BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial

Menurut Ross (1989), persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas yang bergantung pada satu atau lebih variabel bebas. Berdasarkan banyaknya variabel bebas, persamaan diferensial dibagi menjadi dua jenis yaitu Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dan Persamaan Diferensial Parsial (PDP). PDB adalah suatu persamaan diferensial yang memuat turunan biasa dari satu atau lebih variabel tak bebas yang bergantung pada satu variabel bebas, sedangkan PDP adalah suatu persamaan diferensial yang memuat turunan parsial dari satu atau lebih variabel tak bebas yang bergantung pada lebih dari satu variabel bebas.

Orde dari suatu turunan tertinggi dalam persamaan diferensial biasa disebut dengan orde dari persamaan diferensial biasa. Secara umum persamaan diferensial biasa orde n dapat dinyatakan sebagai

$$F(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n)}) = 0,$$

dengan t adalah variabel bebas, $x(t)$ adalah variabel tak bebas dan $x^{(n)}$ menyatakan turunan x ke n terhadap t. Suatu persamaan diferensial biasa linear orde n dapat dinyatakan sebagai berikut

$$a_0(x)\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} + a_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1} x}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_n(t)x = b(t), \tag{2.1}$$

dengan $a_0 \neq 0$, t variabel bebas, dan x variabel tak bebas. Pada persamaan 2.1, $a_0(t), a_1(t), \ldots, a_n(t)$ merupakan koefisien dan $b(t)$ disebut bagian tak homogen. Jika $b(t) = 0$, maka persamaan (2.1) disebut persamaan diferensial homogen dan jika $b(t) \neq 0$, maka persamaan (2.1) disebut persamaan diferensial nonhomogen.

Persamaan diferensial biasa dikatakan nonlinear apabila variabel tak bebas atau turunannya berderajat lebih dari satu atau memuat perkalian antara variabel tak bebas dengan turunannya. Sistem persamaan diferensial biasa orde satu berdimensi n adalah suatu sistem yang terdiri dari n persamaan diferensial biasa dengan n fungsi yang tidak diketahui dan n merupakan bilangan bulat positif lebih dari satu.

2.2 Kalkulus Fraksional

Kalkulus fraksional berawal dari pengertian turunan dengan orde bilangan asli dapat diperluas ke dalam orde bukan bilangan asli. Gagasan tersebut pertama kali diajukan oleh L'Hopital (1695). L'Hopital mengajukan pertanyaan tentang $\frac{D^n x}{Dx^n}$, notasi leibniz untuk turunan orde ke n dari fungsi linear $f(x) = x$, sehingga muncul pemikiran tentang turunan orde $n = \frac{1}{2}$. Gagasan dari konsep ini adalah bagaimana menentukan turunan dan integral yang mempunyai orde fraksional.

Persamaan diferensial fraksional adalah persamaan yang memuat turunan fraksional. Dengan munculnya kalkulus fraksional, mendorong para ahli matematika mengembangkan tentang kalkulus fraksional, diantaranya yaitu Euler, Laplace, Fourier, Lacroix, Abel, Riemann dan Liouville. Pada tahun 1819, Lacroix menjadi ahli matematika pertama yang mendefinisikan turunan fraksional. Misalkan $v = t^m$, dengan m adalah bilangan bulat positif dan n adalah bilangan rasional. Lacroix mendefinisikan turunan ke-n dari suatu fungsi v sebagai berikut

$$\frac{\mathrm{d}^n v}{dt^n} = \frac{\mathrm{d}^n t^m}{dt^n} = \frac{m!}{(m-n)!} t^{m-n}, \quad m \geq n. \tag{2.2}$$

Salah satu fungsi dasar yang paling penting pada kalkulus fraksional adalah fungsi Gamma yang disimbolkan dengan Γ, dimana $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dan didefinisikan sebagai berikut

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} \, \mathrm{d}t.$$

Sifat dasar dari fungsi Gamma yaitu

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \;\; z > 0, \tag{2.3}$$

akan dibuktikan sebagai berikut.

Untuk sebarang $z > 0$, dengan menggunakan integral parsial diperoleh

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z} \, \mathrm{d}t \\
&= \lim_{x\to\infty} \int_0^{x} e^{-t} t^{z} \, \mathrm{d}t \\
&= \lim_{x\to\infty} \left([-e^{-t} t^{z}]_{t=0}^{t=x} + z \int_0^{x} e^{-t} t^{z-1} \, \mathrm{d}t \right) \\
&= z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} \, \mathrm{d}t \\
&= z\Gamma(z).
\end{aligned}$$

Hubungan antara fungsi Gamma dan faktorial dengan $z \in \mathbb{N}$ sebagai berikut

$$\Gamma(z) = (z-1)!\,.$$

Bukti:

Dengan menggunakan induksi matematika, dengan memisalkan $P(z)$: $\Gamma(z) = (z-1)!$. Langkah pertama, akan dibuktikan $P(z)$ benar untuk $z = 1$, sehingga diperoleh $\Gamma(1) = (1-1)! = 0! = 1$. Langkah kedua yaitu asumsikan $P(k)$ benar, sehingga diperoleh $\Gamma(k) = (k-1)!$. Akan dibuktikan $P(k+1)$ juga benar. Perhatikan bahwa $\Gamma(k+1) = (k+1-1)! = k!$, sehingga didapat $\Gamma(k+1) = k.\Gamma(k) = k(k-1)! = k!$

(Diethelm, 2010).

Substitusikan hubungan antara fungsi Gamma dan faktorial ke persamaan (2.2) diperoleh sebagai berikut

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{dt^n} = \frac{\mathrm{d}^n t^m}{dt^n} = \frac{m!}{(m-n)!} t^{m-n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} t^{m-n}, \tag{2.4}$$

dengan m adalah bilangan bulat positif dan n adalah bilangan rasional.

Definisi 2.2.1. Fungsi Beta

Fungsi Beta didefinisikan sebagai berikut

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \;\; x,y \in \mathbb{R}^+.$$

Fungsi Beta juga dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi Gamma sebagai berikut

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \;\; x,y \in \mathbb{R}^+$$

(Kimeu, 2009).

Definisi 2.2.2. Integral Fraksional Riemann-Liouville

Operator integral fraksional Riemann-Liouville dengan orde α untuk sebarang fungsi $u \in L_1[a,t]$ didefinisikan sebagai berikut

$$I^{\alpha}u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{2.5}$$

dengan $\Gamma(\alpha)$ adalah fungsi Gamma (Podlubny, 1999).

Definisi 2.2.3. Turunan Riemann-Liouville

Turunan fraksional Riemann-Liouville dengan orde α untuk fungsi $u \in L_1[a,t]$ didefinisikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} {}_a^{RL}D_t^{\alpha}u(t) &= \frac{d^n}{dt^n} I^{n-\alpha}u(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}\,\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

dengan $n \in \mathbb{Z}$ memenuhi $(n-1 < \alpha < n)$, dimana a dan t adalah batas dari ${}_aD_t^{\alpha}u(t)$ (Podlubny, 1999).

Contoh turunan fraksional $u(t) = t^p$ dengan $p > 0$ dan $0 < \alpha < 1$ adalah

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_t^{\alpha}t^p &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{\tau^p}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \tau^p (t-\tau)^{n-\alpha-1}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \tau^p t^{n-\alpha-1} \left(1-\frac{\tau}{t}\right)^{n-\alpha-1} \mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Dengan memisalkan $\sigma = \dfrac{\tau}{t}$ ke persamaan (2.6) diperoleh

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}D_t^{\alpha} t^p &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n}(t^{n-\alpha+p}) \int_0^1 \sigma^p (1-\sigma)^{n-\alpha-1}\, \mathrm{d}\sigma \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n}(t^{n-\alpha+p}) B(p+1, n-\alpha) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(p+1+n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n}(t^{n-\alpha+p}) \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1+n-\alpha)} \frac{\Gamma(n-\alpha+p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha},
\end{aligned}
$$

dimana $B(p+1, n-\alpha)$ adalah fungsi Beta dengan

$$
B(p+1, n-\alpha) = \int_0^1 \sigma^p (1-\sigma)^{n-\alpha-1}\, \mathrm{d}\sigma = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(p+1+n-\alpha)}
$$

dan

$$
\frac{d^n}{dt^n}(t^{n-\alpha+p}) = \frac{\Gamma(n-\alpha+p+1)}{\Gamma(n-\alpha+p-n+1)} t^{p-\alpha},
$$

untuk setiap $p \in \mathbb{R}$ dan $n \in \mathbb{N}$.

Definisi 2.2.4. Turunan Caputo

Turunan fraksional Caputo dengan orde α didefinisikan sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
{}_a^C D_t^{\alpha} u(t) &= I^{n-\alpha} u^{(n)}(t) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{u^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau,
\end{aligned}
$$

dengan $(n-1 < \alpha < n),\ n \in \mathbb{N}$ (Podlubny, 1999).

Contoh turunan fraksional $u(t) = t^p$ dengan $p > 0$ dan $0 < \alpha < 1$ adalah

$$
\begin{aligned}
{}^C D_t^{\alpha} t^p &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{(\tau^p)^{(n)}}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}\, \mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)} \tau^{p-n} (t-\tau)^{n-\alpha-1}\, \mathrm{d}\tau. \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

Dengan mensubstitusi $\tau = \sigma t$ ke persamaan (2.7) diperoleh

$$
\begin{aligned}
{}^C D_t^{\alpha} t^p &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)} \int_0^t (\sigma t)^{p-n} ((1-\sigma)t)^{n-\alpha-1}\, \mathrm{d}\sigma t \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)} t^{p-\alpha} \int_0^t \sigma^{p-n} (1-\sigma)^{n-\alpha-1}\, \mathrm{d}\sigma t \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)} t^{p-\alpha} B(p-n+1, n-\alpha) \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)} t^{p-\alpha} \frac{\Gamma(p-n+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(p-\alpha+1)}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha},$$

dimana $B(p-n+1, n-\alpha)$ adalah fungsi Beta dengan

$$B(p-n+1, n-\alpha) = \int_0^1 \sigma^{p-n}(1-\sigma)^{n-\alpha-1}\, \mathrm{d}\sigma = \frac{\Gamma(p-n+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(p-\alpha+1)}$$

dan

$$\frac{d^n}{d\tau^n}(\tau^p) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)}\tau^{p-n},$$

untuk setiap $p \in \mathbb{R}$ dan $n \in \mathbb{N}$.

Dengan memperhatikan kondisi awal yang homogen turunan Riemann-Liouville dan turunan Caputo mempunyai hubungan yaitu

$${}_a^{RL}D_t^{\alpha} u(t) = {}_a^{C}D_t^{\alpha} u(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} u^k(a),$$

dengan $u^k(a) = 0, (k = 0, 1, \ldots, n-1)$(Petras, 2011).

Untuk contoh turunan fraksional $u(t) = t^p$ dengan $p > 0$ dan $0 < \alpha < 1$ didapat $n = 1$, sehingga memenuhi hubungan antara turunan Riemann-Liouville dan turunan Caputo yaitu

$${}_a^{RL}D_t^{\alpha} u(t) = {}_a^{C}D_t^{\alpha} u(t) + \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\mathit{\Gamma}(1-\alpha)} u^0(a).$$

Fungsi lain yang mempunyai peran penting dalam persamaan diferensial fraksional adalah fungsi Mittag-Leffler disimbolkan dengan E_α. Suatu fungsi seperti fungsi eigen dalam turunan Caputo dapat dinyatakan dalam bentuk umum fungsi E_α yang didefinisikan sebagai berikut

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha+1)},$$

dengan $\alpha > 0$. Apabila deret konvergen disebut fungsi Mittag-Leffler orde α (Diethelm, 2010).

Teorema 2.2.1. Konvergensi fungsi Mittag-Leffler

Misalkan $\alpha > 0$ dan $\lambda = re^{i\theta}$ dengan $r = |\lambda|, \theta = \arg(\lambda)$. Solusi perilaku fungsi Mittag-Leffler $E_\alpha(\lambda)$ sebagai berikut

1. $E_\alpha(re^{i\theta}) \to 0$ untuk $r \to \infty$ jika $\arg(\lambda) = |\theta| > \dfrac{\alpha\pi}{2}$,

2. $E_\alpha(re^{i\theta})$ terbatas untuk $r \to \infty$ jika $\arg(\lambda) = |\theta| = \dfrac{\alpha\pi}{2}$,
3. $E_\alpha(re^{i\theta}) \to \infty$ untuk $r \to \infty$ jika $\arg(\lambda) = |\theta| < \dfrac{\alpha\pi}{2}$,

(Diethelm, 2010).

Misalkan $y = f(t)$ adalah fungsi yang kontinu. Turunan pertama dari fungsi $f(t)$ didefinisikan sebagai berikut

$$f'(t) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}. \tag{2.8}$$

Dengan menggunakan persamaan (2.8), diperoleh turunan kedua dari fungsi $f(t)$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} f''(t) &= \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{\frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h}\right\} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Dengan menggunakan persamaan (2.8) dan persamaan (2.9), diperoleh turunan ketiga dari fungsi $f(t)$ adalah

$$f''' = \frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}t^3} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3}. \tag{2.10}$$

Berdasarkan persamaan (2.8), (2.9) dan (2.10), bentuk umum turunan ke-n dari fungsi $f(t)$ terhadap t dimana $n \in \mathbb{N}$ adalah

$$f^{(n)}(t) = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}t^n} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} u(t - rh), \tag{2.11}$$

dengan

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(r+1)\Gamma(n-r+1)}.$$

Definisi 2.2.5. Pendekatan Grünwald-Letnikov

Turunan fraksional $u(t)$ terhadap t dengan orde α dimana $\alpha \in \mathbb{R}$, didefinisikan

$${}^{GL}D_t^{\alpha} u(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{\alpha}{r} u(t - rh),$$

dengan

$$\binom{\alpha}{r} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(r+1)\Gamma(\alpha-r+1)},$$

dimana fungsi Gamma didefinisikan sebagai

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t$$

(Petras, 2011).

Pendekatan Grünwald-Letnikov untuk turunan Caputo diperoleh dari hubungan antara turunan Riemann-Liouville dan turunan Caputo. Jika $t_0 = 0, t_{m+1} = t_0 + (m+1)h = t$ untuk setiap $m \geq 0$ pada selang $[0,t]$ dan hubungan antara turunan Riemann-Liouville dan turunan Caputo yaitu

$${}^{RL}D_t^\alpha u(t) \equiv {}^{GL} D_t^\alpha u(t) = \frac{1}{h^\alpha}\sum_{r=0}^{m+1}(-1)^r \binom{\alpha}{r} u_{m+1-r} + O(h), \;\; (h \to 0),$$

maka pendekatan Grünwald-Letnikov untuk turunan Caputo dengan $0 < \alpha < 1$ dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} {}^{C}D_t^\alpha u(t) &= {}^{RL}D_t^\alpha u(t) - \frac{(t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} u_0 \\ &= \frac{1}{h^\alpha}\sum_{r=0}^{m+1}(-1)^r \binom{\alpha}{r} u_{m+1-r} - \frac{(t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} u_0. \end{aligned}$$

Misalkan ${}^{C}D_t^\alpha u(t) = f(t_m, u_m)$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} f(t_m,u_m) =& \frac{1}{h^\alpha}\sum_{r=0}^{m+1}(-1)^r \binom{\alpha}{r} u_{m+1-r} - \frac{((m+1)h)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} u_0 \\ h^\alpha f(t_m,u_m) =& u_{m+1} \sum_{r=1}^{m+1}(-1)^r \binom{\alpha}{r} u_{m+1-r} - \frac{(m+1)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} u_0 \\ u_{m+1} =& h^\alpha f(t_m,u_m) - \sum_{r=1}^{m+1}(-1)^r \binom{\alpha}{r} u_{m+1-r} + \frac{(m+1)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} u_0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

(Arenas dkk., 2015).

2.3 Sistem Dinamik Fraksional

Sistem dinamik fraksional yang digunakan adalah turunan fraksional Caputo dinotasikan dengan operator D^α. Sistem otonomus linear fraksional adalah suatu sistem persamaan diferensial fraksional orde α yang berbentuk

$$D^{\alpha}\vec{x}(t) = \vec{f}(\vec{x}(t)), \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0, \tag{2.13}$$

dengan $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ dan $0 < \alpha \leq 1$ (Petras, 2011).

Definisi 2.3.1. Titik Kesetimbangan

Perhatikan sistem persamaan (2.13). Titik kesetimbangan $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots x_n^*)$ pada sistem (2.13) diperoleh dengan menyelesaikan solusi persamaan berikut

$$.\vec{f}(\vec{x}(t)) = 0$$

(Petras, 2011).

Definisi 2.3.2. Kestabilan Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ pada sistem persamaan (2.13) dikatakan

1. **stabil**, jika untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$ terdapat suatu bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga solusi masalah nilai awal yang terdiri atas sistem persamaan (2.13) pada saat $t = 0$ dan kondisi atas $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ memenuhi
$$\left\|\vec{x}^*(0) - \vec{x}^*\right\| < \delta$$
maka berlaku
$$\left\|\vec{x}^*(t) - \vec{x}^*\right\| < \varepsilon$$
untuk setiap $t > 0$,
2. **stabil asimtotik**, jika stabil dan terdapat $\delta_0 > 0$ dengan $0 < \delta_0 < \delta$ sedemikian sehingga suatu penyelesaian sistem persamaan (2.13) pada saat $t = 0$ yang memenuhi
$$\left\|\vec{x}^*(0) - \vec{x}^*\right\| < \delta_0$$
maka berlaku
$$\lim_{t \to \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^*$$
untuk setiap $t > 0$ (Diethelm, 2010).

2.4 Sistem Otonomus Linear Fraksional

Sistem diferensial fraksional untuk dimensi n dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\begin{aligned} D^{\alpha}x_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t), \\ D^{\alpha}x_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t), \\ &\vdots \\ D^{\alpha}x_n(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t), \end{aligned} \tag{2.14}$$

dengan $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dan $0 < \alpha < 1$. Persamaan (2.14) dapat ditulis sebagai berikut

$$D^{\alpha}\vec{x}(t) = A\vec{x}(t), \tag{2.15}$$

dengan $\vec{x}(t) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dan A adalah matriks koefisien sistem persamaan (2.14) sebagai berikut

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Misalkan diberikan sistem dua dimensi sebagai berikut

$$\begin{aligned} D^{\alpha}x_1(t) &= a_1x_1(t) + a_2x_2(t), \\ D^{\alpha}x_2(t) &= a_3x_1(t) + a_4x_2(t), \end{aligned} \tag{2.16}$$

dengan $\alpha \in (0, 1)$. Titik kesetimbangan diperoleh ketika

$$D^{\alpha}x_1(t) = D^{\alpha}x_2(t) = 0,$$

atau

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A\vec{x}(t) = 0,$$

sehingga diperoleh titik kesetimbangan $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ dengan syarat $\det(A) \neq 0$. Perhatikan bahwa

$$B^{-1}AB = C$$

dengan C adalah matriks diagonal dari A, yaitu

$$C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

dengan λ_1, λ_2 adalah nilai eigen dari matriks A, dan B adalah vektor eigen dari matriks A, didapat sistem dua dimensi yang baru sebagai berikut

$$\begin{aligned} D^\alpha x_1 &= \lambda_1 x_1, \\ D^\alpha x_2 &= \lambda_2 x_2. \end{aligned}$$

Akan dibuktikan bahwa solusi sistem persamaan (2.16) berbentuk fungsi Mittag-Leffler

$$x_i(t) = bE_\alpha(\lambda_i t^\alpha), \;\; i = 1, 2, \ldots$$

dengan $\alpha > 0$ dan $\lambda_i \in \mathbb{R}$, sehingga didapat

$$\begin{cases} D^\alpha x_i(t) = \lambda_i x_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots \\ x_i(0) = b_i, \quad b_i \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.17}$$

(Odibat dan Shawagfeh, 2007).

Bukti:

Dengan menggunakan rumus perumuman Taylor (*Generalized Taylor Formula*), anggap solusi $x_i(t)$ dapat ditulis

$$x_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_n \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)}. \tag{2.18}$$

Berdasarkan persamaan (2.18) dengan menggunakan definisi Turunan Caputo diperoleh

$$\begin{aligned} D^\alpha x_i(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{t^{(k-1)\alpha}}{\Gamma((k-1)\alpha + 1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1} \frac{t^{(k-1+1)\alpha}}{\Gamma((k-1+1)\alpha + 1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1} \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Perhatikan bahwa persamaan (2.17) dapat ditulis

$$D^{\alpha}x_i(t) - \lambda x_i(t) = 0. \tag{2.20}$$

Jika persamaan (2.19) dan persamaan (2.18) disubstitusikan ke persamaan (2.20), diperoleh

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}\frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} - \lambda_i \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} &= 0 \\
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}(c_{k+1} - \lambda_i c_k) &= 0 \\
(c_{k+1} - \lambda_i c_k) &= 0 \\
c_{k+1} &= \lambda_i c_k, \ \ (c_0 = b) \\
c_{k+1} &= \lambda_i b, \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

diperoleh solusi dari persamaan (2.21) yaitu

$$c_n = (\lambda_i)^k b. \tag{2.22}$$

Jika persamaan (2.22) disubstitusikan ke persamaan (2.19), diperoleh

$$\begin{aligned}
x_i(t) &= \sum_{k=0}^{\infty}(\lambda_i)^k b \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} \\
&= b\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda_i)^k \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} \\
&= bE_{\alpha}(\lambda_i t^{\alpha}), \ \ i = 1, 2, \ldots, \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

dimana $E_{\alpha}(\lambda_i t^{\alpha})$ adalah fungsi *Mittag-Leffler*.

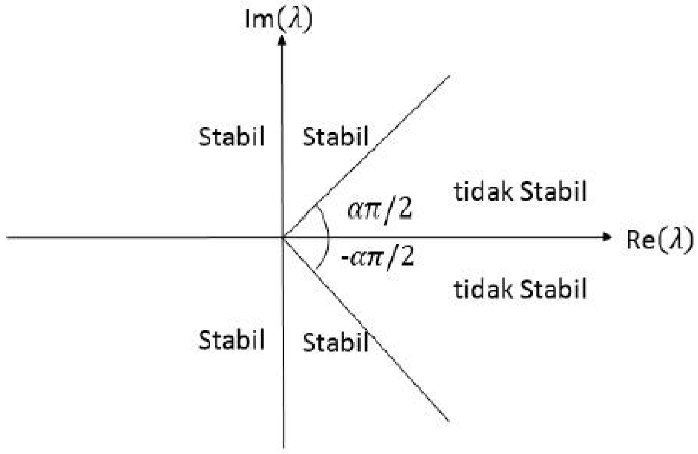
Solusi dari sistem otonomus linear fraksional mengikuti konvergensi dari fungsi Mittag-Leffler pada Teorema 2.2.1, sehingga kestabilan sistem otonomus linear fraksional diberikan pada teorema berikut.

Teorema 2.4.1. Kestabilan sistem linear fraksional

Dalam Petras (2011), kestabilan titik kesetimbangan $\vec{x}^*$ sistem linear fraksional mengikuti konvergensi dari fungsi Mittag-Leffler sebagai berikut

1. jika $\arg(\lambda) > \frac{\alpha\pi}{2}$ maka $\vec{x}^*$ stabil asimtotik,
2. jika $\arg(\lambda) = \frac{\alpha\pi}{2}$ maka $\vec{x}^*$ stabil,
3. jika $\arg(\lambda) < \frac{\alpha\pi}{2}$ maka $\vec{x}^*$ tidak stabil.

Daerah kestabilan sistem persamaan diferensial fraksional, sesuai dengan persamaan (2.13) ditunjukkan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1. Daerah kestabilan sistem linear fraksional dengan $\alpha \in (0,1)$.

2.5 Sistem Otonomus Nonlinear Fraksional

Perhatikan sistem dua dimensi sebagai berikut

$$\begin{aligned} D^{\alpha}x(t) &= f(x,y), \\ D^{\alpha}y(t) &= g(x,y), \end{aligned} \tag{2.24}$$

dengan nilai awal $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ dan $\alpha \in (0,1)$. Titik kesetimbangan diperoleh jika

$$D^{\alpha}x(t) = D^{\alpha}y(t) = 0,$$

misalkan diperoleh titik kesetimbangan yaitu (x^*, y^*), maka

$$f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0.$$

Untuk mencari kestabilan lokal titik kesetimbangan, misalkan

$$x(t) = x^* + \varepsilon_1(t), \;\; y(t) = y^* + \varepsilon_2(t),$$

maka

$$\begin{aligned} D^{\alpha}(x + \varepsilon_1) &= f(x^* + \varepsilon_1, y^* + \varepsilon_2), \\ D^{\alpha}(y + \varepsilon_2) &= g(x^* + \varepsilon_1, y^* + \varepsilon_2), \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} D^{\alpha}\varepsilon_1(t) &= f(x^* + \varepsilon_1, y^* + \varepsilon_2), \\ D^{\alpha}\varepsilon_2(t) &= g(x^* + \varepsilon_1, y^* + \varepsilon_2). \end{aligned}$$

Deret Taylor fungsi f dan g di sekitar (x^*, y^*) adalah

$$f(x,y) \cong f(x^*,y^*) + \frac{\partial f(x^*,y^*)}{\partial x}\varepsilon_1 + \frac{\partial f(x^*,y^*)}{\partial y}\varepsilon_2 + \eta_1(x,y), \quad (2.25)$$

$$g(x,y) \cong g(x^*,y^*) + \frac{\partial g(x^*,y^*)}{\partial x}\varepsilon_1 + \frac{\partial g(x^*,y^*)}{\partial y}\varepsilon_2 + \eta_2(x,y), \quad (2.26)$$

dengan $\eta_1(x,y)$ dan $\eta_2(x,y)$ adalah suku sisa. Berdasarkan hampiran orde satu persamaan (2.24) dan (2.25), suku sisa tersebut memenuhi

$$\lim_{(x,y)\to(x^*,y^*)} \frac{\eta_1(x,y)}{\|\vec{\varepsilon}\|} = 0,$$
$$\lim_{(x,y)\to(x^*,y^*)} \frac{\eta_2(x,y)}{\|\vec{\varepsilon}\|} = 0,$$

dengan $\vec{\varepsilon} = (x - x^*, y - y^*)^T$.

Jika (x,y) berada cukup dekat dengan (x^*, y^*), maka $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ bernilai kecil, sehingga diperoleh persamaan (2.24) dan (2.25) sebagai berikut

$$\begin{aligned} f(x,y) &\cong \frac{\partial f(x^*,y^*)}{\partial x}\varepsilon_1 + \frac{\partial f(x^*,y^*)}{\partial y}\varepsilon_2, \\ g(x,y) &\cong \frac{\partial g(x^*,y^*)}{\partial x}\varepsilon_1 + \frac{\partial g(x^*,y^*)}{\partial y}\varepsilon_2, \end{aligned}$$

dengan $f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$, sehingga

$$\begin{aligned} D^{\alpha}\varepsilon_1(t) &\cong \frac{\partial f(x^*,y^*)}{\partial x}\varepsilon_1 + \frac{\partial f(x^*,y^*)}{\partial y}\varepsilon_2, \\ D^{\alpha}\varepsilon_2(t) &\cong \frac{\partial g(x^*,y^*)}{\partial x}\varepsilon_1 + \frac{\partial g(x^*,y^*)}{\partial y}\varepsilon_2, \end{aligned}$$

dan didapat sistem yaitu

$$D^{\alpha}\vec{\varepsilon} = J\vec{\varepsilon},$$

dengan nilai awal $\varepsilon_1(0) = x(0) - x^*, \varepsilon_2(0) = y(0) - y^*$ dengan $\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}$, dan $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*,y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*,y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x^*,y^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*,y^*)}{\partial y} \end{bmatrix}$ disebut matriks Jacobi atau matriks turunan parsial yang dinotasikan dengan $J(x^*, y^*)$. Perhatikan bahwa

$$B^{-1}JB = C,$$

dengan C adalah matriks diagonal dari J, yaitu

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

dengan λ_1, λ_2 adalah nilai eigen dari matriks J dan B adalah vektor eigen dari matriks J, sehingga didapat

$$\begin{aligned} JB &= BC \\ J &= BCB^{-1}. \end{aligned}$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned} D^\alpha \vec{\varepsilon} &= (BCB^{-1})\vec{\varepsilon}, \\ D^\alpha (B^{-1}\vec{\varepsilon}) &= C(B^{-1}\vec{\varepsilon}), \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$D^\alpha \vec{\zeta} = C\vec{\zeta}, \quad \vec{\zeta} = B^{-1}\vec{\varepsilon}, \quad \vec{\zeta} = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix}.$$

Sistem otonomus nonlinear (2.16) dapat dihampiri oleh sistem linear berikut

$$\begin{aligned} D^\alpha \zeta_1 &= \lambda_1 \zeta_1, \\ D^\alpha \zeta_2 &= \lambda_2 \zeta_2. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Solusi dari persamaan (2.27) berbentuk fungsi Mittag-Leffler yaitu

$$\zeta_i(t) = bE_\alpha(\lambda_i t^\alpha), \;\; i = 1, 2, \ldots$$

dengan $\alpha > 0$ dan $\lambda_i \in \mathbb{R}$, sehingga didapat

$$\begin{cases} D^\alpha \zeta_i(t) = \lambda_i \zeta_i(t), & i = 1, 2, \ldots \\ \zeta_i(a) = b, & b \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.28}$$

(Ahmed dkk., 2007).

Teorema 2.5.1. Kestabilan lokal sistem nonlinear fraksional

Titik kesetimbangan $\vec{x}^*$ dikatakan stabil asimtotik lokal apabila setiap nilai eigen $(\lambda_i, i = 1, 2, \ldots, n)$ matriks Jacobi J, di titik kesetimbangan $\vec{x}^*$ memenuhi kondisi

$$\left|\arg(\lambda_i)\right| > \frac{\alpha\pi}{2}, \tag{2.29}$$

dengan $i = 1, 2, \ldots, n$

(Petras,2011).

Teorema 2.5.2.

Misalkan $0 < \alpha \leq 1$. Andaikan bahwa $f(t) \in C[a, b]$ dan ${}_{t_0}^{c}D_t^{\alpha} \in C[a, b]$, memenuhi kondisi berikut

1. Jika ${}_{t_0}^{c}D_t^{\alpha} f(t) \geq 0, \forall t \in (a, b)$, maka $f(t)$ adalah *fungsi tak menurun* untuk setiap $t \in [a, b]$.

2. Jika ${}_{t_0}^{c}D_t^{\alpha} f(t) \leq 0, \forall t \in (a, b)$, maka $f(t)$ adalah *fungsi tak menaik* untuk setiap $t \in [a, b]$

(Odibat dan Shawagfeh, 2007).

Teorema 2.5.3.

Solusi untuk masalah Cauchy, dengan $0 < \alpha < 1$ dan $\lambda \in \mathbb{R}$ yaitu

$$\begin{cases} {}_{t_0}^{c}D_t^{\alpha} = \lambda x(t) + f(t), \\ x(a) = b, \quad b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

berbentuk fungsi Mittag-Leffler sebagai berikut

$$x(t) = bE_{\alpha}[\lambda(t-a)^{\alpha}] + \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[\lambda(t-s)^{\alpha}] f(s) ds$$

(Kilbas dkk., 2006).

Untuk membuktikan terbatas seragam dari sistem orde fraksional, dibutuhkan teorema yang merupakan bentuk umum dari Teorema 2.5.4 sebagai berikut

Teorema 2.5.4.

Jika $u(t)$ adalah fungsi kontinu pada $[t_0, +\infty]$ yang memenuhi

$$\begin{cases} {}^{c}_{t_0}D^{\alpha}_{t}u(t) \le -\lambda u(t) + \mu, \\ u(t_0) = u_{t_0}, \end{cases} \tag{2.30}$$

dengan $0 < \alpha < 1, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ dan nilai awal yaitu $t_0 \ge 0$, maka

$$u(t) \le \left(u_{t_0} - \frac{\mu}{\lambda}\right) E_{\alpha}[-\lambda(t - t_0)^{\alpha}] + \frac{\mu}{\lambda}$$

(Li-Hong dkk., 2016).

Bukti. Perhatikan bahwa

$$ {}^{c}_{t_0}D^{\alpha}_{t}u(t) \quad \le \quad -\lambda u(t) + \mu \tag{2.31}$$

atau bisa ditulis

$$ {}^{c}_{t_0}D^{\alpha}_{t}u(t) \quad \le \quad -\lambda \left(u(t) - \frac{\mu}{\lambda}\right).$$

Jika $U(t) = u(t) - \frac{\mu}{\lambda}$, maka persamaan (2.30) berubah menjadi

$$\begin{cases} {}^{c}_{t_0}D^{\alpha}_{t}U(t) \le -\lambda U(t), \\ U(t_0) = u_{t_0} - \frac{\mu}{\lambda}. \end{cases} \tag{2.32}$$

Berdasarkan persamaan (2.32), terdapat suatu fungsi non-negatif $m(t)$ yang memenuhi

$$\begin{cases} {}^{c}_{t_0}D^{\alpha}_{t} = -\lambda U(t) - m(t), \\ U(t_0) = u_{t_0} - \frac{\mu}{\lambda}. \end{cases} \tag{2.33}$$

Dengan menggunakan Teorema 2.5.3, solusi dari sistem (2.33) yaitu

$$U(t) = U(t_0)E_{\alpha}[-\lambda(t - t_0)^{\alpha}] - \int_{t_0}^{t} (t - s)^{\alpha - 1} E_{\alpha,\alpha}[\lambda(t - s)^{\alpha}] m(s) ds. \tag{2.34}$$

Sebagai perbandingan, pandang sistem (2.32) berikut

$$\begin{cases} {}^{c}_{t_0}D^{\alpha}_{t}V(t) = -\lambda V(t), \\ V(t_0) = U(t_0), \end{cases} \tag{2.35}$$

dengan $0 < \alpha < 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ dan nilai awal yaitu $t_0 \ge 0$. Dengan menggunakan Teorema 2.5.3, solusi dari sistem (2.35) dapat ditulis

$$V(t) = U(t_0)E_{\alpha}[-\lambda(t - t_0)^{\alpha}], \quad t \ge t_0. \tag{2.36}$$

Kurangi persamaan (2.34) dengan persamaan (2.36) diperoleh

$$\begin{aligned} U(t)-V(t) &= U(t_0)E_\alpha[-\lambda(t-t_0)^\alpha]-\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[\lambda(t-s)^\alpha]m(s)ds \\ &\quad -U(t_0)E_\alpha[-\lambda(t-t_0)^\alpha] \\ &= -\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[\lambda(t-s)^\alpha]m(s)ds,\;\; t\neq t_0. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Jika $E_{\alpha,\alpha}>0$ untuk $0<\alpha<1$, $x\in\mathbb{R}$ dan $m(t)$ adalah fungsi non-negatif, maka dari persamaan (2.36) dan (2.37) menghasilkan

$$U(t) \leq V(t)=U(t_0)E_\alpha[-\lambda(t-t_0)^\alpha],\;\; t\geq t_0$$

atau bisa ditulis

$$U(t) \leq U(t_0)E_\alpha[-\lambda(t-t_0)^\alpha],\;\; t\geq t_0. \tag{2.38}$$

Dengan mensubstitusikan $U(t_0)=u_{t_0}-\frac{\mu}{\lambda}$ dan $U(t)=u(t)-\frac{\mu}{\lambda}$ ke persamaan (2.38) menghasilkan

$$\begin{aligned} u(t)-\frac{\mu}{\lambda} &\leq \left(u_{t_0}-\frac{\mu}{\lambda}\right)E_\alpha[-\lambda(t-t_0)^\alpha],\;\; t\geq t_0, \\ u(t) &\leq \left(u_{t_0}-\frac{\mu}{\lambda}\right)E_\alpha[-\lambda(t-t_0)^\alpha]+\frac{\mu}{\lambda},\;\; t\geq t_0. \end{aligned}$$

$\square$

2.6 Analisis Kestabilan Global

Asumsikan Ω adalah subset terbuka dari $\mathbb{R}^n$. Perhatikan sistem otonomus berikut

$$D^\alpha x(t)=f(x). \tag{2.39}$$

Untuk $V\in C^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$ dimana V adalah fungsi Lyapunov. Turunan orde α dari $V(x)$ sepanjang solusi dari persamaan (2.39) berbentuk seperti berikut

$$D^\alpha V|_{D^\alpha x(t)=f(x)}=I^{1-\alpha}DV|_{D^\alpha x(t)=f(x)}=I^{1-\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right). \tag{2.40}$$

Untuk memenuhi syarat cukup untuk kestabilan asimtotik global titik kesetimbangan, maka dibutuhkan teorema berikut

Teorema 2.6.1.

Misalkan Ω adalah himpunan tertutup dan terbatas. Setiap solusi dari $D^{\alpha}x(t) = f(x)$ dengan nilai awal $x(t_0) \in \Omega$ dan $\forall x(t) \in \Omega$. Jika $\exists V(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dengan turunan parsial pertama yaitu persamaan (2.40) yang kontinu, memenuhi kondisi berikut:

$$D^{\alpha}V|_{D^{\alpha}x(t)=f(x)} \leq 0. \tag{2.41}$$

Misalkan $E = \{x \in \Omega | D^{\alpha}V|_{D^{\alpha}x(t)=f(x)} = 0\}$. Jika M adalah himpunan invariant terbesar di E, maka setiap solusi $x(t)$ dengan nilai awal $x(t_0) \in \Omega$ mendekati M ketika $t \to \infty$. Sama halnya, jika $x \to 0$, $t \to \infty$ maka $M = \{0\}$.

(Huo dkk., 2015).

Teorema 2.6.2.

Misalkan $x(t) \in \mathbb{R}$ adalah fungsi kontinu dan mempunyai turunan. Untuk sebarang waktu $t \geq t_0$ berlaku

$${}_{t_0}^{c}D_t^{\alpha}\left[x(t) - x^* - x^* \ln \frac{x(t)}{x^*}\right] \leq \left(1 - \frac{x^*}{x(t)}\right) {}_{t_0}^{c}D_t^{\alpha}x(t), \ \ x^* \in \mathbb{R}, \ \ \forall \alpha \in (0, 1).$$

Bukti dapat dilihat pada Lampiran 1

(De-León, 2015).

2.7 Model Pertumbuhan Logistik

Menurut Molles (2002), model pertumbuhan logistik merupakan model pertumbuhan populasi dengan sumber daya lingkungan yang terbatas. Jika populasi bertambah, maka laju pertumbuhan akhirnya melemah dan kemudian berhenti pada ukuran populasi tertentu. Ukuran populasi yang menghentikan pertumbuhan tersebut, secara umum disebut sebagai *carrying capacity*, yaitu jumlah individu maksimal yang dapat didukung oleh lingkungannya.

Jika pada laju pertumbuhan populasi terdapat batasan daya dukung lingkungan, maka secara matematis laju pertumbuhan populasi dapat dinyatakan sebagai persamaan diferensial yaitu

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x),$$

dengan $f(x)$ merupakan fungsi dari ukuran populasi, sehingga dapat dikatakan bahwa laju pertumbuhan populasi bergantung pada ukuran populasi.

Jika daya dukung lingkungan atau kapasitas maksimal suatu habitat adalah K, maka lingkungan masih dapat mendukung $(K - x)$ individu untuk x individu dalam populasi tersebut, sehingga masih terdapat bagian lingkungan yang ditempati yaitu sebesar

$$\frac{K-x}{K}, \tag{2.42}$$

dengan persamaan (2.42) sebanding dengan pertumbuhan per kapita populasi. Oleh karena itu, persamaan logistik dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = r\frac{K-x}{K}$$

atau

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right), \tag{2.43}$$

dengan $K, r \in \mathbb{R}^+$. Parameter r menyatakan tingkat pertumbuhan intrinsik populasi, sehingga tingkat pertumbuhan untuk x sebanding dengan r

(Boyce dan Diprima, 2012).

2.8 Model *Predator-Prey* Lotka-Volterra

Persamaan differensial biasa yang menggambarkan interaksi antara spesies *prey* dan *predator* pertama kali diperkenalkan oleh Alferd J. Lotka pada tahun 1925 dan Vito Volterra pada tahun 1926 yang dikenal dengan model Lotka-Volterra. Prey diasumsikan mempunyai makanan yang berlebih dan tumbuh secara eksponensial kecuali terjadi pemangsaan. Misal

$N(t)$ adalah populasi *prey* dan $P(t)$ adalah populasi *predator*. Pertumbuhan eksponensial *prey* dinyatakan dengan rN. Pemangsaan terhadap *prey* diasumsikan sama dengan laju interaksi *prey* dan *predator* yang dapat dinyatakan sebagai ψNP, sedemikian sehingga laju pertumbuhan populasi *prey* dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = rN - \psi NP. \tag{2.44}$$

Pertumbuhan populasi *predator* dapat dinyatakan sebagai βNP yang tidak harus sama dengan besarnya pemangsaan terhadap *prey* ψNP. *Predator* akan mengalami kematian alami dengan laju μP, sehingga laju pertumbuhan populasi *predator* dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \beta NP - \mu P. \tag{2.45}$$

(Finizio dan Ladas, 1982).

Dari persamaan (2.44) dan (2.45) diperoleh model Lotka-Volterra berupa sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &= rN - \psi NP, \\ \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} &= \beta NP - \mu P, \end{aligned}$$

dengan r dan μ berturut-turut adalah laju kelahiran alami *prey* dan laju kematian *predator*, ψ menyatakan laju interaksi pemangsaan *prey* dan β adalah laju konversi biomassa *prey* menjadi laju reproduksi *predator*. Parameter r, μ, ψ, β bernilai positif

(Chauvet dkk., 2002).

2.9 Fungsi Respon

Pemahaman hubungan antara *predator* dan *prey* merupakan tujuan utama dalam memahami ilmu Ekologi dan salah satu komponen penting dalam hubungan tersebut yaitu laju per kapita *predator* memangsa *prey* yang dikenal sebagai fungsi respon (Skalski dan Gilliam, 2001).

Permasalahan mengenai fungsi respon dipaparkan oleh Holling (1959), yaitu fungsi respon sebagai laju pemangsaan *prey* oleh *predator* per kapita dan berupa fungsi dari banyaknya populasi *prey*, yang berarti bahwa laju konsumsi dari suatu individu *predator* bergantung pada kepadatan populasi *prey*. Fungsi respon tersebut dikenal dengan Holling tipe I untuk bentuk linear yaitu

$$q(x) = ex \tag{2.46}$$

dan Holling tipe II atau model Michaelis-Menten untuk bentuk non linear adalah sebagai berikut

$$q(x) = \frac{sx}{c + x}, \tag{2.47}$$

dengan $e, s, c > 0$. Dengan e menyatakan laju penangkapan *prey*, s adalah laju pertumbuhan maksimum *predator*, dan c adalah konstanta Michaelis-Menten.

2.10 Model *Predator-Prey* dengan Perlindungan dan Makanan Tambahan

Model *predator-prey* dengan adanya perlindungan pada *prey* dan makanan tambahan pada *predator* yang dikaji oleh Ghosh dkk. (2017) sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} &= rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - \frac{c(1-c')e_1NP}{a + h_2e_2A + h_1e_1N}, \\ \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &= \frac{b[(1-c')e_1N + e_2A]P}{a + h_2e_2A + h_1e_1N} - mP, \end{aligned} \tag{2.48}$$

dengan semua parameter yang digunakan bernilai positif. $N(t)$ dan $P(t)$ berturut-turut menyatakan populasi *prey* dan populasi *predator*. Laju pertumbuhan alami *prey* dari sistem persamaan (2.48) mengikuti model pertumbuhan logistik dengan tingkat pertumbuhan intrinsik *prey* yang dinyatakan sebagai r dan K menyatakan *carrying capacity* atau kapasitas daya dukung lingkungan. Parameter b menyatakan tingkat konversi efisiensi dari *prey* ke *predator*, a menyatakan konstanta *half-saturation* dan m menyatakan laju kematian *predator*.

Dengan adanya perlindungan pada *prey*, misalkan c' menyatakan laju *prey* yang berlindung, dimana $c' \in [0, 1)$ adalah konstan, maka laju *prey* yang dapat dimangsa oleh *predator* sebesar $(1 - c')$. Fungsi respon yang digunakan dengan adanya makanan tambahan pada *predator* yang dinyatakan dalam bentuk $\frac{c(1-c')e_1 N}{a+h_2 e_2 A+h_1 e_1 N}$, dengan h_1 dan e_1 berturut-turut menyatakan *handling time* yaitu waktu yang dibutuhkan untuk memakan *prey* dan kemampuan untuk menemukan *prey*. Parameter h_2 dan e_2 berturut-turut menyatakan *handling time* yaitu waktu yang dibutuhkan untuk memakan makanan tambahan (A) dan kemampuan untuk menemukan makanan tambahan.

Definisikan $c_1 = \frac{c}{h_1}$, $\theta = \frac{h_2}{h_1}$, $\eta = \frac{e_2}{e_1}$, $b_1 = \frac{b}{h_1}$, $a_1 = \frac{a}{e_1 h_1}$, sehingga persamaan (2.48) dapat ditulis

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} &= rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - \frac{c_1(1-c')NP}{a_1 + \theta\eta A + N},\\
\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &= \frac{b[(1-c')N + \eta A]P}{a_1 + \theta\eta A + N} - mP.
\end{aligned} \tag{2.49}
$$

Untuk mengurangi jumlah parameter dan mempermudah hitungan, maka perlu dilakukan penskalaan pada persamaan (2.49) menggunakan paramater-parameter yaitu $x = \frac{N}{\theta_1}$, $y = \frac{c_1 P}{r\theta_1}$, $t = rT$, $\gamma = \frac{K}{a_1}$, $\theta = \frac{h_2}{h_1}$, $\xi = \frac{\eta A}{a_1}$, $\beta = \frac{b_1}{r}$, $\delta = \frac{m}{r}$, sehingga didapat

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= x\left(1 - \frac{x}{\gamma}\right) - \frac{(1-c')xy}{1 + \theta\xi + y},\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \frac{\beta[(1-c')x + \xi]y}{1 + \theta\xi + x} - \delta y.
\end{aligned} \tag{2.50}
$$

dimana θ dan ξ berturut-turut menyatakan karakteristik kualitas dan kuantitas dari makanan tambahan. Secara ringkas syarat eksistensi dan kestabilan lokal dari Ghosh dkk. (2017) diberikan pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1. Syarat Eksistensi dan Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Orde Integer

Titik Kesetimbangan	Syarat Eksistensi	Syarat Kestabilan Lokal
$E_0 = (0, 0)$	-	Tak stabil
$E_1 = (\gamma, 0)$	-	$\frac{\beta[(1-c')\gamma+\xi]}{1+\theta\xi+\gamma} < \delta$
$E_2 = (x^*, y^*)$ dengan $x^* = \frac{\delta+(\theta\delta-\beta)\xi}{\beta(1-c')-\delta}$, $y^* = \left(1 - \frac{x^*}{\gamma}\right)\left(\frac{1+\alpha\xi+x^*}{(1-c')}\right)$	1. $x^* < \gamma$ 2. $\beta(1-c') < \delta < \frac{\beta\xi}{1+\theta\xi}$ atau $\frac{\beta\xi}{1+\theta\xi} < \delta < \beta(1-c')$	$\frac{x^*}{\gamma}\left(\frac{\gamma-x^*}{1+\theta\xi+x^*} - 1\right) < 0$, $\frac{\beta(1-c')[(1-c')(1+\theta\xi)-\xi]x^*y^*}{(1+\theta\xi+x^*)^3} > 0$