

**DANA PENSIUN IURAN PASTI
DENGAN PENDAPATAN DETERMINISTIK
DAN RISIKO KEMATIAN MENGGUNAKAN *MULTI-PERIOD*
MEAN-VARIAN**

TESIS

**Untuk Memenuhi Persyaratan
Memperoleh Gelar Magister dalam Bidang Matematika**



Oleh

**INTAN FADHILAH
NIM. 156090400011002**

**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
BIDANG MINAT MATEMATIKA INDUSTRI**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2018**

TESIS

**DANA Pensiun Iuran Pasti
dengan Pendapatan Deterministik
dan Risiko Kematian Menggunakan *Multi-Period*
Mean-Varian**

Oleh:

**INTAN FADHILAH
NIM. 156090400011002**

Telah dipertahankan di depan Komisi Penguji
pada tanggal 3 Januari 2018
dan dinyatakan **LULUS**

Menyetujui,
Komisi Pembimbing

Ketua

Anggota

Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si.
NIP. 197312162002122001

Drs. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc., Ph.D.
NIP. 196709071992031001

Mengetahui:
Ketua Program Studi Magister Matematika

Dr. Noor Hidayat, M.Si.
NIP. 196112041988021001

IDENTITAS TIM PENGUJI

Judul Tesis : **DANA PENSIUN IURAN PASTI DENGAN PENDAPATAN DETERMINISTIK DAN RISIKO KEMATIAN MENGGUNAKAN *MULTI-PERIOD* MEAN-VARIAN**

Nama : Intan Fadhilah

NIM : 156090400011002

Program Studi : Magister Matematika

Bidang Minat : MATEMATIKA INDUSTRI

KOMISI PEMBIMBING

Ketua : Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si.

Anggota : Drs. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc., Ph.D.

TIM DOSEN PENGUJI

Dosen Penguji 1 : Nur Shofianah, S.Si., M.Si., Ph.D.

Dosen Penguji 2 : Dr. Noor Hidayat, M.Si.

Tanggal Ujian : 3 Januari 2018

SK. Penguji :

PERNYATAAN ORISINALITAS

Saya menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa sepanjang pengetahuan saya, di dalam naskah tesis ini tidak terdapat karya ilmiah yang pernah diajukan oleh orang lain untuk memperoleh gelar akademik di suatu perguruan tinggi dan tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan sumber kutipan dan daftar pustaka.

Apabila ternyata di dalam naskah tesis ini dapat dibuktikan terdapat unsur-unsur plagiasi, saya bersedia diproses sesuai dengan peraturan perundang-undangan yang berlaku dan tesis dibatalkan.

Malang, 3 Januari 2018

Intan Fadhilah
NIM. 156090400011002

RIWAYAT HIDUP PENULIS

Penulis bernama lengkap Intan Fadhilah lahir pada tanggal 21 November 1990 di Malang, Jawa Timur. Penulis merupakan anak dari Alm. Bapak Miseri dan Ibu Siti Fatimah. Penulis menyelesaikan pendidikan di MI Raudlatul Falah Talok Kabupaten Malang pada tahun 2003, MTsN Turen pada tahun 2006 dan MAN 1 Malang pada tahun 2009. Selanjutnya pada tahun 2010 penulis melanjutkan studi S1 Pendidikan Matematika di Fakultas Tarbiyah Universitas Islam Negeri Sunan Ampel Surabaya dan lulus pada tahun 2015. Pengalaman kerja sebagai tenaga pendidik di yayasan Al-Hasyim Malang sejak tahun 2015. Kemudian menempuh studi Magister Matematika di Fakultas MIPA Universitas Brawijaya.

RINGKASAN

INTAN FADHILAH, Program Studi Magister Matematika Universitas Brawijaya, 3 Januari 2018. Dana Pensiun Iuran Pasti dengan Pendapatan Deterministik dan Risiko Kematian Menggunakan *Multi-Period Mean-Varian*; Ketua Komisi Pembimbing: Isnani Darti, Anggota: Abdul Rouf Alghofari.

Secara mendasar, program dana pensiun dibagi menjadi dua macam, yaitu program dana pensiun manfaat pasti dan program dana pensiun iuran pasti. Berbeda dengan program dana pensiun manfaat pasti, program dana pensiun iuran pasti membutuhkan pengawasan yang lebih terhadap manajemennya. Manajemen pengalokasian aset adalah salah satu permasalahan yang harus diwaspadai karena berhubungan dengan risiko yang ditanggung oleh anggota dana pensiun. Pengalokasian aset dalam penelitian ini difokuskan pada pendapatan deterministik dan risiko kematian. Model yang digunakan dalam permasalahan adalah model *multi-period mean-varian*. Hasil analitik untuk strategi investasi efisien dan batasan efisien diperoleh dengan menggunakan metode pengali Lagrange, transformasi variabel *state* dan kontrol optimal stokastik. Simulasi numerik disajikan untuk mengilustrasikan hasil analisis. Pada simulasi dimana prosentase iuran (c_k) dan intensitas kematian ($\beta(s)$) lebih besar 0 menunjukkan bahwa semakin besar prosentase iuran yang diberikan, semakin besar ekspektasi dari kekayaan dana pensiun dan risiko yang ditanggung, sedangkan ketika intensitas kematian semakin tinggi, ekspektasi dari kekayaan yang didapatkan semakin rendah dengan risiko yang semakin tinggi. Pada simulasi dimana $c_k = 0$ dan $\beta(s) > 0$ diperoleh bahwa semakin besar intensitas kematian, ekspektasi kekayaan terakhir dan risiko yang ditanggung semakin kecil. Pada simulasi dimana $\beta(s) = 0$ dan $c_k > 0$ diperoleh semakin besar prosentase iuran, semakin besar pula ekspektasi kekayaan terakhir dan risiko yang ditanggung. Pada keseluruhan simulasi menunjukkan bahwa semakin besar prosentase iuran maupun intensitas kematian, semakin besar pula jumlahan yang diinvestasikan untuk aset ke-1 dan untuk aset lebih dari 1 semakin kecil dan jika bernilai negatif berarti dilakukan pengembalian investasi.

Kata Kunci: Program dana pensiun, model *multi-period mean-varian*, pendapatan deterministik, risiko kematian, pengali Lagrange.

SUMMARY

INTAN FADHILAH, Mathematics Master Study Program Brawijaya University, 3 January 2018. *Defined Contribution Fund with Deterministic Income and Mortality Risk by Applying Multi-Period Mean-Variance*. Supervisor: Isnani Darti, Co-supervisor: Abdul Rouf Alghofari.

Basically, the pension fund is divided into two types, namely the defined benefit (DB) pension fund and the defined contribution (DC) pension fund. Unlike DB pension fund, DC pension fund require more attention for its management. Asset allocation management of DC pension fund is one of the problem to watch out for because it relates to the risk that borne by the pension fund members. The asset allocation in this study focused on deterministic income and mortality risk. The model used in the problem is the multi-period mean-variance model. Analytical results for efficient-investment strategy and efficient-frontier are obtained by applying Lagrange multiplier method, state-variable transformation and stochastic optimal control. Numerical simulations are presented to illustrate the analytical results. The simulation with the percentage contribution (c_k) and mortality intensity ($\beta(s)$) greater than 0 shows that when the percentage of contributions higher, the expectations of the pension fund wealth become greater and the risks as well, when the intensity mortality higher, the expectations of the pension fund wealth become lower and the risk become higher. The simulation with $c_k = 0$ and $\beta(s) > 0$ found that when the mortality intensity higher, the expectations of the pension fund wealth become higher and the risk become lower. The simulation with $\beta(s) = 0$ and $c_k > 0$ shows that when the contributions percentage greater, the expectations of the pension fund wealth become higher and the risks as well. All simulations note that when the contributions percentage and the mortality intensity higher, the invested amount for the first asset become larger, while the assets over 1 become smaller and if the value are negative, the investment will be returned.

Key Words: *Pension fund, multi-period mean-variance model, deterministic income, mortality risk, Lagrange multiplier.*

KATA PENGANTAR

Puja dan segala puji senantiasa penulis panjatkan kehadirat Allah SWT atas segala rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis yang berjudul "Dana Pensiun Iuran Pasti dengan Pendapat-an Deterministik dan Risiko Kematian Menggunakan *Multi-Period Mean-Varian*" dengan lancar. Penulis menyadari bahwa selama proses penyusunan tesis ada banyak pihak yang telah berkontribusi. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas segala bantuan dan dukungan kepada:

1. Ibu Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si. dan Bapak Drs. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc., Ph.D. selaku dosen pembimbing yang telah memberikan nasihat, saran, kritik yang sangat bermanfaat untuk penulis dan selalu sabar dalam menjelaskan materi kepada penulis selama proses penyusunan hingga tesis ini dapat diselesaikan.
2. Ibu Nur Shofianah, S.Si., M.Si., Ph.D. dan Bapak Dr. Noor Hidayat, M.Si. selaku dosen penguji I dan dosen penguji II yang telah memberikan saran dan kritik kepada penulis sehingga tesis ini menjadi lebih baik.
3. Bapak Dr. Noor Hidayat, M.Si. selaku Ketua Program Studi Magister Matematika dan Bapak/ Ibu dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada penulis, serta segenap staf MIPA atas segala bantuan yang telah diberikan.
4. Alm. Bapak Miseri (Ayah), Ibu Siti Fatimah (Ibu) dan Mas Nova Erwinsyah (Kakak), serta seluruh keluarga besar yang selalu memberikan dukungan dan senantiasa memanjatkan doa dan mendukung setiap langkah yang diambil penulis selama ini.

5. Zulaikha, Rio, Indra, Mimi, Tya, Tyas, Badria dan seluruh teman-teman Program Studi Magister Matematika atas semangat dan bantuan yang telah diberikan serta kebersamaannya selama ini.
6. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Allah senantiasa memberikan anugerah, rahmat dan barokahnya kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan tesis ini. Penulis menyadari bahwa dalam penulisan tesis ini masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan hati penulis mengharapkan kritik dan saran yang dapat disampaikan melalui email hikaryintan@gmail.com.

Semoga tesis ini dapat bermanfaat bagi berbagai pihak, serta menjadi sumber inspirasi untuk penulisan selanjutnya.

Malang, 3 Januari 2018

Intan Fadhilah
NIM. 156090400011002

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	ii
IDENTITAS TIM PENGUJI	iii
PERNYATAAN ORISINALITAS	iv
RIWAYAT HIDUP PENULIS	v
RINGKASAN	vi
SUMMARY	vii
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR SIMBOL	xiii
DAFTAR KOMUTASI	xiv
DAFTAR LAMPIRAN	xv
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan	4
1.4 Batasan Masalah	5
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	6
2.1 Aset	6
2.2 Model Mean-Varian	7
2.3 Dana Pensiun	7
2.4 Klasifikasi Dana Pensiun	8
2.5 Pendapatan	9
2.6 Model Persamaan Simultan	10
2.7 Peluang Suatu Kejadian	11
2.8 Peluang Hidup Anggota Dana Pensiun	12
2.9 Fungsi Massa Peluang (FMP)	12
2.10 Fungsi Distribusi Kumulatif	13
2.11 Fungsi Kehidupan	13
2.12 Ekspektasi	14
2.13 Varian	14
2.14 Hukum Total Peluang	15
2.15 Sistem Dinamik	16
2.16 Persamaan Bellman	16
2.17 Kontrol Optimal Stokastik	17
2.18 Pengali Lagrange	18
2.19 Asumsi, Lemma dan Proposisi yang Digunakan dalam Penelitian	20
2.20 Model Dana Pensiun Iuran Pasti dengan Pendapatan Stokastik dan Risiko Kematian	21

2.21 Model Konsumsi Optimal Berdasarkan Pendapatan Deterministik	23
BAB III KERANGKA KONSEP PENELITIAN	24
BAB IV METODE PENELITIAN	26
BAB V HASIL DAN PEMBAHASAN	29
5.1 Gaji Pendapatan pada Waktu $k + 1$	30
5.2 Kekayaan Dana Pensiun Setelah Iuran pada Waktu k	30
5.3 Kekayaan Dana Pensiun Setelah Iuran pada Waktu $k + 1$	31
5.4 Peluang Hidup Anggota Dana Pensiun	33
5.5 Model <i>Multi-Period</i> Mean-Varian	34
5.6 Strategi Investasi Efisien dan Batasan Efisien	48
5.7 Simulasi Numerik	50
5.7.1 Simulasi I dengan $c_k > 0$ dan $\beta(s) > 0$	51
5.7.2 Simulasi II ($c_k = 0$ dan $\beta(s) > 0$)	55
5.7.3 Simulasi III ($c_k > 0$ dan $\beta(s) = 0$)	59
BAB VI PENUTUP	63
6.1 Kesimpulan	63
6.2 Saran	64
DAFTAR PUSTAKA	65
LAMPIRAN	67

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1 Pembagian dari Ruang Sampel S	15
Gambar 3.1 Kerangka Konsep Penelitian	25
Gambar 4.1 Diagram Alir Metode Penelitian	28
Gambar 5.1 Simulasi I untuk Nilai c_k yang Berbeda	52
Gambar 5.2 Simulasi I untuk Nilai $\beta(s)$ yang Berbeda	54
Gambar 5.3 Simulasi II untuk Nilai $\beta(s)$ yang Berbeda	58
Gambar 5.4 Simulasi III untuk Nilai c_k yang Berbeda	61

DAFTAR SIMBOL

$\beta(s)$: Intensitas kematian
c_k	: Prosentase iuran dari gaji pokok pada waktu k
d	: Ekspektasi kekayaan terakhir
e_k	: Pengembalian-pengembalian acak aset-aset keuangan selama periode ke $-k$
e_k^i	: Pengembalian acak dari aset ke $-i$ selama periode ke $-k$
$\mathbb{E}[\cdot]$: Operator ekspektasi
p_k	: Fungsi massa peluang dari waktu akhir sebenarnya anggota dana pensiun
P_k^t	: Rata-rata pengembalian-pengembalian aset-aset keuangan selama periode ke $-k$
q	: Tingkat pertumbuhan deterministik dari gaji pendapatan
$S(k)$: Peluang hidup dari anggota dana pensiun
T	: Waktu pensiun anggota
T^τ	: Waktu akhir sebenarnya
τ	: Masa hidup (waktu kematian) anggota
Θ_0	: Koleksi dari semua strategi yang diterima mulai waktu 0
u^*	: Strategi investasi efisien
u_k^i	: Jumlah yang diinvestasikan dalam aset ke $-i$ selama periode ke $-k$
$Var[\cdot]$: Operator varian
x_k	: Kekayaan dana pensiun sebelum iuran waktu k
y_k	: Gaji pendapatan yang diperoleh pada waktu k
z_k	: Kekayaan dana pensiun setelah iuran waktu k

DAFTAR KOMUTASI

$$A_k = \mathbb{E}[(e_k^0)^2] - \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[e_k^0 P_k]$$

$$B_k = q^2 - q^2 \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k]$$

$$C_k = q \mathbb{E}[e_k^0] - q \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k]$$

$$d = \mathbb{E}[x_{T\tau}]$$

$$D_k = \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k]$$

$$e_k = \begin{pmatrix} e_k^0 \\ e_k^1 \\ \vdots \\ e_k^n \end{pmatrix}$$

$$J_k = \mathbb{E}[e_k^0] - \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k]$$

$$M_k = q - q \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k]$$

$$P_k = \begin{pmatrix} e_k^1 - e_k^0 \\ e_k^2 - e_k^0 \\ \vdots \\ e_k^n - e_k^0 \end{pmatrix}$$

$$S(k) = e^{\int_0^k \beta(s)}$$

$$u_k = \begin{pmatrix} u_k^1 \\ u_k^2 \\ \vdots \\ u_k^n \end{pmatrix}$$

$$u^* = \{u_k^*, k = 0, 1, \dots, T-1\}$$

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	Pengonversian Persamaan Bellman (5.18) Menjadi Persamaan (5.32) untuk Fungsi k	67
Lampiran 2	Pensubstitusian Persamaan (5.33) ke dalam Persamaan (5.32)	69
Lampiran 3	Penyederhanaan Persamaan (5.34) dengan Persamaan (5.25)	73
Lampiran 4	Penyederhanaan Hasil pada Lampiran 3 dengan Persamaan (5.19)-(5.24)	79
Lampiran 5	Perhitungan Varian Minimum Persamaan (5.41)	84
Lampiran 6	<i>Listing</i> Program Simulasi I	86
Lampiran 7	<i>Listing</i> Program Simulasi II	90
Lampiran 8	<i>Listing</i> Program Simulasi III	94
Lampiran 9	Batasan Efisien Hasil Simulasi I saat $\beta(s) = 0.1$ dengan Tiga Nilai c_k Berbeda	98
Lampiran 10	Batasan Efisien Hasil Simulasi I saat $c_k = 0.4$ dengan Tiga Nilai $\beta(s)$ Berbeda	99
Lampiran 11	Batasan Efisien Hasil Simulasi II dengan Tiga Nilai $\beta(s)$ Berbeda	100
Lampiran 12	Batasan Efisien Hasil Simulasi III dengan Tiga Nilai c_k Berbeda	101
Lampiran 13	Strategi Investasi Efisien Hasil Simulasi I saat $\beta(s)$ bernilai 0.1 dengan Tiga Nilai c_k Berbeda	102
Lampiran 14	Strategi Investasi Efisien Hasil Simulasi I saat $c_k = 0.4$ dengan Tiga Nilai $\beta(s)$ Berbeda	104
Lampiran 15	Strategi Investasi Efisien Hasil Simulasi II saat $c_k = 0$ dengan Tiga Nilai $\beta(s)$ Berbeda	106
Lampiran 16	Strategi Investasi Efisien Hasil Simulasi III saat $\beta(s)$ bernilai 0 dengan Tiga Nilai c_k Berbeda	108
Lampiran 17	Sertifikat Bebas Plagiasi	110

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Asuransi dana pensiun merupakan salah satu dari beberapa bentuk upaya perencanaan usia senja. Adapun tujuan dari dana pensiun yang diselenggarakan adalah untuk menjamin kesejahteraan kehidupan seorang individu agar memiliki kehidupan yang terjamin ketika memasuki masa pensiun. Masa pensiun adalah masa dimana seseorang menghadapi penurunan produktivitas dan penurunan kesehatan. Karena alasan inilah, keberadaan asuransi dana pensiun sangatlah dibutuhkan untuk menunjang kehidupan ketika seseorang menghadapi penurunan produktivitas dan kesehatan.

Secara umum terdapat dua tipe dana pensiun, yaitu dana pensiun manfaat pasti dan dana pensiun iuran pasti (Winklevoss, 1976). Dana pensiun manfaat pasti adalah dana pensiun yang mempunyai jumlah manfaat yang ditentukan (Winklevoss, 1976). Manfaat ini ditentukan di muka oleh penanggung dan iuran juga ditetapkan serta disesuaikan dengan manfaat untuk memastikan iuran dan manfaat berada dalam keadaan yang seimbang. Sedangkan dana pensiun iuran pasti merupakan dana pensiun dengan iuran yang ditetapkan dan disisihkan setiap periodenya. Untuk manfaatnya tergantung skala akumulasi dan pengembalian investasi (Yao, dkk., 2014).

Awal mulanya, dana pensiun manfaat pasti lebih disukai oleh pegawai karena pada praktiknya dana pensiun manfaat pasti memiliki risiko yang ditanggung oleh pihak penanggung dan juga memiliki manajemen yang

tidak rumit jika dibandingkan dengan dana pensiun iuran pasti (Yao, dkk., 2014). Akan tetapi karena permasalahan *population aging* yaitu keadaan dimana penduduk usia non-produktif semakin bertambah dan risiko umur panjang yang mengakibatkan seorang pensiunan berpotensi kehabisan dana pensiunnya, dana pensiun iuran pasti semakin banyak diminati (Yao, dkk., 2014). Hal ini disebabkan karena dana pensiun iuran pasti sangat cocok digunakan untuk investasi jangka panjang dengan alasan investasinya relatif memberikan hasil yang cukup baik (Mas'ud dan Prastiwi, 2004).

Banyak negara mengubah seutuhnya atau beberapa skema dana pensiun manfaat pasti menjadi dana pensiun iuran pasti (Yao, dkk., 2014). Sebagai contoh, di Indonesia program dana pensiun yang dikelola oleh swasta banyak yang menggunakan prinsip dana pensiun iuran pasti, seperti badan pengelola Jamsostek dan Dana Pensiun (Nelli, 2010). Dikarenakan banyak negara yang menggunakan dana pensiun iuran pasti, penelitian mengenai dana pensiun iuran pasti ini banyak dilakukan.

Vigna (2011) meneliti tentang manajemen-manajemen investasi dana pensiun iuran pasti *multi-period* selama fase akumulasi dan mendapatkan strategi investasi optimal melalui program dinamik. Blake, dkk. (2013) meneliti mengenai pengalokasian aset secara optimal yang diterapkan pada dana pensiun iuran pasti. Yao, dkk. (2014) meneliti mengenai pengalokasian aset untuk dana pensiun iuran pasti dengan menggunakan model *multi-period* mean-varian dan menggabungkan pendapatan stokastik dan risiko kematian ke dalam model. Model mean-varian yang ditemukan oleh Harry Markowitz ini merupakan model yang pertama kali digunakan untuk menemukan keseimbangan antara *return* dan risiko dengan meminimumkan risiko dan memaksimalkan *return* (Markowitz, 1952). Varian pada model ini didasarkan pada periode, baik periode tunggal ataupun *multi-period*. Periode tunggal hanya mempertimbangkan satu periode iuran, sedangkan

multi-period memperhitungkan setiap kali periode iuran dengan memper-
timbangkan kekayaan sebelum dan kekayaan sesudah iuran.

Penelitian mengenai dana pensiun manfaat pasti telah dilakukan oleh Hainaut dan Devolder (2007), mereka mempertimbangkan kebijakan pembagian yang optimal dan alokasi dana pensiun manfaat pasti menggunakan kematian stokastik dengan model *random walk process*. Josa-Fombellida dan Rincon-Zapatero (2008) meneliti mengenai investasi optimal dan strategi iuran pada dana pensiun manfaat pasti. Ai, dkk. (2015) mengembangkan kerangka konseptual dan desain ukuran risiko program pensiun manfaat pasti untuk para penanggung dana pensiun.

Pendapatan tidak hanya dapat bertumbuh secara stokastik saja, akan tetapi dapat bertumbuh secara deterministik. Eisenberg, dkk. (2013) meneliti mengenai pendapatan deterministik, dimana dalam penelitiannya dikemukakan konsumsi optimal berdasarkan pendapatan deterministik. Eisenberg (2016) mengembangkan penelitiannya dengan menambahkan tingkat bunga deterministik dan stokastik. Dalam hal ini proses deterministik digunakan untuk memodelkan *surplus* dengan fungsi kontinu. Untuk proses stokastik digunakan untuk fungsi diskon (Eisenberg, 2016).

Berdasarkan uraian yang telah dikemukakan sebelumnya, penulis ingin menggabungkan penelitian Yao, dkk. (2014) dengan penelitian Eisenberg, dkk. (2013). Oleh karena itu pada penelitian ini akan dikemukakan tentang dana pensiun iuran pasti dengan pendapatan deterministik dan risiko kematian dalam model *multi-period* mean-varian sebagai gabungan dari kedua penelitian yang telah disebutkan. Berbeda dengan penelitian Yao, dkk. (2014) yang dapat diterapkan pada pegawai swasta dengan pendapatan yang bertumbuh secara stokastik, penelitian tesis ini memfokuskan pada pegawai negeri dengan tingkat pertumbuhan deterministik. Dalam tesis ini akan diteliti mengenai model alokasi aset *multi-period* mean-varian

terhadap dana pensiun iuran pasti dengan pendapatan deterministik dan juga risiko kematian. Selanjutnya akan diberikan simulasi numerik dengan interpretasi yang berkaitan dengan model alokasi aset dana pensiun iuran pasti untuk pendapatan deterministik dan risiko kematian dalam model *multi-period* mean-varian.

1.2 Rumusan Masalah

Pokok masalah yang akan dibahas dalam penelitian ini dapat dirumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimana model alokasi aset *multi-period* mean-varian untuk dana pensiun iuran pasti dengan pendapatan deterministik dan risiko kematian?
2. Bagaimana hasil simulasi numerik model alokasi aset *multi-period* mean-varian untuk dana pensiun iuran pasti dengan pendapatan deterministik dan risiko kematian?

1.3 Tujuan

Tujuan penelitian ini diberikan untuk menjawab tiap pertanyaan yang dikemukakan dalam rumusan masalah.

1. Memperoleh model alokasi aset *multi-period* mean-varian untuk dana pensiun iuran pasti dengan pendapatan deterministik dan risiko kematian.
2. Menginterpretasikan setiap hasil simulasi numerik model alokasi aset *multi-period* mean-varian untuk dana pensiun iuran pasti dengan pendapatan deterministik dan risiko kematian.

1.4 Batasan Masalah

Beberapa batasan masalah yang diberikan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Aset-aset keuangan di dalam pasar tidak *redundant*.
2. Pengembalian-pengembalian dari aset keuangan dan tingkat pertumbuhan deterministik gaji pendapatan tidak bergantung antar periode waktu yang berbeda.
3. Waktu kematian tidak bergantung terhadap pengembalian-pengembalian dari aset keuangan dan tingkat pertumbuhan deterministik gaji pendapatan.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Teori dasar yang digunakan dalam bab ini mencakup pengertian aset dan pembagiannya, model mean-varian, dana pensiun dan dua tipe utama dana pensiun, pendapatan, model persamaan simultan, peluang suatu kejadian, peluang hidup anggota dana pensiun, fungsi distribusi kumulatif, fungsi kehidupan, ekspektasi, varian, hukum total peluang, serta asumsi, lemma dan proposisi yang digunakan dalam penelitian. Subbab sistem dinamik, persamaan Bellman, kontrol optimal stokastik, serta pengali Lagrange digunakan sebagai dasar teori untuk menyelesaikan permasalahan kontrol optimal. Terakhir, diberikan hasil penelitian sebelumnya yaitu penelitian Yao, dkk. (2014) dan Eisenberg, dkk. (2013) dengan disertakan model pada masing-masing penelitian tersebut.

2.1 Aset

PSAK No. 16 mendefinisikan bahwa aset adalah seluruh kekayaan milik seseorang atau perusahaan yang akan memberikan manfaat ekonomis bagi pemilikinya di masa mendatang (Ikatan Akuntansi Indonesia, 2011). *International Financial Reporting Standards* (2012) menyebutkan bahwa aset merupakan sumber daya yang dikendalikan oleh perusahaan sebagai akibat dari peristiwa masa lalu dan bentuk yang manfaat ekonomi ke depannya diharapkan dapat mengalir ke perusahaan.

Berdasarkan risikonya aset dibagi menjadi dua macam, diantaranya adalah aset bebas risiko dan aset berisiko (Yao, dkk., 2014).

1. Aset bebas risiko

Adapun pengertian dari aset bebas risiko yaitu aset yang tingkat *return* di masa depannya sudah dapat dipastikan sekarang. Hal ini ditunjukkan dengan varian dari *returnnya* sama dengan nol. Obligasi jangka pendek oleh pemerintah adalah salah satu contoh aset yang bebas risiko.

2. Aset berisiko

Aset berisiko merupakan aset dengan tingkat pengembalian di masa depannya tidak pasti. Contohnya saham.

2.2 Model Mean-Varian

Model mean-varian pertama kali diperkenalkan oleh Harry Markowitz pada tahun 1952. Model mean-varian ini bertujuan untuk mendistribusikan dana secara efisien, ekspektasi risiko bergantung terhadap berbagai kemungkinan ekspektasi *return* dengan mean-varian sebagai parameternya (Markowitz, 1952).

Model Markowitz ini memanfaatkan hubungan antara pengembalian mean dengan pengembalian varian dengan tujuan memperoleh risiko yang minimal. Dikarenakan pemanfaatan relasi antara mean dan varian, model Markowitz ini sering dikenal dengan model mean-varian.

2.3 Dana Pensiun

Dana pensiun adalah lembaga perantara keuangan yang menjembatani saat seseorang mengalami peningkatan penghasilan (usia produktif) dan penerimaan penghasilan (usia tua), sehingga kehidupan di masa tuanya akan terjamin secara finansial (Widjajanto, 2001).

Terdapat beberapa manfaat dalam sistem dana pensiun yang diberikan sebagai manfaat tambahan karena kematian, pensiun dipercepat (ke-

luar), pensiun karena tidak bisa bekerja (cacat), dan pensiun pada saat usia pensiun. Menurut Futami dalam Wardhani, dkk. (2014) manfaat tambahan yang dimaksud diantaranya adalah:

1. Manfaat pensiun janda/ duda yang dibayarkan karena meninggal.
2. Manfaat pensiun dipercepat yang dibayarkan bagi peserta yang berhenti bekerja atau keluar.
3. Manfaat pensiun cacat yang dibayarkan bagi peserta yang tidak bisa bekerja karena cacat.
4. Manfaat pensiun yang dibayarkan bagi peserta yang telah mencapai usia pensiun.

Hal ini menunjukkan bahwa terdapat adanya kriteria yang dipergunakan untuk menentukan usia pensiun seseorang. Adapun kriterianya adalah sebagai berikut:

1. Harapan hidup,
2. Keadaan fisik tenaga kerja,
3. Keadaan kesempatan kerja,
4. Biaya penyelenggaraan,
5. Struktur keluarga.

2.4 Klasifikasi Dana Pensiun

Menurut Winklevoss (1976) terdapat dua tipe utama program dana pensiun, yaitu dana pensiun manfaat pasti dan dana pensiun iuran pasti. Adapun penjelasan dari kedua tipe utama dana pensiun yaitu:

1. Dana pensiun manfaat pasti

Dana pensiun manfaat pasti atau *defined benefit (DB)* yaitu program dana pensiun dimana manfaat pensiun merupakan kuantitas (jumlahan) yang pasti. Dengan kata lain, manfaat yang akan diperoleh pada saat pensiun ditetapkan di muka. Secara umum, manfaat tersebut

didasarkan pada besarnya gaji seorang pegawai dan lamanya masa jabatan (Winklevoss, 1976).

2. Dana pensiun iuran pasti

Defined contribution (DC) atau dalam bahasa Indonesia disebut sebagai dana pensiun iuran pasti adalah dana pensiun dengan iuran yang ditetapkan akan disisihkan setiap periodenya. Manfaat dari dana pensiun iuran pasti ditentukan oleh besarnya akumulasi (Winklevoss, 1976). Selain dari besar akumulasi, Yao, dkk. (2014) menambahkan bahwa manfaat dana pensiun ini juga bergantung kepada pengembalian investasi.

2.5 Pendapatan

Secara sederhana, pendapatan adalah arus masuk aset (aktiva) pada seseorang atau perusahaan yang timbul dari penjualan barang dan jasa. Pada perusahaan industri misalnya, timbulnya pendapatan terutama berasal dari penjualan barang jadi. Sedangkan pada perusahaan dagang pendapatan utamanya berasal dari penjualan barang yang didagangkan. Bagi perusahaan jasa, perolehan pendapatan berasal dari pemberian jasa.

Berikut diberikan beberapa pandangan para ahli mengenai pengertian pendapatan. Pendapatan merupakan peningkatan manfaat ekonomi selama periode tertentu dalam bentuk pemasukan atau penambahan aset yang berakibat pada naiknya ekuitas (Soemarso dalam Darmayanti, 2016).

Harahap (1993) memaknai pendapatan dalam tiga pengertian, yaitu:

1. Arus masuk aset akibat penjualan barang dan jasa,
2. Arus keluar barang dan jasa kepada konsumen atau pelanggan,
3. Hasil produksi dari perusahaan yang semata-mata akibat dari penciptaan barang dan jasa.

Nafarin (2004) mengungkapkan bahwa pendapatan adalah kenaikan pada modal pemilik yang dihasilkan dari penjualan barang, penyaluran jasa, penyewaan harta, peminjaman uang dan termasuk semua kegiatan usaha serta profesi yang bertujuan untuk mendapatkan penghasilan.

Berbagai pandangan para ahli tersebut memberikan suatu kesimpulan bahwa pendapatan adalah seluruh peningkatan jumlah aset yang berasal dari penjualan barang dan jasa dalam periode tertentu.

2.6 Model Persamaan Simultan

Model persamaan simultan merupakan persamaan yang memiliki ciri variabel endogen (variabel terikat) pada suatu persamaan menjadi variabel penjelas pada sistem persamaan yang lain (Gujarati, 2004). Dipandang dari penggunaan variabel-variabel, model persamaan simultan dengan model persamaan regresi tidak jauh berbeda karena masing-masing memiliki variabel bebas dan variabel terikat. Namun, pada model persamaan simultan tidak lagi menggunakan istilah variabel bebas dan variabel terikat, tetapi menggunakan istilah variabel eksogen dan endogen. Perbedaan penggunaan istilah ini dikarenakan variabel terikat pada persamaan regresi hanya bisa dipengaruhi oleh variabel bebas dan tidak berlaku untuk sebaliknya. Berbeda dengan model persamaan simultan, kedua variabel, baik eksogen maupun endogen dapat saling mempengaruhi satu sama lain.

Sebagai ilustrasi contoh untuk persamaan simultan adalah hubungan antara pendapatan sebagai variabel eksogen dengan konsumsi sebagai variabel endogen. Dalam hal ini, pendapatan dapat mempengaruhi konsumsi karena jika pendapatan naik maka diharapkan konsumsipun juga akan ikut naik. Kenaikan konsumsi akan memicu peningkatan produksi barang dan jasa guna memenuhi permintaan konsumsi, sehingga pendapatan akan naik sebagai balas jasa untuk faktor produksi. Jadi dapat

disimpulkan bahwa pendapatan dan konsumsi masing-masing saling mempengaruhi.

Dikemukakan secara berturut-turut dalam penelitian ini bahwa y_k dan y_{k+1} sebagai gaji pendapatan pada waktu k dan gaji pendapatan pada waktu $k + 1$. Lebih lanjut, c_k merupakan variabel deterministik yang hanya bergantung pada k , dengan x_k dan z_k secara berturut-turut adalah kekayaan dana pensiun sebelum dan setelah iuran pada waktu k . Kemudian didefinisikan q sebagai tingkat pertumbuhan deterministik dari gaji pendapatan yang berupa konstanta. Oleh karena demikian, secara matematis model persamaan simultan untuk penelitian ini diperoleh sebagai berikut:

$$y_k = \frac{z_k - x_k}{c_k},$$

$$y_{k+1} = qy_k.$$

Pada bentuk formula matematik tersebut dapat disimpulkan bahwa:

1. q sebagai variabel eksogen,
2. y_k dan y_{k+1} sebagai variabel endogen.

2.7 Peluang Suatu Kejadian

Himpunan dari semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan statistika disebut sebagai ruang sampel dan direpresentasikan dengan simbol S (Walpole, dkk., 2012). Setiap hasil pada ruang sampel dinamakan dengan anggota atau unsur ruang sampel yang secara umum disebut dengan titik sampel.

Walpole, dkk. (2012) mendefinisikan bahwa suatu kejadian adalah himpunan bagian dari ruang sampel. Sebagai contoh diambil peluang kejadian A . Untuk menentukan peluang suatu kejadian A , semua bobot titik sampel pada kejadian A dijumlahkan. Oleh karena itu, peluang dari kejadian A dinyatakan dalam Definisi 2.7.1.

Definisi 2.7.1. Peluang suatu kejadian A adalah jumlah bobot semua titik sampel yang termasuk A , sehingga

$$0 \leq \Pr(A) \leq 1, \Pr(\emptyset) = 0 \text{ dan } \Pr(T) = 1$$

(Walpole, dkk., 2012).

2.8 Peluang Hidup Anggota Dana Pensiun

Peluang hidup anggota dana pensiun dalam tinjauan pustaka ini digunakan sebagai dasar untuk mencari nilai peluang hidup dari anggota dana pensiun iuran pasti dengan pendapatan deterministik yang bergantung terhadap waktu akhir pensiun sebenarnya.

Misalkan $S(k)$ ($k > 0$) merupakan peluang kehidupan dari anggota dana pensiun. Yao, dkk. (2014) merumuskan peluang hidup anggota dana pensiun sebagai berikut

$$S(k) = \Pr(\tau \geq k \mid \tau > 0).$$

Peluang hidup $S(k)$ dapat dibentuk menjadi

$$S(k) = e^{-\int_0^k \beta(s) ds}$$

(Pliska dan Ye, 2007).

2.9 Fungsi Massa Peluang (FMP)

Fungsi massa peluang (fmp) menginterpretasikan peluang untuk variabel acak diskrit. Diasumsikan waktu akhir sebenarnya T^τ merupakan peubah acak diskrit, maka p_k adalah fungsi massa peluang (fmp) dengan diberlakukannya tiga syarat:

1. $p_k \geq 0$,
2. $\sum_k p_k = 1$,
3. $p_k = \Pr(T^\tau = k)$

(Walpole, dkk., 2012).

2.10 Fungsi Distribusi Kumulatif

Fungsi distribusi kumulatif dibagi menjadi dua jenis, yaitu fungsi distribusi kumulatif diskrit dan fungsi distribusi kumulatif kontinu.

Definisi 2.10.1. Fungsi distribusi kumulatif diskrit

Fungsi distribusi kumulatif $F(k)$ dari variabel acak diskrit T^τ dengan fungsi densitas $f(k)$ adalah

$$F(k) = \Pr(T^\tau \leq k) = \sum_{t \leq k} f(t), \text{ untuk } -\infty < k < \infty.$$

Definisi 2.10.2. Fungsi distribusi kumulatif kontinu

Fungsi distribusi kumulatif $F(k)$ dari variabel acak kontinu T^τ dengan fungsi densitas $f(k)$ adalah

$$F(k) = \Pr(T^\tau \leq k) = \int_{-\infty}^k f(t) dt, \text{ untuk } -\infty < k < \infty$$

(Walpole, dkk., 2012).

2.11 Fungsi Kehidupan

Anggap umur kematian seseorang yang baru lahir adalah T^τ , dengan T^τ merupakan variabel acak kontinu. Misalkan fungsi distribusi dari T^τ adalah $F(k)$ dengan

$$F(k) = \Pr(T^\tau \leq k), \quad k \geq 0.$$

Bowers, dkk. (1997) memformulasikan fungsi kehidupan sebagai berikut

$$S(k) = 1 - F(k) = \Pr(T^\tau > k), \quad k \geq 0.$$

Diasumsikan bahwa $F(0) = 0$ yang mengakibatkan $S(0) = 1$. Untuk setiap k yang bernilai positif, $S(k)$ merupakan peluang seseorang untuk mencapai umur k tahun.

2.12 Ekspektasi

Nilai ekspektasi X merupakan bobot rata-rata dari nilai-nilai yang mungkin untuk X dapat diambil (Ross, 2010). Berdasarkan kasusnya, Ross (2010) membagi ekspektasi ke dalam dua jenis, yaitu ekspektasi kasus diskrit dan ekspektasi kasus kontinu. Dalam penelitian ini diterapkan ekspektasi untuk kasus diskrit.

Pandang X sebagai variabel acak diskrit dengan fungsi massa peluang (fmp) p_k , maka nilai ekspektasi dari variabel acak X adalah

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x:p_k>0} xp_k.$$

2.13 Varian

Ross (2010) mendefinisikan $Var(X)$ sebagai variabel acak X dan memisalkan $\mathbb{E}[X] = d$. Dalam tesis ini dasar teori yang digunakan yaitu varian dengan kasus diskrit. Pandang bahwa X diskrit dengan fmp p_k , sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}[(X - d)^2] \\ &= \mathbb{E}[X^2 - 2dX + d^2] \\ &= \sum_{x:p_k>0} (x^2 - 2dx + d^2)p_k \\ &= \sum_{x:p_k>0} (x^2)p_k - 2d \sum_{x:p_k>0} xp_k + d^2 \sum_{x:p(x)>0} p_k \\ &= \mathbb{E}[X^2] - 2dd + d^2 \\ &= \mathbb{E}[X^2] - 2d^2 + d^2 \\ &= \mathbb{E}[X^2] - d^2 \end{aligned}$$

$$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

Jadi diperoleh bentuk umum varian yaitu

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X] - (\mathbb{E}[X])^2$$

(Ross, 2010).

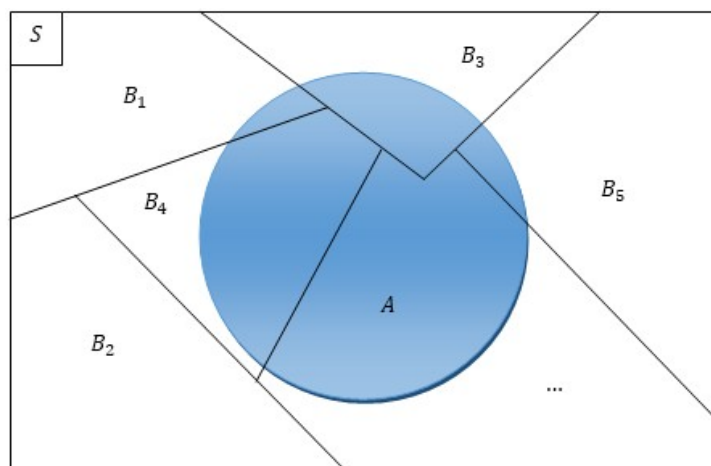
2.14 Hukum Total Peluang

Hukum total peluang pada tesis ini digunakan sebagai konsep dasar untuk mencari nilai yang ekivalen dengan model penelitian mean-varian.

Teorema 2.14.1 (Hukum Total Peluang). *Apabila kejadian-kejadian B_1, B_2, \dots, B_k merupakan bagian dari ruang sampel S sedemikian sehingga $\Pr(B_i) \neq 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, k$, maka untuk beberapa kasus A dari S diperoleh*

$$\Pr(A) = \sum_{i=1}^k \Pr(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^k \Pr(B_i) \Pr(A | B_i)$$

(Walpole, dkk., 2012).



Gambar 2.1. Pembagian dari Ruang Sampel S

Bukti. Kejadian A diketahui sebagai gabungan dari kejadian-kejadian yang saling eksklusif $B_1 \cap A, B_2 \cap A, \dots, B_k \cap A$, sedemikian sehingga

$$A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup \dots \cup (B_k \cap A). \quad (2.1)$$

Peluang dari kejadian A adalah

$$\begin{aligned}
 \Pr(A) &= \Pr[(B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup \dots \cup (B_k \cap A)] \\
 &= \Pr(B_1 \cap A) + \Pr(B_2 \cap A) + \dots + \Pr(B_k \cap A) \\
 &= \sum_{i=0}^k \Pr(B_i \cap A) \\
 &= \sum_{i=0}^k \Pr(B_i) \Pr(A | B_i).
 \end{aligned}$$

□

2.15 Sistem Dinamik

Sistem dinamik merupakan suatu sistem yang selalu mengalami perubahan. Sistem ini dapat diketahui kondisinya pada masa mendatang apabila diketahui kondisinya sekarang maupun pada masa silam. Berdasarkan bentuknya, Alligood, dkk. (2000) membagi sistem dinamik menjadi dua jenis, yaitu sistem dinamik diskrit dan sistem dinamik kontinu. Dalam penelitian ini digunakan bentuk sistem dinamik diskrit. Adapun bentuk umum dari sistem dinamik diskrit adalah sebagai berikut

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k \in \mathbb{Z} \text{ atau } \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2.16 Persamaan Bellman

Persamaan Bellman diperoleh dengan memformulasikan program dinamik. Pemrograman dinamik dapat diformulasikan dengan memisalkan

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) \tag{2.2}$$

sebagai suatu fungsi objektif pada saat k , dengan x_k adalah variabel stokastik dan u_k adalah variabel kontrol. Fungsi biaya (*performance index*) yang diperoleh yaitu

$$J_i(x_i) = \phi(N, x_N) + \sum_{k=1}^{N-1} L(x_k, u_k), \tag{2.3}$$

dimana $[i, N]$ waktu interval. Jika diaplikasikan kontrol sebarang u_k dan digunakan kontrol optimal yang telah diketahui dari $k+1$, hasil biaya menjadi

$$L(x_k, u_k) + J_{k+1}^*(x_{k+1}), \quad (2.4)$$

dimana x_k merupakan *state* pada waktu k dan x_{k+1} diberikan oleh Persamaan (2.2). Lewis, dkk. (2008) memformulasikan bentuk umum dari Persamaan Bellman pada biaya optimal dari waktu k untuk fungsi minimum yaitu

$$J_k^*(x_k) = \min_{u_k} (L(x_k, u_k) + \mathbb{E}[J_{k+1}^*(x_{k+1})]), \quad (2.5)$$

atau untuk fungsi maksimum

$$J_k^*(x_k) = \max_{u_k} (L(x_k, u_k) + \mathbb{E}[J_{k+1}^*(x_{k+1})]). \quad (2.6)$$

Kontrol optimal u_k^* merupakan u_k yang mencapai nilai minimumnya atau maksimumnya.

2.17 Kontrol Optimal Stokastik

Penentuan kontrol optimal pada suatu sistem kontrol dapat dipandang dalam dua jenis permasalahan, yaitu permasalahan deterministik dan permasalahan stokastik (Lewis, dkk., 2008). Bentuk umum sistem kontrol pada permasalahan stokastik adalah

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Gw_k, \quad (2.7)$$

$$z_k = Hx_k + v_k, \quad (2.8)$$

dengan k merupakan indeks waktu, $k = 1, 2, \dots, n$, x_{k+1} adalah variabel stokastik dikarenakan adanya variabel w_k dan v_k yang merupakan *white noise*, u_k merupakan variabel kontrol, serta A dan B merupakan matriks konstanta.

Persamaan (2.7) dapat dibentuk menjadi persamaan berikut

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) + Gw_k, \quad k > i. \quad (2.9)$$

Untuk menjadikan Persamaan (2.9) menunjukkan perilaku yang diinginkan

selama selang waktu $[i, N]$, diperlukan fungsi biaya sebagai berikut

$$J_i(x_i) = \phi(N, x_N) + \sum_{k=1}^{N-1} L(x_k, u_k), \quad (2.10)$$

dimana ϕ dan L merupakan fungsi deterministik. Anggap u_k meminimumkan atau memaksimumkan fungsi biaya yang berupa fungsi ekspektasi, dengan nilai ekpektasi

$$j_i = \mathbb{E}[J_i(x_i)], \quad (2.11)$$

sehingga dinotasikan nilai optimal untuk Persamaan (2.11), sebagai

$$j_i^* = \min_{u_k}(j_i) = \mathbb{E}\{\min_{u_k}[J_i(x_i)]\}, \quad (2.12)$$

atau

$$j_i^* = \max_{u_k}(j_i) = \mathbb{E}\{\max_{u_k}[J_i(x_i)]\}. \quad (2.13)$$

Nilai u_k yang menjadi solusi dari Persamaan (2.12) atau Persamaan (2.13) dinotasikan dengan u_k^* . Nilai dari u_k^* merupakan turunan pertama dari Persamaan (2.12) atau Persamaan (2.13) terhadap u_k . Selanjutnya akan dihitung nilai minimum atau maksimum dari fungsi biaya dengan cara mensubstitusi nilai u_k^* terhadap Persamaan (2.12) untuk masalah minimum dan Persamaan (2.13) untuk masalah maksimum, sehingga diperoleh

$$\mathbb{E}[J_i^*(x_i)]$$

(Lewis, dkk., 2008).

2.18 Pengali Lagrange

Pengali Lagrange digunakan sebagai dasar untuk menyederhanakan model mean-varian dengan cara mengeliminasi fungsi kendala dalam sistem persamaan untuk mencari nilai maksimum atau minimum dari fungsi

tujuan. Ito dan Kunish (2008) menetapkan bentuk umum permasalahan optimasi sebagai berikut

$$\begin{aligned} \min & f(x, y), \\ \text{b.k.} & g(x, y), \end{aligned} \quad (2.14)$$

dengan

b.k. : berdasarkan kendala.

Teorema 2.18.1 (Pengali Lagrange). *Misalkan $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ mempunyai turunan parsial kontinu. Jika nilai optimal dari f pada*

$$g(x, y) = C \quad (2.15)$$

terjadi di titik P dengan $\nabla g(P) \neq \mathbf{0}$, maka terdapat μ , sehingga berlaku

$$\nabla f(P) = \mu \nabla g(P) \quad (2.16)$$

(Budhi, 2001).

Bukti. Karena $\nabla g(P) \neq \mathbf{0}$, salah satu dari turunan parsial g di titik P tidak sama dengan nol. Dapat diasumsikan bahwa $\frac{\partial g}{\partial y}(P) \neq 0$. Dapat diselesaikan Persamaan (2.15) sebagai $y = \phi(x)$ atau dengan kata lain dapat diparameterisasikan sebagai $\mathbf{r}(k) = (x(k), y(k)) = (k, \phi(k))$. Dimisalkan bahwa $\mathbf{r}(k_0) = P$ dan k_0 merupakan titik dalam daerah definisi $\mathbf{r}(k)$, sehingga fungsi $h(k) = f(\mathbf{r}(k))$ mencapai ekstrem di k_0 . Turunan fungsi h terhadap k mempunyai nilai

$$h'(k) = \nabla f(\mathbf{r}(k)) \cdot \mathbf{r}'(k) = 0. \quad (2.17)$$

Karena terdapat di R^2 , maka ∇f dan $\nabla g \neq \mathbf{0}$ di P terletak pada satu garis. Hal ini mengakibatkan terdapat μ , sehingga Persamaan (2.16) berlaku. \square

Budhi (2010) mengembangkan metode untuk menghitung nilai optimal yaitu dengan membentuk fungsi:

$$H(x, y, \mu) = f(x, y) - \mu(g(x, y) - C), \quad (2.18)$$

dengan μ merupakan pengali Lagrange. Nilai optimal didapatkan dengan menghitung titik kritis dari fungsi H , yaitu

$$\frac{\partial H}{\partial \mu} = g(x, y) - C = 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \mu \frac{\partial g}{\partial x} = 0, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \mu \frac{\partial g}{\partial y} = 0. \quad (2.21)$$

2.19 Asumsi, Lemma dan Proposisi yang Digunakan dalam Penelitian

Diberikan asumsi, lemma dan beberapa proposisi yang ditetapkan untuk digunakan dalam penelitian.

Asumsi 2.19.1. $\mathbb{E}[P_k] \neq \vec{0}$, untuk $k = 0, 1, \dots, T - 1$ (Yao, dkk., 2014).

Lemma berikut digunakan dalam rumus komputasi untuk mencari $w_k, h_k, \alpha_k, \lambda_k, \gamma_k$ dan g_k .

Lemma 2.19.1. Anggap bahwa seri $\{l_k\}$ memenuhi $l_k = l_{k+1}t_k + s_k$, $k = 0, 1, \dots, T - 1$ dan l_T ditetapkan, sehingga

$$l_k = l_T \prod_{i=k}^{T-1} t_i + \sum_{i=k}^{T-1} s_i \prod_{j=k}^{i-1} t_j \quad (2.22)$$

(Yao, dkk., 2014).

Selanjutnya diberikan dua buah proposisi untuk mendasari penelitian ini.

Proposisi 2.19.1. Untuk $k = 0, 1, \dots, T$, didapatkan $w_k > 0$ (Yao, dkk., 2014).

Bukti. Diketahui dari Persamaan (5.9) bahwa $p_T > 0$ dan berdasarkan Asumsi 1 yang menyatakan bahwa aset-aset keuangan di dalam pasar tidak *redundant*, maka diperoleh $A_k > 0$ untuk $k = 0, 1, \dots, T - 1$. Oleh karena itu

dengan Persamaan (5.19) didapatkan $w_k = \sum_{i=k}^T p_i \prod_{j=k}^{i-1} A_j > 0$. \square

Proposisi 2.19.2 berikut digunakan untuk menunjukkan eksistensi solusi untuk Persamaan (5.38).

Proposisi 2.19.2. $\alpha_k < 0$ untuk $k = 0, 1, \dots, T - 1$ (Yao, dkk., 2014).

Bukti. Menurut Asumsi 1, aset-aset keuangan di dalam pasar tidak *redundant*, maka $\mathbb{E}[P_k P_k^t]$ merupakan definit positif, begitu juga dengan $\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t]$. Asumsi 2.19.1 menyatakan $\mathbb{E}[P_k] \neq \vec{0}$, maka $D_k = \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k] > 0$. Diketahui dari Persamaan (5.9) bahwa $p_T > 0$ dan $w_{k+1} > 0$ dari Proposisi 2.19.1, untuk $k = 0, 1, \dots, T - 1$. Oleh karena itu dengan Persamaan (5.26) dan Persamaan (5.27) didapatkan

$$\alpha_k = - \sum_{i=k}^T \frac{h_{i+1}^2}{w_{i+1}} D_i \leq \frac{h_T^2}{w_T} D_{T-1} = p_T D_{T-1} < 0,$$

untuk $k = 0, 1, \dots, T - 1$. □

2.20 Model Dana Pensiun Iuran Pasti dengan Pendapatan Stokastik dan Risiko Kematian

Model dana pensiun ini diformulasikan oleh Yao, dkk. (2014). Di-
asumsikan bahwa anggota dana pensiun masuk program dana pensiun
saat 0 dan masa pensiunnya adalah T . Sebelum memasuki masa pensiun,
anggota tersebut harus berkontribusi sejumlah uang pada awal tiap
periode sesuai kesepakatan yang diberikan. Ketika anggota memasuki
masa pensiun, kekayaan dana pensiun anggota dapat diubah menjadi
anuitas, sehingga anggota pensiun dapat menerima dana pensiun terjadwal
setiap periodenya. Apabila anggota program dana pensiun meninggal se-
belum mencapai masa pensiunnya, ahli waris anggota dapat mengambil
semua dana miliknya yang telah diasuransikan.

Misalkan y_k merupakan gaji pendapatan yang diperoleh pada waktu k
dan memenuhi bentuk dinamik

$$y_{k+1} = q_k y_k, \tag{2.23}$$

dimana q_k merupakan variabel eksogen yang merepresentasikan tingkat pertumbuhan deterministik terhadap periode k . Diasumsikan bahwa $q_k > 0$ untuk setiap $k = 0, 1, \dots, T - 1$ (Yao, dkk., 2014). Secara lebih lanjut, Yao, dkk. (2014) memformulasikan kekayaan dana pensiun setelah iuran pada waktu k yang dinotasikan dengan z_k , yaitu

$$z_k = x_k + c_k y_k,$$

dimana x_k merupakan kekayaan sebelum iuran pada waktu k dan $c_k y_k$ merupakan jumlahan yang anggota sumbangkan pada waktu k , dengan c_k adalah variabel deterministik yang bergantung hanya pada k .

Yao, dkk. (2014) memformulasikan kekayaan dana pensiun sebelum dan sesudah iuran pada waktu $k + 1$ dalam bentuk sistem dinamik berikut

$$x_{k+1} = e_k^0 u_k^0 + \sum_{i=1}^n e_k^i u_k^i, \quad (2.24)$$

dan

$$z_{k+1} = z_k e_k^0 + c_{k+1} q_k y_k + P_k^t u_k,$$

dimana:

$$P_k^t = (e_k^1 - e_k^0, e_k^2 - e_k^0, \dots, e_k^n - e_k^0),$$

$$u_k = (u_k^1, u_k^2, \dots, u_k^n)^t.$$

Notasi u_k dan e_k^i secara berturut-turut sebagai jumlahan yang diinvestasikan dalam aset ke- i selama periode ke- k dan pengembalian acak dari aset ke- i selama periode ke- k .

Manajemen investasi pada dana pensiun oleh Yao, dkk. (2014) menggunakan model mean-varian yang diberikan dalam bentuk

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{u \in \Theta_0} \{Var[x_{T\tau}] := \mathbb{E}[x_{T\tau}^2] - d^2\}, \\ \text{b.k.} \quad \mathbb{E}[x_{T\tau}] = d, \quad y_{k+1} = q_k y_k, \\ \quad \quad \quad x_{k+1} = (x_k + c_k y_k) e_k^0 + P_k^t u_k. \end{array} \right.$$

2.21 Model Konsumsi Optimal Berdasarkan Pendapatan Deterministik

Eisenberg, dkk. (2013) meneliti mengenai konsumsi optimal berdasarkan pendapatan deterministik. Dalam penelitiannya dianggap bahwa individu atau keluarga memiliki kekayaan awal, pendapatan dan konsumsi (kebutuhan) barang dan jasa.

Formulasi model oleh Eisenberg, dkk. (2013) yaitu proses kekayaan deterministik dikurangi dengan konsumsi diperoleh sebagai berikut:

$$dX_t^C = \mu_t dt - dC_t,$$

dimana:

X_t^C : *state* pada waktu t ,

μ_t : laju kekayaan deterministik pada waktu t ,

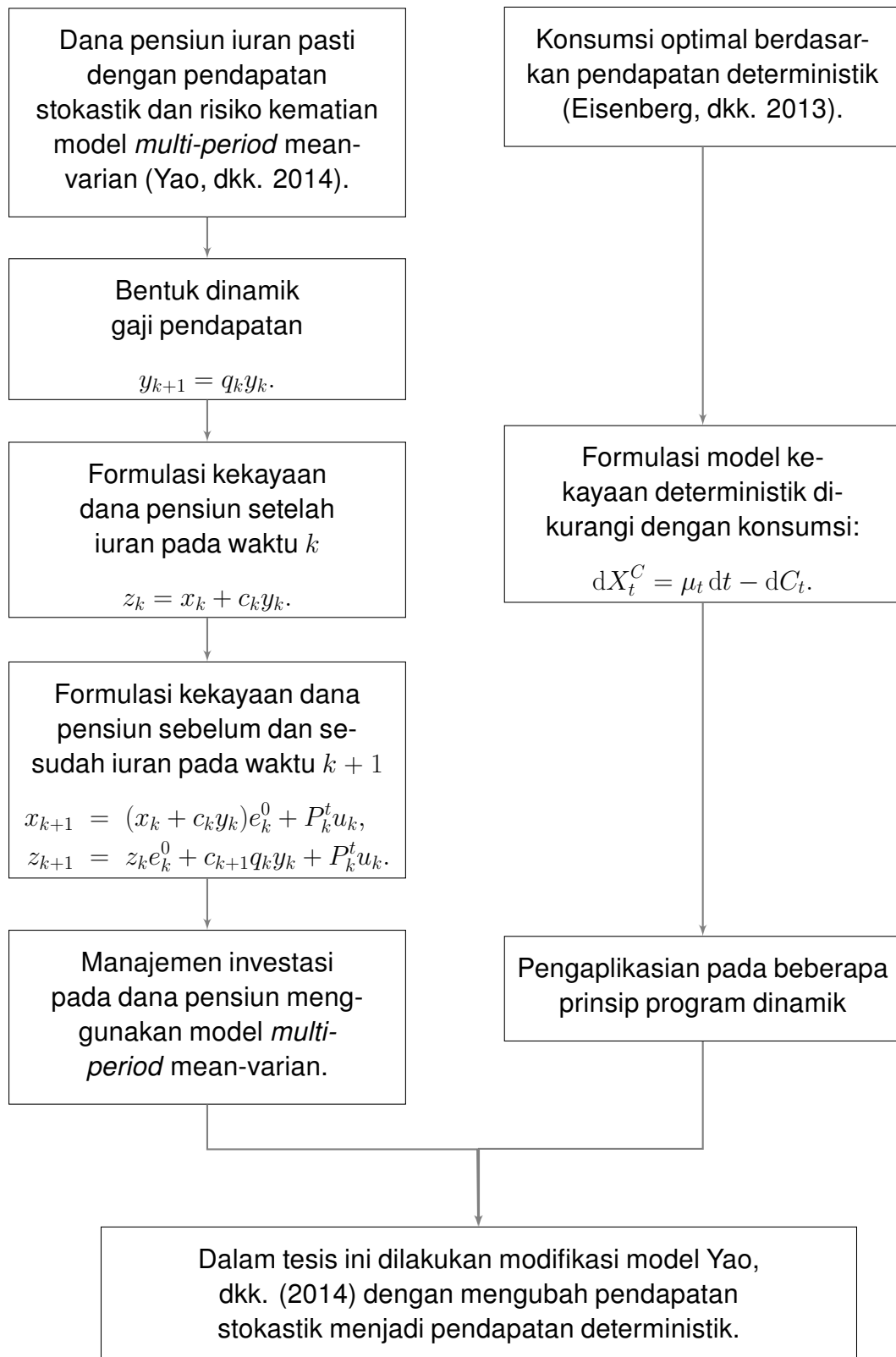
C_t : konsumsi pada waktu t .

Pada penelitian Eisenberg dianggap bahwa individu atau keluarga yang pendapatannya mengalir dideskripsikan dalam bentuk deterministik.

BAB III

KERANGKA KONSEP PENELITIAN

Kerangka konsep penelitian pada bab ini dibentuk berdasarkan pada dua penelitian. Yao, dkk. (2014) membahas mengenai aset alokasi dana pensiun iuran pasti dengan pendapatan stokastik dan risiko kematian menggunakan *multi-period* mean-varian. Model *multi-period* mean-varian merupakan model yang penting untuk memaksimalkan *return* dan meminimumkan risiko (Yao, dkk., 2014). Model *multi-period* mean-varian pada penelitian Yao, dkk. (2014) memberikan gambaran bahwa model mean-varian tersebut didasarkan pada *multi-period* dimana periode iuran anggota merupakan *multi-period*. Hal ini didasarkan dengan memper-timbangkan kekayaan dana pensiun sebelum iuran (x_k) dan kekayaan dana pensiun setelah iuran (z_k). Pendapatan tidak hanya memiliki kenaikan stokastik saja, akan tetapi memiliki kenaikan secara deterministik. Eisenberg, dkk. (2013) meneliti mengenai konsumsi optimal berdasarkan pendapatan deterministik. Pendapatan deterministik merupakan pendapatan dengan tingkat kenaikan tiap periodenya adalah tetap (konstan) dan kenaikannya pada waktu tertentu. Model *multi-period* mean-varian dalam penelitian ini dilakukan pada pendapatan deterministik dan risiko kematian pada alokasi aset dana pensiun iuran pasti. Kerangka konsep penelitian dapat dideskripsikan pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1. Kerangka Konsep Penelitian

BAB IV

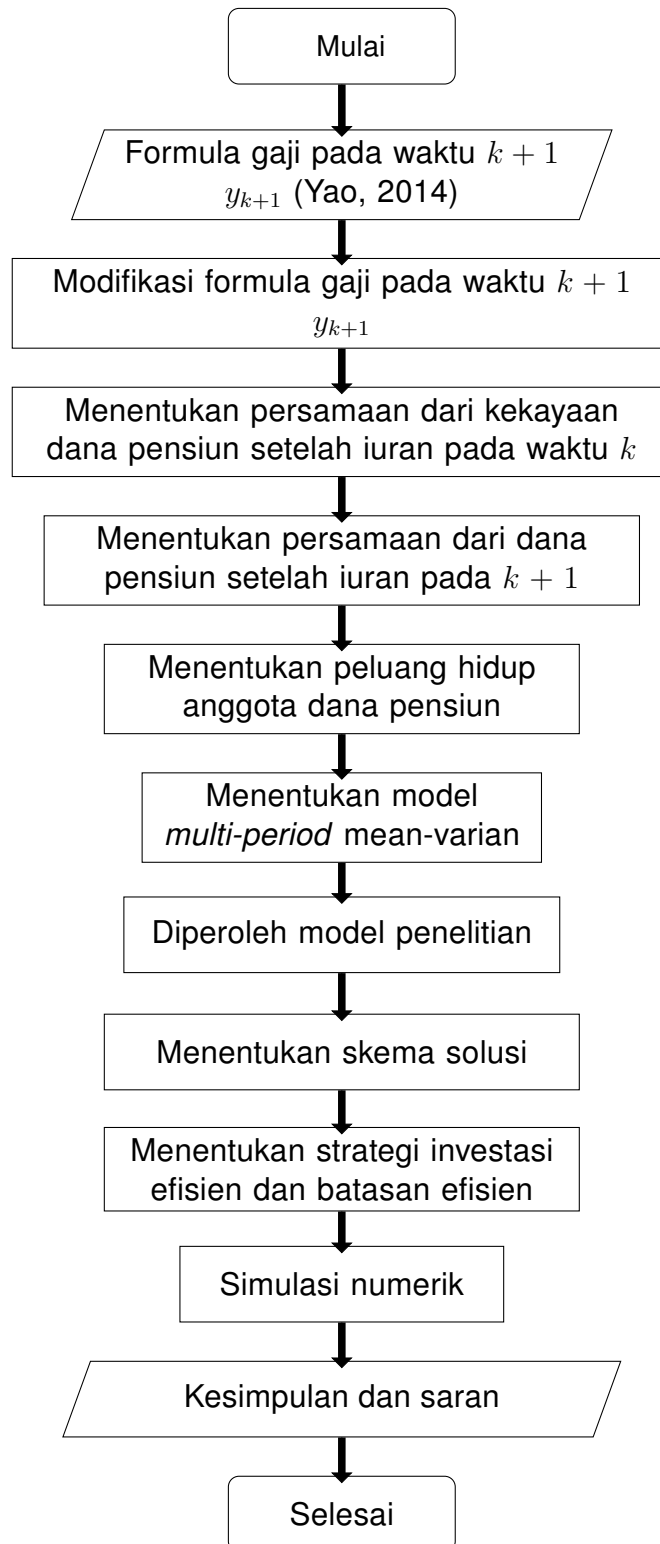
METODE PENELITIAN

Beberapa langkah yang dilakukan dalam penelitian dana pensiun iuran pasti dengan pendapatan deterministik ini adalah sebagai berikut:

1. Memodifikasi formula gaji pendapatan pada waktu $k + 1$ (Yao, dkk., 2014) dengan mengubah gaji pendapatan menjadi tingkat pertumbuhan deterministik.
2. Menentukan persamaan dari kekayaan dana pensiun setelah iuran pada waktu k . Rumus ini bergantung pada kekayaan dana pensiun sebelum iuran dan jumlah yang anggota sumbangkan pada waktu k .
3. Menentukan persamaan dari dana pensiun setelah iuran pada waktu $k + 1$. Pada bagian ini akan ditentukan terlebih dahulu nilai dari x_{k+1} , kemudian akan diperoleh persamaan dari kekayaan dana pensiun setelah iuran pada waktu $k + 1$.
4. Menentukan peluang hidup anggota dana pensiun. Hal yang pertama dilakukan pada langkah ini adalah menentukan waktu akhir sebenarnya dari kematian kemudian mendapatkan peluang hidup anggota dana pensiun.
5. Menentukan model persamaan *multi-period* mean-varian dari permasalahan penelitian.
6. Diperoleh model mean-varian untuk penelitian.
7. Menentukan skema solusi. Tujuan dari langkah ini adalah untuk menentukan nilai optimal, persamaan komputasi, strategi optimal u_k^* dan didapatkan fungsi minimumnya.

8. Menentukan strategi investasi efisien dan batasan efisien. Hal yang pertama dilakukan adalah mendapatkan solusi optimal μ^* , kemudian ditentukan strategi optimal mean-varian u_k^* . Selanjutnya ditentukan persamaan batasan efisien.
9. Simulasi numerik.
10. Kesimpulan dan saran.

Berikut disajikan diagram alir untuk lebih mempermudah pemahaman mengenai langkah-langkah yang akan digunakan untuk menyelesaikan masalah pada penelitian ini.



Gambar 4.1. Diagram Alir Metode Penelitian

BAB V

HASIL DAN PEMBAHASAN

Model alokasi dana pensiun iuran pasti dengan pendapatan deterministik dan risiko kematian menggunakan *multi-period* mean-varian diberikan pada bab ini. Langkah awal pembentukan model dilakukan dengan menentukan gaji pendapatan pada periode $k + 1$ dengan memodifikasi pendapatan stokastik pada penelitian Yao, dkk., (2014) menjadi tingkat pertumbuhan deterministik. Langkah berikutnya diberikan bentuk umum dari kekayaan dana pensiun setelah iuran pada waktu k dan $k + 1$, memperoleh bentuk persamaan peluang hidup anggota dana pensiun, sehingga diperoleh model dari *multi-period* mean-varian untuk dana pensiun iuran pasti dengan pendapatan deterministik dan risiko kematian. Kemudian merancang skema solusi, menentukan strategi investasi efisien dan batasan efisien. Terakhir diberikan simulasi numerik dan interpretasinya untuk tiap simulasi.

Dianggap bahwa anggota dana pensiun masuk program dana pensiun pada waktu 0 dan direncanakan untuk pensiun pada waktu T . Sebelum masa pensiunnya, anggota harus berkontribusi sejumlah uang di awal tiap periode yang telah ditetapkan. Setelah memasuki masa pensiun, anggota dana pensiun dapat mengkonversi kekayaan dari dana pensiunnya menjadi anuitas, sehingga dapat menerima dana pensiun yang terjadwal pada tiap periode untuk masa pensiunnya.

5.1 Gaji Pendapatan pada Waktu $k + 1$

Persamaan gaji pendapatan pada penelitian ini berdasarkan pada penelitian Yao dkk., (2014) dengan mengubah tingkat pertumbuhan stokastik menjadi tingkat pertumbuhan deterministik. Diasumsikan bahwa gaji pendapatan memiliki kenaikan secara deterministik, sehingga memenuhi bentuk dinamik berikut:

$$y_{k+1} = qy_k, \quad k = 0, 1, \dots, T - 1. \quad (5.1)$$

Persamaan (5.1) merupakan bentuk umum yang digunakan untuk memperoleh gaji pendapatan pada waktu $k + 1$ dengan mempertimbangkan gaji pendapatan periode sebelumnya, dimana

q : variabel acak eksogen yang mewakili tingkat pertumbuhan deterministik dari gaji pendapatan,

y_k : gaji pendapatan pada waktu k .

5.2 Kekayaan Dana Pensiun Setelah Iuran pada Waktu k

Kekayaan dana pensiun setelah iuran pada waktu k merupakan persamaan yang diperoleh dari penjumlahan kekayaan dana pensiun sebelum iuran pada waktu k dengan nominal yang anggota kontribusikan pada waktu k . Anggap bahwa $c_k y_k$ merupakan nominal (jumlahan) yang anggota kontribusikan, sehingga persamaan yang diperoleh adalah sebagai berikut

$$z_k = x_k + c_k y_k,$$

dimana:

c_k : prosentase iuran dari gaji pokok berupa variabel deterministik yang hanya bergantung pada k ,

x_k : kekayaan dana pensiun sebelum iuran waktu k ,

z_k : kekayaan dana pensiun setelah iuran waktu k .

Dalam penelitian ini, anggota dana pensiun tidak perlu berkontribusi untuk tiap periode, sehingga terdapat dua keadaan yaitu:

1. $c_k = 0$ ketika anggota dana pensiun tidak perlu berkontribusi selama periode k . Keadaan ini terjadi ketika anggota sudah memasuki masa pensiunnya,
2. $c_k > 0$ ketika anggota dana pensiun perlu berkontribusi selama periode k . Keadaan ini terjadi ketika anggota mulai masuk program dana pensiun sampai pada periode tepat sebelum masa pensiunnya.

Misalkan $c_k < 0$, maka $c_k y_k$ diartikan sebagai konsumsi dari anggota atau distribusi dari dana pensiun selama periode k , $k = 1, 2, \dots, T$. Hal ini berarti bahwa anggota memberikan sejumlah kontribusi dari asetnya untuk memenuhi kebutuhan pensiun sehingga kekayaan dana pensiun tidak bertambah, melainkan akan berkurang. Oleh karena itu, model ini juga dapat digunakan untuk masalah alokasi dana pensiun saat fase dekumulasi. Fase dekumulasi adalah periode dimana akumulasi aset ditarik untuk mendanai kebutuhan pensiun.

5.3 Kekayaan Dana Pensiun Setelah Iuran pada Waktu $k + 1$

Akan ditentukan terlebih dahulu persamaan x_{k+1} guna mendapatkan bentuk umum persamaan kekayaan dana pensiun setelah iuran pada waktu $k + 1$. Diasumsikan bahwa dana pensiun dapat diinvestasikan dalam $n + 1$ aset, dimana aset ke-0 pada periode ke- k ditunjukkan oleh kekayaan sebelum iuran pada periode ke- k . Jumlah yang diinvestasikan untuk aset ke- i selama periode ke- k dinotasikan dengan u_k^i , sehingga jumlah yang diinvestasikan untuk aset ke-0 selama periode ke- k adalah

$$u_k^0 = z_k - \sum_{i=1}^n u_k^i = (x_k + c_k y_k) - \sum_{i=1}^n u_k^i, \quad k = 1, 2, \dots, T, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Berdasarkan bentuk dinamik Persamaan (2.24), diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= e_k^0 \left((x_k + c_k y_k) - \sum_{i=1}^n u_k^i \right) + \sum_{i=1}^n e_k^i u_k^i \\
&= e_k^0 (x_k + c_k y_k) - e_k^0 \sum_{i=1}^n u_k^i + \sum_{i=1}^n e_k^i u_k^i \\
&= (x_k + c_k y_k) e_k^0 - \sum_{i=1}^n e_k^0 u_k^i + \sum_{i=1}^n e_k^i u_k^i \\
&= (x_k + c_k y_k) e_k^0 + \sum_{i=1}^n (e_k^i - e_k^0) u_k^i \\
&= (x_k + c_k y_k) e_k^0 + (e_k^1 - e_k^0, e_k^2 - e_k^0, \dots, e_k^n - e_k^0) \begin{pmatrix} u_k^1 \\ u_k^2 \\ \vdots \\ u_k^n \end{pmatrix} \\
x_{k+1} &= (x_k + c_k y_k) e_k^0 + P_k^t u_k, \tag{5.2}
\end{aligned}$$

dimana:

$$P_k^t = (e_k^1 - e_k^0, e_k^2 - e_k^0, \dots, e_k^n - e_k^0),$$

$$u_k = (u_k^1, u_k^2, \dots, u_k^n)^t,$$

dengan u_k dan e_k^i secara berturut-turut merupakan jumlahan yang diinvestasikan untuk aset ke $-i$ selama periode ke $-k$ dan pengembalian acak dari aset ke $-i$ selama periode ke $-k$.

Berikut diperoleh bentuk umum dari kekayaan dana pensiun setelah iuran pada waktu $k + 1$. Dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mengalikan kedua ruas dari Persamaan (5.1) dengan c_{k+1}

$$c_{k+1} y_{k+1} = c_{k+1} q y_k.$$

2. Menjumlahkan Persamaan (5.2) dengan hasil dari langkah pertama

$$x_{k+1} + c_{k+1} y_{k+1} = (x_k + c_k y_k) e_k^0 + c_{k+1} q y_k + P_k^t u_k. \tag{5.3}$$

3. Substitusi $z_k = x_k + c_k y_k$ dan $z_{k+1} = x_{k+1} + c_{k+1} y_k$ ke dalam Persamaan (5.3), sehingga diperoleh Persamaan (5.4).

$$z_{k+1} = z_k e_k^0 + c_{k+1} q y_k + P_k^t u_k, \quad (5.4)$$

Persamaan (5.4) merupakan bentuk umum dari kekayaan dana pensiun setelah iuran pada waktu $k + 1$.

5.4 Peluang Hidup Anggota Dana Pensiun

Anggota dana pensiun direncanakan untuk pensiun pada waktu T . Meskipun ditetapkan waktu pensiun tersebut, pada realitanya anggota program dana pensiun mungkin akan meninggal sebelum waktu T karena risiko kematian. Anggap anggota dana pensiun hidup pada waktu $a = 0$ dan untuk masa hidupnya (waktu kematiannya) dinotasikan dengan τ , sehingga diperoleh dua keadaan untuk waktu akhir sebenarnya

$$T^\tau = \begin{cases} k, & k - 1 < \tau \leq k \quad \text{dan} \quad 1 \leq k \leq T - 1, \\ T, & \tau > T - 1. \end{cases} \quad (5.5)$$

Jika anggota dana pensiun meninggal saat periode waktu $(k - 1)$, maka $T^\tau = k$. Jika meninggal setelah $T - 1$, maka waktu akhir sebenarnya adalah T . Selanjutnya ditentukan fmp untuk T^τ . Misalkan $S(k)$ ($k > 0$) merupakan peluang hidup dari anggota dana pensiun, yaitu

$$S(k) = \Pr(\tau \geq k \mid \tau > 0), \quad (5.6)$$

dimana $\Pr(\cdot)$ merupakan ukuran peluang. Diketahui bahwa peluang kehidupan $S(k)$ dapat diekspresikan menjadi Persamaan (5.7).

$$S(k) = e^{-\int_0^k \beta(s) ds}, \quad (5.7)$$

dimana $\beta(s)$ merupakan intensitas kematian. Dengan menggunakan Persamaan (5.5) dan Persamaan (5.6) diperoleh

$$\begin{aligned}
 p_k &:= \Pr(T^\tau = k) = \Pr(k-1 < \tau \leq k) \\
 &= F(k) - F(k-1) \\
 &= S(k-1) - S(k), \\
 p_k &:= \Pr(T^\tau = k) = \Pr(\tau > T-1) \\
 &= 1 - F(T-1) \\
 &= S(T-1).
 \end{aligned}$$

Jadi p_k dapat disederhanakan menjadi Persamaan (5.8)

$$p_k := \Pr(T^\tau = k) = \begin{cases} S(k-1) - S(k), & k = 1, \dots, T-1, \\ S(T-1), & k = T. \end{cases} \quad (5.8)$$

Berdasarkan Persamaan (5.7) dan Persamaan (5.8), didapatkan fmp dari waktu akhir sebenarnya, yaitu

$$p_k = \begin{cases} e^{-\int_0^{k-1} \beta(s) ds} - e^{-\int_0^k \beta(s) ds}, & k = 1, \dots, T-1, \\ e^{-\int_0^{T-1} \beta(s) ds} > 0, & k = T, \end{cases} \quad (5.9)$$

karena

$$S(k-1) = e^{-\int_0^{k-1} \beta(s) ds},$$

$$S(k) = e^{-\int_0^k \beta(s) ds},$$

$$S(T-1) = e^{-\int_0^{T-1} \beta(s) ds}.$$

5.5 Model *Multi-Period Mean-Varian*

Masalah alokasi aset optimal untuk dana pensiun iuran pasti berdasarkan model *multi-period* mean-varian mengacu pada masalah untuk menemukan strategi investasi optimal yang diterima dengan meminimumkan varian dari kekayaan terakhir untuk ekspektasi kekayaan terakhir yang diberikan oleh d ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{u \in \Theta_0} \{Var[x_{T^\tau}] := \mathbb{E}[x_{T^\tau}^2] - d^2\}, \\ \text{b.k. } \mathbb{E}[x_{T^\tau}] = d, \quad y_{k+1} = qy_k, \\ x_{k+1} = (x_k + c_k y_k)e_k^0 + P_k^t u_k, \end{array} \right. \quad (5.10)$$

dengan:

Θ_0 = koleksi dari semua strategi yang diterima mulai periode ke-0,

$\mathbb{E}[\cdot]$ = operator ekspektasi,

$Var[\cdot]$ = operator varian,

d = ekspektasi kekayaan terakhir.

Solusi u^* dari Persamaan (5.10) disebut sebagai strategi investasi efisien dengan $u^* = \{u_k^*; k = 0, 1, \dots, T-1\}$. Titik $(Var[x_{T^\tau}], d)$ merupakan titik efisien yang sesuai dengan strategi investasi pada ruang mean-varian, sehingga batasan efisien adalah himpunan dari seluruh titik efisien.

Didefinisikan $p_0 = 0$. Dengan hukum total peluang, berdasarkan

Asumsi 3 diperoleh

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[x_{T^\tau}] &= \sum_{s=0}^T \mathbb{E}[x_{T^\tau} | T^\tau = s] \Pr(T^\tau = s) \\ &= \sum_{s=0}^T \sum_{s=0}^T x_s \Pr(x_{T^\tau} = x_s | T^\tau = s) \Pr(T^\tau = s) \\ &= \sum_{s=0}^T \sum_{s=0}^T x_s \frac{\Pr(x_{T^\tau} = x_s, T^\tau = s)}{\Pr(T^\tau = s)} \Pr(T^\tau = s) \\ &= \sum_{s=0}^T \sum_{s=0}^T x_s \Pr(x_{T^\tau} = x_s, T^\tau = s) \\ &= \mathbb{E} \sum_{s=0}^T x_s \Pr(x_{T^\tau} = x_s, T^\tau = s) \\ &= \mathbb{E} \sum_{s=0}^T x_s p_s, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[x_{T^\tau}^2] &= \sum_{s=0}^T \mathbb{E}[x_{T^\tau}^2 | T^\tau = s] \Pr(T^\tau = s) \\
&= \sum_{s=0}^T \sum_{s=0}^T x_s^2 \Pr(x_{T^\tau}^2 = x_s^2 | T^\tau = s) \Pr(T^\tau = s) \\
&= \sum_{s=0}^T \sum_{s=0}^T x_s^2 \frac{\Pr(x_{T^\tau}^2 = x_s^2, T^\tau = s)}{\Pr(T^\tau = s)} \Pr(T^\tau = s) \\
&= \sum_{s=0}^T \sum_{s=0}^T x_s^2 \Pr(x_{T^\tau}^2 = x_s^2, T^\tau = s) \\
&= \mathbb{E} \sum_{s=0}^T x_s^2 \Pr(x_{T^\tau}^2 = x_s^2, T^\tau = s) \\
&= \mathbb{E} \sum_{s=0}^T x_s^2 p_s.
\end{aligned}$$

Secara singkat hasil yang telah diperoleh dapat dibentuk menjadi Persamaan (5.11) berikut:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{E}[x_{T^\tau}] = \sum_{s=0}^T \mathbb{E}[x_{T^\tau} | T^\tau = s] \Pr(T^\tau = s) = \mathbb{E} \left[\sum_{s=0}^T p_s x_s \right], \\ \mathbb{E}[x_{T^\tau}^2] = \sum_{s=0}^T \mathbb{E}[x_{T^\tau}^2 | T^\tau = s] \Pr(T^\tau = s) = \mathbb{E} \left[\sum_{s=0}^T p_s x_s^2 \right]. \end{array} \right. \quad (5.11)$$

Hal ini mengakibatkan model Persamaan (5.10) ekuivalen dengan

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{u \in \Theta_0} \left\{ \mathbb{E} \left[\sum_{s=0}^T p_s x_s^2 \right] - d^2 \right\}, \\ \text{b.k.} \quad \mathbb{E} \left[\sum_{s=0}^T p_s x_s \right] = d, \\ y_{k+1} = qy_k, \quad x_{k+1} = (x_k + c_k y_k) e_k^0 + P_k^t u_k, \end{array} \right. \quad (5.12)$$

karena

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[x_{T^\tau}] &= \mathbb{E} \sum_{s=0}^T x_s p_s, \\
\mathbb{E}[x_{T^\tau}^2] &= \mathbb{E} \sum_{s=0}^T x_s^2 p_s.
\end{aligned}$$

Selanjutnya substitusi persamaan kendala $\mathbb{E} \left[\sum_{s=0}^T p_s x_s = d \right]$ ke dalam fungsi tujuan dari model Persamaan (5.12) dengan menggunakan metode Lagrange. Adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Membuat ruas kanan fungsi kendala $\mathbb{E} \left[\sum_{s=0}^T p_s x_s = d \right]$ menjadi sama dengan nol dengan mengurangi kedua ruas dengan d

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{u \in \Theta_0} \left\{ \mathbb{E} \left[\sum_{s=0}^T p_s x_s^2 \right] - d^2 \right\}, \\ \text{b.k.} \quad \mathbb{E} \left[\sum_{s=0}^T p_s x_s \right] - d = 0, \\ y_{k+1} = qy_k, \quad x_{k+1} = (x_k + c_k y_k) e_k^0 + P_k^t u_k. \end{array} \right.$$

2. Menetapkan pengali Lagrange, yaitu sebesar 2μ dan mensubstitusikan persamaan kendala $\mathbb{E} \left[\sum_{s=0}^T p_s x_s \right] - d = 0$ pada fungsi tujuan

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{u \in \Theta_0} \left\{ \mathbb{E} \left[\sum_{s=0}^T p_s x_s^2 \right] - d^2 + 2\mu \left(\mathbb{E} \left[\sum_{s=0}^T p_s x_s \right] - d \right) \right\}, \\ \text{b.k.} \quad y_{k+1} = qy_k, \quad x_{k+1} = (x_k + c_k y_k) e_k^0 + P_k^t u_k. \end{array} \right. \quad (5.13)$$

Ditetapkan

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\sum_{s=0}^T p_s x_s^2 \right] - d^2 + 2\mu \left(\mathbb{E} \left[\sum_{s=0}^T p_s x_s \right] - d \right) \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{s=0}^T p_s x_s^2 \right] - d^2 + \mathbb{E} \left[\sum_{s=0}^T 2\mu p_s x_s \right] - 2\mu d \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{s=0}^T p_s x_s^2 + 2\mu p_s x_s \right] - d^2 - 2\mu d, \end{aligned} \quad (5.14)$$

dan $(-d^2 - 2\mu d)$. Persamaan (5.13) ekuivalen dengan masalah optimasi (5.15). Dalam arti bahwa solusi optimalnya adalah sama

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{u \in \Theta_0} \mathbb{E} \left[\sum_{s=0}^T (p_s x_s^2 + 2\mu p_s x_s) \right], \\ \text{b.k.} \quad y_{k+1} = qy_k, \quad x_{k+1} = (x_k + c_k y_k) e_k^0 + P_k^t u_k. \end{array} \right. \quad (5.15)$$

Selanjutnya, dibuat transformasi variabel *state* untuk Persamaan (5.15).

Persamaan (5.15) dapat dibentuk seperti berikut:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{u \in \Theta_0} \left[\sum_{s=0}^T (p_s (z_s - c_s y_s)^2 + 2\mu p_s (z_s - c_s y_s)) \right], \\ \text{b.k.} \quad y_{k+1} = qy_k, \quad x_{k+1} = (x_k + c_k y_k) e_k^0 + P_k^t u_k, \\ \quad \quad \quad x_{k+1} + c_{k+1} y_{k+1} = (x_k + c_k y_k) e_k^0 + c_{k+1} qy_k + P_k^t u_k, \\ \quad \quad \quad z_{k+1} = z_k e_k^0 + c_{k+1} qy_k + P_k^t, \end{array} \right. \quad (5.16)$$

karena $x_s = z_s - c_s y_s$. Untuk menyelesaikan Persamaan (5.16) digunakan pendekatan program dinamik.

Misalkan $f_k(z_k, y_k)$ adalah fungsi nilai optimal dari Persamaan (5.16) mulai dari waktu k dengan *state* awal z_k dan y_k , sehingga

$$\left\{ \begin{array}{l} f_k(z_k, y_k) = \min_{u \in \Theta_0} \left[\sum_{s=0}^T (p_s (z_s - c_s y_s)^2 + 2\mu p_s (z_s - c_s y_s)) \mid (z_k, y_k) \right], \\ \text{b.k.} \quad y_{k+1} = qy_k, \quad x_{k+1} = (x_k + c_k y_k) e_k^0 + P_k^t u_k, \\ \quad \quad \quad x_{k+1} + c_{k+1} y_{k+1} = (x_k + c_k y_k) e_k^0 + c_{k+1} qy_k + P_k^t u_k, \\ \quad \quad \quad z_{k+1} = z_k e_k^0 + c_{k+1} qy_k + P_k^t. \end{array} \right. \quad (5.17)$$

Dengan prinsip program dinamik, diperoleh persamaan Bellman untuk Persamaan (5.16).

$$\begin{aligned} f_k(z_k, y_k) &= \min_{u \in \Theta_0} \mathbb{E} \left[p_k (z_k - c_k y_k)^2 + 2\mu p_k (z_k - c_k y_k) + f_{k+1}(z_{k+1}, y_{k+1}) \right] \\ &= p_k (z_k - c_k y_k)(z_k - c_k y_k) + 2\mu p_k z_k - 2\mu p_k c_k y_k \\ &\quad + \mathbb{E} \left[\min_{u \in \Theta_0} f_{k+1}(z_{k+1}, y_{k+1}) \right] \\ &= p_k (z_k^2 - z_k c_k y_k - z_k c_k y_k + c_k^2 y_k^2) + 2p_k \mu z_k - 2p_k c_k \mu y_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \min_{u \in \Theta_0} \mathbb{E} [f_{k+1}(z_k e_k^0 + c_{k+1} q y_k + P_k^t u_k, q y_k)] \\
& = p_k (z_k^2 + c_k^2 y_k^2 - 2z_k c_k y_k) + 2p_k \mu z_k - 2p_k c_k \mu y_k \\
& \quad + \min_{u \in \Theta_0} \mathbb{E} [f_{k+1}(z_k e_k^0 + c_{k+1} q y_k + P_k^t u_k, q y_k)] \\
& = p_k z_k^2 + p_k c_k^2 y_k^2 - 2p_k z_k c_k y_k + 2p_k \mu z_k - 2p_k c_k \mu y_k \\
& \quad + \min_{u \in \Theta_0} \mathbb{E} [f_{k+1}(z_k e_k^0 + c_{k+1} q y_k + P_k^t u_k, q y_k)] , \\
f_T(z_T, y_T) & = p_T (z_T - c_T y_T)^2 + 2\mu p_T (z_T - c_T y_T) \\
& = p_T (z_T^2 - 2c_T z_T y_T + c_T^2 y_T^2) + 2\mu p_T (z_T - c_T y_T) \\
& = p_T z_T^2 - 2p_T c_T z_T y_T + p_T c_T^2 y_T^2 + 2\mu p_T z_T - 2\mu p_T c_T y_T,
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh persamaan Bellman sebagai Persamaan (5.18) berikut:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_k(z_k, y_k) = p_k z_k^2 + p_k c_k^2 y_k^2 - 2p_k z_k c_k y_k + 2p_k \mu z_k - 2p_k c_k \mu y_k \\ \quad + \min_{u \in \Theta_0} \mathbb{E} [f_{k+1}(z_k e_k^0 + c_{k+1} q y_k + P_k^t u_k, q y_k)] , \\ f_T(z_T, y_T) = p_T z_T^2 - 2p_T c_T z_T y_T + p_T c_T^2 y_T^2 + 2\mu p_T z_T - 2\mu p_T c_T y_T. \end{array} \right. \quad (5.18)$$

Ditetapkan $k = 0$, maka diperoleh nilai optimal dari Persamaan (5.13) adalah $f_0(z_0, y_0)$, sehingga

$$\begin{aligned}
f_0(z_0, y_0) & = p_0 z_0^2 + p_0 c_0^2 y_0^2 - 2p_0 c_0 z_0 y_0 + 2p_0 \mu z_0 - 2p_0 c_0 \mu y_0 \\
& \quad + \min_{u \in \Theta_0} \mathbb{E} [f_1(z_0 e_0^0 + c_1 q y_0 + P_0^t u_0, q y_0)] ,
\end{aligned}$$

Sedangkan untuk nilai optimal dari Persamaan (5.16) adalah

$$\begin{aligned}
f_0(z_0, y_0) - d^2 - 2\mu d & = p_0 z_0^2 + p_0 c_0^2 y_0^2 - 2p_0 c_0 z_0 y_0 + 2p_0 \mu z_0 - 2p_0 c_0 \mu y_0 \\
& \quad - d^2 - 2\mu d + \min_{u \in \Theta_0} \mathbb{E} [f_1(z_0 e_0^0 + c_1 q y_0 + P_0^t u_0, q y_0)] ,
\end{aligned}$$

Bentuk dari $f_k(z_k, y_k)$ dapat diperoleh dengan memformulasikan rangkaian $w_k, h_k, \alpha_k, \lambda_k, \gamma_k$ dan g_k .

$$w_k = p_k + w_{k+1} A_k, \quad w_T = p_T, \quad (5.19)$$

$$h_k = p_k + h_{k+1} J_k, \quad h_T = p_T, \quad (5.20)$$

$$\alpha_k = \alpha_{k+1} - \frac{h_{k+1}^2}{w_{k+1}} D_k, \quad \alpha_T = 0, \quad (5.21)$$

$$\lambda_k = \lambda_{k+1} C_k - p_k c_k + w_{k+1} c_{k+1} C_k, \quad \lambda_T = -c_T p_T, \quad (5.22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_k = \gamma_{k+1} q^2 + p_k c_k^2 + (w_{k+1} c_{k+1} + 2\lambda_{k+1}) c_{k+1} B_k - \frac{\lambda_{k+1}^2}{w_{k+1}} \\ \quad (q^2 - B_k), \\ \gamma_T = c_T^2 p_T, \end{array} \right. \quad (5.23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g_k = g_{k+1} q - p_k c_k + h_{k+1} \left(c_{k+1} M_k - \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} (q - M_k) \right), \\ g_T = -c_T p_T, \end{array} \right. \quad (5.24)$$

dimana

$$\left\{ \begin{array}{l} A_k = \mathbb{E}[(e_k^0)^2] - \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[e_k^0 P_k], \\ B_k = q^2 - q^2 \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k], \\ C_k = q \mathbb{E}[e_k^0] - q \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k], \\ D_k = \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k], \\ J_k = \mathbb{E}[e_k^0] - \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k], \\ M_k = q - q \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k], \end{array} \right. \quad (5.25)$$

dengan

$$\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] = \text{matriks invers dari } \mathbb{E}[P_k P_k^t],$$

$$\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] = (\mathbb{E}[P_k P_k^t])^{-1}.$$

Ditetapkan $\sum_{i=k}^{T-1} (\cdot) = 0$ dan $\prod_{i=k}^{T-1} (\cdot) = 1$. Dari Persamaan (5.19) dan (5.20) serta dengan menggunakan Lemma 2.19.1 didapatkan Persamaan (5.26).

$$\left\{ \begin{array}{l} w_k = w_{k+1}A_k + p_k = w_T \prod_{i=k}^{T-1} A_i + \sum_{i=k}^{T-1} p_i \prod_{j=k}^{i-1} A_j \\ = p_T \prod_{i=k}^{T-1} A_i + \sum_{i=k}^{T-1} p_i \prod_{j=k}^{i-1} A_j = \sum_{i=k}^T p_i \prod_{j=k}^{i-1} A_j, \\ h_k = h_{k+1}J_k + p_k = h_T \prod_{i=k}^{T-1} J_i + \sum_{i=k}^{T-1} p_i \prod_{j=k}^{i-1} J_j \\ = p_T \prod_{i=k}^{T-1} J_i + \sum_{i=k}^{T-1} p_i \prod_{j=k}^{i-1} J_j = \sum_{i=k}^T p_i \prod_{j=k}^{i-1} J_j, \end{array} \right. \quad (5.26)$$

untuk $k = 0, 1, \dots, T$. Dengan menggunakan Lemma 2.19.1, Persamaan (5.21) dan (5.22) juga didapatkan

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_k = \lambda_{k+1}C_k - p_k c_k + w_{k+1}c_{k+1}C_k \\ = \lambda_T \prod_{i=k}^{T-1} C_i + \sum_{i=k}^{T-1} (w_{i+1}c_{i+1}C_i - c_i p_i) \prod_{j=k}^{i-1} C_j \\ = -c_T p_T \prod_{i=k}^{T-1} C_i + \sum_{i=k}^{T-1} (w_{i+1}c_{i+1}C_i - c_i p_i) \prod_{j=k}^{i-1} C_j \\ = \sum_{i=k}^T w_{i+1}c_{i+1}C_i \prod_{j=k}^{i-1} C_j - \left(\sum_{i=k}^{T-1} (c_i p_i) - c_T p_T \right) \prod_{j=k}^{i-1} C_j \\ = \sum_{i=k}^T w_{i+1}c_{i+1} \prod_{j=k}^{i-1} C_j - \sum_{i=k}^{T-1} c_i p_i \prod_{j=k}^{i-1} C_j, \\ \alpha_k = \alpha_{k+1} - \frac{h_{k+1}^2}{w_{k+1}} D_k = \alpha_T \prod_{i=k}^{T-1} (\cdot) - \sum_{i=k}^{T-1} \frac{h_{i+1}^2}{w_{i+1}} D_i \prod_{j=k}^{i-1} (\cdot) \\ = (0)(1) - \sum_{i=k}^{T-1} \frac{h_{i+1}^2}{w_{i+1}} D_i(1) = 0 - \sum_{i=k}^{T-1} \frac{h_{i+1}^2}{w_{i+1}} D_i = - \sum_{i=k}^{T-1} \frac{h_{i+1}^2}{w_{i+1}} D_i. \end{array} \right. \quad (5.27)$$

Untuk $k = 0, 1, \dots, T - 1$, dimisalkan

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_k = c_k^2 p_k + (w_{k+1}c_{k+1} + 2\lambda_{k+1})c_{k+1}B_k - \frac{\lambda_{k+1}^2}{w_{k+1}}(q^2 - B_k), \\ \xi_k = -c_k p_k + h_{k+1} \left(c_{k+1}M_k - \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}}(q - M_k) \right). \end{array} \right. \quad (5.28)$$

Selanjutnya, Persamaan (5.23) dan Persamaan (5.24) dapat disederhanakan menjadi Persamaan (5.29)

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_k = \gamma_{k+1}q^2 + p_k c_k^2 + (w_{k+1}c_{k+1} + 2\lambda_{k+1})c_{k+1}B_k - \frac{\lambda_{k+1}^2}{w_{k+1}} \\ (q^2 - B_k) = \gamma_{k+1}q^2 + \eta_k, \\ g_k = g_{k+1}q - p_k c_k + h_{k+1} \left(c_{k+1}M_k - \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}}(q - M_k) \right) \\ = g_{k+1}q + \xi_k. \end{array} \right. \quad (5.29)$$

Dengan Lemma 2.19.1 dan Persamaan (5.29), untuk $k = 0, 1, \dots, T$, diperoleh persamaan γ_k dan g_k sebagai berikut

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_k = \gamma_{k+1}q^2 + \eta_k = \gamma_T \prod_{i=k}^{T-1} q^2 + \sum_{i=k}^{T-1} \eta_i \prod_{j=k}^{i-1} q^2 \\ = c_T^2 p_T (q^2)^T + (q^2)^{T-1} \sum_{i=k}^{T-1} \eta_i, \\ g_k = g_{k+1}q - \xi_k = g_T \prod_{i=k}^{T-1} q + \sum_{i=k}^{T-1} \xi_i \prod_{j=k}^{i-1} q \\ = -c_T p_T q^T + q^{T-1} \sum_{i=k}^{T-1} \xi_i. \end{array} \right. \quad (5.30)$$

Berdasarkan Asumsi 1, dapat diperoleh

$$A_k = \mathbb{E}[(e_k^0)^2] - [e_k^0 P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[e_k^0 P_k] > 0.$$

Teorema 5.5.1. Misalkan $z = z_k$ dan $y = y_k$, solusi untuk persamaan Bellman (5.18), yaitu fungsi nilai optimal dari masalah Persamaan (5.16) diberikan oleh

$$f_k(z, y) = w_k z^2 + 2\lambda_k z y + \gamma_k y^2 + 2h_k \mu z + 2g_k \mu y + \alpha_k \mu^2, \quad (5.31)$$

dimana $w_k, h_k, \alpha_k, \lambda_k, \gamma_k$ dan g_k didefinisikan oleh Persamaan (5.19)-(5.24) untuk $k = 0, 1, \dots, T$.

Bukti.

Teorema ini dibuktikan dengan induksi matematik pada k .

1. Untuk $k = 1$, dengan persamaan Persamaan (5.19)-(5.24), didapatkan

$$\begin{aligned} & w_1 z^2 + 2\lambda_1 z y + \gamma_1 y^2 + 2h_1 \mu z + 2g_1 \mu y + \alpha_1 \mu^2 \\ & = p_1 z^2 - 2p_1 c_1 z y + p_1 c_1^2 y^2 + 2p_1 \mu z - 2p_1 c_1 \mu y + (0) \mu^2 \end{aligned}$$

$$= p_1 z^2 - 2p_1 c_1 z y + p_1 c_1^2 y^2 + 2p_1 \mu z - 2p_1 c_1 \mu y.$$

Di samping itu berdasarkan persamaan Bellman (5.18), mengakibatkan bahwa

$$f_1(z, y) = p_1 z^2 - 2p_1 c_1 z y + p_1 c_1^2 y^2 + 2p_1 \mu z - 2p_1 c_1 \mu y.$$

Oleh karena itu, untuk $k = 1$ Persamaan (5.31) berlaku.

2. Untuk $k = T$, dengan Persamaan (5.19)-(5.24), didapatkan

$$\begin{aligned} w_T z^2 + 2\lambda_T z y + \gamma_T y^2 + 2h_T \mu z + 2g_T \mu y + \alpha_T \mu^2 \\ = p_T z^2 - 2p_T c_T z y + p_T c_T^2 y^2 + 2p_T \mu z - 2p_T c_T \mu y + (0)\mu^2 \\ = p_T z^2 - 2p_T c_T z y + p_T c_T^2 y^2 + 2p_T \mu z - 2p_T c_T \mu y. \end{aligned}$$

Di samping itu berdasarkan persamaan Bellman (5.18), mengakibatkan bahwa

$$f_T(z, y) = p_T z^2 - 2p_T c_T z y + p_T c_T^2 y^2 + 2p_T \mu z - 2p_T c_T \mu y.$$

Oleh karena itu, untuk $k = T$ Persamaan (5.31) berlaku.

3. Untuk $k = T + 1$, dengan Persamaan (5.19)-(5.24), didapatkan

$$\begin{aligned} w_{T+1} z^2 + 2\lambda_{T+1} z y + \gamma_{T+1} y^2 + 2h_{T+1} \mu z + 2g_{T+1} \mu y + \alpha_{T+1} \mu^2 \\ = p_{T+1} z^2 - 2p_{T+1} c_{T+1} z y + p_{T+1} c_{T+1}^2 y^2 + 2p_{T+1} \mu z \\ - 2p_{T+1} c_{T+1} \mu y + (0)\mu^2 \\ = p_{T+1} z^2 - 2p_{T+1} c_{T+1} z y + p_{T+1} c_{T+1}^2 y^2 + 2p_{T+1} \mu z \\ - 2p_{T+1} c_{T+1} \mu y. \end{aligned}$$

Di samping itu berdasarkan persamaan Bellman (5.18), mengakibatkan bahwa

$$\begin{aligned} f_{T+1}(z, y) = p_{T+1} z^2 - 2p_{T+1} c_{T+1} z y + p_{T+1} c_{T+1}^2 y^2 + 2p_{T+1} \mu z \\ - 2p_{T+1} c_{T+1} \mu y. \end{aligned}$$

Oleh karena itu, untuk $k = T + 1$ Persamaan (5.31) berlaku.

Anggap bahwa untuk $k + 1$, Persamaan (5.31) berlaku, yaitu

$$\begin{aligned} f_{k+1}(z, y) &= w_{k+1}z^2 + 2\lambda_{k+1}zy + \gamma_{k+1}y^2 + 2h_{k+1}\mu z + 2g_{k+1}\mu y + \alpha_{k+1}\mu^2 \\ &= w_{k+1}z^2 + \gamma_{k+1}y^2 + 2\lambda_{k+1}zy + 2h_{k+1}\mu z + 2g_{k+1}\mu y + \alpha_{k+1}\mu^2. \end{aligned}$$

Untuk k , dengan persamaan Bellman (5.18), didapatkan

$$\begin{aligned} f_k(z, y) &= p_k z^2 + p_k c_k^2 y^2 - 2p_k c_k z y + 2p_k \mu z - 2p_k c_k \mu y \\ &\quad + \min_{u_k} \mathbb{E}[f_{k+1}(ze_k^0 + c_{k+1}qy + P_k^t u_k, qy)] \\ &= p_k z^2 + p_k c_k^2 y^2 - 2p_k c_k z y + 2p_k \mu z - 2p_k c_k \mu y + w_{k+1} z^2 \mathbb{E}[(e_k^0)^2] \\ &\quad + w_{k+1} c_{k+1}^2 y^2 q^2 + 2w_{k+1} c_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + \gamma_{k+1} y^2 q^2 + 2\lambda_{k+1} y z \\ &\quad q \mathbb{E}[e_k^0] + 2\lambda_{k+1} c_{k+1} y^2 q^2 + 2h_{k+1} \mu z \mathbb{E}[e_k^0] + 2h_{k+1} \mu c_{k+1} y q \\ &\quad + 2g_{k+1} \mu q y + \alpha_{k+1} \mu^2 + \min_{u_k} \{w_{k+1} u_k^t \mathbb{E}[P_k P_k^t] u_k \\ &\quad + 2(w_{k+1} z \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] + (w_{k+1} c_{k+1} + \lambda_{k+1}) y q \mathbb{E}[P_k^t] \\ &\quad + h_{k+1} \mu \mathbb{E}[P_k^t]) u_k\}. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Diketahui dari Proposisi 2.19.1 bahwa $w_{k+1} > 0$. Disamping itu, diketahui bahwa $\mathbb{E}[P_k P_k^t]$ adalah definit positif berdasarkan Asumsi 1. Oleh karena itu, syarat perlu orde pertama untuk u_k memberikan strategi optimal. Hasil untuk Persamaan (5.32) secara lengkap dapat dilihat pada Lampiran 1.

Selanjutnya, ditentukan strategi optimal u_k dengan diketahui

$$\begin{aligned} H &= p_k z^2 + p_k c_k^2 y^2 - 2p_k c_k z y + 2p_k \mu z - 2p_k c_k \mu y + w_{k+1} z^2 \mathbb{E}[(e_k^0)^2] \\ &\quad + w_{k+1} c_{k+1}^2 y^2 q^2 + 2w_{k+1} c_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + \gamma_{k+1} y^2 q^2 + 2\lambda_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] \\ &\quad + 2\lambda_{k+1} c_{k+1} y^2 q^2 + 2h_{k+1} \mu z \mathbb{E}[e_k^0] + 2h_{k+1} \mu c_{k+1} y q + 2g_{k+1} \mu q y \\ &\quad + \alpha_{k+1} \mu^2 + \min_{u_k} \{w_{k+1} u_k^t \mathbb{E}[P_k P_k^t] u_k + 2(w_{k+1} z \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] + (w_{k+1} c_{k+1} \\ &\quad + \lambda_{k+1}) y q \mathbb{E}[P_k^t] + h_{k+1} \mu \mathbb{E}[P_k^t]) u_k\}. \end{aligned}$$

Strategi optimal diperoleh dengan menggunakan syarat $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$, sehingga

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u} &= 0 \\ \min_{u_k} \{ & w_{k+1} \mathbb{E}[P_k P_k^t] 2u_k \\ & + 2(w_{k+1} z \mathbb{E}[e_k^0 P_k] + (w_{k+1} c_{k+1} \\ & + \lambda_{k+1}) y q \mathbb{E}[P_k] + h_{k+1} \mu \mathbb{E}[P_k]) \} = 0 \\ & 2w_{k+1} u_k^* \mathbb{E}[P_k P_k^t] \\ & + 2(w_{k+1} z \mathbb{E}[e_k^0 P_k] + (w_{k+1} c_{k+1} \\ & + \lambda_{k+1}) y q \mathbb{E}[P_k] + h_{k+1} \mu \mathbb{E}[P_k]) = 0 \\ & 2w_{k+1} u_k^* \mathbb{E}[P_k P_k^t] = - 2(w_{k+1} z \mathbb{E}[e_k^0 P_k] + (w_{k+1} c_{k+1} + \lambda_{k+1}) \\ & \quad y q \mathbb{E}[P_k] + h_{k+1} \mu \mathbb{E}[P_k]) \\ & w_{k+1} u_k^* \mathbb{E}[P_k P_k^t] = - (w_{k+1} z \mathbb{E}[e_k^0 P_k] + (w_{k+1} c_{k+1} + \lambda_{k+1}) \\ & \quad y q \mathbb{E}[P_k] + h_{k+1} \mu \mathbb{E}[P_k]) \\ & w_{k+1} u_k^* \mathbb{E}[P_k P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] = - \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] (w_{k+1} z \mathbb{E}[e_k^0 P_k] + (w_{k+1} c_{k+1} \\ & \quad + \lambda_{k+1}) y q \mathbb{E}[P_k] + h_{k+1} \mu \mathbb{E}[P_k]) \\ & w_{k+1} u_k^* = - \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] (w_{k+1} z \mathbb{E}[e_k^0 P_k] + (w_{k+1} c_{k+1} \\ & \quad + \lambda_{k+1}) y q \mathbb{E}[P_k] + h_{k+1} \mu \mathbb{E}[P_k]), \end{aligned}$$

selanjutnya membagi kedua ruas dengan w_{k+1} , sehingga diperoleh strategi optimal sebagai Persamaan (5.33).

$$u_k^* = -\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \left(z \mathbb{E}[e_k^0 P_k] + y \left(c_{k+1} + \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} \right) q \mathbb{E}[P_k] + \mu \frac{h_{k+1}}{w_{k+1}} \mathbb{E}[P_k] \right). \quad (5.33)$$

Substitusi Persamaan (5.33) ke dalam Persamaan (5.32), sehingga menghasilkan

$$\begin{aligned} f_k(z, y) &= p_k z^2 + p_k c_k^2 y^2 - 2p_k c_k z y + 2p_k \mu z - 2p_k c_k \mu y + w_{k+1} z^2 \mathbb{E}[(e_k^0)^2] \\ & \quad + w_{k+1} c_{k+1}^2 y^2 q^2 + 2w_{k+1} c_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + \gamma_{k+1} y^2 q^2 + 2\lambda_{k+1} \\ & \quad y z q \mathbb{E}[e_k^0] + 2\lambda_{k+1} c_{k+1} y^2 q^2 + 2h_{k+1} \mu z \mathbb{E}[e_k^0] + 2h_{k+1} \mu c_{k+1} y q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2g_{k+1}\mu qy + \alpha_{k+1}\mu^2 + w_{k+1}u_k^t \mathbb{E}[P_k P_k^t] u_k^* \\
& + 2(w_{k+1}z \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] + (w_{k+1}c_{k+1} + \lambda_{k+1})yq \mathbb{E}[P_k^t] + h_{k+1}\mu \mathbb{E}[P_k^t] u_k^*) \\
= & p_k z^2 + p_k c_k^2 y^2 - 2p_k c_k z y + 2p_k \mu z - 2p_k c_k \mu y + w_{k+1} z^2 \mathbb{E}(e_k^0)^2 \\
& + w_{k+1} c_{k+1}^2 y^2 q^2 + 2w_{k+1} c_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + \gamma_{k+1} y^2 q^2 + 2\lambda_{k+1} \\
& y z q \mathbb{E}[e_k^0] + 2\lambda_{k+1} c_{k+1} y^2 q^2 + 2h_{k+1} \mu z \mathbb{E}[e_k^0] + 2h_{k+1} \mu c_{k+1} y q \\
& + 2g_{k+1} \mu q y + \alpha_{k+1} \mu^2 - (w_{k+1} z \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] + (w_{k+1} c_{k+1} + \lambda_{k+1}) \\
& y q \mathbb{E}[P_k^t] + h_{k+1} \mu \mathbb{E}[P_k^t]) \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \\
& \left(z \mathbb{E}[e_k^0 P_k] + y \left(c_{k+1} + \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} \right) q \mathbb{E}[P_k] + \mu \frac{h_{k+1}}{w_{k+1}} \mathbb{E}[P_k] \right). \tag{5.34}
\end{aligned}$$

Pembuktian selengkapnya untuk Persamaan (5.34) dapat dilihat pada Lampiran 2. Kemudian, dengan menyederhanakan Persamaan (5.34) dan dengan Persamaan (5.25), didapatkan

$$\begin{aligned}
f_k(z, y) = & p_k z^2 + p_k c_k^2 y^2 - 2p_k c_k z y + 2p_k \mu z - 2p_k c_k \mu y + w_{k+1} z^2 \mathbb{E}(e_k^0)^2 \\
& + w_{k+1} c_{k+1}^2 y^2 q^2 + 2w_{k+1} c_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + \gamma_{k+1} y^2 q^2 + 2\lambda_{k+1} \\
& y z \mathbb{E}[e_k^0] + 2\lambda_{k+1} c_{k+1} y^2 q^2 + 2h_{k+1} \mu z \mathbb{E}[e_k^0] + 2h_{k+1} \mu c_{k+1} y q \\
& + 2g_{k+1} \mu q y + \alpha_{k+1} \mu^2 - (w_{k+1} z \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] + (w_{k+1} c_{k+1} + \lambda_{k+1}) \\
& y q \mathbb{E}[P_k^t] + h_{k+1} \mu \mathbb{E}[P_k^t]) \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \\
& \left(z \mathbb{E}[e_k^0 P_k] + y \left(c_{k+1} + \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} \right) q \mathbb{E}[P_k] + \mu \frac{h_{k+1}}{w_{k+1}} \mathbb{E}[P_k] \right) \\
= & (p_k + w_{k+1} A_k) z^2 + 2[-p_k c_k + (w_{k+1} c_{k+1} + \lambda_{k+1}) C_k] z y + 2(p_k \\
& + h_{k+1} J_k) \mu z + \left(\alpha_{k+1} - \frac{h_{k+1}^2}{w_{k+1}} D_k \right) \mu^2 \\
& + \left[p_k c_k^2 + \gamma_{k+1} q^2 + (w_{k+1} c_{k+1}^2 + 2\lambda_{k+1} c_{k+1}) B_k - \frac{\lambda_{k+1}^2}{w_{k+1}} (q^2 - B_k) \right] y^2 \\
& + 2 \left[-p_k c_k + g_{k+1} q + h_{k+1} \left(c_{k+1} M_k - \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} (q - M_k) \right) \right] \mu y.
\end{aligned}$$

Hasil selengkapnya dapat dilihat pada Lampiran 3. Selanjutnya, dengan

mensubstitusikan Persamaan (5.19)-(5.24) ke dalam Persamaan (5.34), mengakibatkan

$$\begin{aligned}
f_k(z, y) &= p_k z^2 + p_k c_k^2 y^2 - 2p_k c_k z y + 2p_k \mu z - 2p_k c_k \mu y + w_{k+1} z^2 \mathbb{E}[(e_k^0)^2] \\
&\quad + w_{k+1} c_{k+1}^2 y^2 q^2 + 2w_{k+1} c_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + \gamma_{k+1} y^2 q^2 + 2\lambda_{k+1} \\
&\quad y z q \mathbb{E}[e_k^0] + 2\lambda_{k+1} c_{k+1} y^2 q^2 + 2h_{k+1} \mu z \mathbb{E}[e_k^0] + 2h_{k+1} \mu c_{k+1} y q \\
&\quad + 2g_{k+1} \mu q y + \alpha_{k+1} \mu^2 - (w_{k+1} z \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] + (w_{k+1} c_{k+1} + \lambda_{k+1}) \\
&\quad y q \mathbb{E}[P_k^t] + h_{k+1} \mu \mathbb{E}[P_k^t]) \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \\
&\quad \left(z \mathbb{E}[e_k^0 P_k] + y \left(c_{k+1} + \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} \right) q \mathbb{E}[P_k] + \mu \frac{h_{k+1}}{w_{k+1}} \mathbb{E}[P_k] \right) \\
&= (p_k + w_{k+1} A_k) z^2 + 2(\lambda_{k+1} C_k - p_k c_k + w_{k+1} c_{k+1} C_k) z y \\
&\quad + \left(\gamma_{k+1} q^2 + p_k c_k^2 + (w_{k+1} c_{k+1} + 2\lambda_{k+1}) c_{k+1} B_k - \frac{\lambda_{k+1}^2}{w_{k+1}} (q^2 - B_k) \right) \\
&\quad y^2 + 2(p_k + h_{k+1} J_k) \mu z \\
&\quad + 2 \left(g_{k+1} q - p_k c_k + h_{k+1} \left(c_{k+1} M_k - \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} (q - M_k) \right) \right) \mu y \\
&\quad + \left(\alpha_{k+1} - \frac{h_{k+1}^2}{w_{k+1}} D_k \right) \mu^2 \\
f_k(z, y) &= w_k z^2 - 2\lambda_k z y + \gamma_k y^2 + 2h_k \mu z + 2g_k \mu y + \alpha_k \mu^2. \tag{5.35}
\end{aligned}$$

Hasil Persamaan (5.35) selengkapnya dapat dilihat pada Lampiran 4. Persamaan (5.35) menunjukkan bahwa Persamaan (5.30) terpenuhi untuk k . Dengan prinsip induksi matematik Persamaan (5.31) berlaku untuk $k = 0, 1, \dots, T$ dan teorema terbukti. \square

Teorema 5.5.2. *Strategi optimal untuk Persamaan (5.16) diberikan oleh Persamaan (5.33).*

Bukti.

Karena fungsi nilai optimal dari Persamaan (5.16) adalah Persamaan (5.31), sehingga memiliki fungsi nilai optimal untuk persamaan Bellman (5.32). Hal

ini berakibat bahwa strategi optimal dari Persamaan (5.16) adalah turunan pertama terhadap u_k dari Persamaan (5.32), dengan turunan pertamanya adalah Persamaan (5.33). Terbukti bahwa strategi optimal untuk Persamaan (5.16) adalah Persamaan (5.33). \square

5.6 Strategi Investasi Efisien dan Batasan Efisien

Strategi investasi efisien dan batasan efisien untuk model penelitian diberikan pada subbab ini. Berdasarkan analisis sebelumnya, diketahui bahwa nilai optimal dari Persamaan (5.13) adalah

$$H(z_0, y_0, \mu) = f_0(z_0, y_0) - d^2 - 2\mu d, \quad (5.36)$$

dimana $z_0 = x_0 + cy_0$. Dengan Teorema 5.5.1 dan Persamaan (5.36), mengakibatkan

$$\begin{aligned} H(z_0, y_0) &= w_0 z_0^2 + 2\lambda_0 z_0 y_0 + \gamma_0 y_0^2 + 2h_0 \mu z_0 + 2g_0 \mu y_0 + \alpha_0 \mu^2 - d^2 - 2\mu d \\ &= \alpha_0 \mu^2 + 2\mu h_0 z_0 + 2\mu g_0 y_0 - 2\mu d + w_0 z_0^2 + 2\lambda_0 z_0 y_0 + \gamma_0 y_0^2 - d^2 \\ &= \alpha_0 \mu^2 + 2\mu(h_0 z_0 + g_0 y_0 - d) + w_0 z_0^2 + 2\lambda_0 z_0 y_0 + \gamma_0 y_0^2 \\ &\quad - d^2. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Nilai optimal dari Persamaan (5.10) yang ekivalen dengan Persamaan (5.12) dapat diperoleh dengan memaksimumkan $H(z_0, y_0, \mu)$

$$\begin{aligned} Var^*[x_{T\tau}] &= \max_{\mu} f_0(z_0, y_0) - d^2 - 2\mu d \\ &= \max_{\mu} H(z_0, y_0, \mu). \end{aligned} \quad (5.38)$$

Proposisi 2.19.1 menunjukkan bahwa $\alpha_0 < 0$. Oleh karena itu, dengan Persamaan (5.37), solusi optimal dari optimasi Persamaan (5.38) ada. Dengan kondisi orde pertama solusi optimal diperoleh dengan syarat $\frac{\partial H}{\partial \mu} = 0$.

$$\frac{\partial H}{\partial \mu} = 0$$

$$2\alpha_0\mu + 2(h_0z_0 + g_0y_0 - d) = 0$$

$$(2\alpha_0\mu + 2(h_0z_0 + g_0y_0 - d) = 0) + (-2(h_0z_0 + g_0y_0 - d))$$

$$\begin{aligned} 2\alpha_0\mu &= -2(h_0z_0 + g_0y_0 - d) \\ \left(2\alpha_0\mu &= -2(h_0z_0 + g_0y_0 - d) \right) \left(\frac{1}{2\alpha_0} \right) \\ \mu^* &= -\frac{h_0z_0 + g_0y_0 - d}{\alpha_0}. \end{aligned}$$

Jadi diperoleh solusi optimal sebagai Persamaan (5.39) berikut:

$$\mu^* = -\frac{h_0z_0 + g_0y_0 - d}{\alpha_0}. \quad (5.39)$$

Substitusi Persamaan (5.39) ke dalam Persamaan (5.33) dan diperhatikan kondisi $z = z_k, y = y_k$ dan $z_k = x_k + c_k y_k$, sehingga didapatkan strategi optimal dari mean-varian Persamaan (5.10) yaitu strategi investasi efisien sebagai Persamaan (5.40)

$$\begin{aligned} u_k^* &= -\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \left[z_k \mathbb{E}[e_k^0 P_k] + y_k \left(c_{k+1} + \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} \right) q \mathbb{E}[P_k] + \mu^* \frac{h_{k+1}}{w_{k+1}} \mathbb{E}[P_k] \right] \\ &= -\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \left[(x_k + c_k y_k) \mathbb{E}[e_k^0 P_k] + y_k \left(c_{k+1} + \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} \right) q \mathbb{E}[P_k] \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{h_0 z_0 + g_0 y_0 - d}{\alpha_0} \right) \left(\frac{h_{k+1}}{w_{k+1}} \mathbb{E}[P_k] \right) \right] \\ &= -\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \left[(x_k + c_k y_k) \mathbb{E}[e_k^0 P_k] + y_k \left(c_{k+1} + \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} \right) q \mathbb{E}[P_k] \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{h_0(x_0 + c_0 y_0) + g_0 y_0 - d}{\alpha_0} \right) \left(\frac{h_{k+1}}{w_{k+1}} \mathbb{E}[P_k] \right) \right] \\ u_k^* &= -\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \left[(x_k + c_k y_k) \mathbb{E}[e_k^0 P_k] + y_k \left(c_{k+1} + \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} \right) q \mathbb{E}[P_k] \right] \end{aligned}$$

$$- \left. \frac{(h_0(x_0 + c_0 y_0) + g_0 y_0 - d)h_{k+1}}{\alpha_0 w_{k+1}} \mathbb{E}[P_k] \right]. \quad (5.40)$$

Kemudian substitusikan Persamaan (5.39) ke dalam Persamaan (5.38) dan diketahui bahwa $z_0 = x_0 + c_0 y_0$, sehingga nilai optimal dari mean-varian Persamaan (5.10), yaitu varian minimum yang diperoleh sebagai berikut

$$\begin{aligned} Var^*[x_{T^\tau}] &= \max_{\mu} H(z_0, y_0, \mu) \\ &= \max_{\mu} \{ \alpha_0 \mu^2 + 2\mu(h_0 z_0 + g_0 y_0 - d) + w_0 z_0^2 + 2\lambda_0 z_0 y_0 + \gamma_0 y_0^2 - d^2 \} \\ &= - \frac{1}{\alpha_0} (-2\lambda_0 y_0 \alpha_0 x_0 - w_0 \alpha_0 c_0^2 y_0^2 - 2\lambda_0 y_0^2 \alpha_0 c_0 - 2w_0 \alpha_0 x_0 c_0 y_0 \\ &\quad - w_0 \alpha_0 x_0^2 - \gamma_0 y_0^2 \alpha_0 + d^2 \alpha_0 + 2h_0 c_0 y_0^2 g_0 + d^2 + 2h_0^2 x_0 c_0 y_0 \\ &\quad + 2h_0 x_0 g_0 y_0 - 2g_0 y_0 d - 2h_0 c_0 y_0 d + h_0^2 c_0^2 y_0^2 - 2h_0 x_0 d + h_0^2 x_0^2 \\ &\quad + g_0^2 y_0^2) \\ &= - \frac{1 + \alpha_0}{\alpha_0} \left(d - \frac{h_0(x_0 + c_0 y_0) + g_0 y_0}{1 + \alpha_0} \right)^2 + w_0 (x_0 + c_0 y_0)^2 \\ &\quad + 2\lambda_0 (x_0 + c_0 y_0) y_0 + \gamma_0 y_0^2 - \frac{1}{1 + \alpha_0} (h_0(x_0 + c_0 y_0) \\ &\quad + g_0 y_0)^2. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Adapun untuk Persamaan (5.41) selengkapnya dapat dilihat pada Lampiran 5.

5.7 Simulasi Numerik

Diberikan simulasi numerik dari hasil yang sudah diperoleh pada sub-bab sebelumnya. Dalam penelitian ini dilakukan tiga simulasi, yaitu:

1. Simulasi I dimana terdapat iuran pensiun untuk tiap periode dan waktu akhir bukan merupakan nilai deterministik. Dengan kata lain bahwa $c_k > 0$ dan $\beta(s) > 0$.
2. Simulasi II merupakan kasus dimana tidak ada iuran pensiun untuk tiap periodenya. Dengan kata lain bahwa $c_k = 0$.
3. Simulasi III dengan waktu akhir deterministik yang berakibat $\beta(s) = 0$.

Diasumsikan bahwa anggota dana pensiun iuran pasti masuk program dana pensiun pada waktu 0 dan direncanakan pensiun saat $T = 20$ dan dianggap bahwa intensitas kematian $\beta(s)$ selalu bernilai tetap untuk setiap $s \in [0, T]$, atau dikatakan bahwa $\beta(s)$ bebas terhadap s . Dana awal yang dibayarkan oleh anggota yaitu sebesar $x_0 = 12$ dan gaji awal anggota sebesar $y_0 = 4$ dengan parameter yang bebas terhadap k .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[P_k P_k^t] &= \begin{pmatrix} 0.2365 & 0.0719 & 0.1184 \\ 0.0719 & 0.3449 & 0.1378 \\ 0.1184 & 0.1378 & 0.3262 \end{pmatrix}, & \mathbb{E}[e_k^0 P_k] &= \begin{pmatrix} -0.0827 \\ -0.0924 \\ -0.0446 \end{pmatrix}, \\ \mathbb{E}[P_k] &= \begin{pmatrix} -0.0255 \\ 0.0015 \\ 0.0004 \end{pmatrix}, & \mathbb{E}[e_k^0] &= 1.0430, \\ & & \mathbb{E}[(e_k^0)^2] &= 1.2468, \\ & & q &= 1.0284. \end{aligned}$$

5.7.1 Simulasi I dengan $c_k > 0$ dan $\beta(s) > 0$

Diasumsikan bahwa setiap anggota harus membayar iuran tiap awal periode untuk $k = 0, 1, \dots, T$ dan waktu akhir bukan merupakan nilai deterministik. Pada kasus ini didapatkan strategi investasi efisien berikut:

$$\begin{aligned} u_k^* &= \begin{pmatrix} 0.3174 \\ 0.2324 \\ -0.0766 \end{pmatrix} (x_k + c_k y_k) + y_k \left(c_k + \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} \right) \begin{pmatrix} 0.1380 \\ -0.0153 \\ -0.0449 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{(h_0(12 + 4c_0) + 4g_0 - d)h_{k+1}}{\alpha_0 w_{k+1}} \begin{pmatrix} 0.1342 \\ -0.0149 \\ -0.0436 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.42)$$

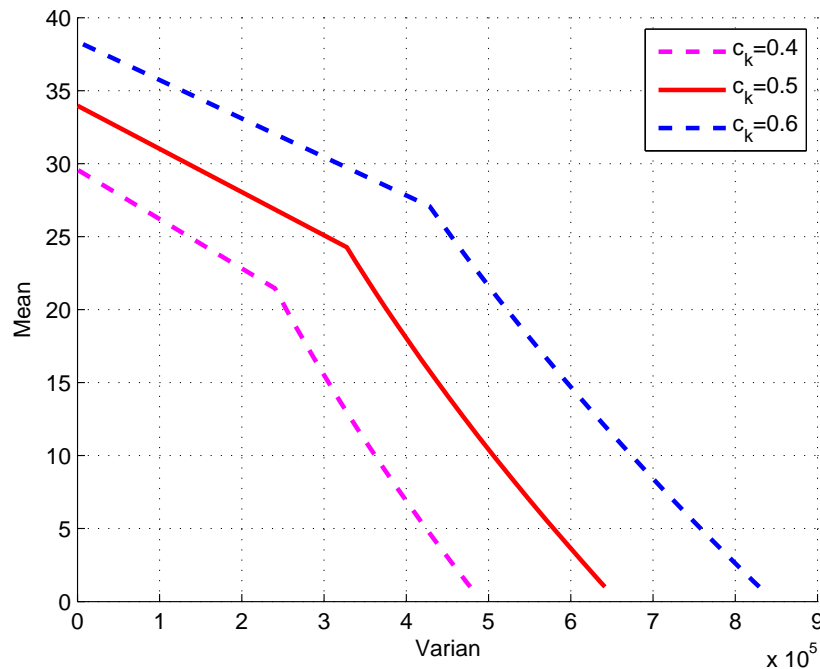
dan batasan efisien yaitu

$$\begin{aligned} Var^*[x_{T^r}] &= -\frac{1 + \alpha_0}{\alpha_0} \left(d - \frac{h_0(12 + 4c_0) + 4g_0}{1 + \alpha_0} \right)^2 + w_0(12 + 4c_0)^2 \\ &+ 8\lambda_0(12 + 4c_0) + 16\gamma_0 - \frac{1}{1 + \alpha_0} (h_0(12 + 4c_0) + 4g_0)^2. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Simulasi I dibagi menjadi dua kasus. Kasus pertama diberikan dengan

nilai $\beta(s) = 0.1$ dan $c_k = 0.4, 0.5, 0.6$. Kasus kedua diberikan dengan $c_k = 0.4$ dan $\beta(s) = 0.1, 0.25, 0.5$.

Hasil Simulasi I untuk kasus pertama dapat dilihat pada Gambar 5.1.



Gambar 5.1. Simulasi I untuk Nilai c_k yang Berbeda

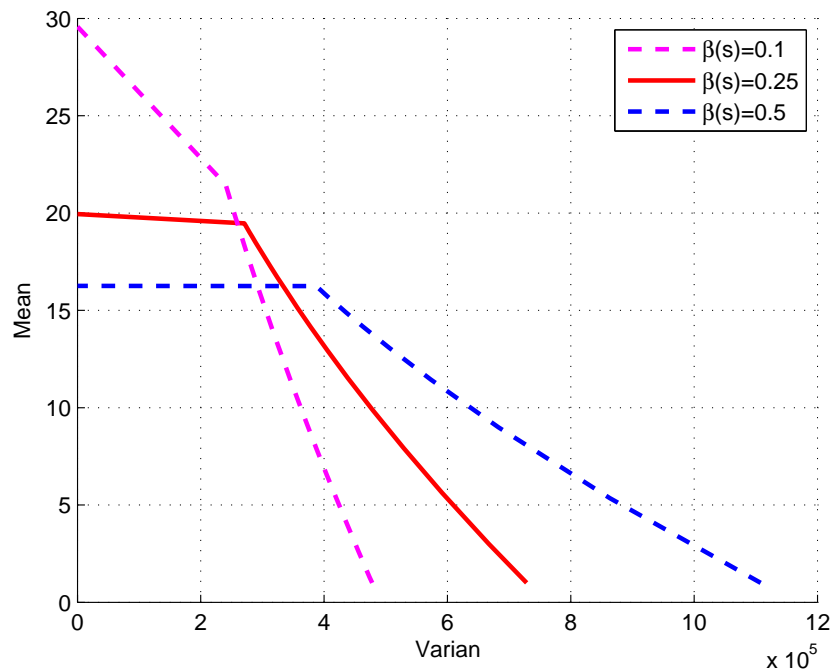
Pada Gambar 5.1 terlihat bahwa ketika $c_k = 0.4$ nilai titik efisien saat $k = 0$, $k = 16$ dan saat $k = 20$ secara berturut-turut yaitu $(4.7789 \times 10^5, 1.0000)$, $(2.6499 \times 10^5, 18.9015)$ dan $(0.0000, 29.5755)$. Dalam hal ini titik efisien merupakan pasangan terurut dari sumbu varian dan sumbu mean dengan varian merupakan jarak antar mean yang merepresentasikan risiko yang ditanggung oleh anggota dan mean merupakan pusat dari sebaran data d , yaitu pusat sebaran data ekspektasi kekayaan terakhir tiap periode k . Untuk $c_k = 0.5$ titik efisien saat $k = 0$, $k = 16$ dan $k = 20$ bernilai $(6.4153 \times 10^5, 1.0000)$, $(3.6181 \times 10^5, 21.2326)$ dan $(0.0000, 33.9693)$. Ketika $c_k = 0.6$ titik efisien untuk $k = 0$, $k = 16$ dan titik efisien untuk $k = 20$ bernilai $(8.2928 \times 10^5, 1.0000)$, $(4.7373 \times 10^5, 23.5637)$ dan $(0.0000, 38.3632)$ secara berturut-turut. Hasil Simulasi I dengan kasus pertama untuk batasan efisien

secara lebih rinci dapat dilihat pada Lampiran 9.

Strategi investasi efisien ketika $c_k = 0.4$ pada saat $k = 0, 16, 19$ bernilai $(60.7373 \quad -3.0985 \quad -19.3928)^t$, $(438.7198 \quad -36.2637 \quad -141.4587)^t$ dan $(642.4168 \quad -56.7325 \quad -207.4987)^t$, secara berturut-turut. Ketika $c_k = 0.5$ dengan waktu yang sama, didapatkan strategi investasi efisien dengan nilai $(69.9940 \quad -4.0183 \quad -22.3928)^t$, $(513.1907 \quad -42.2268 \quad -165.4516)^t$ dan $(750.7189 \quad -65.9166 \quad -242.4422)^t$, secara berturut-turut. Ketika prosentase iuran sebesar 0.6 dengan waktu yang sama secara berturut turut diperoleh strategi investasi sebesar $(79.2506 \quad -4.9381 \quad -25.3929)^t$, $(587.6617 \quad -48.1898 \quad -189.4445)^t$ dan $(859.0211 \quad -75.1008 \quad -277.3857)^t$. Hasil perolehan strategi investasi efisien untuk Simulasi I kasus pertama secara lebih rinci dapat dilihat pada Lampiran 13.

Berdasarkan hasil simulasi numerik dapat diketahui bahwa semakin tinggi nilai c_k , semakin tinggi ekspektasi kekayaan terakhir yang diperoleh untuk periode $k > 0$ dan semakin tinggi pula risiko yang ditanggung oleh anggota untuk periode $k < 20$. Begitu juga dengan strategi investasi efisien yang menunjukkan bahwa semakin tinggi nilai c_k , semakin besar jumlah yang diinvestasikan dalam aset ke-1 selama periode ke- k , sedangkan untuk aset ke-2 dan ke-3 jumlah pengembalian investasi semakin besar untuk setiap periode k .

Hasil Simulasi I untuk kasus kedua dapat dilihat pada Gambar 5.2.



Gambar 5.2. Simulasi I untuk Nilai $\beta(s)$ yang Berbeda

Pada Gambar 5.2 terlihat bahwa saat $\beta(s) = 0.1$ nilai titik efisien ketika $k = 0$, $k = 16$ dan ketika $k = 20$ secara berturut-turut bernilai $(4.7789 \times 10^5, 1.0000)$, $(2.6499 \times 10^5, 18.9015)$ dan $(0.0000, 29.5755)$. Saat $\beta(s) = 0.25$ titik efisien untuk $k = 0$, $k = 16$ dan $k = 20$ bernilai $(7.2838 \times 10^5, 1.0000)$, $(2.7929 \times 10^5, 19.0034)$ dan $(0.0000, 19.9421)$. Ketika $\beta(s) = 0.5$ titik efisien saat $k = 0$, $k = 16$ dan $k = 20$ secara berturut-turut sebesar $(1.1081 \times 10^6, 1.0000)$, $(0.3874 \times 10^6, 16.2356)$ dan $(0.0000, 16.2522)$. Hasil simulasi secara lebih rinci disajikan pada Lampiran 10.

Ketika $\beta(s) = 0.1$ untuk $k = 0, 16, 19$ diperoleh strategi investasi efisien $(60.7373 \quad -3.0985 \quad -19.3928)^t$, $(438.7198 \quad -36.2637 \quad -141.4587)^t$ dan $(642.4168 \quad -56.7325 \quad -207.4987)^t$, secara berturut-turut. Saat $\beta(s) = 0.25$ dengan periode yang sama diperoleh $(127.4381 \quad -10.4974 \quad -41.0869)^t$, $(813.8696 \quad -77.8779 \quad -263.4743)^t$ dan $(1246.7822 \quad -123.7727 \quad -404.0656)^t$. Untuk hasil strategi investasi efisien ketika $\beta(s) = 0.5$ dengan periode yang sama diperoleh

$(238.4294 \quad -22.8093 \quad -77.1863)^t$, $(1502.5691 \quad -154.2730 \quad -487.4704)^t$ dan $(2347.0153 \quad -245.8179 \quad -761.9110)^t$. Secara lebih lengkap hasil strategi investasi efisien dapat dilihat pada Lampiran 14.

Berdasarkan hasil simulasi numerik dapat diketahui bahwa semakin tinggi nilai $\beta(s)$, nilai varian akan semakin besar untuk $k < 20$, sedangkan nilai mean akan semakin kecil untuk periode $k > 0$. Hal ini berarti bahwa ketika nilai intensitas kematian yang diberikan semakin besar, ekspektasi kekayaan terakhir yang akan didapatkan semakin kecil saat $k > 0$, akan tetapi risiko yang ditanggung oleh anggota untuk periode $k < 20$ akan semakin tinggi. Hasil strategi investasi efisien menunjukkan bahwa semakin tinggi $\beta(s)$, semakin besar jumlah yang harus diinvestasikan dalam aset ke-1 selama periode ke- k . Pada aset ke-2 dan ke-3 menunjukkan nilai u_k^2 dan u_k^3 semakin bernilai negatif. Dengan kata lain pengembalian investasi pada anggota semakin besar.

5.7.2 Simulasi II ($c_k = 0$ dan $\beta(s) > 0$)

Ditetapkan $c_k = 0$ untuk $k = 0, 1, \dots, T$ di dalam simulasi ini. Diketahui dari Persamaan (5.27) bahwa $\lambda_k = 0$ untuk $k = 0, 1, \dots, T$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_k = \sum_{i=k}^{T-1} w_{i+1} c_{i+1} \prod_{j=k}^i C_j - \sum_{i=k}^T c_i p_i \prod_{j=k}^{i-1} C_j \\ = \sum_{i=k}^{T-1} w_{i+1}(0) \prod_{j=k}^i C_j - \sum_{i=k}^T (0) p_i \prod_{j=k}^{i-1} C_j = 0, \\ \alpha_k = \sum_{i=k}^{T-1} \frac{h_{i+1}^2}{w_{i+1}} D_i, \quad k = 0, 1, \dots, T, \end{array} \right.$$

maka dengan Persamaan (5.28), $\eta_k = \xi_k = 0$ untuk $k = 0, 1, \dots, T - 1$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_k = c_k^2 p_k + (w_{k+1} c_{k+1} + 2\lambda_{k+1}) c_{k+1} B_k - \frac{\lambda_{k+1}^2}{w_{k+1}} (q^2 - B_k) \\ \quad = (0)^2 p_k + (w_{k+1} c_{k+1} + 2(0))(0) B_k - \frac{(0)^2}{w_{k+1}} (q^2 - B_k) = 0, \\ \xi_k = -c_k p_k h_{k+1} \left(c_{k+1} M_k - \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} (q - M_k) \right) \\ \quad = -(0) p_k h_{k+1} \left((0) M_k - \frac{0}{w_{k+1}} (q - M_k) \right) = 0, \end{array} \right.$$

Oleh karena itu, berdasarkan Persamaan (5.30), diperoleh $\gamma_k = g_k = 0$ untuk $k = 0, 1, \dots, T$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_k = c_T^2 p_T (q^2)^T + (q^2)^{T-1} \sum_{i=k}^{T-1} \eta_i = (0)^2 p_T (q^2)^T + (q^2)^{T-1} \sum_{i=k}^{T-1} (0) = 0, \\ g_k = -c_T p_T q^T + q^{T-1} \sum_{i=k}^{T-1} \xi_i = -(0) p_T q^T + q^{T-1} \sum_{i=k}^{T-1} (0) = 0. \end{array} \right.$$

Dengan demikian, berdasar pada Persamaan (5.40) dan Persamaan (5.41), strategi investasi efisien dan batasan efisien dapat disederhanakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u_k^* &= -\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \left[(x_k + c_k y_k) \mathbb{E}[e_k^0 P_k] + y_k \left(c_{k+1} + \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} \right) q \mathbb{E}[P_k] \right. \\ &\quad \left. - \frac{(h_0(x_0 + c_0 y_0) + g_0 y_0 - d) h_{k+1}}{\alpha_0 w_{k+1}} \mathbb{E}[P_k] \right] \\ &= -\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \left[(x_k + c_k y_k) \mathbb{E}[e_k^0 P_k] + y_k \left(0 + \frac{0}{w_{k+1}} \right) q \mathbb{E}[P_k] \right. \\ &\quad \left. - \frac{(h_0(x_0 + (0) y_0) + (0) y_0 - d) h_{k+1}}{\alpha_0 w_{k+1}} \mathbb{E}[P_k] \right] \\ u_k^* &= -\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \left(x_k \mathbb{E}[e_k^0 P_k] - \frac{(12h_0 - d) h_{k+1}}{\alpha_0 w_{k+1}} \mathbb{E}[P_k] \right), \end{aligned} \quad (5.44)$$

dan

$$\begin{aligned} Var^*[x_{T\tau}] &= -\frac{1 + \alpha_0}{\alpha_0} \left(d - \frac{h_0(x_0 + c_0 y_0) + g_0 y_0}{1 + \alpha_0} \right)^2 + w_0 (x_0 + c_0 y_0)^2 \\ &\quad + 2\lambda_0 (x_0 + c_0 y_0) y_0 + \gamma_0 y_0^2 - \frac{1}{1 + \alpha_0} (h_0(x_0 + c_0 y_0) + g_0 y_0)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1+\alpha_0}{\alpha_0} \left(d - \frac{h_0(x_0 + (0)y_0) + (0)y_0}{1+\alpha_0} \right)^2 + w_0(x_0 + (0)y_0)^2 \\
&\quad + 2(0)(x_0 + (0)y_0)y_0 + (0)y_0^2 - \frac{1}{1+\alpha_0}(h_0(x_0 + (0)y_0) + (0)y_0)^2 \\
&= -\frac{1+\alpha_0}{\alpha_0} \left(d - \frac{h_0x_0}{1+\alpha_0} \right)^2 + w_0(x_0)^2 - \frac{h_0^2}{1+\alpha_0}x_0^2 \\
&= -\frac{1+\alpha_0}{\alpha_0} \left(d - \frac{h_0x_0}{1+\alpha_0} \right)^2 + \left(w_0 - \frac{h_0^2}{1+\alpha_0} \right) x_0^2, \\
&= -\frac{1+\alpha_0}{\alpha_0} \left(d - \frac{12h_0}{1+\alpha_0} \right)^2 + \left(w_0 - \frac{h_0^2}{1+\alpha_0} \right) 144, \tag{5.45}
\end{aligned}$$

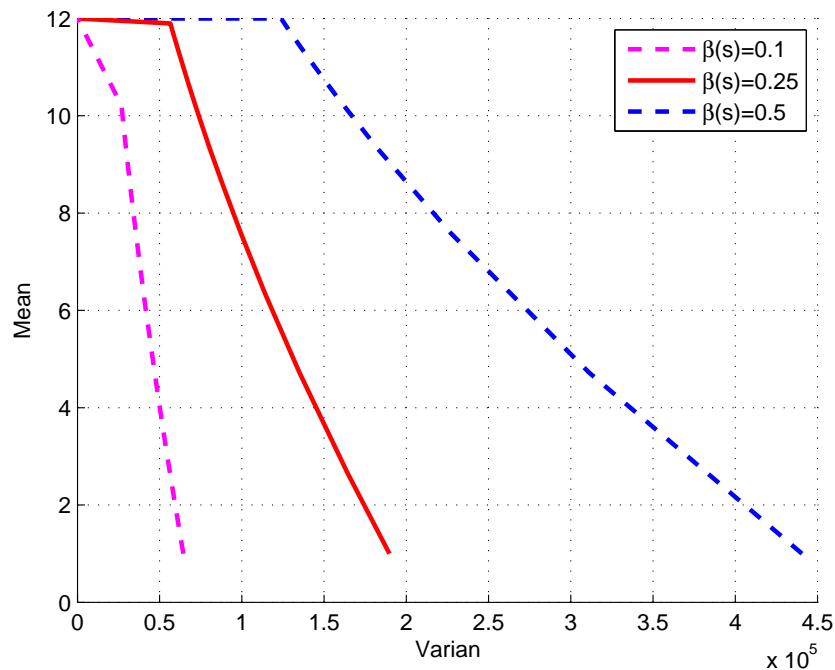
dengan w_k, h_k dan α_k juga diberikan oleh Persamaan (5.26) dan Persamaan (5.27), sehingga secara berturut-turut strategi investasi dan batasan efisien pada simulasi ini diperoleh sebagai berikut:

$$u_k^* = \begin{pmatrix} 0.3174 \\ 0.2324 \\ -0.0766 \end{pmatrix} x_k + \frac{(12h_0 - d)h_{k+1}}{\alpha_0 w_{k+1}} \begin{pmatrix} 0.1342 \\ -0.0149 \\ -0.0436 \end{pmatrix},$$

dan

$$Var^*[x_{T^r}] = -\frac{1+\alpha_0}{\alpha_0} \left(d - \frac{12h_0}{1+\alpha_0} \right)^2 + 144 \left(w_0 - \frac{h_0^2}{1+\alpha_0} \right).$$

Diberikan tiga nilai $\beta(s)$ yang berbeda pada Simulasi II, yaitu sebesar 0.1, 0.25 dan 0.5. Hasil dari simulasi kedua disajikan di dalam Gambar 5.3.



Gambar 5.3. Simulasi II untuk Nilai $\beta(s)$ yang Berbeda

Gambar 5.3 menunjukkan bahwa saat $\beta(s) = 0.1$ nilai titik efisien untuk $k = 0$, $k = 16$ dan $k = 20$ secara berturut-turut adalah $(6.4431 \times 10^4, 1.0000)$, $(2.8714 \times 10^4, 9.5772)$ dan $(0.0000, 12.0000)$. Saat $\beta(s) = 0.25$ titik efisien waktu $k = 0$, $k = 16$ dan $k = 20$ sebesar $(1.8979 \times 10^5, 1.0000)$, $(0.5749 \times 10^5, 11.7802)$ dan $(0.0000, 12.0000)$. Ketika $\beta(s) = 0.5$ titik efisien pada saat $k = 0$, $k = 16$ dan $k = 20$ bernilai $(4.4058 \times 10^5, 1.0000)$, $(1.2387 \times 10^5, 11.9960)$ dan $(0.0000, 12.0000)$ secara berturut-turut. Hasil simulasi disajikan lebih rinci pada Lampiran 11.

Strategi investasi efisien saat $\beta(s) = 0.1$ untuk periode $k = 0, 16, 20$ secara berturut-turut memiliki nilai $(23.7108 \ 0.5806 \ -7.3927)^t$, $(140.8359 \ -12.4117 \ -45.4870)^t$ dan $(209.2082 \ -19.9960 \ -67.7248)^t$. Periode yang sama untuk $\beta(s) = 0.25$ memberikan nilai strategi investasi efisien sebesar $(66.2289 \ -4.1358 \ -21.2215)^t$, $(367.8474 \ -37.5933 \ -119.3214)^t$ dan $(568.9417 \ -59.9000 \ -184.7263)^t$. Ketika $\beta(s)$ bernilai 0.5 dengan

periode yang sama, strategi investasi efisien yang diperoleh yaitu $(151.2906 \quad -13.5714 \quad -48.8874)^t$, $(848.7234 \quad -90.9353 \quad -275.7239)^t$ dan $(1327.6941 \quad -144.0659 \quad -431.5068)^t$. Nilai strategi investasi efisien yang dihasilkan Simulasi II selengkapnya diberikan pada Lampiran 15.

Berdasarkan hasil simulasi numerik, didapatkan bahwa semakin tinggi nilai $\beta(s)$, nilai mean akan menjadi lebih besar untuk $0 < k < 20$ dan untuk varian setiap periode akan lebih tinggi nilainya dengan pengecualian saat $k = 20$. Dengan kata lain bahwa semakin tinggi intensitas kematian yang diberikan mengakibatkan ekspektasi kekayaan terakhir yang akan diterima untuk $0 < k < 20$ dan risiko yang ditanggung oleh anggota pada periode $k < 20$ semakin tinggi nilainya. Hasil simulasi numerik untuk strategi investasi efisien untuk $\beta(s) = 0.1$ menunjukkan bahwa semakin tinggi nilai $\beta(s)$, semakin tinggi juga jumlah yang harus diinvestasikan untuk aset ke-1 selama periode ke- k dan untuk aset ke-2 dan ke-3 semakin menurun dan akhirnya menjadi negatif. Nilai negatif mengindikasikan dilakukannya pengembalian investasi pada anggota.

5.7.3 Simulasi III ($c_k > 0$ dan $\beta(s) = 0$)

Ditetapkan bahwa waktu akhir kematian adalah deterministik. Hanya dengan menetapkan intensitas kematian sebesar $\beta(s) = 0$ pada $[0, T]$, maka dengan Persamaan (5.9), mengakibatkan $p_i = 0, i = 1, 2, \dots, T - 1, p_T = 1$.

Pada simulasi ketiga, $w_k, h_k, \alpha_k, \lambda_k, \gamma_k$ dan g_k dapat disederhanakan menjadi Persamaan (5.46).

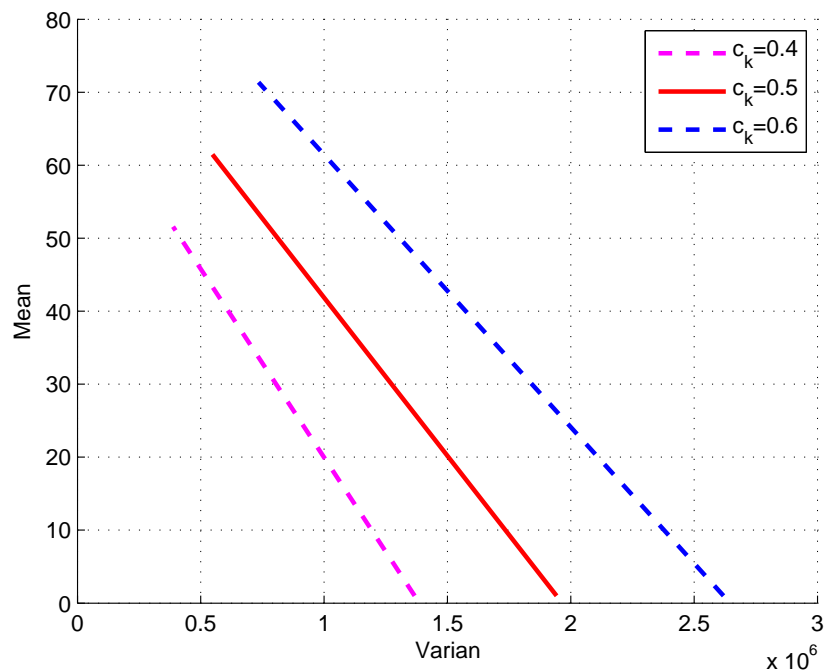
$$\left\{ \begin{aligned}
w_k &= p_T \prod_{i=k}^{T-1} A_i + \sum_{i=k}^{T-1} p_i \prod_{j=k}^{i-1} A_j = (1) \prod_{i=k}^{T-1} A_i + \sum_{i=k}^{T-1} (0) \prod_{j=k}^{i-1} A_j \\
&= \prod_{i=k}^{T-1} A_i, \\
h_k &= p_T \prod_{i=k}^{T-1} J_i + \sum_{i=k}^{T-1} p_i \prod_{j=k}^{i-1} J_j = (1) \prod_{i=k}^{T-1} J_i + \sum_{i=k}^{T-1} (0) \prod_{j=k}^{i-1} J_j \\
&= \prod_{i=k}^{T-1} J_i, \\
\alpha_k &= - \sum_{i=k}^{T-1} \frac{h_{i+1}^2}{w_{i+1}} D_i = - \sum_{i=k}^{T-1} \frac{h_{i+1}^2}{w_{i+1}} D_i = - \sum_{i=k}^{T-1} \left(\prod_{j=i+1}^{T-1} \frac{J_j^2}{A_j} \right) D_i, \\
\lambda_k &= c_T p_T \prod_{i=k}^{T-1} C_i + \sum_{i=k}^{T-1} (w_{i+1} c_{i+1} C_i - c_i p_i) \prod_{j=k}^{i-1} C_j \\
&= c_T \prod_{i=k}^{T-1} C_i + \sum_{i=k}^{T-1} w_{i+1} c_{i+1} \prod_{j=k}^i C_j, \\
\gamma_k &= c_T^2 p_T (q^2)^T + (q^2)^{T-1} \sum_{i=k}^{T-1} \eta_i = c_T^2 (1) (q^2)^T + (q^2)^{T-1} \sum_{i=k}^{T-1} \eta_i \\
&= c_T^2 (q^2)^T + (q^2)^{T-1} \sum_{i=k}^{T-1} \eta_i, \\
g_k &= -c_T p_T q^T + q^{T-1} \sum_{i=k}^{T-1} \xi_i = -c_T (1) q^T + q^{T-1} \sum_{i=k}^{T-1} \xi_i \\
&= -c_T q^T + q^{T-1} \sum_{i=k}^{T-1} \xi_i,
\end{aligned} \right. \tag{5.46}$$

dimana

$$\left\{ \begin{aligned}
\eta_k &= c_k^2 p_k + (w_{k+1} c_{k+1} + 2\lambda_{k+1}) c_{k+1} B_k - \frac{\lambda_{k+1}^2}{w_{k+1}} (q^2 - B_k) \\
&= c_k^2 (0) + (w_{k+1} c_{k+1} + 2\lambda_{k+1}) c_{k+1} B_k - \frac{\lambda_{k+1}^2}{w_{k+1}} (q^2 - B_k) \\
&= (w_{k+1} c_{k+1} + 2\lambda_{k+1}) c_{k+1} B_k - \frac{\lambda_{k+1}^2}{w_{k+1}} (q^2 - B_k), \\
\xi_k &= -c_k p_k + h_{k+1} \left(c_{k+1} M_k - \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} (q - M_k) \right) \\
&= -c_k (0) + h_{k+1} \left(c_{k+1} M_k - \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} (q - M_k) \right) \\
&= h_{k+1} \left(c_{k+1} M_k - \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} (q - M_k) \right).
\end{aligned} \right. \tag{5.47}$$

Secara lebih khusus, strategi investasi efisien dan batasan efisien untuk Simulasi III diberikan oleh Persamaan (5.42) dan Persamaan (5.43), secara berturut-turut.

Diberikan tiga nilai c_k yang berbeda pada simulasi III ini, yaitu sebesar 0.4, 0.5 dan 0.6. Hasil dari simulasi ketiga dapat dilihat pada Gambar 5.4.



Gambar 5.4. Simulasi III untuk Nilai c_k yang Berbeda

Dapat dilihat pada Gambar 5.4 bahwa saat $c_k = 0.4$ nilai titik efisien ketika $k = 0$ dan $k = 19$ secara berturut-turut yaitu $(1.3669 \times 10^6, 1.0000)$ dan $(0.3873 \times 10^6, 51.5757)$. Saat $c_k = 0.5$ titik efisien ketika $k = 0$ dan $k = 19$ terletak pada $(1.9428 \times 10^6, 1.0000)$ dan $(0.5471 \times 10^6, 61.4697)$. Sedangkan ketika $c_k = 0.6$ titik efisien saat $k = 0$ dan $k = 19$ adalah $(2.6197 \times 10^6, 1.0000)$ dan $(0.7344 \times 10^6, 71.3636)$ secara berturut-turut. Hasil simulasi secara lebih lengkap disajikan pada Lampiran 12.

Perolehan strategi investasi efisien ketika periode $k = 0, 16, 19$ untuk $c_k = 0.4$ memberikan hasil sebesar $(108.6626 \quad -8.4147 \quad -34.9803)^t$, $(1121.5751 \quad -112.0106 \quad -363.5540)^t$

dan $(876.1875 \quad -82.6639 \quad -283.5315)^t$. Sedangkan untuk besar prosentase iuran $c_k = 0.5$, strategi investasi efisien yang dihasilkan yaitu $(129.1074 \quad -10.5756 \quad -41.6192)^t$, $(1337.6484 \quad -133.6811 \quad -433.6024)^t$ dan $(1042.5041 \quad -98.2834 \quad -337.3439)^t$. Ketika prosentase iuran yang ditetapkan sebesar $c_k = 0.6$ diperoleh strategi investasi efisien sebesar $(149.5523 \quad -12.7364 \quad -48.2582)^t$, $(1155.5181 \quad -113.1627 \quad -374.3340)^t$ dan $(1208.8206 \quad -113.9028 \quad -391.1562)^t$. Perolehan strategi investasi efisien disajikan pada Lampiran 16 untuk lebih lengkapnya.

Berdasarkan hasil simulasi numerik yang diperoleh dapat diketahui bahwa semakin tinggi nilai c_k , nilai dari pusat sebaran data ekspektasi kekayaan terakhir untuk $k = 19$ akan semakin besar, begitu juga dengan jarak antar mean juga menjadi lebih besar nilainya untuk setiap k . Dengan kata lain, semakin besar prosentase iuran dari gaji pokok, semakin besar ekspektasi kekayaan terakhir yang akan diperoleh saat $k = 19$ dan risiko yang ditanggung oleh anggota tiap periode juga semakin besar. Strategi investasi efisien yang diperoleh menunjukkan bahwa semakin tinggi prosentase iuran yang ditetapkan menjadikan jumlah yang harus diinvestasikan saat aset ke-1 selama periode ke- k semakin tinggi, sedangkan untuk aset ke-2 dan ke-3 untuk periode ke- k mengindikasikan bahwa u_k^2 dan u_k^3 nilainya semakin negatif. Dengan kata lain jumlah pengembalian investasi semakin besar untuk aset ke-2 dan ke-3.

BAB VI

PENUTUP

6.1 Kesimpulan

Berdasarkan tujuan dari tesis ini, dapat diambil kesimpulan bahwa:

1. Telah didapatkan model alokasi aset untuk dana pensiun iuran pasti risiko kematian dan dengan mengganti pendapatan stokastik pada penelitian Yao, dkk (2014) dengan pendapatan deterministik q .
2. Simulasi I menunjukkan bahwa semakin besar prosentase iuran dari gaji pokok, semakin besar pula ekspektasi dari kekayaan terakhir yang diperoleh untuk periode $k > 0$ dan risiko yang ditanggung oleh anggota untuk periode $k < T$. Selanjutnya semakin besar nilai dari intensitas kematian yang diberikan, ekspektasi kekayaan terakhir yang diperoleh akan semakin kecil untuk periode $k > 0$ dan sebaliknya untuk risiko yang ditanggung oleh anggota akan semakin besar saat periode $k < T$. Pada Simulasi II menunjukkan bahwa semakin besar intensitas kematian, risiko yang ditanggung oleh anggota akan semakin tinggi untuk $k < T$, begitu juga dengan ekspektasi kekayaan terakhir yang diperoleh untuk periode $0 < k < T$. Pada Simulasi III dapat disimpulkan bahwa semakin besar nilai prosentase iuran dari gaji pokok yang diberikan akan mengakibatkan semakin besar ekspektasi kekayaan terakhir yang diperoleh saat $k = T - 1$ dan begitu pula dengan risiko yang ditanggung oleh anggota akan semakin tinggi pada setiap k . Keseluruhan simulasi menunjukkan bahwa semakin besar prosentase iuran maupun intensitas kematian akan mengakibatkan jumlah yang diinvestasikan saat periode ke- k untuk aset ke- 1 semakin besar dan

untuk aset ke- i dengan $i \in (1, n]$ dalam periode ke- k semakin kecil dan hampir keseluruhan bernilai negatif. Jika bernilai negatif berarti dilakukan pengembalian investasi pada anggota.

6.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya dapat digunakan kerangka *multi-period mean absolute deviation*. Selain itu dikarenakan pada tesis ini pembahasan difokuskan hanya pada penelitian selanjutnya dapat dilakukan penelitian untuk dana pensiun manfaat pasti.

DAFTAR PUSTAKA

- Ai, J., P.L. Brockett, dan A.F. Jacobson. 2015. A New Defined Benefit Pension Risk Measurement Methodology. *Insurance: Mathematics and Economics*. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.insmatheco.2015.03.027>.
- Alligood, K.T., T.D. Sauer, dan J.A. Yorke. 2000. *CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer-Verlag. New York.
- Blake, D., D. Wright, dan Y. Zhang. 2013. Target-driven Investing: Optimal Investment Strategies in Defined Contribution Pension Plans under Loss Aversion. *Journal of Economic Dynamics & Control*. vol. 37 hal. 195-209. DOI: <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1964686>.
- Bowers, N.L., H.U. Gerber, J.C. Hickman, D.A. Jones, dan C.J. Nesbitt. 1997. *Actuarial Mathematics*. The Society of Actuaries.
- Budhi, W.S. 2001. *Kalkulus Peubah Banyak dan Penggunaannya*. ITB. Bandung.
- Darmayanti, E.F. 2016. Analisis Pengakuan Pendapatan pada Perusahaan Konstruksi. Jurnal. Fakultas Ekonomi. *Universitas Muhammadiyah Metro*. ISSN: 2477-2984.
- Eisenberg, J., P. Grandits, dan S. Thonhauser. 2013. Optimal Consumption Under Deterministic Income. *J Optim Theory Appl*. DOI: 10.1007/s10957-013-0320-x.
- Eisenberg, J. 2016. Deterministic Income with Deterministic and Stochastic Interest Rates. *Stochastic Modeling and Applications*. vol. 20 hal. 55–78.
- Gujarati, D.N. 2004. *Basic Econometrics, 4th Ed.*. The McGraw Hill Companies. New York.
- Hainaut, D., dan P. Devolder. 2007. Management of A Pension Fund Under Mortality and Financial Risks. *Insurance: Mathematics and Economics*. vol. 41 hal. 134-155. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2006.10.014>.
- Harahap, S.S. 1993. *Teori Akuntansi*. PT Raja Grafindo Persada. Jakarta.
- Ikatan Akuntansi Indonesia. 2011. *PSAK 16 (Revisi 2011) Aset Tetap*. IAI. Jakarta.
- International Financial Reporting Standards. 2012. Classification of Assets. www.ifrs.org/Use-around-the-world/.../1.%20Classification%20of%20assets.pptx. Diakses pada tanggal 4 Mei 2017.

- Ito, K., dan K. Kunish. 2008. *Lagrange Multiplier Approach to Variational Problems and Applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia.
- Josa-Fombellida, R., dan J.P. Rincón-Zapatero. 2008. Mean–variance Portfolio and Contribution Selection in Stochastic Pension Funding. *European Journal of Operational Research*. vol. 187 hal. 120–137. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2007.03.002>.
- Lewis, F.L., L. Xie, dan D. Popa. 2008. *Robust Estimation with an Introduction Stochastic Control Theory 2nd Ed*. CRC Press. New York.
- Markowitz, H. 1952. Portfolio Selection. *Journal of Finance*. Vol. 7 No. 1 hal. 77-91. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x.
- Mas'ud, F. dan D.P. Prastiwi 2004. Peran Program Pensiun Terhadap Preferensi Calon Karyawan, Motivasi Kerja dan Retensi Karyawan. *Jurnal Studi Manajemen & Organisasi*. Vol. 1 No. 1 Januari 2004.
- Nafarin, M. 2004. *Penganggaran Perusahaan*. Salemba Empat. Jakarta.
- Nelli. 2010. Program Pensiun di Indonesia. <http://wadahtulis.blogspot.co.id/2010/08/program-pensiun-di-indonesia.html>. Diakses pada tanggal 30 Mei 2017.
- Pliska, S.R., dan J. Ye. 2007. Optimal Life Insurance Purchase and Consumption/ Investment under Uncertain Lifetime. *Journal of Banking & Finance*. vol. 31 hal. 1307–1319. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2006.10.015>.
- Ross, S.M. 2010. *Introduction to Probability Models 10th Ed*. Elsevier Inc. San Diego.
- Vigna, E. 2011. On Efficiency of Mean-Variance based Portfolio Selection in Defined Contribution Pension Schemes. *Quantitative Finance*. DOI: 10.1080/14697688.2012.708778.
- Walpole, R.E., R.H. Myers, S.L. Myers, dan K. Ye. 2012. *Probability & Statistics for Engineers & Scientists 9th Ed*. Pearson Education, Inc. Boston.
- Wardhani, I.G.A.K.K., I.N. Widana, dan N.K.T. Tastrawati. 2014. Perhitungan Dana Pensiun dengan Metode Projected Unit Credit dan Individual Level Premium. *E-Jurnal Matematika*. vol. 3 hal. 64-74. DOI: <https://doi.org/10.24843/MTK.2014.v03.i02.p067>.
- Widjajanto, N. 2001. *Sistem Informasi Akuntansi*. Erlangga. Jakarta.
- Winklevoss, H.E. 1976. *Pension Mathematics: With Numerical Illustrations*. Richard D. Irwin, Inc. Illinois.
- Yao, H, Y. Lai, Q. Ma, dan M. Jian. 2014. Asset Allocation for a DC Pension Fund with Stochastic Income and Mortality Risk: A Multi-Period Mean-Variance Framework. *Insurance: Mathematics and Economics*. vol. 54 hal. 84-92. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2013.10.016>.

Lampiran 1. Pengonversian Persamaan Bellman (5.18) Menjadi Persamaan (5.32) untuk Fungsi k

Persamaan Bellman (5.18) dapat diubah menjadi Persamaan (5.32) dengan mempertimbangkan fungsi $f_{k+1}(ze_k^0 + c_{k+1}qy + P_k^t u_k, qy)$ berdasar pada bentuk fungsi Persamaan (5.31). Selanjutnya dilakukan operasi aljabar biasa pada perhitungan.

$$\begin{aligned}
 f_k(z, y) &= p_k z^2 + p_k c_k^2 y^2 - 2p_k c_k z y + 2p_k \mu z - 2p_k c_k \mu y + \min_{u_k} \mathbb{E}[f_{k+1}(ze_k^0 + c_{k+1}qy + P_k^t u_k, qy)] \\
 &= p_k z^2 + p_k c_k^2 y^2 - 2p_k c_k z y + 2p_k \mu z - 2p_k c_k \mu y + \min_{u_k} \mathbb{E}[w_{k+1}(ze_k^0 + c_{k+1}qy + P_k^t u_k)^2 + \gamma_{k+1}(qy)^2 \\
 &\quad + 2\lambda_{k+1}(ze_k^0 + c_{k+1}qy + P_k^t u_k)(qy) + 2h_{k+1}\mu(ze_k^0 + c_{k+1}qy + P_k^t u_k) + 2g_{k+1}\mu qy + \alpha_{k+1}\mu^2] \\
 &= p_k z^2 + p_k c_k^2 y^2 - 2p_k c_k z y + 2p_k \mu z - 2p_k c_k \mu y + \min_{u_k} \mathbb{E}[w_{k+1}(ze_k^0 + c_{k+1}qy + P_k^t u_k)^2 + \gamma_{k+1}q^2 y^2 \\
 &\quad + 2\lambda_{k+1}(ze_k^0 + c_{k+1}qy + P_k^t u_k)qy + \alpha_{k+1}\mu^2 + 2h_{k+1}\mu(ze_k^0 + c_{k+1}qy + P_k^t u_k) + 2g_{k+1}\mu qy] \\
 &= p_k z^2 + p_k c_k^2 y^2 - 2p_k c_k z y + 2p_k \mu z - 2p_k c_k \mu y + \min_{u_k} \mathbb{E}[w_{k+1}(ze_k^0 + c_{k+1}qy + P_k^t u_k)(ze_k^0 + c_{k+1}qy + P_k^t u_k) + \gamma_{k+1}q^2 y^2 \\
 &\quad + 2\lambda_{k+1}ze_k^0 qy + 2\lambda_{k+1}c_{k+1}qy qy + 2\lambda_{k+1}P_k^t u_k qy + \alpha_{k+1}\mu^2 + 2h_{k+1}\mu ze_k^0 + 2h_{k+1}\mu c_{k+1}qy + 2h_{k+1}\mu P_k^t u_k + 2g_{k+1}\mu qy] \\
 &= p_k z^2 + p_k c_k^2 y^2 - 2p_k c_k z y + 2p_k \mu z - 2p_k c_k \mu y + \min_{u_k} \mathbb{E}[w_{k+1}(z^2(e_k^0)^2 + ze_k^0 c_{k+1}qy + ze_k^0 P_k^t u_k + c_{k+1}qy ze_k^0 + c_{k+1}^2 q^2 y^2 \\
 &\quad + c_{k+1}qy P_k^t u_k + P_k^t u_k ze_k^0 + P_k^t u_k c_{k+1}qy + (P_k^t)^2 u_k^2) + \gamma_{k+1}q^2 y^2 + 2\lambda_{k+1}ze_k^0 qy + 2\lambda_{k+1}c_{k+1}q^2 y^2 + 2\lambda_{k+1}P_k^t u_k qy \\
 &\quad + \alpha_{k+1}\mu^2 + 2h_{k+1}\mu ze_k^0 + 2h_{k+1}\mu c_{k+1}qy + 2h_{k+1}\mu P_k^t u_k + 2g_{k+1}\mu qy]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= p_k z^2 + p_k c_k^2 y^2 - 2p_k c_k z y + 2p_k \mu z - 2p_k c_k \mu y + \min_{u_k} \mathbb{E}[w_{k+1}(z^2(e_k^0)^2 + 2ze_k^0 c_{k+1} q y + 2ze_k^0 P_k^t u_k + c_{k+1}^2 q^2 y^2 \\
&\quad + 2c_{k+1} q y P_k^t u_k + (P_k^t)^2 u_k^2) + \gamma_{k+1} q^2 y^2 + 2\lambda_{k+1} z e_k^0 q y + 2\lambda_{k+1} c_{k+1} q^2 y^2 + 2\lambda_{k+1} P_k^t u_k q y + \alpha_{k+1} \mu^2 + 2h_{k+1} \mu z e_k^0 \\
&\quad + 2h_{k+1} \mu c_{k+1} q y + 2h_{k+1} \mu P_k^t u_k + 2g_{k+1} \mu q y] \\
&= p_k z^2 + p_k c_k^2 y^2 - 2p_k c_k z y + 2p_k \mu z - 2p_k c_k \mu y + w_{k+1} z^2 \mathbb{E}[(e_k^0)^2] + w_{k+1} c_{k+1}^2 y^2 q^2 + 2w_{k+1} c_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + \gamma_{k+1} y^2 q^2 \\
&\quad + 2\lambda_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + 2\lambda_{k+1} c_{k+1} y^2 q^2 + 2h_{k+1} \mu z \mathbb{E}[e_k^0] + 2h_{k+1} \mu c_{k+1} y q + 2g_{k+1} \mu q y + \alpha_{k+1} \mu^2 \\
&\quad + \min_{u_k} \mathbb{E}\{w_{k+1}(P_k^t)^2 u_k^2 + 2w_{k+1} z e_k^0 P_k^t u_k + 2w_{k+1} c_{k+1} q y P_k^t u_k + 2\lambda_{k+1} P_k^t u_k q y + 2h_{k+1} \mu P_k^t u_k\} \\
&= p_k z^2 + p_k c_k^2 y^2 - 2p_k c_k z y + 2p_k \mu z - 2p_k c_k \mu y + w_{k+1} z^2 \mathbb{E}[(e_k^0)^2] + w_{k+1} c_{k+1}^2 y^2 q^2 + 2w_{k+1} c_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + \gamma_{k+1} y^2 q^2 \\
&\quad + 2\lambda_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + 2\lambda_{k+1} c_{k+1} y^2 q^2 + 2h_{k+1} \mu z \mathbb{E}[e_k^0] + 2h_{k+1} \mu c_{k+1} y q + 2g_{k+1} \mu q y + \alpha_{k+1} \mu^2 \\
&\quad + \min_{u_k} \mathbb{E}\{w_{k+1}(P_k^t)^2 u_k + 2(w_{k+1} z e_k^0 P_k^t + w_{k+1} c_{k+1} q y P_k^t + \lambda_{k+1} P_k^t q y + h_{k+1} \mu P_k^t) u_k\} \\
f_k(z, y) &= p_k z^2 + p_k c_k^2 y^2 - 2p_k c_k z y + 2p_k \mu z - 2p_k c_k \mu y + w_{k+1} z^2 \mathbb{E}[(e_k^0)^2] + w_{k+1} c_{k+1}^2 y^2 q^2 + 2w_{k+1} c_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + \gamma_{k+1} y^2 q^2 \\
&\quad + 2\lambda_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + 2\lambda_{k+1} c_{k+1} y^2 q^2 + 2h_{k+1} \mu z \mathbb{E}[e_k^0] + 2h_{k+1} \mu c_{k+1} y q + 2g_{k+1} \mu q y + \alpha_{k+1} \mu^2 \\
&\quad + \min_{u_k} \{w_{k+1} u_k^t \mathbb{E}[P_k P_k^t] u_k + 2(w_{k+1} z \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] + (w_{k+1} c_{k+1} + \lambda_{k+1}) y q \mathbb{E}[P_k^t] + h_{k+1} \mu \mathbb{E}[P_k^t]) u_k\}.
\end{aligned}$$

Lampiran 2. Pensubstitusian Persamaan (5.33) ke dalam Persamaan (5.32)

Perhitungan ini dilakukan dengan mensubstitusikan persamaan u_k^* ke dalam Persamaan (5.32).

$$\begin{aligned}
 f_k(z, y) &= p_k z^2 + p_k c_k^2 y^2 - 2p_k c_k z y + 2p_k \mu z - 2p_k c_k \mu y + w_{k+1} z^2 \mathbb{E}[(e_k^0)^2] + w_{k+1} c_{k+1}^2 y^2 q^2 + 2w_{k+1} c_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + \gamma_{k+1} y^2 q^2 \\
 &\quad + 2\lambda_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + 2\lambda_{k+1} c_{k+1} y^2 q^2 + 2h_{k+1} \mu z \mathbb{E}[e_k^0] + 2h_{k+1} \mu c_{k+1} y q + 2g_{k+1} \mu q y + \alpha_{k+1} \mu^2 + w_{k+1} u_k^t \mathbb{E}[P_k P_k^t] u_k^* \\
 &\quad + 2(w_{k+1} z \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] + (w_{k+1} c_{k+1} + \lambda_{k+1}) y q \mathbb{E}[P_k^t] + h_{k+1} \mu \mathbb{E}[P_k^t]) u_k^* \\
 &= p_k z^2 + p_k c_k^2 y^2 - 2p_k c_k z y + 2p_k \mu z - 2p_k c_k \mu y + w_{k+1} z^2 \mathbb{E}[(e_k^0)^2] + w_{k+1} c_{k+1}^2 y^2 q^2 + 2w_{k+1} c_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + \gamma_{k+1} y^2 q^2 \\
 &\quad + 2\lambda_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + 2\lambda_{k+1} c_{k+1} y^2 q^2 + 2h_{k+1} \mu z \mathbb{E}[e_k^0] + 2h_{k+1} \mu c_{k+1} y q + 2g_{k+1} \mu q y + \alpha_{k+1} \mu^2 \\
 &\quad + w_{k+1} u_k^t \mathbb{E}[P_k P_k^t] \left(-\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \left(z \mathbb{E}[e_k^0 P_k] + y \left(c_{k+1} + \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} \right) q \mathbb{E}[P_k] + \mu \frac{h_{k+1}}{w_{k+1}} \mathbb{E}[P_k] \right) \right) \\
 &\quad + 2(w_{k+1} z \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] + (w_{k+1} c_{k+1} + \lambda_{k+1}) y q \mathbb{E}[P_k^t] \\
 &\quad + h_{k+1} \mu \mathbb{E}[P_k^t]) \left(-\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \left(z \mathbb{E}[e_k^0 P_k] + y \left(c_{k+1} + \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} \right) q \mathbb{E}[P_k] + \mu \frac{h_{k+1}}{w_{k+1}} \mathbb{E}[P_k] \right) \right).
 \end{aligned}$$

Mengoperasikan secara langsung $\mathbb{E}[P_k P_k^t]$ dengan $\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t]$, sehingga didapatkan matriks identitas.

$$\begin{aligned}
f_k(z, y) &= p_k z^2 + p_k c_k^2 y^2 - 2p_k c_k z y + 2p_k \mu z - 2p_k c_k \mu y + w_{k+1} z^2 \mathbb{E}[(e_k^0)^2] + w_{k+1} c_{k+1}^2 y^2 q^2 + 2w_{k+1} c_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + \gamma_{k+1} y^2 q^2 \\
&\quad + 2\lambda_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + 2\lambda_{k+1} c_{k+1} y^2 q^2 + 2h_{k+1} \mu z \mathbb{E}[e_k^0] + 2h_{k+1} \mu c_{k+1} y q + 2g_{k+1} \mu q y + \alpha_{k+1} \mu^2 \\
&\quad - w_{k+1} u_k^t (\mathbb{E}[P_k P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t]) \left(z \mathbb{E}[e_k^0 P_k] + y \left(c_{k+1} + \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} \right) q \mathbb{E}[P_k] + \mu \frac{h_{k+1}}{w_{k+1}} \mathbb{E}[P_k] \right) \\
&\quad - 2(w_{k+1} z \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] + (w_{k+1} c_{k+1} + \lambda_{k+1}) y q \mathbb{E}[P_k^t] + h_{k+1} \mu \mathbb{E}[P_k^t]) \\
&\quad \left(\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \left(z \mathbb{E}[e_k^0 P_k] + y \left(c_{k+1} + \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} \right) q \mathbb{E}[P_k] + \mu \frac{h_{k+1}}{w_{k+1}} \mathbb{E}[P_k] \right) \right) \\
&= p_k z^2 + p_k c_k^2 y^2 - 2p_k c_k z y + 2p_k \mu z - 2p_k c_k \mu y + w_{k+1} z^2 \mathbb{E}[(e_k^0)^2] + w_{k+1} c_{k+1}^2 y^2 q^2 + 2w_{k+1} c_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + \gamma_{k+1} y^2 q^2 \\
&\quad + 2\lambda_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + 2\lambda_{k+1} c_{k+1} y^2 q^2 + 2h_{k+1} \mu z \mathbb{E}[e_k^0] + 2h_{k+1} \mu c_{k+1} y q + 2g_{k+1} \mu q y + \alpha_{k+1} \mu^2 \\
&\quad - w_{k+1} u_k^t \left(z \mathbb{E}[e_k^0 P_k] + y \left(c_{k+1} + \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} \right) q \mathbb{E}[P_k] + \mu \frac{h_{k+1}}{w_{k+1}} \mathbb{E}[P_k] \right) - 2(w_{k+1} z \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] + (w_{k+1} c_{k+1} + \lambda_{k+1}) y q \mathbb{E}[P_k^t] \\
&\quad + h_{k+1} \mu \mathbb{E}[P_k^t]) \left(\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \left(z \mathbb{E}[e_k^0 P_k] + y \left(c_{k+1} + \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} \right) q \mathbb{E}[P_k] + \mu \frac{h_{k+1}}{w_{k+1}} \mathbb{E}[P_k] \right) \right).
\end{aligned}$$

Karena dari Persamaan (5.33) didapatkan $-w_{k+1} = \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t](w_{k+1} z \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] + (w_{k+1} c_{k+1} + \lambda_{k+1}) y \mathbb{E}[q P_k^t] + h_{k+1} \mu \mathbb{E}[P_k^t])$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
f_k(z, y) = & p_k z^2 + p_k c_k^2 y^2 - 2p_k c_k z y + 2p_k \mu z - 2p_k c_k \mu y + w_{k+1} z^2 \mathbb{E}[(e_k^0)^2] + w_{k+1} c_{k+1}^2 y^2 q^2 + 2w_{k+1} c_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + \gamma_{k+1} y^2 q^2 \\
& + 2\lambda_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + 2\lambda_{k+1} c_{k+1} y^2 q^2 + 2h_{k+1} \mu z \mathbb{E}[e_k^0] + 2h_{k+1} \mu c_{k+1} y q + 2g_{k+1} \mu q y + \alpha_{k+1} \mu^2 + (\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t](w_{k+1} z \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \\
& + (w_{k+1} c_{k+1} + \lambda_{k+1}) y \mathbb{E}[q P_k^t] + h_{k+1} \mu \mathbb{E}[P_k^t])) \left(z \mathbb{E}[e_k^0 P_k] + y \left(c_{k+1} + \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} \right) q \mathbb{E}[P_k] + \mu \frac{h_{k+1}}{w_{k+1}} \mathbb{E}[P_k] \right) - 2(w_{k+1} z \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \\
& + (w_{k+1} c_{k+1} + \lambda_{k+1}) y q \mathbb{E}[P_k^t] + h_{k+1} \mu \mathbb{E}[P_k^t]) \left(\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \left(z \mathbb{E}[e_k^0 P_k] + y \left(c_{k+1} + \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} \right) q \mathbb{E}[P_k] + \mu \frac{h_{k+1}}{w_{k+1}} \mathbb{E}[P_k] \right) \right).
\end{aligned}$$

Mengelompokkan variabel yang sama guna menyederhanakan persamaan.

$$\begin{aligned}
f_k(z, y) = & p_k z^2 + p_k c_k^2 y^2 - 2p_k c_k z y + 2p_k \mu z - 2p_k c_k \mu y + w_{k+1} z^2 \mathbb{E}[(e_k^0)^2] + w_{k+1} c_{k+1}^2 y^2 q^2 + 2w_{k+1} c_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + \gamma_{k+1} y^2 q^2 \\
& + 2\lambda_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + 2\lambda_{k+1} c_{k+1} y^2 q^2 + 2h_{k+1} \mu z \mathbb{E}[e_k^0] + 2h_{k+1} \mu c_{k+1} y q + 2g_{k+1} \mu q y + \alpha_{k+1} \mu^2 + (1 - 2)(w_{k+1} z \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \\
& + (w_{k+1} c_{k+1} + \lambda_{k+1}) y q \mathbb{E}[P_k^t] + h_{k+1} \mu \mathbb{E}[P_k^t]) \left(\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \left(z \mathbb{E}[e_k^0 P_k] + y \left(c_{k+1} + \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} \right) q \mathbb{E}[P_k] + \mu \frac{h_{k+1}}{w_{k+1}} \mathbb{E}[P_k] \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_k(z, y) = & p_k z^2 + p_k c_k^2 y^2 - 2p_k c_k z y + 2p_k \mu z - 2p_k c_k \mu y + w_{k+1} z^2 \mathbb{E}[(e_k^0)^2] + w_{k+1} c_{k+1}^2 y^2 q^2 + 2w_{k+1} c_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + \gamma_{k+1} y^2 q^2 \\
& + 2\lambda_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + 2\lambda_{k+1} c_{k+1} y^2 q^2 + 2h_{k+1} \mu z \mathbb{E}[e_k^0] + 2h_{k+1} \mu c_{k+1} y q + 2g_{k+1} \mu q y + \alpha_{k+1} \mu^2 - (w_{k+1} z \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t]
\end{aligned}$$

$$+ (w_{k+1}c_{k+1} + \lambda_{k+1})yq\mathbb{E}[P_k^t] + h_{k+1}\mu\mathbb{E}[P_k^t])\mathbb{E}^{-1}[P_kP_k^t] \left(z\mathbb{E}[e_k^0P_k] + y \left(c_{k+1} + \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} \right) q\mathbb{E}[P_k] + \mu \frac{h_{k+1}}{w_{k+1}} \mathbb{E}[P_k] \right).$$

Lampiran 3. Penyederhanaan Persamaan (5.34) dengan Persamaan (5.25)

Penyederhanaan Persamaan (5.34) dilakukan dengan pensubstitusian Persamaan (5.25) ke dalam Persamaan (5.34).

$$\begin{aligned}
f_k(z, y) &= p_k z^2 + p_k c_k^2 y^2 - 2p_k c_k z y + 2p_k \mu z - 2p_k c_k \mu y + w_{k+1} z^2 \mathbb{E}[(e_k^0)^2] + w_{k+1} c_{k+1}^2 y^2 q^2 + 2w_{k+1} c_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + \gamma_{k+1} y^2 q^2 \\
&\quad + 2\lambda_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + 2\lambda_{k+1} c_{k+1} y^2 q^2 + 2h_{k+1} \mu z \mathbb{E}[e_k^0] + 2h_{k+1} \mu c_{k+1} y q + 2g_{k+1} \mu q y + \alpha_{k+1} \mu^2 \\
&\quad - (w_{k+1} z \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] + (w_{k+1} c_{k+1} + \lambda_{k+1}) y q \mathbb{E}[P_k^t] + h_{k+1} \mu \mathbb{E}[P_k^t]) \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \\
&\quad \left(z \mathbb{E}[e_k^0 P_k] + y \left(c_{k+1} + \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} \right) q \mathbb{E}[P_k] + \mu \frac{h_{k+1}}{w_{k+1}} \mathbb{E}[P_k] \right) \\
&= p_k z^2 + p_k c_k^2 y^2 - 2p_k c_k z y + 2p_k \mu z - 2p_k c_k \mu y + w_{k+1} z^2 \mathbb{E}[(e_k^0)^2] + w_{k+1} c_{k+1}^2 y^2 q^2 + 2w_{k+1} c_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + \gamma_{k+1} y^2 q^2 \\
&\quad + 2\lambda_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + 2\lambda_{k+1} c_{k+1} y^2 q^2 + 2h_{k+1} \mu z \mathbb{E}[e_k^0] + 2h_{k+1} \mu c_{k+1} y q + 2g_{k+1} \mu q y + \alpha_{k+1} \mu^2 \\
&\quad + (-w_{k+1} z \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] - w_{k+1} c_{k+1} y q \mathbb{E}[P_k^t] - \lambda_{k+1} y q \mathbb{E}[P_k^t] - h_{k+1} \mu \mathbb{E}[P_k^t]) \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \\
&\quad \left(z \mathbb{E}[e_k^0 P_k] + y c_{k+1} q \mathbb{E}[P_k] + y \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} q \mathbb{E}[P_k] + \mu \frac{h_{k+1}}{w_{k+1}} \mathbb{E}[P_k] \right) \\
&= p_k z^2 + p_k c_k^2 y^2 - 2p_k c_k z y + 2p_k \mu z - 2p_k c_k \mu y + w_{k+1} z^2 \mathbb{E}[(e_k^0)^2] + w_{k+1} c_{k+1}^2 y^2 q^2 + 2w_{k+1} c_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + \gamma_{k+1} y^2 q^2 \\
&\quad + 2\lambda_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + 2\lambda_{k+1} c_{k+1} y^2 q^2 + 2h_{k+1} \mu z \mathbb{E}[e_k^0] + 2h_{k+1} \mu c_{k+1} y q + 2g_{k+1} \mu q y + \alpha_{k+1} \mu^2 \\
&\quad + (-w_{k+1} z \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] - w_{k+1} c_{k+1} y q \mathbb{E}[P_k^t] - \lambda_{k+1} y q \mathbb{E}[P_k^t] - h_{k+1} \mu \mathbb{E}[P_k^t])
\end{aligned}$$

$$\left(\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] z \mathbb{E}[e_k^0 P_k] + \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] y c_{k+1} q \mathbb{E}[P_k] + \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] y \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} q \mathbb{E}[P_k] + \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mu \frac{h_{k+1}}{w_{k+1}} \mathbb{E}[P_k] \right).$$

Melakukan perkalian silang bentuk aljabar.

$$\begin{aligned} f_k(z, y) &= p_k z^2 + p_k c_k^2 y^2 - 2p_k c_k z y + 2p_k \mu z - 2p_k c_k \mu y + w_{k+1} z^2 \mathbb{E}[(e_k^0)^2] + w_{k+1} c_{k+1}^2 y^2 q^2 + 2w_{k+1} c_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] \\ &+ \gamma_{k+1} y^2 q^2 + 2\lambda_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + 2\lambda_{k+1} c_{k+1} y^2 q^2 + 2h_{k+1} \mu z \mathbb{E}[e_k^0] + 2h_{k+1} \mu c_{k+1} y q + 2g_{k+1} \mu q y + \alpha_{k+1} \mu^2 \\ &- w_{k+1} z \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] z \mathbb{E}[e_k^0 P_k] - w_{k+1} z \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] y c_{k+1} q \mathbb{E}[P_k] \\ &- w_{k+1} z \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] y \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} q \mathbb{E}[P_k] - w_{k+1} z \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mu \frac{h_{k+1}}{w_{k+1}} \mathbb{E}[P_k] \\ &- w_{k+1} c_{k+1} y q \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] z \mathbb{E}[e_k^0 P_k] - w_{k+1} c_{k+1} y q \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] y c_{k+1} q \mathbb{E}[P_k] \\ &- w_{k+1} c_{k+1} y q \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] y \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} q \mathbb{E}[P_k] - w_{k+1} c_{k+1} y q \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mu \frac{h_{k+1}}{w_{k+1}} \mathbb{E}[P_k] \\ &- \lambda_{k+1} y q \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] z \mathbb{E}[e_k^0 P_k] - \lambda_{k+1} y q \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] y c_{k+1} q \mathbb{E}[P_k] - \lambda_{k+1} y q \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] y \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} q \mathbb{E}[P_k] \\ &- \lambda_{k+1} y q \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mu \frac{h_{k+1}}{w_{k+1}} \mathbb{E}[P_k] - h_{k+1} \mu \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] z \mathbb{E}[e_k^0 P_k] - h_{k+1} \mu \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] y c_{k+1} q \mathbb{E}[P_k] \\ &- h_{k+1} \mu \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] y \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} q \mathbb{E}[P_k] - h_{k+1} \mu \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mu \frac{h_{k+1}}{w_{k+1}} \mathbb{E}[P_k] \\ &= p_k z^2 + p_k c_k^2 y^2 - 2p_k c_k z y + 2p_k \mu z - 2p_k c_k \mu y + w_{k+1} z^2 \mathbb{E}[(e_k^0)^2] + w_{k+1} c_{k+1}^2 y^2 q^2 + 2w_{k+1} c_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] \\ &+ \gamma_{k+1} y^2 q^2 + 2\lambda_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + 2\lambda_{k+1} c_{k+1} y^2 q^2 + 2h_{k+1} \mu z \mathbb{E}[e_k^0] + 2h_{k+1} \mu c_{k+1} y q + 2g_{k+1} \mu q y + \alpha_{k+1} \mu^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - w_{k+1}z^2\mathbb{E}[e_k^0P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_kP_k^t]\mathbb{E}[e_k^0P_k] - w_{k+1}zyc_{k+1}\mathbb{E}[e_k^0P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_kP_k^t]q\mathbb{E}[P_k] - zy\lambda_{k+1}\mathbb{E}[e_k^0P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_kP_k^t]q\mathbb{E}[P_k] \\
& - z\mu h_{k+1}\mathbb{E}[e_k^0P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_kP_k^t]\mathbb{E}[P_k] - w_{k+1}c_{k+1}yzq\mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_kP_k^t]\mathbb{E}[e_k^0P_k] - w_{k+1}c_{k+1}^2y^2q^2\mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_kP_k^t]\mathbb{E}[P_k] \\
& - c_{k+1}y^2\lambda_{k+1}q^2\mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_kP_k^t]\mathbb{E}[P_k] - c_{k+1}y\mu h_{k+1}q\mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_kP_k^t]\mathbb{E}[P_k] - \lambda_{k+1}yzq\mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_kP_k^t]\mathbb{E}[e_k^0P_k] \\
& - \lambda_{k+1}y^2c_{k+1}q^2\mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_kP_k^t]\mathbb{E}[P_k] - \frac{\lambda_{k+1}^2}{w_{k+1}}y^2q^2\mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_kP_k^t]\mathbb{E}[P_k] - \lambda_{k+1}y\mu\frac{h_{k+1}}{w_{k+1}}q\mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_kP_k^t]\mathbb{E}[P_k] \\
& - h_{k+1}\mu z\mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_kP_k^t]\mathbb{E}[e_k^0P_k] - h_{k+1}\mu yc_{k+1}\mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_kP_k^t]q\mathbb{E}[P_k] - h_{k+1}\mu y\frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}}\mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_kP_k^t]q\mathbb{E}[P_k] \\
& - \frac{h_{k+1}^2}{w_{k+1}}\mu^2\mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_kP_k^t]\mathbb{E}[P_k].
\end{aligned}$$

Mengelompokkan variabel guna menyederhanakan persamaan.

$$\begin{aligned}
f_k(z, y) = & p_kz^2 + p_kc_k^2y^2 - 2p_kc_kzy + 2p_k\mu z - 2p_kc_k\mu y + w_{k+1}z^2\mathbb{E}[(e_k^0)^2] + w_{k+1}c_{k+1}^2y^2q^2 + 2w_{k+1}c_{k+1}yzq\mathbb{E}[e_k^0] + \gamma_{k+1}y^2q^2 \\
& + 2\lambda_{k+1}yzq\mathbb{E}[e_k^0] + 2\lambda_{k+1}c_{k+1}y^2q^2 + 2h_{k+1}\mu z\mathbb{E}[e_k^0] + 2h_{k+1}\mu c_{k+1}yq + 2g_{k+1}\mu y + \alpha_{k+1}\mu^2 \\
& - w_{k+1}z^2\mathbb{E}[e_k^0P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_kP_k^t]\mathbb{E}[e_k^0P_k] - 2w_{k+1}zyc_{k+1}\mathbb{E}[e_k^0P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_kP_k^t]q\mathbb{E}[P_k] - 2zy\lambda_{k+1}\mathbb{E}[e_k^0P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_kP_k^t]q\mathbb{E}[P_k] \\
& - 2z\mu h_{k+1}\mathbb{E}[e_k^0P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_kP_k^t]\mathbb{E}[P_k] - w_{k+1}c_{k+1}^2y^2q^2\mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_kP_k^t]\mathbb{E}[P_k] - 2c_{k+1}y^2\lambda_{k+1}q^2\mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_kP_k^t]\mathbb{E}[P_k] \\
& - 2c_{k+1}y\mu h_{k+1}q\mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_kP_k^t]\mathbb{E}[P_k] - \frac{\lambda_{k+1}^2}{w_{k+1}}y^2q^2\mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_kP_k^t]\mathbb{E}[P_k] - \lambda_{k+1}y\mu\frac{h_{k+1}}{w_{k+1}}q\mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_kP_k^t]\mathbb{E}[P_k] \\
& - \frac{h_{k+1}^2}{w_{k+1}}\mu^2\mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_kP_k^t]\mathbb{E}[P_k]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= p_k z^2 + p_k c_k^2 y^2 - 2p_k c_k z y + 2p_k \mu z - 2p_k c_k \mu y + w_{k+1} z^2 \mathbb{E}(e_k^0)^2 + w_{k+1} c_{k+1}^2 y^2 q^2 + 2w_{k+1} c_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + \gamma_{k+1} y^2 q^2 \\
&\quad + 2\lambda_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + 2\lambda_{k+1} c_{k+1} y^2 q^2 + 2h_{k+1} \mu z \mathbb{E}[e_k^0] + 2h_{k+1} \mu c_{k+1} y q + 2g_{k+1} \mu q y + \alpha_{k+1} \mu^2 \\
&\quad - w_{k+1} \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[e_k^0 P_k] z^2 - 2w_{k+1} c_{k+1} \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] q \mathbb{E}[P_k] z y - 2\lambda_{k+1} \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] q \mathbb{E}[P_k] z y \\
&\quad - 2h_{k+1} \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k] z \mu - w_{k+1} c_{k+1}^2 q^2 \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k] y^2 - 2\lambda_{k+1} c_{k+1} q \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] q \mathbb{E}[P_k] y^2 \\
&\quad - 2h_{k+1} c_{k+1} q \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k] \mu y - \frac{\lambda_{k+1}^2}{w_{k+1}} q^2 \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k] y^2 - 2h_{k+1} \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} q \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k] \mu y \\
&\quad - \frac{h_{k+1}^2}{w_{k+1}} \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k] \mu^2 \\
&= p_k z^2 + w_{k+1} \mathbb{E}[(e_k^0)^2] z^2 - w_{k+1} \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[e_k^0 P_k] z^2 - 2p_k c_k z y + 2w_{k+1} c_{k+1} q \mathbb{E}[e_k^0] z y \\
&\quad - 2w_{k+1} c_{k+1} \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] q \mathbb{E}[P_k] z y + 2\lambda_{k+1} q \mathbb{E}[e_k^0] z y - 2\lambda_{k+1} \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] q \mathbb{E}[P_k] z y + 2p_k \mu z \\
&\quad + 2h_{k+1} \mathbb{E}[e_k^0] \mu z - 2h_{k+1} \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k] \mu z + \alpha_{k+1} \mu^2 \frac{h_{k+1}^2}{w_{k+1}} \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k] \mu^2 + p_k c_k^2 y^2 + \gamma_{k+1} q^2 y^2 \\
&\quad + w_{k+1} c_{k+1}^2 q^2 y^2 - w_{k+1} c_{k+1}^2 q^2 \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k] y^2 + 2\lambda_{k+1} c_{k+1} q^2 y^2 - 2\lambda_{k+1} c_{k+1} q^2 \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k] y^2 \\
&\quad - \frac{\lambda_{k+1}^2}{w_{k+1}} q^2 y^2 + \frac{\lambda_{k+1}^2}{w_{k+1}} q^2 y^2 - \frac{\lambda_{k+1}^2}{w_{k+1}} q^2 \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k] y^2 - 2p_k c_k \mu y + 2g_{k+1} q \mu y + 2h_{k+1} c_{k+1} q \mu y \\
&\quad - 2h_{k+1} c_{k+1} q \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k] \mu y - 2h_{k+1} \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} q \mu y + 2h_{k+1} \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} q \mu y - 2h_{k+1} \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} q \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k] \mu y \\
&= p_k z^2 + w_{k+1} (\mathbb{E}[(e_k^0)^2] - \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[e_k^0 P_k]) z^2 - 2p_k c_k z y + 2w_{k+1} c_{k+1} (q \mathbb{E}[e_k^0] - q \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k]) z y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\lambda_{k+1}(q\mathbb{E}[e_k^0] - q\mathbb{E}[e_k^0 P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t]\mathbb{E}[P_k])zy + 2p_k\mu z + 2h_{k+1}(\mathbb{E}[e_k^0] - \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t]\mathbb{E}[P_k])\mu z \\
& + \alpha_{k+1}\mu^2 - \frac{h_{k+1}^2}{w_{k+1}}(\mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t]\mathbb{E}[P_k])\mu^2 + p_k c_k^2 y^2 + \gamma_{k+1} q^2 y^2 + w_{k+1} c_{k+1}^2 (q^2 - q^2 \mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t]\mathbb{E}[P_k])y^2 \\
& + 2\lambda_{k+1} c_{k+1} (q^2 - q^2 \mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t]\mathbb{E}[P_k])y^2 - \frac{\lambda_{k+1}^2}{w_{k+1}} q^2 y^2 + \frac{\lambda_{k+1}^2}{w_{k+1}} (q^2 - q^2 \mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t]\mathbb{E}[P_k])y^2 \\
& - 2p_k c_k \mu y + 2g_{k+1} q \mu y + 2h_{k+1} c_{k+1} (q - q \mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t]\mathbb{E}[P_k])\mu y - 2h_{k+1} \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} q \mu y \\
& + 2h_{k+1} \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} (q - q \mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t]\mathbb{E}[P_k])\mu y
\end{aligned}$$

Mensubstitusikan Persamaan (5.25).

$$\begin{aligned}
f_k(z, y) & = p_k z^2 + w_{k+1} A_k z^2 - 2p_k c_k z y + 2w_{k+1} c_{k+1} C_k z y + 2\lambda_{k+1} C_k z y + 2p_k \mu z + 2h_{k+1} J_k \mu z + \alpha_{k+1} \mu^2 - \frac{h_{k+1}^2}{w_{k+1}} D_k \mu^2 \\
& + p_k c_k^2 y^2 + \gamma_{k+1} q^2 y^2 + w_{k+1} c_{k+1}^2 B_k y^2 + 2\lambda_{k+1} c_{k+1} B_k y^2 - \frac{\lambda_{k+1}^2}{w_{k+1}} q^2 y^2 + \frac{\lambda_{k+1}^2}{w_{k+1}} B_k y^2 - 2p_k c_k \mu y + 2g_{k+1} q \mu y \\
& + 2h_{k+1} c_{k+1} M_k \mu y - 2h_{k+1} \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} q \mu y + 2h_{k+1} \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} M_k \mu y \\
& = p_k z^2 + w_{k+1} A_k z^2 + 2[-p_k c_k z y + w_{k+1} c_{k+1} C_k z y + \lambda_{k+1} C_k z y] + 2p_k \mu z + 2h_{k+1} J_k \mu z + \alpha_{k+1} \mu^2 - \frac{h_{k+1}^2}{w_{k+1}} D_k \mu^2 \\
& + \left[p_k c_k^2 + \gamma_{k+1} q^2 + w_{k+1} c_{k+1}^2 B_k + 2\lambda_{k+1} c_{k+1} B_k - \frac{\lambda_{k+1}^2}{w_{k+1}} q^2 + \frac{\lambda_{k+1}^2}{w_{k+1}} B_k \right] y^2 \\
& + 2 \left[-p_k c_k + g_{k+1} q + h_{k+1} \left(c_{k+1} M_k - \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} q + \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} M_k \right) \right] \mu y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_k(z, y) = & (p_k + w_{k+1}A_k)z^2 + 2[-p_k c_k + (w_{k+1}c_{k+1} + \lambda_{k+1})C_k]zy + 2(p_k + h_{k+1}J_k)\mu z + \left(\alpha_{k+1} - \frac{h_{k+1}^2 D_k}{w_{k+1}} \right) \mu^2 \\
& + \left[p_k c_k^2 + \gamma_{k+1}q^2 + (w_{k+1}c_{k+1}^2 + 2\lambda_{k+1}c_{k+1})B_k - \frac{\lambda_{k+1}^2}{w_{k+1}}(q^2 - B_k) \right] y^2 \\
& + 2 \left[-p_k c_k + g_{k+1}q + h_{k+1} \left(c_{k+1}M_k - \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}}(q - M_k) \right) \right] \mu y.
\end{aligned}$$

Lampiran 4. Penyederhanaan Hasil pada Lampiran 3 dengan Persamaan (5.19)-(5.24)

$$\begin{aligned}
 f_k(z, y) = & p_k z^2 + p_k c_k^2 y^2 - 2p_k c_k z y + 2p_k \mu z - 2p_k c_k \mu y + w_{k+1} z^2 \mathbb{E}[(e_k^0)^2] + w_{k+1} c_{k+1}^2 y^2 q^2 + 2w_{k+1} c_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + \gamma_{k+1} y^2 q^2 \\
 & + 2\lambda_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + 2\lambda_{k+1} c_{k+1} y^2 q^2 + 2h_{k+1} \mu z \mathbb{E}[e_k^0] + 2h_{k+1} \mu c_{k+1} y q + 2g_{k+1} \mu q y + \alpha_{k+1} \mu^2 \\
 & - (w_{k+1} z \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] + (w_{k+1} c_{k+1} + \lambda_{k+1}) y q \mathbb{E}[P_k^t] + h_{k+1} \mu \mathbb{E}[P_k^t]) \\
 & \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \left(z \mathbb{E}[e_k^0 P_k] + y \left(c_{k+1} + \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} \right) q \mathbb{E}[P_k] + \mu \frac{h_{k+1}}{w_{k+1}} \mathbb{E}[P_k] \right).
 \end{aligned}$$

Melakukan perkalian silang bentuk aljabar.

$$\begin{aligned}
 f_k(z, y) = & p_k z^2 + p_k c_k^2 y^2 - 2p_k c_k z y + 2p_k \mu z - 2p_k c_k \mu y + w_{k+1} z^2 \mathbb{E}[(e_k^0)^2] + w_{k+1} c_{k+1}^2 y^2 q^2 + 2w_{k+1} c_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + \gamma_{k+1} y^2 q^2 \\
 & + 2\lambda_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + 2\lambda_{k+1} c_{k+1} y^2 q^2 + 2h_{k+1} \mu z \mathbb{E}[e_k^0] + 2h_{k+1} \mu c_{k+1} y q + 2g_{k+1} \mu q y + \alpha_{k+1} \mu^2 \\
 & + (-w_{k+1} z \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] - (w_{k+1} c_{k+1} + \lambda_{k+1}) y q \mathbb{E}[P_k^t] - h_{k+1} \mu \mathbb{E}[P_k^t]) \\
 & \left(\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] z \mathbb{E}[e_k^0 P_k] + \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] y c_{k+1} q \mathbb{E}[P_k] + \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} q \mathbb{E}[P_k] + \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mu \frac{h_{k+1}}{w_{k+1}} \mathbb{E}[P_k] \right) \\
 = & p_k z^2 + p_k c_k^2 y^2 - 2p_k c_k z y + 2p_k \mu z - 2p_k c_k \mu y + w_{k+1} z^2 \mathbb{E}[(e_k^0)^2] + w_{k+1} c_{k+1}^2 y^2 q^2 + 2w_{k+1} c_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + \gamma_{k+1} y^2 q^2 \\
 & + 2\lambda_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + 2\lambda_{k+1} c_{k+1} y^2 q^2 + 2h_{k+1} \mu z \mathbb{E}[e_k^0] + 2h_{k+1} \mu c_{k+1} y q + 2g_{k+1} \mu q y + \alpha_{k+1} \mu^2 \\
 & - w_{k+1} z \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] z \mathbb{E}[e_k^0 P_k] - w_{k+1} z \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] y c_{k+1} q \mathbb{E}[P_k] - w_{k+1} z \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mu \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} q \mathbb{E}[P_k]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - w_{k+1}z\mathbb{E}[e_k^0 P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t]\mu \frac{h_{k+1}}{w_{k+1}}\mathbb{E}[P_k] - w_{k+1}c_{k+1}yq\mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t]z\mathbb{E}[e_k^0 P_k] - w_{k+1}c_{k+1}yq\mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t]yc_{k+1}q\mathbb{E}[P_k] \\
& - w_{k+1}c_{k+1}yq\mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t]y \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}}q\mathbb{E}[P_k] - w_{k+1}c_{k+1}yq\mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t]\mu \frac{h_{k+1}}{w_{k+1}}\mathbb{E}[P_k] - \lambda_{k+1}yq\mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t]z\mathbb{E}[e_k^0 P_k] \\
& - \lambda_{k+1}yq\mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t]yc_{k+1}q\mathbb{E}[P_k] - \lambda_{k+1}yq\mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t]y \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}}q\mathbb{E}[P_k] - \lambda_{k+1}yq\mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t]\mu \frac{h_{k+1}}{w_{k+1}}\mathbb{E}[P_k] \\
& - h_{k+1}\mu\mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t]z\mathbb{E}[e_k^0 P_k] - h_{k+1}\mu\mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t]yc_{k+1}q\mathbb{E}[P_k] - h_{k+1}\mu\mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t]y \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}}q\mathbb{E}[P_k] \\
& - h_{k+1}\mu\mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t]\mu \frac{h_{k+1}}{w_{k+1}}\mathbb{E}[P_k] \\
= & p_k z^2 + p_k c_k^2 y^2 - 2p_k c_k z y + 2p_k \mu z - 2p_k c_k \mu y + w_{k+1} z^2 \mathbb{E}[(e_k^0)^2] + w_{k+1} c_{k+1}^2 y^2 q^2 + 2w_{k+1} c_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + \gamma_{k+1} y^2 q^2 \\
& + 2\lambda_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + 2\lambda_{k+1} c_{k+1} y^2 q^2 + 2h_{k+1} \mu z \mathbb{E}[e_k^0] + 2h_{k+1} \mu c_{k+1} y q + 2g_{k+1} \mu q y + \alpha_{k+1} \mu^2 \\
& - w_{k+1} z^2 \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t]\mathbb{E}[e_k^0 P_k] - w_{k+1} z y c_{k+1} \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t]q\mathbb{E}[P_k] - z y \lambda_{k+1} \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t]q\mathbb{E}[P_k] \\
& - z \mu h_{k+1} \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t]\mathbb{E}[P_k] - w_{k+1} c_{k+1} y z q \mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t]\mathbb{E}[e_k^0 P_k] - w_{k+1} c_{k+1}^2 y^2 q^2 \mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t]\mathbb{E}[P_k] \\
& - c_{k+1} y^2 \lambda_{k+1} q^2 \mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t]\mathbb{E}[P_k] - c_{k+1} y \mu h_{k+1} q \mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t]\mathbb{E}[P_k] - \lambda_{k+1} y z q \mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t]\mathbb{E}[e_k^0 P_k] \\
& - \lambda_{k+1} y^2 c_{k+1} q^2 \mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t]\mathbb{E}[P_k] - \frac{\lambda_{k+1}^2}{w_{k+1}} y^2 q^2 \mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t]\mathbb{E}[P_k] - \lambda_{k+1} y \mu \frac{h_{k+1}}{w_{k+1}} q \mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t]\mathbb{E}[P_k] \\
& - h_{k+1} \mu z \mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t]\mathbb{E}[e_k^0 P_k] - h_{k+1} \mu y c_{k+1} \mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t]q\mathbb{E}[P_k] - h_{k+1} \mu y \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} \mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t]q\mathbb{E}[P_k] \mu y \\
& - \frac{h_{k+1}^2}{w_{k+1}} \mu^2 \mathbb{E}[P_k^t]\mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t]\mathbb{E}[P_k].
\end{aligned}$$

Mengelompokkan dan menyederhanakan variabel yang sama.

$$\begin{aligned}
f_k(z, y) &= p_k z^2 + p_k c_k^2 y^2 - 2p_k c_k z y + 2p_k \mu z - 2p_k c_k \mu y + w_{k+1} z^2 \mathbb{E}[(e_k^0)^2] + w_{k+1} c_{k+1}^2 y^2 q^2 + 2w_{k+1} c_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + \gamma_{k+1} y^2 q^2 \\
&\quad + 2\lambda_{k+1} y z q \mathbb{E}[e_k^0] + 2\lambda_{k+1} c_{k+1} y^2 q^2 + 2h_{k+1} \mu z \mathbb{E}[e_k^0] + 2h_{k+1} \mu c_{k+1} y q + 2g_{k+1} \mu q y + \alpha_{k+1} \mu^2 \\
&\quad - w_{k+1} \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[e_k^0 P_k] z^2 - 2w_{k+1} c_{k+1} \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] q \mathbb{E}[P_k] z y - 2\lambda_{k+1} \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] q \mathbb{E}[P_k] z y \\
&\quad - 2h_{k+1} \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k] \mu z - w_{k+1} c_{k+1}^2 q^2 \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k] y^2 - 2\lambda_{k+1} c_{k+1} q^2 \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k] y^2 \\
&\quad - 2h_{k+1} c_{k+1} q \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k] \mu y - \frac{\lambda_{k+1}^2}{w_{k+1}} q^2 \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k] y^2 - 2h_{k+1} \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} q \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k] \\
&\quad - \frac{h_{k+1}^2}{w_{k+1}} \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k] \mu^2 \\
&= p_k z^2 + w_{k+1} \mathbb{E}[(e_k^0)^2] z^2 - w_{k+1} \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[e_k^0 P_k] z^2 - 2p_k c_k z y + 2w_{k+1} c_{k+1} q \mathbb{E}[e_k^0] z y \\
&\quad - 2w_{k+1} c_{k+1} \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] q \mathbb{E}[P_k] z y + 2\lambda_{k+1} q \mathbb{E}[e_k^0] z y - 2\lambda_{k+1} \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] q \mathbb{E}[P_k] z y + 2p_k \mu z + 2h_{k+1} \mathbb{E}[e_k^0] \mu z \\
&\quad - 2h_{k+1} \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mu z + \alpha_{k+1} \mu^2 - \frac{h_{k+1}^2}{w_{k+1}} \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k] \mu^2 + p_k c_k^2 y^2 + \gamma_{k+1} q^2 y^2 + w_{k+1} c_{k+1}^2 q^2 y^2 \\
&\quad - w_{k+1} c_{k+1}^2 q^2 \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k] y^2 + 2\lambda_{k+1} c_{k+1} q^2 y^2 - 2\lambda_{k+1} c_{k+1} q^2 \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k] y^2 - \frac{\lambda_{k+1}^2}{w_{k+1}} q^2 y^2 \\
&\quad + \frac{\lambda_{k+1}^2}{w_{k+1}} q^2 y^2 - \frac{\lambda_{k+1}^2}{w_{k+1}} q^2 \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k] y^2 - 2p_k c_k \mu y + 2g_{k+1} q \mu y + 2h_{k+1} c_{k+1} q \mu y \\
&\quad - 2h_{k+1} c_{k+1} q \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k] \mu y - 2h_{k+1} \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} q \mu y + 2h_{k+1} \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} q \mu y - 2h_{k+1} \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} q \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k] \mu y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= p_k z^2 + w_{k+1} \mathbb{E}[(e_k^0)^2] z^2 - w_{k+1} \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[e_k^0 P_k] z^2 + 2\lambda_{k+1} q \mathbb{E}[e_k^0] z y - 2\lambda_{k+1} \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] q \mathbb{E}[P_k] z y \\
&\quad - 2p_k c_k z y + 2w_{k+1} c_{k+1} q \mathbb{E}[e_k^0] z y - 2w_{k+1} c_{k+1} \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] q \mathbb{E}[P_k] z y + \gamma_{k+1} q^2 y^2 + p_k c_k^2 y^2 + w_{k+1} c_{k+1}^2 q^2 y^2 \\
&\quad - w_{k+1} c_{k+1}^2 q^2 \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k] y^2 + 2\lambda_{k+1} c_{k+1} q^2 y^2 - 2\lambda_{k+1} c_{k+1} q^2 \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k] y^2 - \frac{\lambda_{k+1}^2}{w_{k+1}} q^2 y^2 \\
&\quad + \frac{\lambda_{k+1}^2}{w_{k+1}} q^2 y^2 - \frac{\lambda_{k+1}^2}{w_{k+1}} q^2 \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k] y^2 - 2p_k \mu z + 2h_{k+1} \mathbb{E}[e_k^0] \mu z - 2h_{k+1} \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k] \mu z \\
&\quad + 2g_{k+1} q \mu y - 2p_k c_k \mu y + 2h_{k+1} c_{k+1} q \mu y - 2h_{k+1} c_{k+1} q \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k] \mu y - 2h_{k+1} \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} q \mu y \\
&\quad + 2h_{k+1} \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} q \mu y - 2h_{k+1} \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} q \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mu y + \alpha_{k+1} \mu^2 - \frac{h_{k+1}^2}{w_{k+1}} \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k] \mu^2 \\
&= p_k z^2 + w_{k+1} (\mathbb{E}[(e_k^0)^2] - \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[e_k^0 P_k]) z^2 + 2\lambda_{k+1} (q \mathbb{E}[e_k^0] - q \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k]) z y - 2p_k c_k z y \\
&\quad + 2w_{k+1} c_{k+1} (q \mathbb{E}[e_k^0] - q \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k]) z y + \gamma_{k+1} q^2 y^2 + p_k c_k^2 y^2 \\
&\quad + w_{k+1} c_{k+1}^2 (q^2 - q^2 \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k]) y^2 + 2\lambda_{k+1} c_{k+1} (q^2 - q^2 \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k]) y^2 - \frac{\lambda_{k+1}^2}{w_{k+1}} q^2 y^2 \\
&\quad + \frac{\lambda_{k+1}^2}{w_{k+1}} (q^2 - q^2 \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k]) y^2 + 2p_k \mu z + 2h_{k+1} (\mathbb{E}[e_k^0] - \mathbb{E}[e_k^0 P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k]) \mu z + 2g_{k+1} q \mu y \\
&\quad - 2p_k c_k \mu y + 2h_{k+1} c_{k+1} (q - q \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k]) \mu y - 2h_{k+1} \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} q \mu y \\
&\quad + 2h_{k+1} \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} (q - q \mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k]) \mu y + \alpha_{k+1} \mu^2 - \frac{h_{k+1}^2}{w_{k+1}} (\mathbb{E}[P_k^t] \mathbb{E}^{-1}[P_k P_k^t] \mathbb{E}[P_k]) \mu^2.
\end{aligned}$$

Mensubstitusikan Persamaan (5.25).

$$\begin{aligned}
f_k(z, y) &= p_k z^2 + w_{k+1} A_k z^2 + 2\lambda_{k+1} C_k z y - 2p_k c_k z y + w_{k+1} c_{k+1} C_k z y + \gamma_{k+1} q^2 y^2 + p_k c_k^2 y^2 + w_{k+1} c_{k+1}^2 B_k y^2 \\
&\quad + 2\lambda_{k+1} c_{k+1} B_k y^2 - \frac{\lambda_{k+1}^2}{w_{k+1}} q^2 y^2 + \frac{\lambda_{k+1}^2}{w_{k+1}} B_k y^2 + 2p_k \mu z + 2h_{k+1} J_k \mu z + 2g_{k+1} q \mu y - 2p_k c_k \mu y + 2h_{k+1} c_{k+1} M_k \mu y \\
&\quad - 2h_{k+1} \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} q \mu y + 2h_{k+1} \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} M_k \mu y + \alpha_{k+1} \mu^2 - \frac{h_{k+1}^2}{w_{k+1}} D_k \mu^2 \\
&= p_k z^2 + w_{k+1} A_k z^2 + 2\lambda_{k+1} C_k z y - 2p_k c_k z y + 2w_{k+1} c_{k+1} C_k z y \\
&\quad + \left(\gamma_{k+1} q^2 + p_k c_k^2 + w_{k+1} c_{k+1} c_{k+1} B_k + 2\lambda_{k+1} c_{k+1} B_k - \frac{\lambda_{k+1}^2}{w_{k+1}} q^2 + \frac{\lambda_{k+1}^2}{w_{k+1}} B_k \right) y^2 + 2p_k \mu z + 2h_{k+1} J_k \mu z \\
&\quad + 2 \left(g_{k+1} q - p_k c_k + h_{k+1} c_{k+1} M_k - h_{k+1} \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} q + h_{k+1} \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} M_k \right) \mu y + \alpha_{k+1} \mu^2 - \frac{h_{k+1}^2}{w_{k+1}} D_k \mu^2 \\
&= (p_k + w_{k+1} A_k) z^2 + 2(\lambda_{k+1} C_k - p_k c_k + w_{k+1} c_{k+1} C_k) z y + \left(\gamma_{k+1} q^2 + p_k c_k^2 + (w_{k+1} c_{k+1} + 2\lambda_{k+1}) c_{k+1} B_k - \frac{\lambda_{k+1}^2}{w_{k+1}} (q^2 - B_k) \right) \\
&\quad y^2 + 2(p_k + h_{k+1} J_k) \mu z + 2 \left(g_{k+1} q - p_k c_k + h_{k+1} \left(c_{k+1} M_k - \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}} (q - M_k) \right) \right) \mu y + \left(\alpha_{k+1} - \frac{h_{k+1}^2}{w_{k+1}} D_k \right) \mu^2.
\end{aligned}$$

Mensubstitusikan Persamaan (5.19)-(5.24).

$$f_k(z, y) = w_k z^2 - 2\lambda_k z y + \gamma_k y^2 + 2h_k \mu z + 2g_k \mu y + \alpha_k \mu^2.$$

Lampiran 5. Perhitungan Varian Minimum Persamaan (5.41)

$$\begin{aligned}
 Var^*[x_{T\tau}] &= \max_{\mu} H(z_0, y_0, \mu) \\
 &= \max_{\mu} \{ \alpha_0 \mu^2 + 2\mu(h_0 z_0 + g_0 y_0 - d) + w_0 z_0^2 + 2\lambda_0 z_0 y_0 + \gamma_0 y_0^2 - d^2 \} \\
 &= \max_{\mu} \{ \alpha_0 \mu^2 + 2\mu h_0 z_0 + 2\mu g_0 y_0 - 2\mu d + w_0 z_0^2 + 2\lambda_0 z_0 y_0 + \gamma_0 y_0^2 - d^2 \} \\
 &= \alpha_0 (\mu^*)^2 + 2\mu^* h_0 z_0 + 2\mu^* g_0 y_0 - 2\mu^* d + w_0 z_0^2 + 2\lambda_0 z_0 y_0 + \gamma_0 y_0^2 - d^2.
 \end{aligned}$$

Mensubstitusikan μ^* ke dalam persamaan.

$$\begin{aligned}
 Var^*[x_{T\tau}] &= \alpha_0 \left(-\frac{h_0 z_0 + g_0 y_0 - d}{\alpha_0} \right)^2 + 2 \left(-\frac{h_0 z_0 + g_0 y_0 - d}{\alpha_0} \right) h_0 z_0 + 2 \left(-\frac{h_0 z_0 + g_0 y_0 - d}{\alpha_0} \right) g_0 y_0 - 2 \left(-\frac{h_0 z_0 + g_0 y_0 - d}{\alpha_0} \right) d \\
 &\quad + w_0 z_0^2 + 2\lambda_0 z_0 y_0 + \gamma_0 y_0^2 - d^2.
 \end{aligned}$$

Mensubstitusikan z_0 ke dalam persamaan.

$$\begin{aligned}
 Var^*[x_{T\tau}] &= \alpha_0 \left(-\frac{h_0(x_0 + c_0 y_0) + g_0 y_0 - d}{\alpha_0} \right)^2 + 2 \left(-\frac{h_0(x_0 + c_0 y_0) + g_0 y_0 - d}{\alpha_0} \right) h_0(x_0 + c_0 y_0) \\
 &\quad + 2 \left(-\frac{h_0(x_0 + c_0 y_0) + g_0 y_0 - d}{\alpha_0} \right) g_0 y_0 - 2 \left(-\frac{h_0(x_0 + c_0 y_0) + g_0 y_0 - d}{\alpha_0} \right) d + w_0(x_0 + c_0 y_0)^2 \\
 &\quad + 2\lambda_0(x_0 + c_0 y_0)y_0 + \gamma_0 y_0^2 - d^2.
 \end{aligned}$$

Menjabarkan bentuk aljabar persamaan.

$$\begin{aligned}
 Var^*[x_{T\tau}] &= -\frac{1}{\alpha_0}(-2\lambda_0 y_0 \alpha_0 x_0 - w_0 \alpha_0 c_0^2 y_0^2 - 2\lambda_0 y_0^2 \alpha_0 c_0 - 2w_0 \alpha_0 x_0 c_0 y_0 - w_0 \alpha_0 x_0^2 - \gamma_0 y_0^2 \alpha_0 + d^2 \alpha_0 + 2h_0 c_0 y_0^2 g_0 + d^2 \\
 &\quad + 2h_0^2 x_0 c_0 y_0 + 2h_0 x_0 g_0 y_0 - 2g_0 y_0 d - 2h_0 c_0 y_0 d + h_0^2 c_0^2 y_0^2 - 2h_0 x_0 d + h_0^2 x_0^2 + g_0^2 y_0^2) \\
 &= \frac{(1 + \alpha_0) \left(d - \frac{h_0(x_0 + c_0 y_0) + g_0 y_0}{1 + \alpha_0} \right)^2}{\alpha_0} + w_0(x_0 + c_0 y_0)^2 + 2\lambda_0(x_0 + c_0 y_0)y_0 + \gamma_0 y_0^2 - \frac{(h_0(x_0 + c_0 y_0) + g_0 y_0)^2}{1 + \alpha_0} \\
 Var^*[x_{T\tau}] &= -\frac{1 + \alpha_0}{\alpha_0} \left(d - \frac{h_0(x_0 + c_0 y_0) + g_0 y_0}{1 + \alpha_0} \right)^2 + w_0(x_0 + c_0 y_0)^2 + 2\lambda_0(x_0 + c_0 y_0)y_0 + \gamma_0 y_0^2 \\
 &\quad - \frac{1}{1 + \alpha_0} (h_0(x_0 + c_0 y_0) + g_0 y_0)^2.
 \end{aligned}$$

Lampiran 6. Listing Program Simulasi I

HitungL
<pre> 1 - function lambda=HitungL(k,w,p,T,Ck,ck) 2 3 - for i=1:T+1 4 - if i<T+1 5 - a=sum(p(i:T+1)); 6 - b=sum(w(i+1:T+1)); 7 - lambda=(b-a)*ck*(Ck^(T-(i-1))); 8 - elseif i==T+1 9 - a=p(T+1); 10 - lambda=(a*ck*(Ck^(T-(i-1)))); 11 - end 12 - end </pre>
peluang
<pre> 1 - function p=peluang(beta,k,T) 2 3 - if k==1 4 - p=0; 5 - elseif k<T+1 6 - p=exp(-(beta*(k-2)))-exp(-(beta*(k-1))); 7 - else 8 - p=exp(-(beta*(T-1))); 9 - end </pre>
program_utama
<pre> 1 - clear all 2 - clc 3 4 - T=20; 5 - ck=0.4; 6 - beta = 0.1; 7 - E = [0.2365 0.0719 0.1184; 0.0719 0.3449 0.1378; 0.1184 0.1378 0.3262]; 8 - E0 = 1.2468; %EkNo1^2 9 - E1 = 1.0430; %EkNo1 10 - q = 1.0284; %q 11 - EPk = [-0.0255;0.0015;0.0004]; %EPk 12 - EeP = [-0.0827;-0.0924;-0.0446]; %EePk 13 - p = zeros(T+1,1); 14 - w = zeros(T+1,1); 15 - h = zeros(T+1,1); 16 - lambda = zeros(T+1,1); 17 - eta = zeros(T+1,1); </pre>

```

18 - xi = zeros(T+1,1);
19 - z = zeros(T,1);
20 - x = zeros(T+1,1);
21 - y = zeros(T+1,1);
22 - d = zeros(T+1,1);
23 - var = zeros(1,T+1);
24
25 - for      k=1:T+1
26 -         p(k)=peluang(beta,k,T);
27 -     end
28
29 - Ak = E0-(EeP'*inv(E)*EeP);
30
31 - for      k=1:T+1
32 -         a = sum(p(k:T+1));
33 -         w(k) = a*(Ak^(T-(k-1)));
34 -     end
35
36 - Jk = E1-(EeP'*inv(E)*EPk);
37
38 - for      k=1:T+1
39 -         a = sum(p(k:T+1));
40 -         h(k) = a*(Jk^(T-(k-1)));
41 -     end
42
43 - Ck = (q*E1)-(EeP'*inv(E)*q*EPk);
44
45 - for      k=1:T+1
46 -         if      k<T+1
47 -             b = sum(p(k:T+1));
48 -             c = sum(w(k+1:T+1));
49 -             lambda(k) = (c-b)*ck*(Ck^(T-(k-1)));
50 -         elseif  k==T+1
51 -             b = p(T+1);
52 -             lambda(k) = -(b*ck*(Ck^(T-(k-1))));
53 -         end
54 -     end
55
56 - Dk = EPk'*inv(E)*EPk;
57
58 - e = 0;
59 - for      k=1:T
60 -         f = (h(k+1)^2)/(w(k+1));
61 -         e = e+f;

```

```

62 - end
63 - alpha0 = -e*Dk;
64
65 - Bk = (q^2)*(1-Dk);
66
67 - for k=1:T
68 -     eta(k) = (((ck^2)*p(k))+(w(k+1)*ck+2*lambda(k+1))
69 -             *(ck*Bk)) ...
70 -             -((lambda(k+1)^2)/w(k+1))*(q^2)-Bk);
71 - end
72 - f = 0;
73 - for k=1:T
74 -     f = f+eta(k);
75 - end
76 - gamma0 = (ck*(p(T+1)^2)*(q^2))^T+f*((q^2)^(T-1));
77
78 - Mk = q*(1-Dk);
79
80 - for k=1:T
81 -     xi(k) = (-ck*p(k))+(h(k+1)*((ck*Mk)-((lambda(k+1)
82 -             /w(k+1))*(q-Mk)))));
83
84 - g = 0;
85 - for k=1:T
86 -     g = g+xi(k);
87 - end
88 - g0 = (-ck*p(T+1)*(q^T))+(g*(q^(T-1)));
89
90 - y(1) = 4;
91 - x(1) = 12;
92 - z(1) = x(1)+(ck*y(1));
93 - for k=2:T+1
94 -     y(k) = q*y(k-1);
95 -     x(k) = z(k-1);
96 -     if k<T+1
97 -         z(k) = x(k)+(ck*y(k));
98 -     else
99 -         break
100 -    end
101 - end
102
103 - d(1) = 1;

```

```

104 - s = 0;
105 - for k=2:T+1
106 -     s = s+(p(k)*x(k)); d(k) = s;
107 - end
108
109 - u=[]
110 - for k=1:T
111 -     temp = ((h(1)*(x(1)+(ck*y(1))))+(g0*y(1))-d(k))/alpha0;
112
113 -     ut = (-inv(E)*EeP*(x(k)+(ck*y(k)))-(y(k)
114 -         *(ck+(lambda(k+1)/w(k+1)))) ...
115 -         *q*inv(E)*EPk)+(temp*(h(k+1)/w(k+1))
116 -         *inv(E)*EPk);
117
118 -     u = [u;ut];
119 - end
120 - u
121 -
122 - for k=1:T
123 -     ax=-((1+alpha0)/alpha0);
124 -     bx=(d(k)-((h(1)*(x(1)+(ck*y(1)))+(g0*y(1))
125 -         /(1+alpha0)))^2);
126 -     cx=w(1)*((x(1)+(ck*y(1)))^2);
127 -     dx=(2*lambda(1))*(x(1)+(ck*y(1)))*(y(1));
128 -     ex=gamma0*(y(1)^2);
129 -     fx=1/(1+alpha0);
130 -     gx=(h(1)*(x(1)+(ck*y(1)))+(g0*y(1)))^2;
131 -     var(k)=(ax*bx)+cx+dx+ex-(fx*gx);
132 - end
133 -
134 - figure(1)
135 - hold on
136 - n = zeros(3, 1);
137 - n(1) = plot(var,d,'m--','LineWidth',2);
138 - n(2) = plot(var,d,'r--','LineWidth',2);
139 - n(3) = plot(var,d,'b--','LineWidth',2);
140 - legend(n, '\beta(s)=0.1', '\beta(s)=0.25', '\beta(s)=0.5');
141 - grid on
142 - xlabel ('Varian');
143 - ylabel ('Mean');

```


Lampiran 7. Listing Program Simulasi II

HitungL
<pre> 1 - function lambda=HitungL(k,w,p,T,Ck,ck) 2 3 - for i=1:T+1 4 - if i<T+1 5 - a=sum(p(i:T+1)); 6 - b=sum(w(i+1:T+1)); 7 - lambda=(b-a)*ck*(Ck^(T-(i-1))); 8 - elseif i==T+1 9 - a=p(T+1); 10 - lambda=(a*ck*(Ck^(T-(i-1)))); 11 - end 12 - end </pre>
peluang
<pre> 1 - function p=peluang(beta,k,T) 2 3 - if k==1 4 - p=0; 5 - elseif k<T+1 6 - p=exp(-(beta*(k-2)))-exp(-(beta*(k-1))); 7 - else 8 - p=exp(-(beta*(T-1))); 9 - end </pre>
program_utama
<pre> 1 - clear all 2 - clc 3 4 - T=20; 5 - ck=0; 6 - beta = 0.1; 7 - E = [0.2365 0.0719 0.1184; 0.0719 0.3449 0.1378; 0.1184 0.1378 0.3262]; 8 - E0 = 1.2468; %EkNo1^2 9 - E1 = 1.0430; %EkNo1 10 - q = 1.0284; %q 11 - EPk = [-0.0255;0.0015;0.0004]; %EPk 12 - EePk = [-0.0827;-0.0924;-0.0446]; %EePk 13 - p = zeros(T+1,1); 14 - w = zeros(T+1,1); 15 - h = zeros(T+1,1); 16 - lambda = zeros(T+1,1); 17 - eta = zeros(T+1,1); </pre>

```

18 - xi = zeros(T+1,1);
19 - z = zeros(T,1);
20 - x = zeros(T+1,1);
21 - y = zeros(T+1,1);
22 - d = zeros(T+1,1);
23 - var = zeros(1,T+1);
24
25 - for      k=1:T+1
26 -         p(k)=peluang(beta,k,T);
27 -     end
28
29 - Ak = E0-(EeP'*inv(E)*EeP);
30
31 - for      k=1:T+1
32 -         a = sum(p(k:T+1));
33 -         w(k) = a*(Ak^(T-(k-1)));
34 -     end
35
36 - Jk = E1-(EeP'*inv(E)*EPk);
37
38 - for      k=1:T+1
39 -         a = sum(p(k:T+1));
40 -         h(k) = a*(Jk^(T-(k-1)));
41 -     end
42
43 - Ck = (q*E1)-(EeP'*inv(E)*q*EPk);
44
45 - for      k=1:T+1
46 -         if      k<T+1
47 -             b = sum(p(k:T+1));
48 -             c = sum(w(k+1:T+1));
49 -             lambda(k) = (c-b)*ck*(Ck^(T-(k-1)));
50 -         elseif  k==T+1
51 -             b = p(T+1);
52 -             lambda(k) = -(b*ck*(Ck^(T-(k-1))));
53 -         end
54 -     end
55
56 - Dk = EPk'*inv(E)*EPk;
57
58 - e = 0;
59 - for      k=1:T
60 -         f = (h(k+1)^2)/(w(k+1));
61 -         e = e+f;

```

```

62 - end
63 - alpha0 = -e*Dk;
64
65 - Bk = (q^2)*(1-Dk);
66
67 - for      k=1:T
68 -         eta(k) = (((ck^2)*p(k))+(w(k+1)*ck
69 -                    +2*lambda(k+1))*(ck*Bk)) ...
70 -                    -((lambda(k+1)^2)/w(k+1))*((q^2)-Bk);
71 - end
72   f = 0;
73 - for      k=1:T
74 -         f = f+eta(k);
75 - end
76 - gamma0 = (ck*(p(T+1)^2)*((q^2)^T))+f*((q^2)^(T-1));
77
78 - Mk = q*(1-Dk);
79
80 - for      k=1:T
81 -         xi(k) = (-ck*p(k))+(h(k+1))*((ck*Mk)
82 -                    -((lambda(k+1)/w(k+1))*(q-Mk))));
83 - end
84 - g = 0;
85 - for      k=1:T
86 -         g = g+xi(k);
87 - end
88 - g0 = (-ck*p(T+1)*(q^T))+(g*(q^(T-1)));
89
90 - y(1) = 4;
91 - x(1) = 12;
92 - z(1) = x(1)+(ck*y(1));
93 - for      k=2:T+1
94 -         y(k) = q*y(k-1);
95 -         x(k) = z(k-1);
96 -         if      k<T+1
97 -             z(k) = x(k)+(ck*y(k));
98 -         else
99 -             break
100 -        end
101 - end
102
103 - d(1) = 1;

```

```

104 - s = 0;
105 - for k=2:T+1
106 -     s = s+(p(k)*x(k)); d(k) = s;
107 - end
108
109 - u=[];
110 - for k=1:T
111 -     temp = ((h(1)*(x(1)+(ck*y(1))))+(g0*y(1))-d)/alpha0;
112
113 -     ut = (-inv(E)*EeP*(x(k)))+(temp*(h(k+1)/w(k+1))
            *inv(E)*EPk);
114
115 -     u = [u;ut];
116 - end
117 - u
118
119 - for k=1:T
120 -     ax=-((1+alpha0)/alpha0);
121 -     bx=(d(k)-((h(1)*x(1))/(1+alpha0)))^2;
122 -     cx=(w(1)-((h(1)^2)/(1+alpha0)))*(x(1)^2);
123 -     var(k)=(ax*bx)+cx;
124 - end
125
126 - figure(1)
127 - hold on
128 - n = zeros(3, 1);
129 - n(1) = plot(var,d,'m--','LineWidth',2);
130 - n(2) = plot(var,d,'r-','LineWidth',2);
131 - n(3) = plot(var,d,'b--','LineWidth',2);
132 - legend(n, '\beta(s)=0.1', '\beta(s)=0.25', '\beta(s)=0.5');
133 - grid on
134 - xlabel ('Varian');
135 - ylabel ('Mean');

```

Lampiran 8. Listing Program Simulasi III

HitungL
<pre> 1 - function lambda=HitungL(k,w,p,T,Ck,ck) 2 3 - for i=1:T+1 4 - if i<T+1 5 - a=1; 6 - b=sum(w(i+1:T+1)); 7 - lambda=-ck*(b-a)*(Ck^(T-(i-1))); 8 - elseif i==T+1 9 - a=p(T+1); 10 - lambda=-ck*(Ck^(T-(i-1))); 11 - end 12 - end </pre>
peluang
<pre> 1 - function p=peluang(beta,k,T) 2 3 - if k==1 4 - p=0; 5 - elseif k<T+1 6 - p=exp(-(beta*(k-2)))-exp(-(beta*(k-1))); 7 - else 8 - p=exp(-(beta*(T-1))); 9 - end </pre>
program_utama
<pre> 1 - clear all 2 - clc 3 4 - T=20; 5 - ck=0.4; 6 - beta = 0; 7 - E = [0.2365 0.0719 0.1184; 0.0719 0.3449 0.1378; 0.1184 0.1378 0.3262]; 8 - E0 = 1.2468; %EkNo1^2 9 - E1 = 1.0430; %EkNo1 10 - q = 1.0284; %q 11 - EPk = [-0.0255;0.0015;0.0004]; %EPk 12 - EePk = [-0.0827;-0.0924;-0.0446]; %EePk 13 - p = zeros(T+1,1); 14 - w = zeros(T+1,1); 15 - h = zeros(T+1,1); 16 - lambda = zeros(T+1,1); 17 - eta = zeros(T+1,1); </pre>

```

18 - xi = zeros(T+1,1);
19 - z = zeros(T,1);
20 - x = zeros(T+1,1);
21 - y = zeros(T+1,1);
22 - d = zeros(T+1,1);
23 - var = zeros(1,T);
24
25 - for      k=1:T+1
26 -         p(k)=peluang(beta,k,T);
27 -     end
28
29 - Ak = E0-(EeP'*inv(E)*EeP);
30
31 - for      k=1:T+1
32 -         a = sum(p(k:T+1));
33 -         w(k) = Ak^(T-(k-1));
34 -     end
35
36 - Jk = E1-(EeP'*inv(E)*EPk);
37
38 - for      k=1:T+1
39 -         a = sum(p(k:T+1));
40 -         h(k) = Jk^(T-(k-1));
41 -     end
42
43 - Ck = (q*E1)-(EeP'*inv(E)*q*EPk);
44
45 - for      k=1:T+1
46 -         if      k<T+1
47 -             b = 1;
48 -             c = sum(w(k+1:T+1));
49 -             lambda(k) = ck*(c-b)*(Ck^(T-(k-1)));
50 -         elseif  k==T+1
51 -             b = p(T+1);
52 -             lambda(k) = -ck*(Ck^(T-(k-1)));
53 -         end
54 -     end
55
56 - Dk = EPk'*inv(E)*EPk;
57
58 - for      k=1:T
59 -         d = (Jk^2)/(Ak);
60 -     end
61 - alpha0 = (d^(T-1))*(-T*Dk);

```

```

62
63 - Bk = (q^2)*(1-Dk);
64
65 - for      k=1:T
66 -         eta(k) = ((w(k+1)*ck+2*lambda(k+1))* (ck*Bk))
                   - ((lambda(k+1)^2)/w(k+1))* ((q^2)-Bk);
67 - end
68
69   f = 0;
70 - for      k=1:T
71 -         f = f+eta(k);
72 - end
73 - gamma0 = ((ck^2)*((q^2)^T))+f*((q^2)^(T-1));
74
75 - Mk = q*(1-Dk);
76
77 - for      k=1:T
78 -         xi(k) = h(k+1)*((ck*Mk)-((lambda(k+1)/w(k+1))
                          *(q-Mk)));
79 - end
80
81 - g = 0;
82 - for      k=1:T
83 -         g = g+xi(k);
84 - end
85 - g0 = (-ck*(q^T))+ (g*(q^(T-1)));
86
87 - y(1) = 4;
88 - x(1) = 12;
89 - z(1) = x(1)+(ck*y(1));
90 - for      k=2:T+1
91 -         y(k) = q*y(k-1);
92 -         x(k) = z(k-1);
93 -         if      k<T+1
94 -             z(k) = x(k)+(ck*y(k));
95 -         else
96 -             break
97 -         end
98 - end
99
100 - s = 0;
101 - for      k=1:T
102 -         if      k<T
103 -             d(k) = 1;

```

```

104 -         elseif k==T
105 -             d(k)= s+(p(k+1)*x(k));
106 -         end
107 -     end
109 -     u=[];
110 -     for k=1:T
111 -         temp = ((h(1)*(x(1)+(ck*y(1))))+(g0*y(1))-d(k))
112 -             /alpha0;
113 -         ut = (-inv(E)*EeP*(x(k)+(ck*y(k))))-(y(k)
114 -             *(ck+(lambda(k+1)/w(k+1)))) ...
115 -             *q*inv(E)*EPk)+(temp*(h(k+1)/w(k+1))
116 -             *inv(E)*EPk);
117 -         u = [u;ut];
118 -     end
119 -     u
120 -     for k=1:T
121 -         ax=-((1+alpha0)/alpha0);
122 -         bx=(d(k)-((h(1)*(x(1)+(ck*y(1))))+(g0*y(1)))
123 -             /(1+alpha0))^2;
124 -         cx=w(1)*((x(1)+(ck*y(1)))^2);
125 -         dx=(2*lambda(1))*(x(1)+(ck*y(1)))*(y(1));
126 -         ex=gamma0*(y(1)^2);
127 -         fx=1/(1+alpha0);
128 -         gx=(h(1)*(x(1)+(ck*y(1))))+(g0*y(1))^2;
129 -         var(k)=(ax*bx)+cx+dx+ex-(fx*gx);
130 -     end
131 -     figure(1)
132 -     hold on
133 -     n = zeros(3, 1);
134 -     n(1) = plot(var,u,'m--','LineWidth',2);
135 -     n(2) = plot(var,u,'r--','LineWidth',2);
136 -     n(3) = plot(var,u,'b--','LineWidth',2);
137 -     legend(n, 'c_k=0.4','c_k=0.5','c_k=0.6');
138 -     grid on
139 -     xlabel ('Varian');
140 -     ylabel ('Mean');

```


Lampiran 9. Batasan Efisien Hasil Simulasi I saat $\beta(s) = 0.1$ dengan Tiga Nilai c_k Berbeda

k	$c_k = 0.4$		$c_k = 0.5$		$c_k = 0.6$	
	var ($\times 10^5$)	d	var ($\times 10^5$)	d	var ($\times 10^5$)	d
0	4.7789	1.0000	6.4153	1.0000	8.2928	1.0000
1	4.7382	1.2942	6.3621	1.3323	8.2254	1.3703
2	4.5590	2.6069	6.1433	2.7149	7.9639	2.8228
3	4.3826	3.9266	5.9235	4.1307	7.6967	4.3348
4	4.2105	5.2434	5.7054	5.5651	7.4276	5.8869
5	4.0435	6.5490	5.4909	7.0058	7.1598	7.4626
6	3.8826	7.8366	5.2816	8.4421	6.8960	9.0477
7	3.7281	9.1005	5.0787	9.8653	6.6381	10.6302
8	3.5805	10.3361	4.8830	11.2681	6.3878	12.2001
9	3.4400	11.5397	4.6953	12.6444	6.1461	13.7490
10	3.3066	12.7085	4.5159	13.9892	5.9138	15.2700
11	3.1803	13.8401	4.3450	15.2987	5.6917	16.7574
12	3.0610	14.9330	4.1828	16.5698	5.4799	18.2067
13	2.9485	15.9861	4.0291	17.8002	5.2786	19.6143
14	2.8427	16.9987	3.8839	18.9881	5.0879	20.9776
15	2.7432	17.9705	3.7470	20.1325	4.9075	22.2945
16	2.6499	18.9015	3.6181	21.2326	4.7373	23.5637
17	2.5624	19.7921	3.4969	22.2881	4.5769	24.7842
18	2.4805	20.6426	3.3831	23.2992	4.4260	25.9558
19	2.4038	21.4539	3.2764	24.2661	4.2843	27.0783
20	0.0000	29.5755	0.0000	33.9693	0.0000	38.3632

Lampiran 10. Batasan Efisien Hasil Simulasi I saat $c_k = 0.4$ dengan Tiga Nilai $\beta(s)$ Berbeda

k	$\beta(s) = 0.1$		$\beta(s) = 0.25$		$\beta(s) = 0.5$	
	var ($\times 10^5$)	d	var ($\times 10^5$)	d	var ($\times 10^6$)	d
0	4.7789	1.0000	7.2838	1.0000	1.1081	1.0000
1	4.7382	1.2942	6.6712	3.0083	0.8633	5.3512
2	4.5590	2.6069	5.9124	5.6346	0.6825	8.9895
3	4.3826	3.9266	5.2945	7.9071	0.5730	11.4412
4	4.2105	5.2434	4.7925	9.8587	0.5053	13.0811
5	4.0435	6.5490	4.3851	11.5242	0.4627	14.1710
6	3.8826	7.8366	4.0543	12.9379	0.4356	14.8915
7	3.7281	9.1005	3.7857	14.1324	0.4183	15.3655
8	3.5805	10.3361	3.5673	15.1375	0.4071	15.6762
9	3.4400	11.5397	3.3897	15.9801	0.3999	15.8791
10	3.3066	12.7085	3.2450	16.6844	0.3952	16.0111
11	3.1803	13.8401	3.1270	17.2713	0.3922	16.0968
12	3.0610	14.9330	3.0308	17.7592	0.3903	16.1523
13	2.9485	15.9861	2.9523	18.1638	0.3890	16.1881
14	2.8427	16.9987	2.8881	18.4987	0.3882	16.2112
15	2.7432	17.9705	2.8357	18.7753	0.3877	16.2261
16	2.6499	18.9015	2.7929	19.0034	0.3874	16.2356
17	2.5624	19.7921	2.7579	19.1912	0.3872	16.2417
18	2.4805	20.6426	2.7294	19.3456	0.3870	16.2457
19	2.4038	21.4539	2.7060	19.4723	0.3869	16.2482
20	0.0000	29.5755	0.0000	19.9421	0.0000	16.2522

Lampiran 11. Batasan Efisien Hasil Simulasi II dengan Tiga Nilai $\beta(s)$ Berbeda

k	$\beta(s) = 0.1$		$\beta(s) = 0.25$		$\beta(s) = 0.5$	
	var ($\times 10^4$)	d	var ($\times 10^5$)	d	var ($\times 10^5$)	d
0	6.4431	1.0000	1.8979	1.0000	4.4058	1.0000
1	6.3708	1.1420	1.6424	2.6544	3.1112	4.7216
2	5.8579	2.1752	1.3499	4.7216	2.2702	7.5854
3	5.4141	3.1102	1.1426	6.3316	1.8258	9.3224
4	5.0292	3.9562	0.9937	7.5854	1.5804	10.3760
5	4.6944	4.7216	0.8853	8.5619	1.4405	11.0150
6	4.4026	5.4143	0.8054	9.3224	1.3589	11.4026
7	4.1477	6.0410	0.7460	9.9147	1.3106	11.6376
8	3.9245	6.6081	0.7015	10.3760	1.2818	11.7802
9	3.7286	7.1212	0.6678	10.7352	1.2644	11.8667
10	3.5564	7.5854	0.6422	11.0150	1.2540	11.9191
11	3.4046	8.0055	0.6226	11.2329	1.2477	11.9510
12	3.2707	8.3857	0.6076	11.4026	1.2438	11.9703
13	3.1522	8.7296	0.5960	11.5347	1.2415	11.9820
14	3.0473	9.0408	0.5871	11.6376	1.2401	11.9891
15	2.9541	9.3224	0.5802	11.7178	1.2393	11.9934
16	2.8714	9.5772	0.5749	11.7802	1.2387	11.9960
17	2.7977	9.8078	0.5707	11.8288	1.2384	11.9976
18	2.7321	10.0164	0.5675	11.8667	1.2382	11.9985
19	2.6736	10.2052	0.5650	11.8962	1.2381	11.9991
20	0	12.0000	0	12.0000	0	12.0000

Lampiran 12. Batasan Efisien Hasil Simulasi III dengan Tiga Nilai c_k Berbeda

k	$c_k = 0.4$		$c_k = 0.5$		$c_k = 0.6$	
	var ($\times 10^6$)	d	var ($\times 10^6$)	d	var ($\times 10^6$)	d
0	1.3669	1.0000	1.9428	1.0000	2.6197	1.0000
1	1.3669	1.0000	1.9428	1.0000	2.6197	1.0000
2	1.3669	1.0000	1.9428	1.0000	2.6197	1.0000
3	1.3669	1.0000	1.9428	1.0000	2.6197	1.0000
4	1.3669	1.0000	1.9428	1.0000	2.6197	1.0000
5	1.3669	1.0000	1.9428	1.0000	2.6197	1.0000
6	1.3669	1.0000	1.9428	1.0000	2.6197	1.0000
7	1.3669	1.0000	1.9428	1.0000	2.6197	1.0000
8	1.3669	1.0000	1.9428	1.0000	2.6197	1.0000
9	1.3669	1.0000	1.9428	1.0000	2.6197	1.0000
10	1.3669	1.0000	1.9428	1.0000	2.6197	1.0000
11	1.3669	1.0000	1.9428	1.0000	2.6197	1.0000
12	1.3669	1.0000	1.9428	1.0000	2.6197	1.0000
13	1.3669	1.0000	1.9428	1.0000	2.6197	1.0000
14	1.3669	1.0000	1.9428	1.0000	2.6197	1.0000
15	1.3669	1.0000	1.9428	1.0000	2.6197	1.0000
16	1.3669	1.0000	1.9428	1.0000	2.6197	1.0000
17	1.3669	1.0000	1.9428	1.0000	2.6197	1.0000
18	1.3669	1.0000	1.9428	1.0000	2.6197	1.0000
19	0.3873	51.5757	0.5471	61.4697	0.7344	71.3636

Lampiran 13. Strategi Investasi Efisien Hasil Simulasi I saat $\beta(s)$ bernilai 0.1 dengan Tiga Nilai c_k Berbeda

k	u_k^*		
	$c_k = 0.4$	$c_k = 0.5$	$c_k = 0.6$
0	$\begin{pmatrix} 60.7373 \\ -3.0985 \\ -19.3928 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 69.9940 \\ -4.0183 \\ -22.3928 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 79.2506 \\ -4.9381 \\ -25.3929 \end{pmatrix}$
1	$\begin{pmatrix} 69.6181 \\ -3.6434 \\ -22.2375 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 80.3267 \\ -4.6141 \\ -25.6988 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 91.0353 \\ -5.5849 \\ -29.1601 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 78.6399 \\ -4.1914 \\ -25.1268 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 90.9777 \\ -5.2297 \\ -29.1067 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 103.3154 \\ -6.2680 \\ -33.0867 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 88.8035 \\ -4.8532 \\ -28.3861 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 102.9702 \\ -5.9779 \\ -32.9494 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 117.1368 \\ -7.1027 \\ -37.5126 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 100.2632 \\ -5.6455 \\ -32.0658 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 116.4839 \\ -6.8784 \\ -37.2852 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 132.7046 \\ -8.1113 \\ -42.5046 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 113.1956 \\ -6.5876 \\ -36.2230 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 131.7244 \\ -7.9534 \\ -42.1809 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 150.2533 \\ -9.3193 \\ -48.1388 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 127.8026 \\ -7.7015 \\ -40.9235 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 148.9268 \\ -9.2286 \\ -47.7129 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 170.0510 \\ -10.7557 \\ -54.5023 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 144.3160 \\ -9.0124 \\ -46.2426 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 168.3602 \\ -10.7333 \\ -53.9688 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 192.4044 \\ -12.4541 \\ -61.6950 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 163.0014 \\ -10.5495 \\ -52.2667 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 190.3331 \\ -12.5011 \\ -61.0489 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 217.6648 \\ -14.4527 \\ -69.8310 \end{pmatrix}$

k	u_k^*		
	$c_k = 0.4$	$c_k = 0.5$	$c_k = 0.6$
9	$\begin{pmatrix} 184.1635 \\ -12.3462 \\ -59.0948 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 215.1990 \\ -14.5709 \\ -69.0679 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 246.2346 \\ -16.7957 \\ -79.0410 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 208.1522 \\ -14.4407 \\ -66.8408 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 243.3637 \\ -16.9871 \\ -78.1580 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 278.5752 \\ -19.5334 \\ -89.4752 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 235.3696 \\ -16.8773 \\ -75.6352 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 275.2929 \\ -19.8007 \\ -88.4704 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 315.2162 \\ -22.7240 \\ -101.3056 \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} 266.2776 \\ -19.7067 \\ -85.6283 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 311.5214 \\ -23.0705 \\ -100.1791 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 356.7652 \\ -26.4343 \\ -114.7299 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 301.4077 \\ -22.9875 \\ -96.9930 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 352.6640 \\ -26.8642 \\ -113.4840 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 403.9202 \\ -30.7409 \\ -129.9750 \end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix} 341.3712 \\ -26.7869 \\ -109.9279 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 399.4273 \\ -31.2595 \\ -128.6148 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 457.4834 \\ -35.7321 \\ -147.3017 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 386.8718 \\ -31.1825 \\ -124.6620 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 452.6244 \\ -36.3460 \\ -145.8359 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 518.3769 \\ -41.5094 \\ -167.0099 \end{pmatrix}$
16	$\begin{pmatrix} 438.7198 \\ -36.2637 \\ -141.4587 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 513.1907 \\ -42.2268 \\ -165.4516 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 587.6617 \\ -48.1898 \\ -189.4445 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 497.8487 \\ -42.1336 \\ -160.6215 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 582.2035 \\ -49.0207 \\ -187.8120 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 666.5583 \\ -55.9078 \\ -215.0025 \end{pmatrix}$
18	$\begin{pmatrix} 565.3343 \\ -48.9108 \\ -182.5005 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 660.9032 \\ -56.8647 \\ -213.3206 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 756.4721 \\ -64.8186 \\ -244.1408 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 642.4168 \\ -56.7325 \\ -207.4987 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 750.7189 \\ -65.9166 \\ -242.4422 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 859.0211 \\ -75.1008 \\ -277.3857 \end{pmatrix}$

Lampiran 14. Strategi Investasi Efisien Hasil Simulasi I saat $c_k = 0.4$ dengan Tiga Nilai $\beta(s)$ Berbeda

k	u_k^*		
	$\beta(s) = 0.1$	$\beta(s) = 0.25$	$\beta(s) = 0.5$
0	$\begin{pmatrix} 60.7373 \\ -3.0985 \\ -19.3928 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 127.4381 \\ -10.4974 \\ -41.0869 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 238.4294 \\ -22.8093 \\ -77.1863 \end{pmatrix}$
1	$\begin{pmatrix} 69.6181 \\ -3.6434 \\ -22.2375 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 141.2280 \\ -11.5868 \\ -45.5282 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 244.1704 \\ -23.0059 \\ -79.0097 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 78.6399 \\ -4.1914 \\ -25.1268 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 153.8957 \\ -12.5392 \\ -49.6033 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 251.7051 \\ -23.3889 \\ -81.4153 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 88.8035 \\ -4.8532 \\ -28.3861 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 168.4977 \\ -13.6934 \\ -54.3063 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 267.2343 \\ -24.6459 \\ -86.4199 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 100.2632 \\ -5.6455 \\ -32.0658 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 185.4162 \\ -15.0912 \\ -59.7613 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 290.7040 \\ -26.7705 \\ -94.0057 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 113.1956 \\ -6.5876 \\ -36.2230 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 205.0835 \\ -16.7804 \\ -66.1091 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 322.2613 \\ -29.7786 \\ -104.2206 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 127.8026 \\ -7.7015 \\ -40.9235 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 227.9914 \\ -18.8151 \\ -73.5094 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 362.2764 \\ -33.7109 \\ -117.1850 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 144.3160 \\ -9.0124 \\ -46.2426 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 254.7024 \\ -21.2572 \\ -82.1453 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 411.3574 \\ -38.6344 \\ -133.0966 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 163.0014 \\ -10.5495 \\ -52.2667 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 285.8619 \\ -24.1780 \\ -92.2265 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 470.3628 \\ -44.6441 \\ -152.2345 \end{pmatrix}$

k	u_k^*		
	$\beta(s) = 0.1$	$\beta(s) = 0.25$	$\beta(s) = 0.5$
9	$\begin{pmatrix} 184.1635 \\ -12.3462 \\ -59.0948 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 322.2129 \\ -27.6595 \\ -103.9947 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 540.4166 \\ -51.8641 \\ -174.9644 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 208.1522 \\ -14.4407 \\ -66.8408 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 364.6121 \\ -31.7963 \\ -117.7286 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 622.9280 \\ -60.45039 \\ -201.7445 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 235.3696 \\ -16.8773 \\ -75.6352 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 414.0496 \\ -36.6977 \\ -133.7500 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 719.6170 \\ -70.5932 \\ -233.1343 \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} 266.2776 \\ -19.7067 \\ -85.6283 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 471.6705 \\ -42.4903 \\ -152.4313 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 832.5475 \\ -82.5211 \\ -269.8048 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 301.4077 \\ -22.9875 \\ -96.9930 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 538.8007 \\ -49.3207 \\ -174.2039 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 964.1683 \\ -96.5053 \\ -312.5525 \end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix} 341.3712 \\ -26.7869 \\ -109.9279 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 616.9764 \\ -57.3589 \\ -199.5671 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1117.3637 \\ -112.8652 \\ -362.3156 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 386.8718 \\ -31.1825 \\ -124.6620 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 707.9780 \\ -66.8018 \\ -229.1002 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1295.5145 \\ -131.9752 \\ -420.1935 \end{pmatrix}$
16	$\begin{pmatrix} 438.7198 \\ -36.2637 \\ -141.4587 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 813.8696 \\ -77.8779 \\ -263.4743 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1502.5691 \\ -154.2730 \\ -487.4704 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 497.8487 \\ -42.1336 \\ -160.6215 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 937.0442 \\ -90.8521 \\ -303.4677 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1743.1281 \\ -180.2683 \\ -565.6425 \end{pmatrix}$
18	$\begin{pmatrix} 565.3343 \\ -48.9108 \\ -182.5005 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1080.2765 \\ -106.0316 \\ -349.9829 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2022.5408 \\ -210.5539 \\ -656.4497 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 642.4168 \\ -56.7325 \\ -207.4987 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1246.7822 \\ -123.7727 \\ -404.0656 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2347.0153 \\ -245.8179 \\ -761.9110 \end{pmatrix}$

Lampiran 15. Strategi Investasi Efisien Hasil Simulasi II saat $c_k = 0$ dengan Tiga Nilai $\beta(s)$ Berbeda

k	u_k^*		
	$\beta(s) = 0.1$	$\beta(s) = 0.25$	$\beta(s) = 0.5$
0	$\begin{pmatrix} 23.7108 \\ 0.5806 \\ -7.3927 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 66.2289 \\ -4.1358 \\ -21.2215 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 151.2906 \\ -13.5714 \\ -48.8874 \end{pmatrix}$
1	$\begin{pmatrix} 26.7839 \\ 0.2397 \\ -8.3922 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 71.0953 \\ -4.6756 \\ -22.8042 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 147.3782 \\ -13.1374 \\ -47.6149 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 29.2888 \\ -0.0381 \\ -9.2069 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 74.3915 \\ -5.0412 \\ -23.8763 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 145.7787 \\ -12.9600 \\ -47.0946 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 32.1369 \\ -0.3541 \\ -10.1332 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 78.9428 \\ -5.5461 \\ -25.3566 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 151.2476 \\ -13.5666 \\ -48.8734 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 35.3805 \\ -0.7139 \\ -11.1882 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 84.8830 \\ -6.2050 \\ -27.2886 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 162.7622 \\ -14.8439 \\ -52.6184 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 39.0801 \\ -1.1243 \\ -12.3914 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 92.3743 \\ -7.0360 \\ -29.7251 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 179.7743 \\ -16.7310 \\ -58.1515 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 43.3058 \\ -1.5930 \\ -13.7659 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 101.6110 \\ -8.0606 \\ -32.7293 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 202.0975 \\ -19.2072 \\ -65.4121 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 48.1392 \\ -2.1292 \\ -15.3379 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 112.8239 \\ -9.3044 \\ -36.3763 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 229.8330 \\ -22.2838 \\ -74.4329 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 53.6746 \\ -2.7432 \\ -17.1382 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 126.2864 \\ -10.7978 \\ -40.7549 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 263.3220 \\ -25.9987 \\ -85.3250 \end{pmatrix}$

k	u_k^*		
	$\beta(s) = 0.1$	$\beta(s) = 0.25$	$\beta(s) = 0.5$
9	$\begin{pmatrix} 60.0213 \\ -3.4472 \\ -19.2025 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 142.3202 \\ -12.5763 \\ -45.9698 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 303.1182 \\ -30.4131 \\ -98.2686 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 67.3062 \\ -4.2553 \\ -21.5718 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 161.3030 \\ -14.6820 \\ -52.1439 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 349.9762 \\ -35.6109 \\ -113.5089 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 75.6764 \\ -5.1838 \\ -24.2942 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 183.6772 \\ -17.1639 \\ -59.4209 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 404.8504 \\ -41.6979 \\ -131.3564 \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} 85.3026 \\ -6.2516 \\ -27.4251 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 209.9598 \\ -20.0794 \\ -67.9692 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 468.9048 \\ -48.8033 \\ -152.1898 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 96.3829 \\ -7.4807 \\ -31.0289 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 240.7544 \\ -23.4953 \\ -77.9850 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 543.5300 \\ -57.08120 \\ -176.4613 \end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix} 109.1469 \\ -8.8965 \\ -35.1803 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 276.7648 \\ -27.4898 \\ -89.6972 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 630.3690 \\ -66.7140 \\ -204.7052 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 123.8615 \\ -10.5288 \\ -39.9662 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 318.8110 \\ -32.1539 \\ -103.3725 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 731.3492 \\ -77.9154 \\ -237.5486 \end{pmatrix}$
16	$\begin{pmatrix} 140.8359 \\ -12.4117 \\ -45.4870 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 367.8474 \\ -37.5933 \\ -119.3214 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 848.7234 \\ -90.9353 \\ -275.7239 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 160.4294 \\ -14.5851 \\ -51.8597 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 424.9849 \\ -43.9314 \\ -137.9051 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 985.1176 \\ -106.0650 \\ -320.0855 \end{pmatrix}$
18	$\begin{pmatrix} 183.0589 \\ -17.0953 \\ -59.2198 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 491.5155 \\ -51.3114 \\ -159.5438 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1143.5892 \\ -123.6438 \\ -371.6276 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 209.2082 \\ -19.9960 \\ -67.7248 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 568.9417 \\ -59.9000 \\ -184.7263 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1327.6941 \\ -144.0659 \\ -431.5068 \end{pmatrix}$

Lampiran 16. Strategi Investasi Efisien Hasil Simulasi III saat $\beta(s)$ bernilai 0 dengan Tiga Nilai c_k Berbeda

k	u_k^*		
	$c_k = 0.4$	$c_k = 0.5$	$c_k = 0.6$
0	$\begin{pmatrix} 108.6626 \\ -8.4147 \\ -34.9803 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 129.10745 \\ -10.5756 \\ -41.6192 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 149.5523 \\ -12.7364 \\ -48.2582 \end{pmatrix}$
1	$\begin{pmatrix} 125.3150 \\ -9.8216 \\ -40.3526 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 148.9908 \\ -12.2308 \\ -48.0315 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 172.6667 \\ -14.6400 \\ -55.7104 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 144.6115 \\ -11.5094 \\ -46.5837 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 172.0288 \\ -14.2204 \\ -55.4682 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 199.4461 \\ -16.9314 \\ -64.3527 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 166.9768 \\ -13.5247 \\ -53.8116 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 198.7277 \\ -16.6000 \\ -64.0940 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 230.4786 \\ -19.6753 \\ -74.3765 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 192.9036 \\ -15.9218 \\ -62.1966 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 229.6754 \\ -19.4344 \\ -74.1001 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 266.4472 \\ -22.9469 \\ -86.0037 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 222.9648 \\ -18.7639 \\ -71.9249 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 265.5549 \\ -22.7988 \\ -85.7086 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 308.1451 \\ -26.8337 \\ -99.4923 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 257.8254 \\ -22.1245 \\ -83.2128 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 307.1596 \\ -26.7808 \\ -99.1773 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 356.4937 \\ -31.4372 \\ -115.1419 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 298.2579 \\ -26.0887 \\ -96.3115 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 355.4106 \\ -31.4821 \\ -114.8060 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 412.5632 \\ -36.8756 \\ -133.3006 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 345.1598 \\ -30.7558 \\ -111.5128 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 411.3783 \\ -37.0209 \\ -132.9427 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 477.5968 \\ -43.2861 \\ -154.3726 \end{pmatrix}$

k	u_k^*		
	$c_k = 0.4$	$c_k = 0.5$	$c_k = 0.6$
9	$\begin{pmatrix} 399.5733 \\ -36.2408 \\ -129.1558 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 476.3058 \\ -43.5346 \\ -153.9916 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 553.0384 \\ -50.8284 \\ -178.8275 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 462.7091 \\ -42.6778 \\ -149.6341 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 551.6371 \\ -51.1828 \\ -178.4224 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 640.5651 \\ -59.6877 \\ -207.2106 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 535.9735 \\ -50.2223 \\ -173.4051 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 639.0492 \\ -60.1509 \\ -206.7804 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 742.1249 \\ -70.0796 \\ -240.1556 \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} 620.9999 \\ -59.0549 \\ -200.1000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 740.4903 \\ -70.6546 \\ -239.6991 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 859.9807 \\ -82.2543 \\ -278.3983 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 719.6856 \\ -69.3856 \\ -233.0358 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 858.2232 \\ -82.9442 \\ -277.9146 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 996.7608 \\ -96.5027 \\ -322.7935 \end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix} 834.2345 \\ -81.4586 \\ -270.2293 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 994.8763 \\ -97.3106 \\ -322.2816 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1155.5181 \\ -113.1627 \\ -374.3340 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 967.2066 \\ -95.5571 \\ -313.4130 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1153.5026 \\ -114.0920 \\ -373.7931 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1339.7987 \\ -132.6270 \\ -434.1732 \end{pmatrix}$
16	$\begin{pmatrix} 1121.5751 \\ -112.0106 \\ -363.5540 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1337.6484 \\ -133.6811 \\ -433.6024 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1553.7218 \\ -155.3516 \\ -503.6507 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 1300.7941 \\ -131.2016 \\ -421.7756 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1551.4329 \\ -156.5341 \\ -503.0491 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1802.0718 \\ -181.8665 \\ -584.3226 \end{pmatrix}$
18	$\begin{pmatrix} 1508.8754 \\ -153.5747 \\ -489.3825 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1799.6408 \\ -183.1811 \\ -583.689 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2090.4062 \\ -212.7874 \\ -677.9963 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 876.1875 \\ -82.6639 \\ -283.5315 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1042.5041 \\ -98.2834 \\ -337.3439 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1208.8206 \\ -113.9028 \\ -391.1562 \end{pmatrix}$

Lampiran 17. Sertifikat Bebas Plagiasi

