BAB II
DASAR TEORI

Pada dasar teori ini dibahas beberapa definisi dan contoh yang digunakan sebagai dasar memahami konsep dalam fungsi univalen, fungsi bi-univalen, serta sub-kelasnya dan sebagai acuan dalam pembahasan Skripsi ini.

2.1 Bilangan Kompleks

Bilangan kompleks adalah bilangan yang diperkenalkan akibat dari tidak adanya solusi bilangan rill yang merupakan akar kuadrat dari bilangan negatif.

Definisi 2.1.1
Bilangan kompleks adalah bilangan yang berbentuk $a + ib$ dengan a dan b adalah bilangan real dan i adalah bilangan imajiner bersifat $i^2 = -1$. Jika $z = a+ib$ maka a dinamakan bagian real dari z $(Re(z))$ dan b dinamakan bagian imajiner dari z $(Im(z))$.

(Martono, 1964:2)

Contoh 2.1.2
Beberapa contoh bilangan kompleks adalah $2 + 5i$, $3 + 7i$, dan 4.

Nilai mutlak atau modulus dari suatu bilangan kompleks $a + ib$ didefinisikan sebagai $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Contoh 2.1.3
Contoh mutlak dari suatu bilangan kompleks adalah
$|8 + 6i| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10.$

Menurut Martono (1964), bilangan kompleks terhadap operasi aritmatika sederhana dan modulusnya berlaku suatu aksioma teorema sebagai berikut.

Aksioma 2.1.4

Misalkan $z_1, z_2, z_3, , z_m$ adalah bilangan kompleks, maka berlaku sifat-sifat sebagai berikut :

1. $z_1 + z_2, z_1z_2 \in \mathbb{C}$
2. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
3. $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$
4. $z_1z_2 = z_2z_1$
5. $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$
6. $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$
7. $z_1 + 0 = 0 + z_1 = z_1$ dan $z_1.1 = 1.z_1 = z_1$
8. Untuk suatu bilangan kompleks z terdapat bilangan $z' \in \mathbb{C}$ sehingga $z + z' = 0$, dengan $z' = -z$
9. Untuk suatu bilangan kompleks $z \neq 0$ terdapat bilangan $z' \in \mathbb{C}$ sehingga $zz' = 1$, dengan $z' = \frac{1}{z}$

Teorema 2.1.5

Misalkan $z_1, z_2, z_3, , z_m$ adalah bilangan kompleks, maka modulus dari $z_1, z_2, z_3, , z_m$ memenuhi beberapa sifat sebagai berikut :

1. $|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|$ atau $|z_1z_2...z_m| = |z_1|\,|z_2|\,...\,|z_m|$
2. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ jika $|z_2| \neq 0$
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ atau $|z_1 + z_2 + ... + z_m| \leq |z_1| + |z_2| + ... + |z_m|$
4. $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ atau $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

Bukti: Ambil sebarang $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Misalkan $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, dan $z_3 = x_3 + iy_3$ sehingga diperoleh.

1. Basis Induksi
   Misalkan $m = 1$, diperoleh persamaan $|z_1| = |z_1|$ Langkah Induksi
   Misalkan $m = k$, diperoleh $|z_1 z_2 ... z_k| = |z_1| |z_2| ... |z_k|$ adalah pernyataan yang benar. Akan dibuktikan untuk $m = k + 1$ berlaku $|z_1 z_2 ... z_{k+1}| = |z_1| |z_2| ... |z_{k+1}|$.

   Misalkan $z_1 z_2 ... z_k = z$ sehingga

   $|z_1 z_2 ... z_{k+1}| = |z z_{k+1}|$ dan $|z| = |z_1| |z_2| ... |z_k|$

$$\begin{aligned}
|zz_{k+1}| &= |(x+iy)(x_{k+1}+iy_{k+1})| \\
&= |(xx_{k+1}-yy_{k+1})+i(xy_{k+1}+x_{k+1}y)| \\
&= \sqrt{(xx_{k+1}-yy_{k+1})^2+(xy_{k+1}+x_{k+1}y)^2} \\
&= \sqrt{(x^1+y^2)(x_{k+1}^2+y_{k+1}^2)} \\
&= \sqrt{(x^1+y^2)}\sqrt{(x_{k+1}^2+y_{k+1}^2)} \\
&= |z|\,|z_{k+1}|
\end{aligned}$$

   Jadi, terbukti bahwa $|z_1 z_2 ... z_{k+1}| = |z_1| |z_2| ... |z_{k+1}|$

2. Misalkan $z_2' = \frac{1}{z_2}$ sehingga

$$\begin{aligned}
|z_2'| &= \left|\frac{1}{x_2+iy_2}\right| \\
&= \left|\frac{x_2-iy_2}{x_2^2+y_2^2}\right| \\
&= \sqrt{\frac{x_2^2+y_2^2}{(x_2^2+y_2^2)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{x_2^2+y_2^2}{(x_2^2+y_2^2)^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}} \\
&= \frac{1}{|z_2|}
\end{aligned}$$

Menggunakan 1 diperoleh

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= |z_1 z_2'| \\
&= |z_1|\,|z_2'| \\
&= |z_1|\,(\tfrac{1}{|z_2|}) \\
&= \tfrac{|z_1|}{|z_2|}
\end{aligned}$$

3. Sebelumnya akan dibuktikan bahwa $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
|z_1 - z_2|^2 &= (z_1 - z_2)\,(\overline{z_1 - z_2}) \\
&= z_1\overline{z_1} + \left(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}}\right) + z_2\overline{z_2} \\
&= z_1\overline{z_1} + 2R\,(z_1\overline{z_2}) + z_2\overline{z_2} \\
&\leq |z_1|^2 + 2\,|z_1 z_2| + |z_2|^2 \\
&\leq (|z_1| + |z_2|)^2 .
\end{aligned}$$

Kemudian dengan mengakar ke dua sisi diperoleh $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. Setelah itu akan dibuktikan ketaksamaan untuk k variabel menggunakan induksi sebagai berikut.

Basis Induksi
Misalkan $m = 1$, diperoleh persamaan$|z_1| = |z_1|$

Langkah induksi
Misalkan untuk $m = k$, sehingga diperoleh ketaksamaan

$$|z_1 + z_2 + ... + z_k| \leq |z_1| + |z_2| + ... + |z_k|$$

adalah pernyataan yang benar. Akan dibuktikan untuk $m = k+1$ berlaku

$$|z_1 + z_2 + ... + z_{k+1}| \leq |z_1| + |z_2| + ... + |z_{k+1}| .$$

Misalkan $z_1 + z_2 + ... + z_k = z$. Kemudian

$$\begin{aligned}
0 &\leq (xy_{k+1} - x_{k+1}y)^2 \\
0 &\leq (xy_{k+1})^2 - 2xx_{k+1}yy_{k+1} + (x_{k+1}y)^2
\end{aligned}$$

$$2xx_{k+1}yy_{k+1} \leq (xy_{k+1})^2 + (x_{k+1}y)^2 \quad (2.1)$$

Setelah itu, tambahkan $(xx_{k+1})^2 + (yy_{k+1})^2$ pada kedua sisi dari ketaksamaan (2.1) , sehingga menjadi

$$(xx_{k+1})^2 + (yy_{k+1})^2 + 2xx_{k+1}yy_{k+1}$$

$$\leq (xx_{k+1})^2 + (yy_{k+1})^2 + (xy_{k+1})^2 + (x_{k+1}y)^2$$

$$(xx_{k+1} + yy_{k+1})^2 \leq (x_2^2 + y_2^2)(x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2) \quad (2.2)$$

Kemudian, lakukan pengakaran pada kedua sisi dan kalikan dua hasilnya

$$2(xx_{k+1} + yy_{k+1}) \leq 2\sqrt{(x_2^2 + y_2^2)(x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2)}. \quad (2.3)$$

Tambahkan $x^2 + y^2 + x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2$ pada kedua sisi dari ketaksamaan (2.3) Sehingga menjadi

$$x^2 + y^2 + x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2 + 2xx_{k+1} + 2yy_{k+1}$$

$$\leq x^2 + y^2 + x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2 + 2\sqrt{(x_2^2 + y_2^2)(x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2)}$$

$$(x + x_{k+1})^2 + (y + y_{k+1})^2 \leq (\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2})^2$$

$$|z + z_{k+1}| \leq |z| + |z_{k+1}|.$$

Jadi terbukti bahwa
$|z_1 + z_2 + ... + z_{k+1}| \leq |z_1| + |z_2| + ... + |z_{k+1}|$.

4. $|z_1| = |z_1 + z_2 - z_2|$, menggunakan 3 diperoleh
   $|z_1| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$
   $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$.

   Jadi, terbukti bahwa $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$.
   Misalkan $z_2' = -z_2$ sehingga diperoleh
   $$\begin{aligned} |z_1 - z_2'| &\geq |z_1| - |z_2'| \\ |z_1 + z_2| &\geq |z_1| - |-z_2| \\ |z_1 + z_2| &\geq |z_1| - |z_2|. \end{aligned}$$
   Jadi, terbukti bahwa $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$.

2.2 Fungsi Kompleks

Pada sub bab sebelumnya telah dibahas mengenai bilangan kompleks, kemudian pada sub bab ini akan membahas mengenai fungsi kompleks. Seperti yang telah dikenal bahwa fungsi adalah suatu pemetaaan yang memetakan himpunan asal (domain) ke himpunan sekawan (kodomain). Kemudian, fungsi tersebut disebut sebagai fungsi kompleks jika memetakan suatu bilangan kompleks atau memiliki peubah kompleks.

Definisi 2.2.1

Misalkan $z, w \in \mathbb{C}$, kemudian untuk setiap z dapat diandaikan terdapat satu atau lebih w sehingga w dapat diandaikan sebagai suatu fungsi dari z dan ditulis $w = f(z)$ maka w disebut suatu fungsi kompleks dari z.

(Martono, 1964:37)

Contoh 2.2.2

Beberapa contoh fungsi kompleks adalah $f(z) = z + 2$, $g(z) = z^2 + 4z + 3$, dan $h(z) = 3$ dengan $z \in \mathbb{C}$

2.3 Fungsi Analitik

Seperti halnya fungsi pada bilangan real, fungsi kompleks juga berlaku beberapa operasi matematis salah satunya adalah turunan. Hasil turunan dari suatu fungsi kompleks terkadang ada yang terdefinisi untuk setiap elemen pada domainnya dan ada pula yang tidak. Suatu fungsi kompleks dengan turunannya selalu terdefinisi pada domainnya maka fungsi tersebut disebut sebagai fungsi yang analitik.

Definisi 2.3.1

Misalkan R adalah sebuah domain di dalam $\mathbb{C}$. Fungsi $f(z)$ dinyatakan sebagai fungsi analitik dalam R jika turunannya yaitu $f'(z)$ terdefinisi di semua titik z dari suatu daerah R.

(Martono,1964:73)

Contoh 2.3.2

$f(z) = z^4 + z^2 + 5$ dengan domain $R = \{z : |z| \leq 2\}$ adalah suatu fungsi analitik karena $f'(z) = 4z^3 + 2z$ terdefinisi untuk setiap $z \in R$.

Contoh 2.3.3
$g(z) = \ln(z-5)$ dengan domain $R = \{z : |z| \leq 6\}$ bukan merupakan suatu fungsi analitik karena $g'(z) = \frac{1}{z-5}$ tidak terdefinisi untuk $z = 5$.

Lemma 2.3.4
Jika $\phi(z) \in P$, kelas fungsi analitik di dalam $U = \{z : |z| \leq 1\}$ dengan bagian real yang positif, diberikan sebagai

$$\phi(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + ... \qquad (z \in U)$$

maka $|c_n| \leq 2$ untuk setiap $n \in N$.

(Duren, 1983:41)

Untuk membuktikan Lemma 2.3.4 diperlukan Formula Herglotz sebagaimana berikut ini.

Formula Herglotz
Setiap $\varphi(z) \in P$ dapat diubah sebagai suatu integral Poisson-Stiltjes sebagaimana berikut ini

$$\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(t),$$

dengan $d\mu(t) \geq 0$ dan $\int_0^{2\pi} d\mu(t) = 1$.

(Duren, 1983:40)

Bukti:
Pandang persamaan berikut ini.

$$\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-int} z^n. \qquad (2.4)$$

Berdasarkan persamaan (2.4), fungsi $\phi(z)$ dapat diubah sebagai suatu integral Poisson-Stiltjes dengan koefisien sebagai berikut.

$$c_n = 2\int_0^{2\pi} e^{int} d\mu(t) \qquad n = 1, 2, 3, ... \qquad (2.5)$$

Jadi, berdasarkan persamaan (2.5) dan karena $\int_0^{2\pi} d\mu(t) = 1$ sehingga diperoleh $c_n \leq 2$.

2.4 Fungsi Univalen

Seperti halnya fungsi, suatu fungsi analitik jika dibagi berdasarkan hasil pemetaannya dapat tergolong sebagai fungsi yang surjektif, injektif, satu-satu atau korespondensi satu-satu. Pada sub bab ini, akan membahas mengenai fungsi analitik yang termasuk fungsi satu-satu atau dikenal sebagai fungsi univalen.

Definisi 2.4.1

Misalkan R adalah sebuah domain di dalam $\mathbb{C}$. Fungsi $f(z)$ analitik di dalam domain R disebut univalen jika dan hanya jika memenuhi kondisi $f(z_1) \neq f(z_2), \forall z_1, z_2 \in U$ dengan $z_1 \neq z_2$.

(Pommerenke,1975:9)

Contoh 2.4.2

$f(z) = z + 2$ dengan domain $R = \{z : |z| \leq 2\}$ merupakan fungsi univalen. Hal ini dikarenakan jika dipilih $z_1 \neq z_2$ maka $f(z_1) = z_1 + 2 \neq z_2 + 2 = f(z_2)$.

Contoh 2.4.3

$f(z) = z^2 + 2$ dengan domain $R = \{z : |z| \leq 1\}$ bukan merupakan fungsi univalen. Hal ini dikarenakan jika dipilih $z_1 = \frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2} = z_2$ maka $f(z_1) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2 = f(z_2)$.

Lemma 2.4.4

Misalkan H adalah kelas fungsi analitik di dalam cakram terbuka $U = \{z : |z| \leq 1\}$ dengan fungsi

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\propto} (a_k z^k).$$

Jika $f(z) \in H$, memenuhi ketaksamaan

$$\left| \frac{z^2 f'(z)}{(f(z))^2} - 1 \right| < 1,$$

maka $f(z)$ univalen di dalam U.

(Ozaki dan Nunokawa, 1972:393)

Untuk membuktikan Lemma 2.4.4 diperlukan suatu teorema sebagai berikut.

Teorema 2.4.5

Misalkan $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ terdefinisi di dalam U dan

$$g(z) = \frac{f^{'}(x)(1 - |x|^2)}{f((z+x)/(1+\overline{x}z)) - f(x)} = \frac{1}{z} + h(z,x).$$

Maka $f(z)$ adalah suatu fungsi univalen jika dan hanya jika

$$\left|h^{'}(z,x)\right| < 1 \qquad \text{untuk } z \in U \tag{2.6}$$

dengan x adalah elemen dari cakram satuan.

(Ozaki dan Nunokawa, 1972:392)

Bukti:

Karena Teorema 2.4.5 berlaku untuk setiap $z \in U$ sehingga menggunakan ketaksamaan (2.6) diperoleh bahwa

$$\left|-z^2 h^{'}(z,x)\right| < 1 \qquad \text{untuk } z \in U \tag{2.7}$$

Setelah itu, ambil $x = 0$ sehingga diperoleh

$$h(z,0) = \frac{1}{f(z)} - \frac{1}{z}. \tag{2.8}$$

$$h^{'}(z,0) = -\frac{f^{'}(z)}{(f(z))^2} + \frac{1}{z^2}. \tag{2.9}$$

$$-z^2 h^{'}(z,0) = z^2 \frac{f^{'}(z)}{(f(z))^2} - 1. \tag{2.10}$$

Setelah itu, menggunakan ketaksamaan (2.7) terhadap persamaan (2.10) diperoleh

$$\left|z^2 h^{'}(z,0)\right| = \left|\frac{f^{'}(z)}{(f(z))^2} - 1\right| < 1.$$

2.5 Fungsi Multinomial

Jika pada sub bab sebelumnya telah membahas mengenai berbagai macam jenis fungsi kompleks yaitu fungsi analitik, fungsi univalen dan fungsi bi-univalen, maka pada sub bab ini akan membahas mengenai suatu fungsi yang dapat termasuk ke dalam setiap fungsi yang telah disebutkan sebelumnya yaitu fungsi multinomial.

Definisi 2.6.1

Fungsi multinomial adalah suatu fungsi yang mengawankan dari himpunan A^k yaitu suatu himpunan berdimensi k ke dalam himpunan B dengan $A, B \subseteq \mathbb{C}$ atau suatu fungsi dengan k variabel yang independen, dimana $k \in \mathbb{N}$.

Contoh 2.6.2

Berikut ini adalah contoh fungsi multinomial dengan peubah suatu bilangan kompleks : $f(z_1, z_2, z_3) = 2z_1 + 4z_2 + z_3^2$, $f(z_1, z_2) = (5 + 6i)\, z_1 + 0.5z_2$ dan $f(z_1) = \frac{8}{z_1}$ dengan $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

Teorema 2.6.3

Hasil dari perpangkatan suatu fungsi multinomial menurut Wagner (2014) adalah untuk setiap $k, n \in \mathbb{N}$ berlaku persamaan sebagai berikut:

$$(x_1 + x_2 + ... + x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+...+n_k=n} \binom{n}{n_1, n_2, ..., n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_k^{n_k}.$$

Bukti

Basis induksi

Misalkan $n = 1$, diperoleh persamaan sebagai berikut

$$x_1 + x_2 + ... + x_k = \binom{1}{1, 0, ..., 0} x_1 + \binom{1}{0, 1, ..., 0} x_2 + ... + \binom{1}{0, 0, ..., 1} x_k.$$

Langkah induksi

Misalkan untuk $n = l$, berlaku

$$(x_1 + x_2 + ... + x_k)^l = \sum_{n_1+n_2+...+n_k=l} \binom{l}{n_1, n_2, ..., n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_k^{n_k}. \tag{2.11}$$

Akan dibuktikan untuk $n = l + 1$ berlaku

$$(x_1 + x_2 + ... + x_k)^{l+1} = \sum_{n_1+n_2+...+n_k=l+1} \binom{l+1}{n_1, n_2, ..., n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_k^{n_k}.$$

Diketahui bahwa

$$(x_1+x_2+...+x_k)^{l+1}=(x_1+x_2+...+x_k)^l(x_1+x_2+...+x_k) \tag{2.12}$$

menggunakan persamaan (2.11) dan disubtitusikan kedalam persamaan (2.12), diperoleh

$$\begin{aligned}
&(x_1+x_2+...+x_k)^{l+1}\\
&=\left(\sum_{n_1+n_2+...+n_k=l}\binom{l}{n_1,n_2,...,n_k}x_1^{n_1}x_2^{n_2}...x_k^{n_k}\right)(x_1+x_2+...+x_k)\\
&=\left(\sum_{n_1+n_2+...+n_k=l}\binom{l}{n_1,n_2,...,n_k}x_1^{n_1+1}x_2^{n_2}...x_k^{n_k}\right)+\\
&\qquad\left(\sum_{n_1+n_2+...+n_k=l}\binom{l}{n_1,n_2,...,n_k}x_1^{n_1}x_2^{n_2+1}...x_k^{n_k}\right)+...\\
&\qquad\left(\sum_{n_1+n_2+...+n_k=l}\binom{l}{n_1,n_2,...,n_k}x_1^{n_1}x_2^{n_2}...x_k^{n_k+1}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=\left(x_1^{l+1}+lx_1^lx_2+...+\binom{l}{n_1,n_2,...,n_k}x_1^{n_1+1}x_2^{n_2}...x_k^{n_k}\right)+\\
&\qquad\left(x_1^lx_2+lx_1^{l-1}x_2^2+...+\binom{l}{n_1,n_2,...,n_k}x_1^{n_1}x_2^{n_2+1}...x_k^{n_k}\right)+...\\
&\qquad\left(x_1^lx_k+lx_1^{l-1}x_k+...+\binom{l}{n_1,n_2,...,n_k}x_1^{n_1}x_2^{n_2+1}...x_k^{n_k+1}\right)
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Setelah itu, misalkan $n_i+1=d_i, \forall i\in\{1,2,3,...,k\}$ pada persamaan (2.13). Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&=x_1^{l+1}+x_2^{l+1}+...+x_k^{l+1}+(l+1)x_1^lx_2+...+(l+1)x_1^lx_k+...+\\
&\qquad\left(\binom{l}{d_1-1,d_2,...,d_k}+\binom{l}{d_1,d_2-1,...,d_k}+...+\binom{l}{d_1,d_2,...,d_k-1}\right)x_1^{d_1}x_2^{d_2}...x_k^{d_k}
\end{aligned}$$

$$=\binom{l+1}{l+1,0,...,0}x_1^{l+1}+\binom{l+1}{0,l+1,...,0}x_2^{l+1}+...+\binom{l+1}{d_1,d_2,...,d_k}x_1^{d_1}x_2^{d_2}...x_k^{d_k}$$

$$=\sum_{d_1+d_2+...+d_k=l+1}\binom{l+1}{d_1,d_2,...,d_k}x_1^{d_1}x_2^{d_2}...x_k^{d_k}. \tag{2.14}$$

Berdasarkan persamaan (2.14) dengan memisalkan kembali

$d_i = n_i, \forall i \in \{1, 2, 3, ..., k\}$. Jadi, terbukti bahwa

$$(x_1+x_2+...+x_k)^{l+1} = \sum_{n_1+n_2+...+n_k=l+1} \binom{l+1}{n_1, n_2, ..., n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_k^{n_k}.$$