

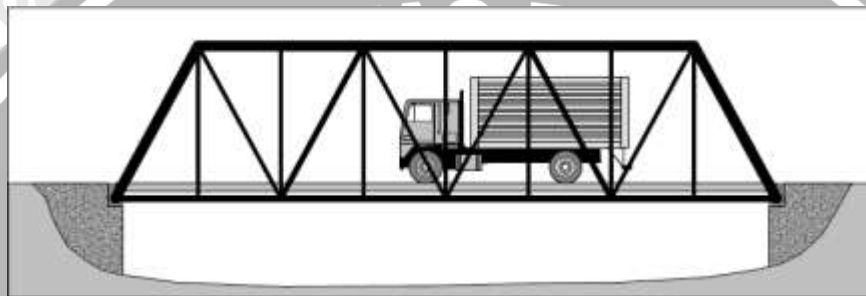
BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Tinjauan Umum

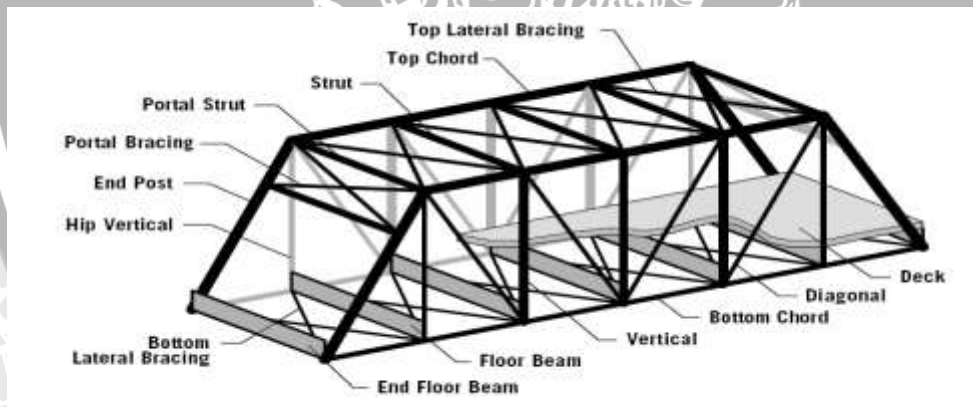
Jembatan rangka merupakan jembatan yang struktur penahan utamanya (gelagar induknya) merupakan struktur rangka.

Rangka merupakan struktur yang tersusun dari batang-batang yang disambung satu sama lain sehingga membentuk satu kesatuan struktur yang kokoh.



Gambar 2.1 Jembatan Rangka
Sumber: bridgecontest.usma.edu

Bagian-bagian jembatan rangka:



Gambar 2.2 Bagian jembatan rangka (tampak perspektif)
Sumber: bridgecontest.usma.edu

Dari ilustrasi gambar di atas dapat diketahui bagian-bagian yang umum dari jembatan rangka antara lain:

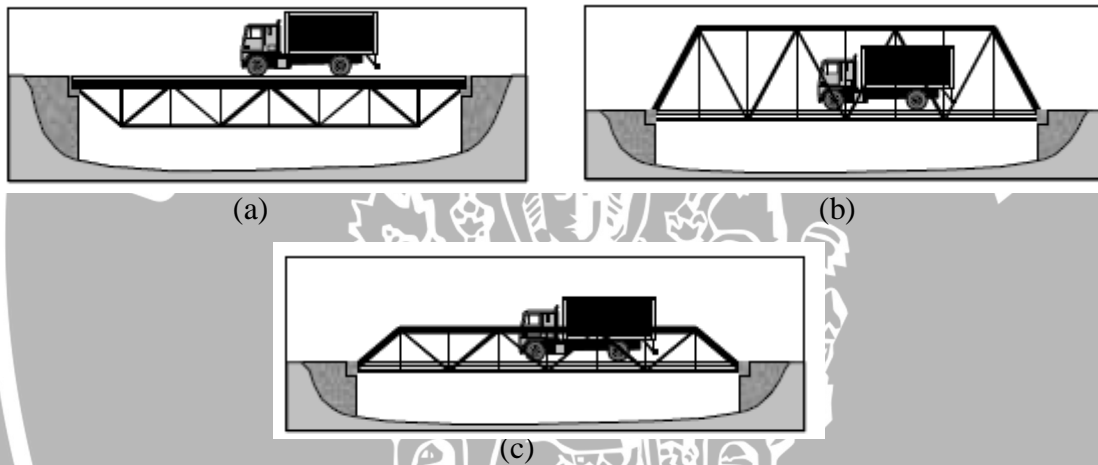
1. Batang atas (*top chord*)
2. Batang bawah (*bottom chord*)
3. Batang tegak (*vertical*)
4. Pengaku batang atas (*top lateral bracing*)
5. Pengaku batang bawah (*bottom lateral bracing*)

6. Pengaku antara portal (*portal bracing*)
7. Lantai kendaraan (*deck*)
8. Batang diagonal
9. Sambungan (*connection*)

Tipe-tipe jembatan rangka dapat dibedakan berdasarkan jenis interaksi lalu lintas kendaraannya serta macam-macam bentuk rangkanya.

Berdasarkan lantai kendaraannya:

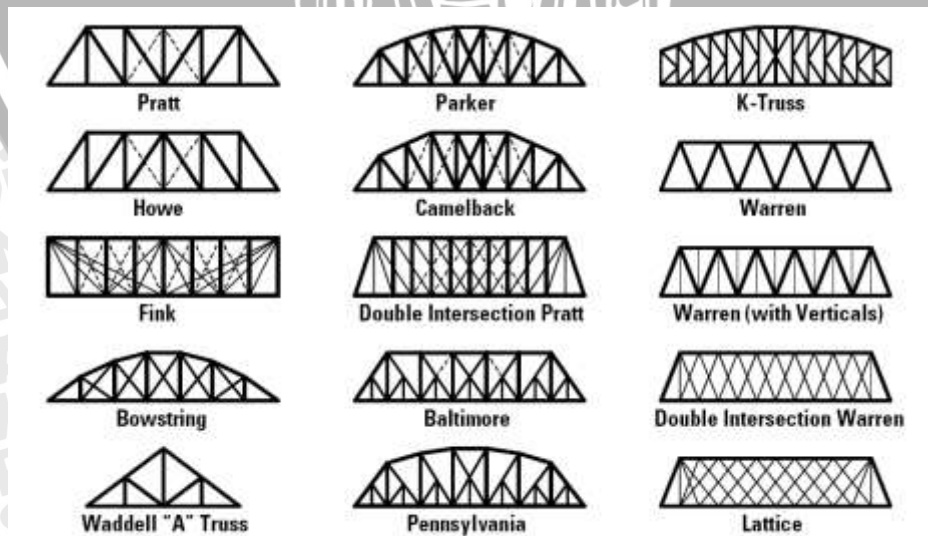
- Jembatan rangka lalu lintas atas (*deck truss*)
- Jembatan rangka lalu lintas bawah (*through truss*)
- Jembatan rangka lalu lintas bawah tetapi rangkanya tidak terlalu tinggi (*pony truss*)



Gambar 2.3 (a) *deck truss* (b) *through truss* (c) *pony truss*

Sumber: bridgecontest.usma.edu

Berdasarkan bentuk rangkanya:



Gambar 2.4 Konfigurasi rangka yang umum

Sumber: bridgecontest.usma.edu

Pembebanan pada jembatan terdiri atas:

- Berat kendaraan
- Berat dari jembatan itu sendiri
- Berat aspal, beton, dan struktur jembatan
- Pengaruh angin
- Berat akibat es dan salju (pada daerah tertentu), serta aliran air hujan
- Gaya akibat terjadinya gempa

2.2 Beban Dinamis

Definisi beban dinamis adalah semua beban dimana besaran, arah, dan letaknya berubah-ubah menurut satuan waktu. Pada umumnya beban dinamis yang terjadi pada struktur jembatan meliputi pergerakan kendaraan dan aksi gelombang seperti angin, aliran sungai, dan gempa (Chen & Duan, 2003).

Sebenarnya tidak ada bebanpun yang dapat dikatakan sebagai statis, kecuali berat sendiri. Namun bila perubahan beban cukup kecil (perlahan-lahan), maka efek dinamis tidak akan terjadi. Dengan demikian beban tersebut dapat dianggap sebagai beban statis. Waktu getar (*natural period*) dari bangunan adalah suatu parameter yang sangat penting. Besar kecilnya suatu perubahan pembebanan harus dibandingkan dengan waktu getar untuk menentukan apakah suatu pembebanan bersifat dinamis atau statis. Waktu getar secara sederhana dapat didefinisikan sebagai waktu yang dibutuhkan oleh suatu bangunan untuk melakukan satu siklus getaran. Pembahasan analisis dinamis dimulai dengan idealisasi dari struktur yang kemudian dilanjutkan dengan pembahasan penyelesaian dengan menggunakan cara numerik.

2.3 Dasar Perencanaan Bangunan Terhadap Gempa

Perhitungan respon dinamis suatu bangunan terhadap gempa dapat dibagi menjadi dua bagian besar, yaitu perhitungan respon riwayat waktu (*time history analysis*) yang biasanya dilakukan dengan memakai analisis numerik, serta perhitungan dengan cara ragam *spectrum response (modal analysis)*. Respon akibat hubungan antara gaya dinamis dan waktu dapat dikelompokkan dalam 2 jenis, yaitu:

1. *periodic (steady state)*
2. *transient*

Getaran gempa bumi adalah salah satu dari getaran yang menimbulkan respon *transien*.

2.3.1 Persamaan gerak

Persamaan dasar dapat diuraikan sebagai berikut

Persamaan gerak kedua dari Hukum Newton:

$$F = m \times a \tag{2-1}$$

Pada suatu sistem yang bergetar, gaya pegas adalah:

$$F = -k \times u$$

$$-k \times u = m \frac{d^2 u}{dt^2} \tag{2-2}$$

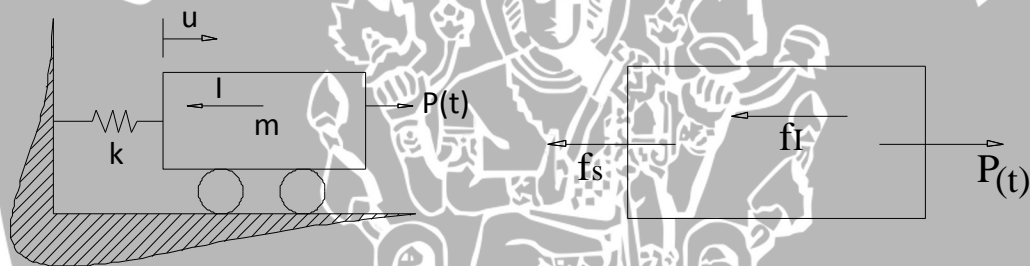
Prinsip d'Alembert (keseimbangan):

$$F = -k \times u$$

$$k \times u - m \frac{d^2 u}{dt^2} = 0 \tag{2-3}$$

2.3.1.1 Persamaan Gerak *Single Degree of Freedom*

2.3.1.1.1 Persamaan Gerak SDOF tak Teredam



Model Matematis

Freebody Diagram

Gambar 2.5. Model matematis dan *Freebody Diagram* SDOF tak teredam

Berdasarkan prinsip d'Alembert, persamaan gerak untuk sistem tak teredam adalah;

$$m\ddot{u} + ku = P(t) \tag{2-4}$$

Jika suatu struktur dibebani dengan fungsi $P(t)$, maka akan terjadi respon yang merupakan superposisi dari dua persamaan solusi respon, yaitu respon *complementer* dan respon partikular yang membentuk suatu respon total struktur tak teredam.

- **Respon Complementer** (u_c)

Respon *complementer* adalah respon alami dari sistem akibat getaran bebas tanpa eksitasi dari luar, dimana persamaan OEM dari sistem adalah $m\ddot{u} + ku = 0$.

Didapatkan *natural frekwency* atau frekuensi alami struktur sebesar:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2-5)$$

Berdasarkan kondisi awal saat $t = 0$.

Maka persamaan respon *complementer* didapat:

$$u(t) = u_0 \cos \omega t + \frac{\dot{u}_0}{\omega} \sin \omega t \quad (2-6)$$

- **Respon Partikular (u_p)**

Respon partikular adalah respon sistem akibat getaran eksitasi dari luar sistem, dimana $m\ddot{u} + ku = P(t)$. Misalkan fungsi yang membebani adalah

$P(t) = P_0 \cos \Omega t$, maka dapat dimisalkan solusi partikularnya adalah:

$$u_p = U \cos \Omega t$$

$$\dot{u}_p = -U \Omega \sin \Omega t \quad (2-7)$$

$$\ddot{u}_p = -U \Omega^2 \cos \Omega t$$

sehingga, $m\ddot{u} + ku = P_0 \cos \Omega t$

$$\text{Sehingga } U = \frac{P_0}{k - m\Omega^2} \quad (2-8)$$

dengan $k - m\Omega^2 \neq 0$

$$\text{Jika deformasi statis } U_0 = \frac{P_0}{k} \quad (2-9)$$

Maka jika persamaan (2-9) disubstitusi ke dalam persamaan (2-8) menjadi

$$U = \frac{P_0}{k - m\Omega^2} = \frac{\frac{P_0}{k}}{1 - \frac{m}{k}\Omega^2} = \frac{U_0}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}}$$

Jika ratio frekuensi $r = \frac{\Omega}{\omega_n}$, maka persamaan (2.8) menjadi:

$$U = \frac{U_0}{1 - r^2} \text{ dengan } r^2 \neq 1 \quad (2-10)$$

Fungsi frekuensi respon ($H(\Omega)$) adalah perbandingan antara amplitudo respon “*steady-state*” (U) dengan defleksi statis (U_0), maka

$$H(\Omega) = \frac{U}{U_0}$$

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 - r^2} \quad (2-11)$$



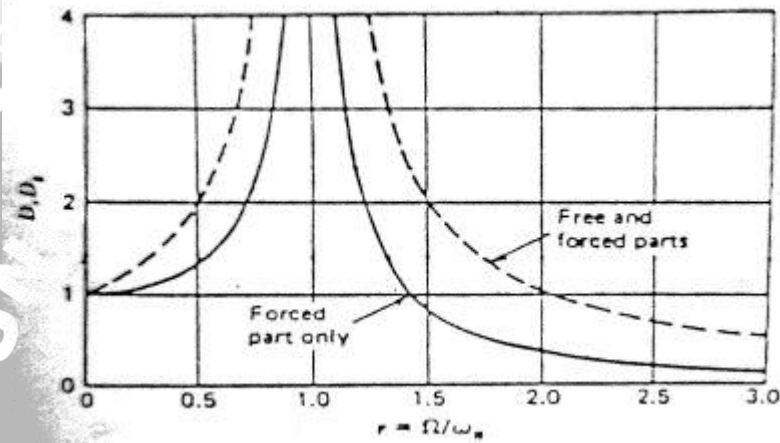
Faktor magnitudo dari fungsi gerak “steady-state” adalah

$$D_s = |H(\omega)| \tag{2-12}$$

Dari substitusi persamaan (2-9) ke persamaan (2-6) didapat

$$u_p = \left(\frac{U_0}{1-r^2} \right) \cos \Omega t \tag{2-13}$$

Hubungan antara *factor magnitude* gerak SDOF tak teredam (D_s) dengan rasio frekuensi (r) di gambarkan oleh grafik berikut:



Gambar 2.6 Faktor besaran dinamis untuk sistem SDOF tak teredam dengan $p(t) = p_0 \sin \Omega t$

- Jika $r < 1$, respon yang terjadi sefase dengan eksitasi sefase dengan eksitasi, sebab $(1-r^2)$ bernilai positif.
- Jika $r > 1$, respon yang terjadi tidak sefase 180° dengan eksitasi, dan u_p bisa ditulis

$$u_p = \left(\frac{U_0}{r^2 - 1} \right) (-\cos \Omega t) \tag{2-14}$$

Bentuk umum gerak alami dari sistem satu derajat kebebasan tak teredam dikombinasikan untuk memberikan respon total sebagai berikut:

$$u = u_p + u_c$$

$$u(t) = \left(\frac{U_0}{1-r^2} \right) \cos \Omega t + A \cos \Omega t + B \sin \Omega t \tag{2-15}$$

Total faktor dinamis *magnitude* didefinisikan sebagai

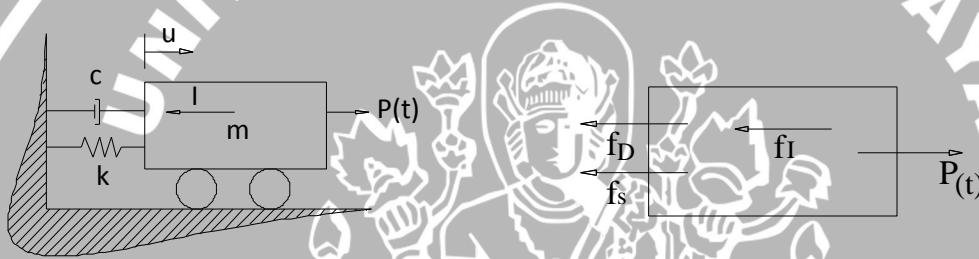
$$D = \max \frac{|u_t|}{U_0} \tag{2-16}$$

Persamaan (2-14) tidak berlaku jika $r = 1$ atau $\Omega = \omega_n$ sebab itu artinya frekuensi eksitasi sama dengan frekuensi natural sehingga mengakibatkan resonansi.

“Jika frekuensi eksitasi mendekati resonansi, maka respon yang terjadi akan menjadi sangat besar.”

Maka pentingnya mempelajari respon struktur akibat gerak harmonis eksitasi dalam bagian secara luas adalah untuk mencegah kondisi resonansi dinamis amplitudo besar yang bisa terjadi saat $r = 1$.

2.3.1.1.2 Persamaan Gerak SDOF Sistem Teredam



Model Matematis

Freebody Diagram

Gambar 2.7 Model matematis dan *Freebody Diagram* SDOF teredam

Berdasarkan prinsip d’Alembert, persamaan gerak untuk sistem teredam adalah;

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P(t) \tag{2-17}$$

Seperti struktur sistem tak teredam, suatu struktur sistem teredam yang dibebani dengan fungsi beban $P(t)$ akan mengalami superposisi respon dari respon *complementer* dan respon partikular yang membentuk suatu respon total struktur teredam.

- **Respon Complementer (u_c)** akibat getaran bebas tanpa eksitasi dari luar EOM dari struktur adalah $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$.

Misalkan solusinya adalah:

$$u(t) = C e^{st} \quad \dot{u}(t) = C s e^{st} \quad \ddot{u}(t) = C s^2 e^{st} \tag{2-18}$$

Maka:

$$S_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

Jika: $-\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \rightarrow$ kritis
 $-\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} < 0 \rightarrow$ sub kritis
 $-\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} > 0 \rightarrow$ super kritis

Redaman Kritis diperoleh dari kondisi $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0$

$$c_{cr} = \sqrt{\frac{k}{m}} \times 2m, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$c_{cr} = 2 m \omega_n \quad (2-19)$$

ζ adalah rasio redaman sistem terhadap redaman kritis

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} \rightarrow c = \zeta \cdot c_{cr} \quad (2-20)$$

Jika $c = c_{cr}$, maka termasuk **redaman kritis**

Jika $c < c_{cr}$, maka termasuk **redaman subkritis**

Jika $c > c_{cr}$, maka termasuk **redaman superkritis**

Frekuensi redaman ω_D

$$\omega_D = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (2-21)$$

Maka, $S_{1,2} = \left(\frac{-c}{2m}\right) \pm \omega_D i$

$$\frac{c}{2m} = \frac{\zeta c_{cr}}{2m} = \frac{\zeta \cdot 2m \cdot \omega_n}{2m} = \zeta \omega_n,$$

sehingga dapat ditulis: $S_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm \omega_D i \quad (2-22)$

Solusi umum

Jadi persamaan gerak untuk respon *complemeter* (u_c) adalah:

$$u_c = e^{(-\zeta \omega_n) t} [A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t] \quad (2-23)$$

Nilai A da B dapat ditentukan berdasarkan kondisi awal saat $t = 0$

Jadi persamaan respon *complemeter* untuk sistem SDOF teredam adalah:

$$u_c = e^{(-\zeta \omega_n) t} \left[u_0 \cos \omega_D t + \frac{\dot{u}_0 + \zeta \omega_n u_0}{\omega_D} \sin \omega_D t \right] \quad (2-24)$$



- **Respon Partikular (u_p)** akibat getaran eksitasi dari luar sistem.

Jika sistem dibebani oleh gaya eksitasi $P(t) = P_o \sin \Omega t$,

maka EOM dari struktur adalah $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P_o \sin \Omega t$

Karena $\sin \Omega t$ adalah komponen dari $e^{i\Omega t}$, dimana $e^{i\Omega t}$ adalah $\cos \Omega t + i \sin \Omega t$

maka dapat dirumuskan $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P_o e^{i\Omega t}$ (2-25)

Misal solusi:

$$\begin{aligned} u_p &= U e^{i\Omega t} \\ \dot{u}_p &= U \Omega i e^{i\Omega t} \\ \ddot{u}_p &= -U \Omega^2 e^{i\Omega t} \end{aligned} \quad (2-26)$$

sehingga:

$$u_p = \frac{P_o e^{i\Omega t}}{(k - m\Omega^2) + (c\Omega)i}$$

$(k - m\Omega^2) + (c\Omega)i$ merupakan bentuk bilangan kompleks $z = x + iy$ (pada koordinat

kutub) dan dapat diubah menjadi $z = re^{i\theta}$ (koordinat polar) dimana $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

dengan $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

Maka u_p dapat ditulis sebagai berikut:

$$u_p = \frac{P_o e^{i\Omega t}}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2} \times e^{i\theta}} = \frac{P_o e^{i\Omega t - \theta}}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}} = \frac{P_o \cos(\Omega t - \theta)}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}}$$

$$u_p = U \sin(\Omega t - \theta) \text{ dimana, } U = \frac{P_o}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}}$$

Karena $U_o = \frac{P_o}{k}$, $r = \frac{\Omega}{\omega_n}$ dan $c = \zeta c_{cr}$ maka U dapat dirumuskan:

$$U = \frac{U_o}{\left[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2 \right]^{1/2}}$$

Sehingga didapat persamaan respon partikular sebagai berikut:

$$u_p = \frac{U_o \sin(\Omega t - \theta)}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (2-27)$$

dengan $\theta = \arctan\left(\frac{2\zeta r}{1 - r^2}\right)$

Maka respon total untuk sistem teredam akibat getaran eksitasi adalah:

$$u_t = u_p + u_c$$

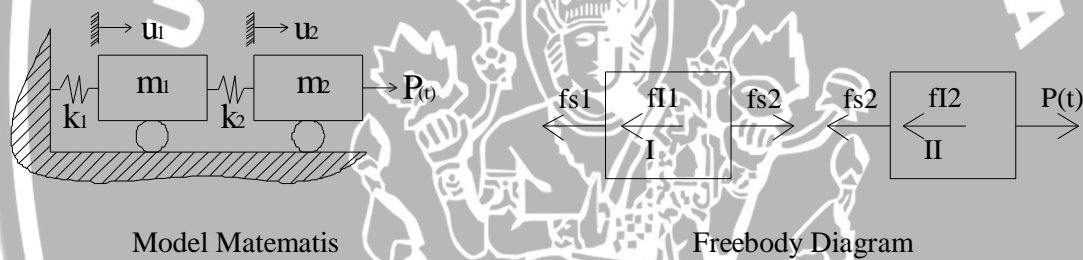
$$u_t = U \sin(\Omega t - \theta) + e^{(-\zeta \omega_n)t} \left[u_0 \cos \omega_D t + \frac{\dot{u}_0 + \zeta \omega_n u_0}{\omega_D} \sin \omega_D t \right] \quad (2-28)$$

2.3.1.2 Persamaan *Multi Degree of Freedom*

Seperti telah diketahui, derajat kebebasan suatu sistem susunan massa merupakan jumlah dari derajat kebebasan massa. Pada umumnya massa dari struktur suatu bangunan bila memungkinkan dapat dipusatkan pada tempat-tempat tertentu (*lump mass*, biasanya pada tiap-tiap lantai bangunan). Tetapi seringkali juga dijumpai keadaan struktur yang pembagian massanya benar-benar merata setinggi struktur (*generalized mass*).

Seperti halnya *single degree of freedom*, persamaan *multy degree of freedom* juga terdiri dari MDOF tak teredam dan MDOF teredam

2.3.1.2.1 Persamaan MDOF tak Teredam



Gambar 2.8 Model matematis dan *Freebody Diagram* MDOF tak teredam

Seperti telah diketahui pada sistem SDOF, respon dinamis dipengaruhi oleh 2 faktor dasar:

- waktu getar (T) atau frekuensi (ω)
- perpindahan (u)

Respon sistem MDOF juga dipengaruhi oleh faktor-faktor yang sama. Jadi langkah pertama pada sistem MDOF adalah menghitung harga-harga frekuensi dari gerak bebas dan *mode shape*.

Untuk gerak bebas tanpa gaya luar persamaannya adalah:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = 0$$

Seperti juga pada SDOF, maka akibat gaya luar respon sistem adalah

$$u(t) = U \cos \Omega t; \quad \dot{u}(t) = -U \Omega \sin \Omega t; \quad \ddot{u}(t) = -U \Omega^2 \cos \Omega t$$

Harga-harga $u(t)$ dan $\ddot{u}(t)$ disubstitusikan ke dalam persamaan $[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = 0$

$$\text{menjadi: } [[K] - [M]\omega^2]\{u\} = 0$$

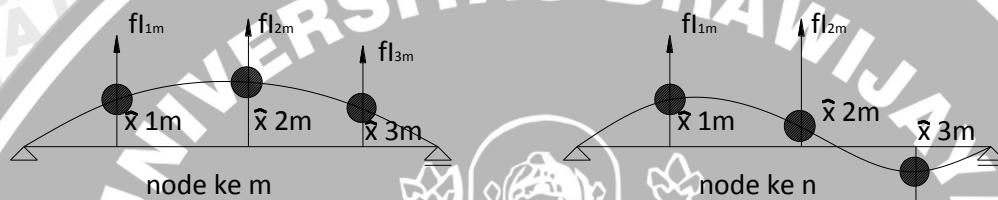
Persamaan di atas akan menghasilkan $[\omega]$ dan *mode shape* pasangannya $\{\phi\}$ yang juga disebut sebagai *eigenvalue* dan *eigenvector*.

Pada gerak bebas dari sistem yang linier elastis, *mode shape* $\{\phi_n\}$ mempunyai sifat khusus yang sangat berguna dalam analisis dinamis. Sifat khusus tersebut disebut "hubungan *orthogonality*" yang menggunakan hukum Betti.

Persamaan $[[K]-[M]\omega^2]\{u\}=0$ juga dapat dinyatakan sebagai berikut:

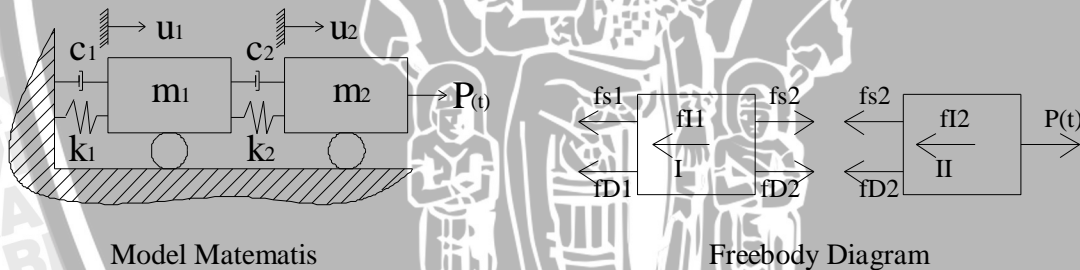
$$[K]\{U\}=\omega_n^2[M]\{U\}$$

suku kanan merupakan faktor-faktor gaya inersia $\{-f_I\}$ dan suku kiri merupakan faktor gaya pegas $\{f_s\}$



Gambar 2.9 Mode getar

2.3.1.2.2 Persamaan MDOF Teredam



Model Matematis

Freebody Diagram

Gambar 2.10 Model matematis dan *Freebody Diagram* MDOF teredam

Respon sistem MDOF teredam tidak hanya dipengaruhi oleh faktor-faktor di atas akan tetapi juga memperhitungkan matriks redaman yang terjadi. Dimana untuk gerak bebas tanpa gaya luar persamaannya adalah:

$$[M]\{\ddot{u}\}+[C]\{\dot{u}\}+[K]\{u\}=0$$

Seperti juga pada SDOF, maka akibat gaya luar respon sistem adalah

$$u(t)=C e^{st}; \quad \dot{u}(t)=C s e^{st}; \quad \ddot{u}(t)=C s^2 e^{st}$$

Harga-harga $u(t)$ dan $\ddot{u}(t)$ disubstitusikan ke persamaan $[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = 0$ sehingga frekuensi redaman ω_D yang terjadi adalah:

$$\omega_D = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

dimana ω_n dicari dengan cara seperti pada MDOF tak teredam.

2.3.2 Kegunaan *Response Spectra* untuk Perencanaan Struktur

Lengkungan *response spectrum* berdasarkan analisis respon sistem SDOF dapat digunakan sebagai sarana untuk analisis respon sistem MDOF jika terkena $\ddot{u}_g(t)$ tertentu untuk suatu waktu getar tertentu, selama sistem masih dalam keadaan linier statis. Untuk sistem nonlinier dapat dipakai *inelastic spectra* dengan memperhatikan *ductility factor*.

Analisis dinamis suatu sistem MDOF dengan memakai *response spectra* merupakan salah satu cara Modal Analisis, dimana selama terjadi getaran, damping dari sistem memenuhi persyaratan sehingga terjadi uncoupling dan gaya luar yang bekerja harus mempunyai variasi waktu yang sama dan respon yang dikehendaki hanya respon maximum. *Maximum displacement* penting dalam perencanaan karena regangan dalam suatu bangunan proporsional terhadap *relative displacement*. *Maximum relative velocity* memberikan suatu ukuran terhadap tenaga *elastic* yang tersimpan di dalam *system*. *Maximum Absolute Acceleration* berhubungan langsung dengan gaya gempa atau koefisien gaya lateral dalam peraturan muatan, juga untuk mengontrol suatu perhitungan karena mudahnya *absolute acceleration* tersebut dicatat.

2.3.3 Superposisi Mode

Cara superposisi mode hanya berlaku untuk sistem-sistem yang linier dimana sifat-sifat struktur tetap konstan selama terjadi respon. Prinsip utama dari cara superposisi mode ini adalah bahwa satu set terdiri dari N buah persamaan gerak yang berpasangan pada sistem MDOF dapat diubah menjadi satu set N buah persamaan gerak yang tidak berpasangan dengan cara transformasi *normal coordinate*. Cara mode superposisi ini dapat dipakai untuk menghitung respon dinamis dari sembarang sistem linier.

2.3.3.1 Persamaan Modal

2.3.3.1.1 Persamaan Modal Tanpa Redaman

Persamaan gerak sistem MDOF tanpa redaman dengan gaya luar adalah:

$$[m] \{ \ddot{u} \} + [k] \{ \dot{u} \} = \{ F(t) \} \quad (2-29)$$

Sebelum melakukan perhitungan lebih lanjut, harus dilakukan perhitungan *mode shape* dan frekuensi alami struktur dengan menyederhanakan persamaan gerak menjadi persamaan *eigen value*.

$$\{ [K] - \omega^2 [M] \} [\ddot{u}] = 0$$

Sehingga akan didapat *mode shape* \emptyset dan vektor frekuensi.

Jika dinyatakan dalam *normal coordinate* $\{ u \} = [\emptyset] \{ y \}$ didapat:

$$[m] [\emptyset] \{ \ddot{y} \} + [k] [\emptyset] \{ y \} = \{ F(t) \}$$

dikalikan \emptyset_n^T

$$\emptyset_n^T [m] [\emptyset] \{ \ddot{y} \} + \emptyset_n^T [k] [\emptyset] \{ y \} = \emptyset_n^T \{ F(t) \} \quad (2-30)$$

Karena pada orthogonality condition $\emptyset_n^T [m] \emptyset_m = 0$ dan $\emptyset_n^T [k] \emptyset_m = 0$, maka:

$$\emptyset_n^T [m] \emptyset_n \ddot{y}_n + \emptyset_n^T [k] \emptyset_n y_n = \emptyset_n^T \{ F(t) \}$$

$$\text{Jika } M_n = \emptyset_n^T [m] \emptyset_n ; \quad K_n = \emptyset_n^T [k] \emptyset_n ; \quad F_n = \emptyset_n^T \{ F(t) \} \quad (2-31)$$

Dimana M_n = massa yang tergeneralisasi untuk mode ke-n

K_n = kekakuan yang tergeneralisasi untuk mode ke-n

F_n = beban yang tergeneralisasi untuk mode ke-n

Persamaan (2-31) disubstitusikan ke dalam persamaan (2-30) maka:

$$[M_n] \ddot{y}_n + [K_n] y_n = \{ F_n(t) \} \quad (2-32)$$

2.3.3.1.2 Persamaan Modal dengan Redaman

Persamaan gerak sistem MDOF dengan redaman serupa dengan persamaan modal tanpa redaman dengan ditambahkan bahwa *orthogonality condition* juga berlaku untuk redaman.

$$\emptyset_n^T [c] \emptyset_n = 0 \text{ untuk } m \neq n$$

Sehingga persamaan modal untuk sistem dengan redaman menjadi:

$$[M_n] \ddot{y}_n + [C_n] \dot{y}_n + [K_n] y_n = \{ F(t) \} \quad (2-33)$$

Persamaan (2-32) menunjukkan bahwa persamaan gerak dari sembarang mode-n suatu sistem MDOF ternyata ekuivalen dengan persamaan gerak sistem SDOF.

Jadi N -buah persamaan gerak simultan disederhanakan menjadi satu set persamaan gerak independen, satu persamaan untuk masing-masing mode. Kenyataan ini memungkinkan dipakainya cara mode superposisi pada perhitungan respon suatu sistem linier elastic. Persamaan (2-32) dapat dipecahkan dengan integrasi persamaan gerak sistem SDOF. Dengan mencari harga-harga u_n , yaitu perpindahan pada mode ke- n maka dapat ditentukan vector perubahan bentuk, percepatan dan kecepatan dari sistem untuk mode yang ke- n sebagai berikut:

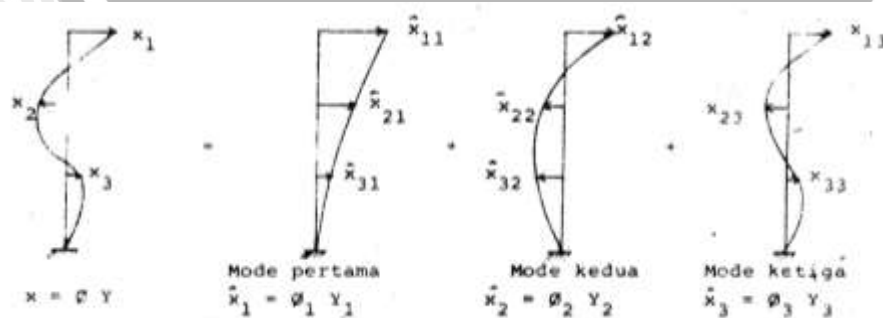
$$\{u_n\} = \{\phi_n\} y_n \tag{2-34}$$

$$\{\dot{u}_n\} = \{\phi_n\} \dot{y}_n \tag{2-35}$$

Dengan mengulangi langkah integrasi numerik dari persamaan (2-33) untuk mode-mode yang masih tersisa dan menjumlahkan harga-harga dari matrik-matrik vector $\{u_n\}$, $\{\dot{u}_n\}$, $\{\ddot{u}\}$ untuk masing-masing mode secara terpisah, maka akan didapat respon dari sistem MDOF. Jadi ciri khas cara superposisi mode adalah integrasi berturut-turut persamaan gerak sistem SDOF, yang memungkinkan menghindarkan pemecahan persamaan diferensial pangkat dua.

2.3.3.2 Normal Coordinate dan Geometrie Coordinate

Biasanya perpindahan suatu sistem N-DOF dinyatakan dalam N komponen vektor perpindahan u . Pada analisis respon dinamis dari sistem-sistem linier, maka perpindahan dinyatakan dalam *mode shape* getaran bebas. Bentuk ini terdiri dari N buah pola perpindahan yang independen dan koordinat-koordinatnya dinyatakan dalam amplitudo. Sebagai contoh, dapat dilihat suatu *shear type structure* seperti terlihat pada gambar berikut dimana perpindahan dinyatakan dengan koordinat pada 3 mode yang berdiri sendiri. Setiap vektor perpindahan u dari bangunan ini dapat diperoleh dengan melakukan superposisi dari masing-masing amplitudo untuk ketiga mode getaran seperti terlihat pada gambar.



Gambar 2.11 shear type structure

Jadi jumlah seluruh perpindahan diperoleh dengan menjumlahkan semua modal komponen.

$$u = \phi_1 y_1 + \phi_2 y_2 + \dots + \phi_n y_n = \sum \phi_n y_n \quad (2-36)$$

dimana: u_n = modal displacement

ϕ_n = mode shape

y_n = modal amplitudo

Total dari modal displacement adalah:

$$u = \sum \phi_n y_n \quad (2-37)$$

atau dalam bentuk matriks: $\{u\} = [\phi] \{y\}$ dikalikan $\phi_n^T [m]$

$$\phi_n^T [m] \{u\} = \phi_n^T [m] [\phi] \{y\} \quad (2-38)$$

Dari persamaan di atas jelas bahwa $[\phi]$ gunanya merubah koordinat yang tergeneralisasi $\{y\}$ menjadi koordinat geometrik $\{x\}$. Koordinat-koordinat amplitudo dan mode yang telah dibuat tergeneralisasi ini disebut koordinat normal dari bangunan.

Pada *orthogonality condition*:

$$\phi_n^T [m] \phi_n \neq 0$$

$$\phi_n^T [m] \{u\} = \phi_n^T [m] \phi_n y_n$$

$$y_n = \frac{\phi_n^T [m] \{u\}}{\phi_n^T [m] \phi_n} \quad (2-39)$$

Dengan sendirinya koordinat normal dinyatakan seperti pada persamaan (2-39).

Didefinisikan bahwa koordinat yang tergeneralisasi untuk suatu sistem dengan *N-degree of freedom* dapat diartikan sebagai sembarang bentuk yang terdiri dari N besaran yang independen yang menentukan dengan lengkap letak dari semua titik pada sistem tersebut.

2.3.3.3 Respon Perpindahan

Dengan memakai *generalized mass* dan *generalized load* (massa dan beban yang tergeneralisasi) serta suatu *modal damping ratio* ζ_n , maka dapat disusun persamaan gerak untuk masing-masing mode sebagai berikut:

$$\ddot{y}_n + 2 \zeta_n \omega_n \dot{y}_n + \omega_n^2 y_n = \left\{ \frac{F(t)}{M_n} \right\} \quad (2-40)$$

Hasil dari persamaan di atas adalah suatu persamaan gerak yang terdiri dari N buah persamaan yang independen, satu persamaan untuk masing-masing *mode of vibration*. Persamaan-persamaan SDOF ini dapat dipecahkan dengan cara-cara yang

cocok untuk jenis pembebanannya. Respon umum dapat diperoleh dengan Integral Duhamel untuk masing-masing mode:

$$y_n(t) = \frac{1}{m_n \omega_{Dn}} \int F_n(\tau) e^{-\zeta_n \omega_n (t-\tau)} \sin \omega_{Dn}(t-\tau) d\tau \quad (2-41)$$

Respon umum juga dapat dihitung dengan tepat atau dapat juga dengan menggunakan Respon Spektra.

Persamaan Integral Duhamel hanya berlaku untuk sistem yang berda dalam keadaan diam pada $t = 0$. Jika kecepatan dan perpindahan awal $\neq 0$, maka pada Integral Duhamel harus ditambahkan respon getaran bebas untuk tiap-tiap mode, sebesar:

$$y_n(t) = e^{-\zeta_n \omega_n t} \left\{ \frac{\dot{y}_n(0) + y_n(0) \zeta_n \omega_n}{\omega_{Dn}} \sin \omega_{Dn} t + y_n(0) \cos \omega_{Dn} t \right\} \quad (2-42)$$

dimana:

$y_n(0)$ = perpindahan modal awal

$\dot{y}_n(0)$ = kecepatan modal awal

$\dot{y}_n(0)$ dan $y_n(0)$ diperoleh dari perpindahan awal $u(0)$ dan kecepatan awal $\dot{u}_n(0)$ yang

telah diketahui; $y_n(0) = \frac{\Phi_n^T m u(0)}{M_n}$ dan $\dot{y}_n(0) = \frac{\Phi_n^T m \dot{u}_n(0)}{M_n}$

Selanjutnya setelah respon masing-masing mode $y_n(t)$ diketahui, kemudian dicari perpindahan yang dinyatakan dalam koordinat geometri. Caranya dengan mentransformasi koordinat normal: $u_n(t) = \Phi_n y_n(t)$

Maka akan didapat superposisi dari sumbangan berbagai mode:

$$u(t) = \Phi_1 y_1(t) + \Phi_2 y_2(t) + \Phi_3 y_3(t) + \dots \quad (2-43)$$

2.3.3.4 Respon Gaya Elastis

Gaya elastis f_s yang menahan deformasi dari struktur dapat diperoleh dari rumus:

$$f_s = k \cdot u(t)$$

$$f_s = k \cdot \Phi_n y_n(t) \quad (2-44)$$

atau dapat juga dihitung sebagai berikut:

$$f_s(t) = k \cdot \Phi_1 y_1(t) + k \cdot \Phi_2 y_2(t) + k \cdot \Phi_3 y_3(t) + \dots \text{ atau}$$

$$f_s(t) = \omega_1^2 m \Phi_1 y_1(t) + \omega_2^2 m \Phi_2 y_2(t) + \omega_3^2 m \Phi_3 y_3(t) + \dots$$

$$\text{dalam bentuk matriks: } \{f_s(t)\} = [m] [\Phi_n] \{\omega_n^2 y_n(t)\} \quad (2-45)$$

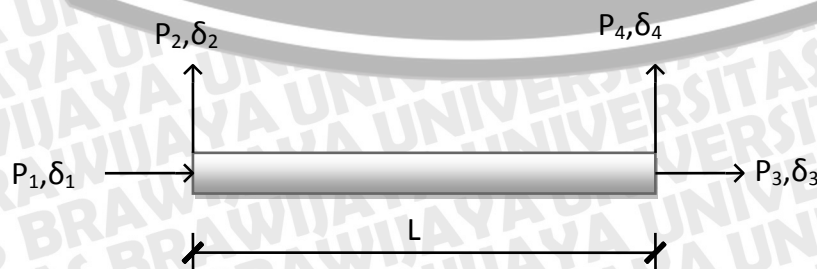
2.4 Elemen Hingga Pada Rangka Batang

Batang-batang pada rangka batang adalah *elemen hingga*. Suatu rangka batang adalah struktur elemen elemen hingga “alami” (*natural*), karena pada strukturnya tidak diperlukan pembagian konseptual menjadi elemen. Setiap batang diasumsikan prismatis, elastis linier, mempunyai hubungan sendi ujung-ujungnya, dan mengalami gaya aksial saja. Dalam perhitungannya, batang elemen–elemen rangka dan titik-titik simpulnya diberi nomor untuk memperjelas besarnya gaya dan perpindahan pada tiap node elemen sesuai dengan kekakuan elemen tersebut.

Bila gaya-gaya menggoyangkan sebuah struktur kurang dari sepertiga frekuensi getaran alami terendah, maka bisa dianggap sebagai persoalan statik. Namun jika goyongannya lebih cepat, maka inersia struktur menjadi penting dan persoalan ini harus ditinjau sebagai dinamik.

2.5 Metode Analisis Dinamis Struktur Rangka Batang

Analisis statis dari kerangka batang dimana anggota strukturnya dihubungkan dengan sendi, telah mereduksi masalah gaya batang akibat beban yang bekerja pada titik hubung. Bila kerangka batang yang sama dibebani oleh *gaya-gaya dinamis*, maka keadaanya menjadi tidak sederhana lagi, karena tidak hanya ada gaya aksial pada anggota struktur. Gaya inersia sepanjang anggota struktur kerangka batang akan menimbulkan momen lentur sebagai tambahan pada gaya aksial. Momen lentur pada ujung-ujung anggota struktur kerangka batang tetap nol karena tidak adanya momen luar pada titik hubung. Analisis dinamis untuk kerangka batang dilakukan dengan cara menentukan hubungan dasar antara gaya elastic, gaya redaman, gaya inersia dan hasil perpindahan, kecepatan serta percepatan pada koordinat nodal, yaitu dengan menentukan matriks kekakuan, matrik redaman serta matriks massa untuk anggota struktur rangka batang.



Gambar 2.12 Koordinat nodal pada rangka batang sebidang

Sebuah rangka batang yang memiliki panjang L , luas penampang A , dan modulus elastisitas E pada tiap titik nodalnya mengalami gaya aksial P_1 sehingga berdeformasi sebesar δ_1 dan gaya lintang sebesar P_2 sehingga berdeformasi sebesar δ_2 dan seterusnya. Sehingga setiap kerangka batang yang mempunyai 2 koordinat nodal pada setiap titik hubung dan akan mempunyai empat koodinat nodal secara keseluruhan.

2.5.1 Matriks Kekakuan Rangka Batang

Kekakuan memegang peranan yang penting pada suatu rangka batang dalam menahan beban-beban aksial. Untuk menurunkan matriks kekakuan dari satu bagian struktur yang dibebani secara aksial, maka dapat kita tinjau gambar 2.12, dimana suatu batang dibebani gaya aksial P_1 dan P_3 yang menimbulkan perpindahan δ_1 dan δ_3 .

Dalam menentukan koefisien kekakuan untuk beban aksial, kita dapat menggunakan hubungan kekakuan akibat pengaruh gaya aksial dengan menggunakan hukum Hook.

Dimana:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{P/A}{\delta/L}$$

Sehingga

$$\delta = \frac{PL}{AE} \tag{2-46}$$

Sedangkan hubungan antara gaya aksial, kekakuan dan deformasi dirumuskan dengan

$$\begin{aligned} P &= K\delta \\ K &= \frac{P}{\delta} \end{aligned} \tag{2-47}$$

Dari persamaan (2-46) dan (2-47) didapatkan:

$$K = \frac{P}{\delta} = \frac{P}{PL/AE} = \frac{AE}{L} \tag{2-48}$$

Dari gambar 2.12 dan persamaan yang telah didapatkan hubungan keseimbangan gaya batang dengan kekakuan dan deformasi pada tiap nodal dapat dituliskan

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= K_{11}\delta_1 - K_{13}\delta_3 \\ P_3 &= K_{33}\delta_3 - K_{13}\delta_1 = -K_{13}\delta_1 + K_{33}\delta_3 \end{aligned} \right\} \text{Dimana } K_{11}=K_{13}=K_{33}=K_{31}=\frac{AE}{L}$$

Sehingga didapat matriks kekakuan untuk satu anggota struktur rangka batang

$$\text{seragam } [K] = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & -K_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_{31} & 0 & K_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & -K_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_{31} & 0 & K_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix} \quad (2-49)$$

atau dalam notasi singkat

$$\{P\} = [K]\{\delta\} \quad (2-50)$$

2.5.2 Matriks Massa Rangka Batang

Massa memegang peranan yang penting pada perhitungan gaya inersia yang terjadi pada sepanjang anggota struktur rangka batang. Untuk menghitung koefisien dari matriks massa sepadan, kita harus menentukan fungsi perpindahan aksial pada satu nodal dan fungsi perpindahan lintang pada satu nodal.

2.5.2.1.1 Menentukan koefisien matriks massa dengan fungsi perpindahan aksial

Mari kita tinjau gambar 2.13, kita asumsikan bahwa pada nodal 1 terjadi perpindahan aksial $\delta_1=1$ dan pada nodal 2 tetap, tidak terjadi perpindahan ($\delta_3=0$)

Jika $u=u(x)$ adalah perpindahan pada penampang x_1 , maka perpindahan pada penampang $x+dx$ akan berupa $u+du$. Jelas bahwa elemen dx pada posisi baru ini telah berubah panjang sebesar du , dengan demikian regangan (strain) adalah du/dx . Dari hokum Hook diketahui bahwa

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P/A}{E} = \frac{P}{AE}$$

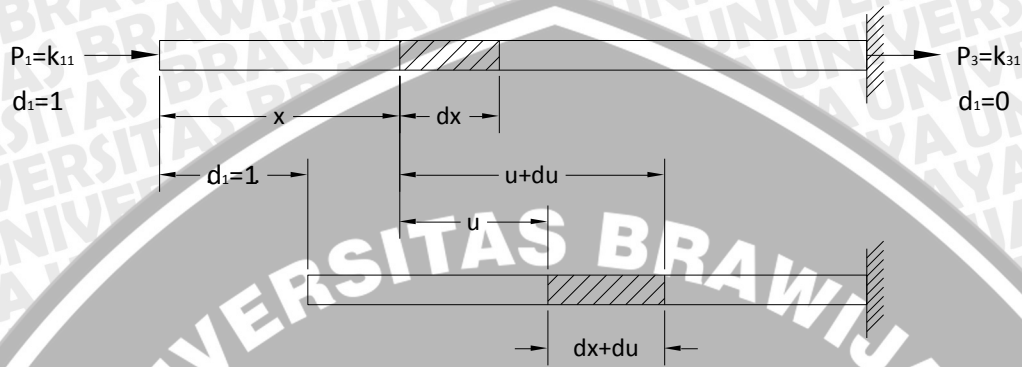
maka dapat ditulis

$$\frac{du}{dx} = \frac{P}{AE} \quad (2-51)$$

diintegrasikan terhadap x

$$\int \frac{du}{dx} \cdot dx = \int \frac{P}{AE} dx$$

$$u = \frac{P}{AE} x + C \quad (2-52)$$



Gambar 2.13 Perpindahan nodal pada sebuah elemen batang sebidang

Perpindahan titik nodal 1 ($\delta_1=1$) dari sebuah elemen batang dimana C adalah konstanta integrasi. Dengan syarat batas (*boundary condition*), $u = 1$ pada $x = 0$ dan $u=0$ pada $x = L$, kita dapatkan fungsi perpindahan terhadap x $u_1(x)$ yang sesuai dengan satu satuan perpindahan δ_1 sebagai

$$u_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \quad (2-53)$$

Dengan cara yang sama fungsi perpindahan $u_3(x)$ yang sesuai dengan satu satuan perpindahan $\delta_3 = 1$ adalah

$$u_3(x) = \frac{x}{L} \quad (2-54)$$

Kemudian digunakan prinsip kerja virtual dimana selama terjadinya perpindahan virtual, maka kerja dari gaya luar sama dengan kerja dari gaya dalam.

Tinjau batang pada gambar 2.14 yang dalam keadaan imbang $P_1 = k_{11}$ dan $P_3 = k_{31}$ pada kedua ujungnya. Kita anggap terjadi perpindahan virtual $\delta_3 = 1$

Gaya luar $P_3 = k_{31}$ melakuakan kerja

$$\text{Kerja} = \text{Gaya} \times \text{deformasi} \rightarrow W_E = k_{31} \cdot \delta_3 = k_{31} \quad (2-55)$$

Gaya dalam $P(x)$ pada setiap potongan x yang didapat dari persamaan (2-51) adalah

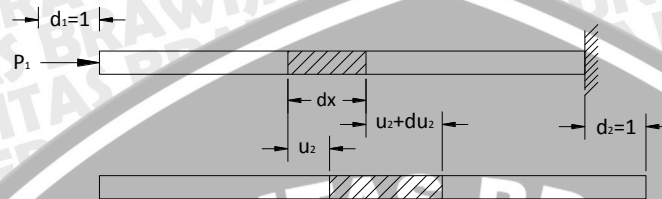
$$\frac{du}{dx} = \frac{P}{AE} \rightarrow P(x) = AE \frac{du}{dx} = AE u_1'(x) \quad (2-56)$$

Perpindahan relatif dari elemen dx selama terjadinya perpindahan virtual adalah

$$du_2 = \frac{du_2}{dx} dx = u_2'(x) dx \quad (2-57)$$

Maka kerja dalam untuk elemen dx didapat dari persamaan (2-56) dan (2-57) adalah

$$\text{Kerja} = \text{Gaya} \times \text{Deformasi} \rightarrow dW_I = AE u_1'(x) \cdot u_2'(x) dx \quad (2-58)$$



Gambar 2.14 Perpindahan pada titik nodal 2 ($\delta_2 = 1$) dari elemen batang yang dipengaruhi perpindahan aksial pada titik nodal 1 ($\delta_1 = 1$)

Dari persamaan kerja pada persamaan (2-58) untuk batang dengan panjang L

$$W_I = \int_0^L AE u_1'(x) \cdot u_2'(x) dx \quad (2-59)$$

Dengan menyamakan kerja dalam $W_I =$ kerja luar W_E dari persamaan (2-55) dan (2-59) didapat koefisien kekakuan

$$W_I = W_E$$

$$\int_0^L AE u_1'(x) \cdot u_2'(x) dx = k_{31}$$

Atau secara umum koefisien kekakuan untuk pengaruh aksial adalah

$$k_{ij} = \int_0^L AE u_i'(x) \cdot u_j'(x) dx \quad (2-60)$$

Persamaan di atas dapat digunakan untuk menentukan koefisien kekakuan batang tak seragam namun untuk batang seragam cukup dengan $k = AE/L$ (seperti pada pembahasan sebelumnya). Fungsi perpindahan terhadap tiap penampang (x) dan waktu (t) sebagai akibat perpindahan nodal dinamis $\delta_1(t)$ dan $\delta_3(t)$ akan didapat dengan cara superposisi menjadi

$$u(x, t) = u_1(x) \delta_1(t) + u_3(x) \delta_3(t) \quad (2-61)$$

Dimana $u_1(x)$ dan $u_3(x)$ diberikan oleh persamaan (2-53) dan (2-54)



Gambar 2.15 Perpindahan pada titik nodal 2 ($\delta_3 = 1$) dari sebuah elemen batang yang dipengaruhi percepatan aksial pada titik nodal 1 ($\ddot{\delta}_1(t) = 1$)

Kini kita tinjau gambar 2.30 yang dipengaruhi suatu satuan percepatan $\ddot{\delta}_1(t) = 1$ dari persamaan (2-61) didapat persamaan percepatan pada x sebagai berikut:

$$u(x,t) = u_1(x) \delta_1(t) + u_3(x) \delta_3(t) \rightarrow \ddot{u}(x,t) = \ddot{u}_1(x,t) + \ddot{u}_3(x,t)$$

$$\ddot{u}(x,t) = u_1(x) \ddot{\delta}_1(t) + u_3(x) \ddot{\delta}_3(t)$$

$$\ddot{u}_1(x,t) = u_1(x) \ddot{\delta}_1(t)$$

$$\text{karena } \ddot{\delta}_1(t) = 1, \text{ maka } \ddot{u}_1(x,t) = u_1(x) \tag{2-62}$$

Gaya inersia persatuan panjang sepanjang batang yang dihasilkan oleh satu satuan percepatan ini adalah

$$f_I = \bar{m}(x) \cdot u_1(x) \tag{2-63}$$

Dimana $\bar{m}(x)$ adalah massa persatuan panjang sepanjang batang.

Untuk menentukan koefisien massa m_{31} , kita memberikan satu perpindahan virtual $\delta_3=1$ pada batang seperti gambar 2.15.

Satu-satunya gaya luar yang melakukan kerja selama perpindahan virtual ini adalah reaksi m_{31} . Kerja ini adalah

$$W_E = m_{31} \cdot \delta_3$$

$$\text{Karena } \delta_3 = 1, \text{ maka } W_E = m_{31} \tag{2-64}$$

Kerja dalam persatuan panjang sepanjang balok dilakukan oleh gaya inersia f_I selama perpindahan virtual ini, yaitu:

$$dW_I = f_I(x) \cdot u_3(x)$$

atau dari persamaan (2-52) diperoleh

$$dW_I = \bar{m}(x) \cdot u_1(x) \cdot u_3(x) \tag{2-65}$$

Jadi kerja dalam total adalah

$$W_I = \int_0^L \bar{m}(x) \cdot u_1(x) \cdot u_3(x) dx \quad (2-66)$$

Dengan menyamakan kerja dalam $W_I =$ kerja luar W_E , diperoleh:

$$W_I = W_E$$

$$\int_0^L \bar{m}(x) \cdot u_1(x) \cdot u_3(x) dx = m_{31}$$

atau secara umum $m_{ij} = \int_0^L \bar{m}(x) \cdot u_i(x) \cdot u_j(x) dx \quad (2-67)$

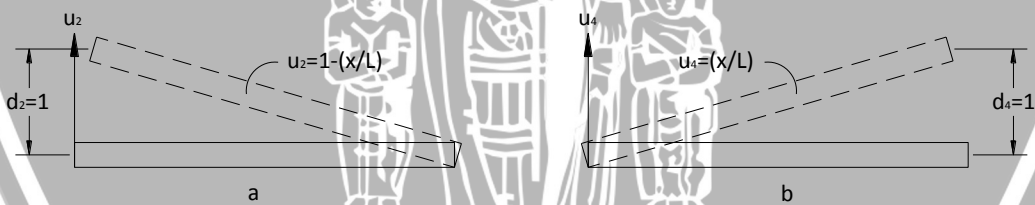
dari persamaan (2-53) dan (2-54), pada keadaan khusus yaitu pada keadaan balok seragam akan menghasilkan

$$m_{11} = \int_0^1 \bar{m} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 dx = \frac{\bar{m}L}{3} \quad (2-68)$$

$$m_{33} = \frac{\bar{m}L}{3}$$

dan $m_{13} = m_{31} = \int_0^1 \bar{m} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \left(\frac{x}{L}\right) dx = \frac{\bar{m}L}{6} \quad (2-69)$

2.5.2.1.2 Menentukan koefisien matriks massa dengan fungsi perpindahan melintang



Gambar 2.16 Fungsi perpindahan (a) untuk satu satuan perpindahan $\delta_2 = 1$
(b) untuk satu satuan perpindahan $\delta_4 = 1$

Mari tinjau gambar 2.16 Koefisien matriks ditentukan dengan cara menggunakan pernyataan untuk fungsi perpindahan statis dengan prinsip kerja virtual. Fungsi perpindahan sehubungan dengan satu satuan lendutan ($\delta = 1$) pada koordinat 2 dan 4 seperti yang dinyatakan pada gambar 2.16. Diberikan oleh

$$u_2 = 1 - \frac{x}{L} \quad (2-70)$$

dan $u_4 = \frac{x}{L} \quad (2-71)$

koefisien massa diberikan oleh pernyataan pada persamaan (2-67) yang diulangi di sini, yaitu:

$$m_{ij} = \int_0^L \bar{m}(x) \cdot u_i(x) \cdot u_j(x) dx$$

Untuk satu anggota struktur yang seragam dengan massa per satuan panjang ini, kita substitusikan persamaan (2-70) dan (2-71), menghasilkan:

$$\begin{aligned} m_{22} = m_{44} &= \int_0^L m(x) \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right) \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx = \int_0^L m(x) \cdot \left(1 - \frac{2x}{L} + \frac{x^2}{L^2}\right) dx \\ &= \bar{m} \left[x - \frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{3L^2} \right]_0^L = \bar{m} \left(L - L + \frac{L}{3} \right) \\ &= \frac{\bar{m}L}{3} \end{aligned} \quad (2-72)$$

$$\begin{aligned} m_{24} = m_{42} &= \int_0^L m(x) \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right) \left(\frac{x}{L}\right) dx \\ &= \int_0^L m(x) \cdot \left(\frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2}\right) dx = \bar{m} \left[\frac{x^2}{2L} - \frac{x^3}{3L^2} \right]_0^L = \bar{m} \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{3} \right) \\ &= \frac{\bar{m}L}{6} \end{aligned} \quad (2-73)$$

Akhirnya, kombinasi dari koefisien massa dari persamaan (2-68), (2-69), (2-70), dan (2-71) membentuk matriks massa yang menghubungkan gaya dan percepatan pada koordinat nodal untuk satu elemen struktur seragam dari elemen batang

$$\begin{aligned} P_1 &= m_{11} \cdot \ddot{\delta}_1 + m_{13} \cdot \ddot{\delta}_3 \\ P_2 &= m_{22} \cdot \ddot{\delta}_2 + m_{24} \cdot \ddot{\delta}_4 \\ P_3 &= m_{31} \cdot \ddot{\delta}_3 + m_{33} \cdot \ddot{\delta}_3 \\ P_4 &= m_{42} \cdot \ddot{\delta}_2 + m_{44} \cdot \ddot{\delta}_4 \end{aligned} \Rightarrow \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \frac{\bar{m}L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \\ \ddot{\delta}_3 \\ \ddot{\delta}_4 \end{Bmatrix} \quad (2-74)$$

2.5.3 Matriks Redaman Rangka Batang

Matriks redaman untuk suatu elemen batang seragam dari suatu struktur rangka didapat dengan cara sesuai dengan matriks kekakuan dan matriks massa. Koefisien redaman didefinisikan dengan cara seluruhnya sesuai dengan definisi koefisien kekakuan ataupun koefisien massa. Khususnya, koefisien redaman c_{ij} didefinisikan sebagai gaya yang terjadi pada koordinat i sebagai akibat satu kesatuan kecepatan pada j . Bila gaya redaman yang terdistribusi pada struktur dapat ditentukan, maka koefisien

redaman dari berbagai elemen struktur dapat digunakan untuk mendapatkan koefisien redaman yang sesuai untuk sistem. Sebagai contoh, redaman c_{ij} untuk sistem dapat mempunyai bentuk

$$c_{ij} = \int_0^L c(x) \psi_i(x) \psi_j(x) dx$$

dimana $c(x)$ menyatakan koefisien redaman terdistribusi per satuan panjang. Bila matriks redaman elemen dapat dihitung, maka matriks redaman untuk seluruh struktur dapat disusun dengan cara superposisi yang ekuivalen dengan cara penyusunan matriks kekakuan. Pada dasarnya, evaluasi sifat redaman $c(x)$ sulit dilaksanakan. Oleh sebab itu, redaman pada umumnya dinyatakan dalam besaran rasio yang didapat dengan cara eksperimental daripada evaluasi langsung matriks redaman dengan menggunakan

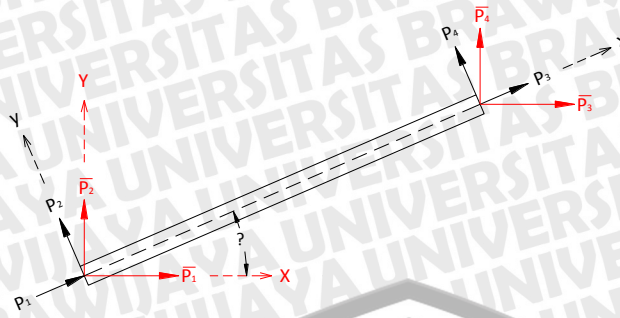
$$\text{persamaan } c_{ij} = \int_0^L c(x) \psi_i(x) \psi_j(x) dx.$$

Rasio redaman ini dievaluasi atau diperkirakan untuk setiap pola natural dari getaran. Jika diperlukan pernyataan matrik redaman $[C]$, dapat dihitung dari koefisien redaman relatif tertentu.

2.5.4 Matriks Transformasi

Matriks kekakuan dan matriks massa di pembahasan sebelumnya disusun dengan patokan koordinat nodal yang diefisienkan oleh sumbu-sumbu koordinat yang tetap pada elemen batang. Sumbu-sumbu ini disebut sumbu-sumbu local (*local axes*) atau sumbu-sumbu elemen (*element axes*) sedangkan sumbu-sumbu koordinat untuk seluruh struktur dikenal sebagai sumbu-sumbu umum (*global axes*) atau sumbu-sumbu sistem (*sistem axes*). Pada gambar 2.32 digambarkan sebuah elemen batang dengan gaya-gaya $P_1, P_2, P_3,$ dan P_4 sesuai sumbu koordinat lokal (*local coordinate axes*) x, y dan $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3,$ dan \bar{P}_4 sesuai sistem sumbu koordinat global (*global coordinate axes*) X, Y

Tujuannya adalah untuk mentransformasikan matriks-matriks elemen dari sistem sumbu koordinat lokal menjadi matriks-matriks pada sistem sumbu global.



Gambar 2.17 Sumbu koordinat lokal dan global pada rangka batang sebidang

Karena kedua kumpulan gaya-gaya ini adalah ekivalen maka akan kita dapatkan hubungan-hubungan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \bar{P}_1 \cos\theta + \bar{P}_2 \sin\theta \\
 P_2 &= -\bar{P}_1 \sin\theta + \bar{P}_2 \cos\theta \\
 P_3 &= \bar{P}_3 \cos\theta + \bar{P}_4 \sin\theta \\
 P_4 &= -\bar{P}_3 \sin\theta + \bar{P}_4 \cos\theta
 \end{aligned}$$

Maka dapat dibuat matriks

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \\ \bar{P}_4 \end{Bmatrix} \quad (2-75)$$

Atau

$$\{P\} = [T]\{\bar{P}\}$$

Dengan mengulangi prosedur yang sama, kita dapatkan hubungan antara perpindahan-perpindahan nodal ($\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$) pada koordinat lokal dengan komponen-komponen perpindahan nodal pada koordinat global ($\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2, \bar{\delta}_3, \bar{\delta}_4$), yaitu

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_1 \\ \bar{\delta}_2 \\ \bar{\delta}_3 \\ \bar{\delta}_4 \end{Bmatrix} \quad (2-76)$$

Atau

$$\{\delta\} = [T]\{\bar{\delta}\}$$

Dengan mensubstitusikan $\{P\}$ dari persamaan (2-75) dan $\{\delta\}$ dari persamaan (2-76) ke dalam persamaan kekakuan pada koordinat lokal $\{P\}=[K]\{\delta\}$, akan menghasilkan:

$$\{P\} = [K]\{\delta\}$$



$$\begin{aligned} [T]\{\bar{P}\} &= [K][T]\{\delta\} \\ \{\bar{P}\} &= [T]^{-1}[K][T]\{\delta\} \end{aligned} \quad (2-77)$$

Dimana $[T]^{-1}$ adalah invers dari matriks $[T]$, matriks transformasi $[T]$ ini merupakan matriks ortogonal dimana $[T]^{-1} = [T]^T$

Jadi dapat dituliskan:

$$\{\bar{P}\} = [T]^T [K][T]\{\delta\} \quad (2-78)$$

Dengan mengulangi prosedur yang sama akan didapatkan matriks massa

$$\{\bar{P}\} = [\bar{M}]\{\ddot{\delta}\} \quad (2-79)$$

Dimana

$$[\bar{M}] = [T]^T [M][T]$$

Setelah semua matriks elemen diubah ke sumbu koordinat global, kemudian disusun matriks kekakuan dan matriks massa global yang memuat keseluruhan elemen struktur rangka batang, dan kemudian dipartisi sesuai dengan syarat batas (*boundary condition*) tumpuan struktur rangka tersebut untuk perhitungan lebih lanjut yaitu menentukan frekuensi alami, pola normal gerak sistem, dan gaya-gaya batang akibat beban dinamis.

2.5.5 Frekuensi Natural dan Frekuensi Tereadam Struktur Rangka Batang

Setiap struktur memiliki frekuensi natural akibat getaran bebas sebelum dibebani. Frekuensi natural diperoleh dari suatu persamaan diferensial gerak (*Differential Equation of Motion*) sebagai berikut

$$m\ddot{u} + ku = P(t)$$

Karena getaran bebas $P(t) = 0$ sehingga

$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad (2-80)$$

Misal solusi respon untuk persamaan ini adalah

$$u(t) = a \sin \omega t \quad (2-81)$$

Penurunan dari solusi respon tersebut memberikan persamaan kecepatan dan percepatan gerak sebagai berikut:

$$\text{Kecepatan } \dot{u}(t) = a\omega \cos \omega t \quad (2-82)$$

$$\text{Percepatan } \ddot{u}(t) = -a\omega^2 \sin \omega t \quad (2-83)$$

Jika persamaan (2-81) dan (2-83) disubstitusikan ke persamaan (2-80) didapat:

$$\begin{aligned} m\ddot{u} + ku &= 0 \\ m(-a\omega^2 \sin \omega t) + k(a \sin \omega t) &= 0 \\ (-ma\omega^2 + k)(\sin \omega t) &= 0 \end{aligned}$$

Dimana $(\sin \omega t) \neq 0$
sehingga $(-ma\omega^2 + k) = 0$

maka
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2-84}$$

jadi frekuensi natural suatu struktur ω_n adalah $\sqrt{\frac{k}{m}}$

sehubungan dengan matriks massa dan matriks kekakuan pada struktur rangka batang, persamaan gerak dinamis rangka batang dapat ditulis:

$$[\bar{M}]\{\ddot{u}\} + [\bar{K}]\{u\} = \{0\} \tag{2-85}$$

Dengan menganggap solusi harmonis $\{y\} = \{a\} \sin \omega t$, maka akan didapatkan

$$([\bar{K}] - \omega^2[\bar{M}])\{a\} = \{0\} \tag{2-86}$$

Dimana diperlukan untuk solusi non-trivial determinan

$$[\bar{K}] - \omega^2[\bar{M}]\{a\} = \{0\} \tag{2-87}$$

Maka akan didapatkan nilai frekuensi natural ω_n sebagai akar dari persamaan determinan.

Pada sistem struktur teredam, terdapat frekuensi teredam yang besarnya berdasarkan rasio redaman (ζ) seperti pada sistem SDOF persamaan (2.21) dimana

$$\omega_D = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

2.5.6 Pola Normal sebagai Solusi Non-trivial dari Eigen Problem dan Perpindahan Titik Koordinat Nodal

Dari persamaan (2-87) diketahui bahwa $([\bar{K}] - \omega^2[\bar{M}])\{a\} = \{0\}$. Dengan mensubstitusi nilai frekuensi alami ω_n ke persamaan matriks di atas dan menentukan $a_{ij} = 1$, kita dapatkan pola perubahan bentuk sebagai:



$$\{a_j\} = \begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{ii} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ \dots \\ \dots \\ \vdots \\ \vdots \\ dst \end{Bmatrix} \quad (2-88)$$

Kemudian pola perubahan bentuk tersebut harus dinormalkan dengan nilai faktor dari hasil perhitungan berikut:

$$\text{faktor penormal} = \sqrt{\{a_i\}^T [M] \{a_i\}} \quad (2-89)$$

Eigenvector yang dinormalkan (ϕ) adalah

$$\phi = \frac{1}{\text{faktor penormal}} \{a\} \quad (2-90)$$

Sehingga didapat matriks dari *eigenvector*

$$\{\phi_j\} = \begin{Bmatrix} \phi_{1j} \\ \phi_{2j} \\ \phi_{3j} \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_{ij} \end{Bmatrix} \quad (2-91)$$

Lalu dengan cara yang sama kita masukkan nilai-nilai ω_n yang lain, untuk mendapatkan pola-pola yang lain, seperti:

$$\{\phi_2\} = \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \\ \phi_{32} \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_{i2} \end{Bmatrix} \quad \{\phi_3\} = \begin{Bmatrix} \phi_{13} \\ \phi_{23} \\ \phi_{33} \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_{i3} \end{Bmatrix} \quad \text{dan seterusnya}$$

Dari vektor-vektor ini kita dapatkan matriks pola



$$\{\phi_2\} = \begin{Bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \dots & \phi_{1j} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \dots & \phi_{2j} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} & \dots & \phi_{3j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{i1} & \phi_{i2} & \phi_{i3} & \dots & \phi_{ij} \end{Bmatrix} \quad (2-92)$$

Kemudian matriks pola inilah yang membentuk pola respon akibat suatu beban pada koordinat-koordinat nodal rangka batang.

Persamaan pola memiliki bentuk sebagai berikut:

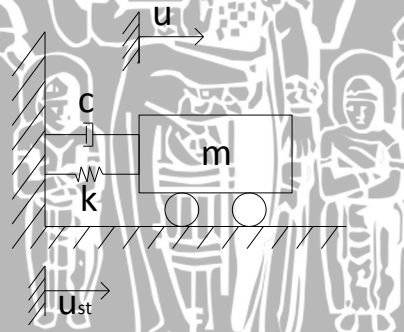
$$\ddot{y}_i + \omega_i^2 y_i = P_i \quad (2-93)$$

Dimana $P_i = \sum \phi_{ij} \cdot F_j$ (2-94)

Fj adalah besar gaya beban yang terjadi pada tiap nodal j

2.5.7 Pembebanan Struktur

Beban F(t) yang akan dianalisis adalah beban gempa akibat pergerakan tanah sebagaimana terlihat pada gambar 2.18 berikut:



Gambar 2.18 model matematis struktur akibat pergerakan tanah U_{st}

$$u_{total} = u_{relative} + u_{st}$$

$$m\ddot{u}_{total} + c\dot{u}_{relative} + k u_{relative} = 0$$

$$m(\ddot{u}_{relative} + \ddot{u}_{st}) + c\dot{u}_{relative} + k u_{relative} = 0$$

$$m\ddot{u}_{relative} + c\dot{u}_{relative} + k u_{relative} = -m\ddot{u}_{st}$$

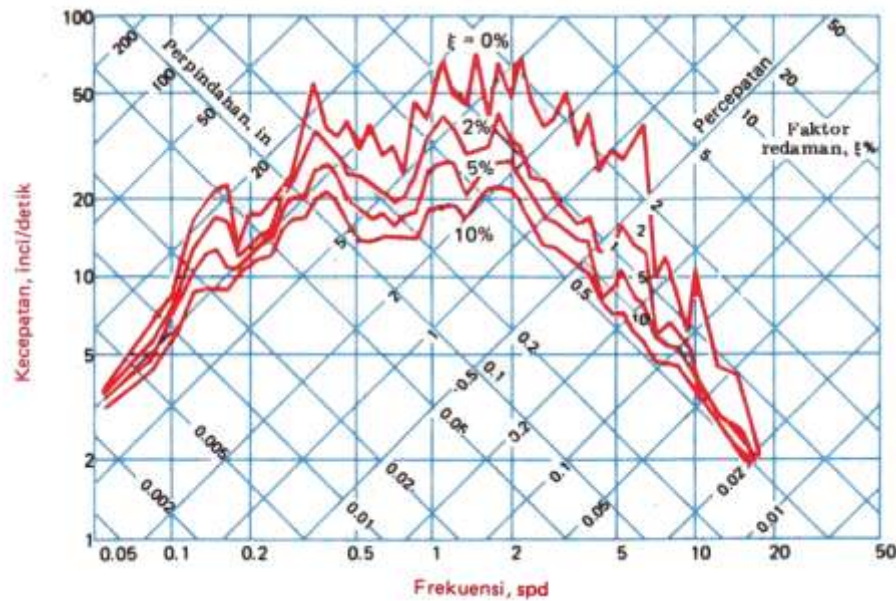
dimana $u = u_{relatif}$ (perpindahan relatif)

Maka beban gempa

$$F(t) = -m.\ddot{u}_{st} \quad (2-95)$$

Percepatan gerakan tanah didapatkan pada grafik *Respon Spektra* el-Centro 1940 berdasarkan frekuensi alami struktur dan rasio redaman pada struktur.





Gambar 2.19 Spektrum respon sistem elastis untuk Gempa El Centro 1940

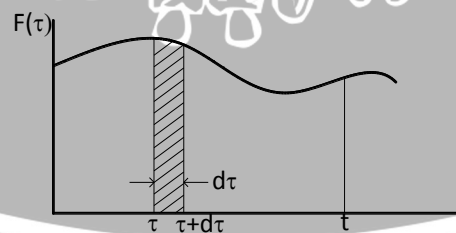
Sehingga akan didapatkan beban pada struktur. Untuk sistem MDOF beban tiap derajat kebebasan dituliskan dalam bentuk matrik sebagai berikut:

$$\{F\} = \{m\}\ddot{u}_s$$

2.5.8 Respon Struktur

Pada perhitungan analisis ini, beban dinamis yang terjadi dianggap sebagai beban impuls yang berlangsung dalam selang waktu yang singkat. Dimana impuls ini bekerja pada massa m yang ditentukan berdasarkan Hukum Newton:

$$m \frac{dv}{d\tau} = F(\tau) \tag{2-96}$$



Gambar 2.20 Fungsi gaya impuls umum

Dimana $F(\tau) d\tau$ adalah dan dv adalah pertambahan kecepatan. Pertambahan kecepatan ini dapat diambil sebagai kecepatan awal dari suatu massa pada waktu τ . Dan dapat ditulis sebagai berikut:

$$dv = \frac{F(\tau)d\tau}{m} \tag{2-97}$$

Untuk menentukan respon pola sistem struktur teredam akibat beban impuls ini, disubstitusikan persamaan (2-97) sebagai kecepatan awal (\dot{u}_0) pada persamaan (2-24)

$$u(t) = e^{(-\zeta \omega_n)t} \left[u_0 \cos \omega_D t + \frac{\dot{u}_0 + \zeta \omega_n u_0}{\omega_D} \sin \omega_D t \right] \text{ dengan asumsi perpindahan awal } (u_0) = 0$$

Maka didapat
$$du(t) = e^{-\zeta \omega_n(t-\tau)} \left[\frac{F(\tau)d\tau}{m \omega_D} \sin \omega_D(t-\tau) \right]$$

Dengan menggunakan integral Duhamel didapatkan persamaan rumus respon:

$$u(t) = \frac{1}{m \omega_D} \int_0^t F(\tau) \sin \omega_D(t-\tau) e^{-\zeta \omega_n(t-\tau)} d\tau \tag{2-98}$$

Beban $F(\tau)$ yang didapatkan dari perkalian massa dan percepatan gerakan tanah dari grafik respon spektra merupakan beban statik ekuivalen yang dapat dianggap sebagai gaya konstan pada tiap derajat kebebasan struktur F_i .

Kemudian hubungannya dengan gaya modal dan respon pola pada tiap derajat kebebasan adalah $\{P_i\} = [\phi]\{F_i\}$ dan $\{u\} = [\phi]\{y\}$. Sehingga pada pengintegralan Duhamel pada persamaan (2-98) didapat solusi respon pola:

$$y_i = \frac{1}{m \omega_D} \int_0^t P(\tau) \sin \omega_D(t-\tau) e^{-\zeta \omega_n(t-\tau)} d\tau \quad \text{karena } P(\tau) \text{ dianggap konstan, maka:}$$

$$y_i = \frac{P_i}{\omega_D (\zeta \omega_n)^2 + \omega_D} \left[1 - (\zeta \omega_n \sin \omega_D t + \cos \omega_D t) e^{-\zeta \omega_n t} \right] \tag{2-99}$$

Dengan mensubstitusikan nilai P_i , ω_n dan ω_D akan menghasilkan persamaan-persamaan y_i yang akan digunakan untuk menentukan perpindahan tiap nodal, dimana perpindahan nodal didapat dari:

$$\{u\} = [\phi]\{y\}$$

BAB II 4

2.1	TINJAUAN UMUM	4
2.2	BEBAN DINAMIS	6
2.3	DASAR PERENCANAAN BANGUNAN TERHADAP GEMPA.....	6
2.3.1	<i>Persamaan gerak</i>	7
2.3.2	<i>Kegunaan Response Spectra untuk Perencanaan Struktur</i>	15
2.3.3	<i>Superposisi Mode</i>	15
2.4	ELEMEN HINGGA PADA RANGKA BATANG	20
2.5	METODE ANALISIS DINAMIS STRUKTUR RANGKA BATANG	20
2.5.1	<i>Matriks Kekakuan Rangka Batang</i>	21
2.5.2	<i>Matriks Massa Rangka Batang</i>	22
2.5.3	<i>Matriks Redaman Rangka Batang</i>	27
2.5.4	<i>Matriks Transformasi</i>	28
2.5.5	<i>Frekuensi Natural dan Frekuensi Tereadam Struktur Rangka Batang</i>	30
2.5.6	<i>Pola Normal sebagai Solusi Non-trivial dari Eigen Problem dan Perpindahan Titik Koordinat Nodal</i>	31
2.5.7	<i>Pembebanan Struktur</i>	33
2.5.8	<i>Respon Struktur</i>	34

