{Y_1+Z_1} s_1\left((Y_1+Z_1)-x_1\right) f_1(x_1)\, dx_1 + \int_0^{\infty} p_1 Y_1 f_1(x_1)\, dx_1$$

$$- \int_0^{Y_1+Z_1} p_1 Y_1 f_1(x_1)\, dx_1 + \int_0^{\infty} p_1 Z_1 f_1(x_1)\, dx_1 - \int_0^{Y_1+Z_1} p_1 Z_1 f_1(x_1)\, dx_1 - c_1 Y_1 - d_1 Z_1$$

$$= \int_0^{Y_1+Z_1} p_1 x_1 f_1(x_1) dx_1 + \int_0^{Y_1+Z_1} s_1\left((Y_1+Z_1)-x_1\right) f_1(x_1)\, dx_1 + p_1 Y_1$$

$$- \int_0^{Y_1+Z_1} p_1 Y_1 f_1(x_1)\, dx_1 + p_1 Z_1 - \int_0^{Y_1+Z_1} p_1 Z_1 f_1(x_1)\, dx_1 - c_1 Y_1 - d_1 Z_1$$

$$= (p_1 - c_1) Y_1 + (p_1 - d_1) Z_1 + \int_0^{Y_1+Z_1} p_1 (x_1 - (Y_1+Z_1)) f_1(x_1)\, dx_1$$

$$+ \int_0^{Y_1+Z_1} s_1\left((Y_1+Z_1)-x_1\right) f_1(x_1)\, dx_1$$

$$= (p_1 - c_1) Y_1 + (p_1 - d_1) Z_1 - (p_1 - s_1) \int_0^{Y_1+Z_1} \left((Y_1+Z_1)-x_1\right) f_1(x_1)\, dx_1$$

Masalah $\int_0^{Y_1+Z_1} \left((Y_1+Z_1)-x_1\right) f_1(x_1)\, dx_1$ dapat diselesaikan dengan teknik integral parsial.

Misalkan $u = (Y_1+Z_1) - x_1$ maka $du = -dx_1$

$dv = f_1(x_1)\, dx_1$ maka $v = \int f_1(x_1) dx_1 = F_1(x_1)\, dx_1$.

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int_0^{Y_1+Z_1} \left((Y_1+Z_1)-x_1\right) f_1(x_1)\, dx_1 = \left((Y_1+Z_1)-x_1\right) F_1(x_1)\, dx_1 \Big]_0^{Y_1+Z_1} - \int_0^{Y_1+Z_1} -F_1(x_1) dx_1$$

$$= \int_0^{Y_1+Z_1} F_1(x_1) dx_1$$

Jadi,

$$E\left(P(D_1)\right) = (p_1 - c_1) Y_1 + (p_1 - d_1) Z_1 - (p_1 - s_1) \int_0^{Y_1+Z_1} F_1(x_1) dx_1$$

Dengan cara yang sama untuk $i = 2,3,\ldots,n$ diperoleh

$$E\left(P\left(D_2\right)\right) = \left(p_2 - c_2\right)Y_2 + \left(p_2 - d_2\right)Z_2 - \left(p_2 - s_2\right)\int_0^{Y_2+Z_2} F_2\left(x_2\right)dx_2$$

$$E\left(P\left(D_3\right)\right) = \left(p_3 - c_3\right)Y_3 + \left(p_3 - d_3\right)Z_3 - \left(p_3 - s_3\right)\int_0^{Y_3+Z_3} F_3\left(x_3\right)dx_3$$

$$\vdots$$

$$E\left(P\left(D_n\right)\right) = \left(p_n - c_n\right)Y_n + \left(p_n - d_n\right)Z_n - \left(p_n - s_n\right)\int_0^{Y_n+Z_n} F_n\left(x_n\right)dx_n$$

Sehingga

$$\pi_2 = E\left(P(D_1)\right) + E\left(P(D_2)\right) + \cdots + E\left(P(D_n)\right)$$

$$\pi_2 = \left(p_1 - c_1\right)Y_1 + \left(p_1 - d_1\right)Z_1 - \left(p_1 - s_1\right)\int_0^{Y_1+Z_1} F_1\left(x_1\right)dx_1 + \left(p_2 - c_2\right)Y_2$$

$$+\left(p_2 - d_2\right)Z_2 - \left(p_2 - s_2\right)\int_0^{Y_2+Z_2} F_2\left(x_2\right)dx_2 + \cdots + \left(p_n - c_n\right)Y_n$$

$$+\left(p_n - d_n\right)Z_n - \left(p_n - s_n\right)\int_0^{Y_n+Z_n} F_n\left(x_n\right)dx_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(p_i - c_i\right)Y_i + \left(p_i - d_i\right)Z_i - \left(p_i - s_i\right)\int_0^{Y_i+Z_i} F_i\left(x_i\right)dx_i$$

Lampiran 2. Tabel Fungsi *Error*

	Digit perseratus dari *x*				
x	0	1	2	3	4
0.0	0.00000	0.01128	0.02256	0.03384	0.04511
0.1	0.11246	0.12362	0.13476	0.14587	0.15695
0.2	0.22270	0.23352	0.24430	0.25502	0.26570
0.3	0.32863	0.33891	0.34913	0.35928	0.36936
0.4	0.42839	0.43797	0.44747	0.45689	0.46623
0.5	0.52050	0.52924	0.53790	0.54646	0.55494
0.6	0.60386	0.61168	0.61941	0.62705	0.63459
0.7	0.67780	0.68467	0.69143	0.69810	0.70468
0.8	0.74210	0.74800	0.75381	0.75952	0.76514
0.9	0.79691	0.80188	0.80677	0.81156	0.81627
1.0	0.84270	0.84681	0.85084	0.85478	0.85865
1.1	0.88021	0.88353	0.88679	0.88997	0.89308
1.2	0.91031	0.91296	0.91553	0.91805	0.92051
1.3	0.93401	0.93606	0.93807	0.94002	0.94191
1.4	0.95229	0.95385	0.95538	0.95686	0.95830
1.5	0.96611	0.96728	0.96841	0.96952	0.97059
1.6	0.97635	0.97721	0.97804	0.97884	0.97962
1.7	0.98379	0.98441	0.98500	0.98558	0.98613
1.8	0.98909	0.98952	0.98994	0.99035	0.99074
1.9	0.99279	0.99309	0.99338	0.99366	0.99392
2.0	0.99532	0.99552	0.99572	0.99591	0.99609
2.1	0.99702	0.99715	0.99728	0.99741	0.99753
2.2	0.99814	0.99822	0.99831	0.99839	0.99846
2.3	0.99886	0.99891	0.99897	0.99902	0.99906
2.4	0.99931	0.99935	0.99938	0.99941	0.99944
2.5	0.99959	0.99961	0.99963	0.99965	0.99967
2.6	0.99976	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981
2.7	0.99987	0.99987	0.99988	0.99989	0.99989
2.8	0.99992	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994
2.9	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997
3.0	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998
3.1	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
3.2	0.99999	0.99999	0.99999	1.00000	1.00000

	Digit perseratus dari *x*				
x	5	6	7	8	9
0.0	0.05637	0.06762	0.07886	0.09008	0.10128
0.1	0.16800	0.17901	0.18999	0.20099	0.21184
0.2	0.27633	0.28690	0.29742	0.30788	0.31828
0.3	0.37938	0.38933	0.39921	0.40901	0.41874
0.4	0.47548	0.48466	0.49375	0.50275	0.51167
0.5	0.56332	0.57162	0.57982	0.58792	0.59594
0.6	0.64203	0.64938	0.65663	0.66378	0.67084
0.7	0.71116	0.71754	0.72382	0.73001	0.73610
0.8	0.77067	0.77610	0.78144	0.78669	0.79184
0.9	0.82089	0.82542	0.82987	0.83423	0.83851
1.0	0.86244	0.86614	0.86977	0.87333	0.87680
1.1	0.89612	0.89910	0.90200	0.90484	0.90761
1.2	0.92290	0.92524	0.92751	0.92973	0.93190
1.3	0.94376	0.94556	0.94731	0.94902	0.95067
1.4	0.95970	0.96105	0.96237	0.96365	0.96490
1.5	0.97162	0.97263	0.97360	0.97455	0.97546
1.6	0.98038	0.98110	0.98181	0.98249	0.98315
1.7	0.98667	0.98719	0.98769	0.98817	0.98864
1.8	0.99111	0.99147	0.99182	0.99216	0.99248
1.9	0.99418	0.99443	0.99466	0.99489	0.99511
2.0	0.99626	0.99642	0.99658	0.99673	0.99688
2.1	0.99764	0.99775	0.99785	0.99795	0.99805
2.2	0.99854	0.99861	0.99867	0.99874	0.99880
2.3	0.99911	0.99915	0.99920	0.99924	0.99928
2.4	0.99947	0.99950	0.99952	0.99955	0.99957
2.5	0.99969	0.99971	0.99972	0.99974	0.99975
2.6	0.99982	0.99983	0.99984	0.99985	0.99986
2.7	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992
2.8	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995	0.99996
2.9	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99998
3.0	0.99998	0.99998	0.99999	0.99999	0.99999
3.1	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
3.2	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

Lampiran 3. Listing program pencarian nilai integral fungsi distribusi kumulatif distribusi normal

Nilai.m

```
clear all;
clc;
miu=input('masukkan miu = ');
sigma=input('masukkan sigma = ');
Y=input('masukkan Y = ');
Z=input('masukkan Z = ');
nilai=intF(miu,sigma,0,Y+Z)
```

F.m

```
function ff=F(x,u,a)
ff=(2^(1/2)/exp((u*(1/(2*a^2))^(1/2) -
x*(1/(2*a^2))^(1/2))^2) +
2^(1/2)*pi^(1/2)*erf(u*(1/(2*a^2))^(1/2) -
x*(1/(2*a^2))^(1/2))*(u*(1/(2*a^2))^(1/2) -
x*(1/(2*a^2))^(1/2)) +
2^(1/2)*pi^(1/2)*x*erf(u*(1/(2*a^2))^(1/2))*(1/(2*a
^2))^(1/2))/(2*(1/(2*a^2))^(1/2)*(1/a^2)^(1/2));
```

intF.m

```
function ff=intF(miu,zigma,a,b)
ff=(F(b,miu,zigma)-
F(a,miu,zigma))/(zigma*sqrt(2*pi));
```

Lampiran 4. Listing program penerapan algoritma penyelesaian masalah π_2 dengan *software Matlab*

Skripsi.m

```
clear all;
clc;
P=[73 75 71];
d=[53 60 51];
c=[39 35 32];
s=[19 15 15];
tao=[5 3 1];
miu=[107 106 109];
sigma=[24 26 23];
t=500;
Y_bar=norminv((P-c)./(P-s),miu,sigma);
Z_bar=norminv((P-d)./(P-s),miu,sigma);
if sum(tao.*Y_bar)<=t
    Y_star=Y_bar;
    Z_star=0;
else
    gama=(d-c)./tao;
    lamda_l=0;
    lamda_u=max(gama);
    cari_YZ;
    while zigmaI2<t-zigmaI3
        lamda_u=lamda;
        cari_YZ;
    end;
    l=0;
    while zigmaI3>t
            lamda_l=lamda;
            cari_YZ;
            while zigmaI2<t-zigmaI3
              lamda_u=lamda;
              cari_YZ;
            end;
    end;
    if size(I2,2)==0
        Y_star=Y;
        Z_star=Z;
    else
        if size(I2,2)==1
```

```
            k=I2;
            zigmaIK1=0;
        else
            for i=1:size(I2,2)
                k=I2(i);
                zigmaIK1=0;
                zigmaIK2=0;
                for j=1:size(I2,2)
                    jj=I2(j);
                    if k<jj

zigmaIK1=zigmaIK1+tao(jj)*Z_bar(jj);
                    end;
                    if k<=jj

zigmaIK2=zigmaIK2+tao(jj)*Z_bar(jj);
                    end;
                end;
                if zigmaIK1<=zigmaIK2
                    break;
                end;
            end;
        end;
        for i=1:size(I2,2)
            ii=I2(i);
            if ii<k
                Y(ii)=0;
                Z(ii)=Z_bar(ii);
            end;
            if ii>k
                Y(ii)=Z_bar(ii)
                Z(ii)=0;
            end;
            if ii==k
                Y(ii)=(t-zigmaI3-zigmaIK1)/tao(ii);
                Z(ii)=Z_bar(ii)-Y(ii);
            end;
        end;
    end;
    Y_star=Y;
    Z_star=Z;
end;
Y_star
Z_star
```

```
laba=0;
for i=1:3
    laba=laba+(P(i)-c(i))*Y_star(i)+(P(i)-
d(i))*Z_star(i)-(P(i)-
s(i))*intF(miu(i),sigma(i),0,Y_star(i)+Z_star(i));
end;
laba
```

cari_YZ.m

```
    lamda=(lamda_l+lamda_u)/2;
    I1=[];
    I2=[];
    I3=[];
    for i=1:3
        if gama(i)<lamda
            I1=[I1 i];
        end;
        if gama(i)==lamda
            I2=[I2 i];
        end;
        if gama(i)>lamda
            I3=[I3 i];
        end;
    end;
    for i=1:size(I1,2)
        ii=I1(i);
        Y(ii)=0;
        Z(ii)=Z_bar(ii);
    end;
    for i=1:size(I3,2)
        ii=I3(i);
        Y(ii)=norminv((P(ii)-c(ii)-
lamda*tao(ii))/(P(ii)-s(ii)),miu(ii),sigma(ii));
        Z(ii)=0;
    end;
    zigmaI2=0;
    if size(I2,2)~=0
        for i=1:size(I2,2)
            ii=I2(i);
            zigmaI2=zigmaI2+tao(ii)*Z_bar(ii);
        end;
    end;
    zigmaI3=0;
    if size(I3,2)~=0
```

```
        for i=1:size(I3,2)
            ii=I3(i);
            zigmaI3=zigmaI3+tao(ii)*Y(ii);
        end;
    end;
```

F.m

```
function ff=F(x,u,a)
ff=(2^(1/2)/exp((u*(1/(2*a^2))^(1/2) -
x*(1/(2*a^2))^(1/2))^2) +
2^(1/2)*pi^(1/2)*erf(u*(1/(2*a^2))^(1/2) -
x*(1/(2*a^2))^(1/2))*(u*(1/(2*a^2))^(1/2) -
x*(1/(2*a^2))^(1/2)) +
2^(1/2)*pi^(1/2)*x*erf(u*(1/(2*a^2))^(1/2))*(1/(2*a
^2))^(1/2))/(2*(1/(2*a^2))^(1/2)*(1/a^2)^(1/2));
```

IntF.m

```
function ff=intF(miu,zigma,a,b)
ff=(F(b,miu,zigma)-
F(a,miu,zigma))/(zigma*sqrt(2*pi));
```