

BAB III PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas konstruksi model *predator-prey* dengan fungsi respon dan rekrutmen umum, serta pemanenan terhadap kedua spesies. Model terdiri dari dua populasi, yaitu populasi *prey* dan *predator*. Selanjutnya, dilakukan analisis dinamik pada model yang meliputi penentuan titik kesetimbangan, syarat eksistensi, kestabilan lokal titik kesetimbangan, kestabilan global titik kesetimbangan kepunahan kedua spesies, dan bifurkasi sistem yang diberikan. Pada bagian akhir, dilakukan simulasi numerik menggunakan *pplane* pada *software* Matlab untuk mendukung hasil analisis yang telah diperoleh.

3.1 Konstruksi Model

Konstruksi model berbentuk persamaan diferensial dua dimensi dengan populasi *prey* $x(t)$ dan populasi *predator* $y(t)$. Dinamika populasi *prey* dan *predator* mengikuti beberapa asumsi berikut.

1. Fungsi $r(x)$ dan $s(y)$ masing-masing adalah laju rekrutmen per kapita untuk populasi *prey* dan *predator*. Meningkatnya pertumbuhan pada tiap individu mengakibatkan kompetisi untuk memperoleh makanan antar individu dengan spesies yang sama juga meningkat. Oleh karena itu, laju reproduksi dan rekrutmen per kapita untuk masing-masing populasi mengalami penurunan. Namun, laju rekrutmen setiap spesies tumbuh dengan ukuran populasi masing-masing. Asumsi tersebut secara matematis dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} \forall x \geq 0, r(x) > 0, r'(x) < 0, \lim_{x \rightarrow \infty} r(x) = 0 \text{ dan} \\ [xr(x)]' \geq 0, \\ \forall y \geq 0, s(y) > 0, s'(y) < 0, \lim_{y \rightarrow \infty} s(y) = 0 \text{ dan} \\ [ys(y)]' \geq 0. \end{aligned}$$

2. $x\phi(x)$ adalah fungsi respon, yang dalam hal ini menyatakan jumlah *prey* yang dimangsa *predator*. Konstanta c adalah efisiensi *prey* menjadi makanan *predator*, umumnya bernilai $0 < c < 1$.

3. Ketika populasi *prey* meningkat, laju konsumsi *prey* oleh *predator* juga meningkat, tetapi proporsi dari total populasi *prey* yang dikonsumsi oleh *predator* menurun.
 $\forall x \geq 0, \phi(x) > 0, \phi'(x) < 0$ dan $[x\phi(x)]' \geq 0$.
4. Parameter q_1 adalah koefisien pemanenan untuk *prey* dan q_2 adalah koefisien pemanenan untuk *predator*.
5. Parameter E_1 adalah usaha pemanenan untuk *prey* dan E_2 adalah usaha pemanenan untuk *predator*.
6. Parameter F_1 dan F_2 adalah laju kematian karena pemanenan untuk *prey* dan *predator*, yaitu $F_1 = q_1 E_1$ dan $F_2 = q_2 E_2$.
7. Parameter m_1 adalah laju kematian *prey* dan m_2 adalah laju kematian *predator*, yaitu $m_1 = \mu_1 + F_1$ dan $m_2 = \mu_2 + F_2$.
8. Laju pertumbuhan populasi *prey* dan *predator* adalah

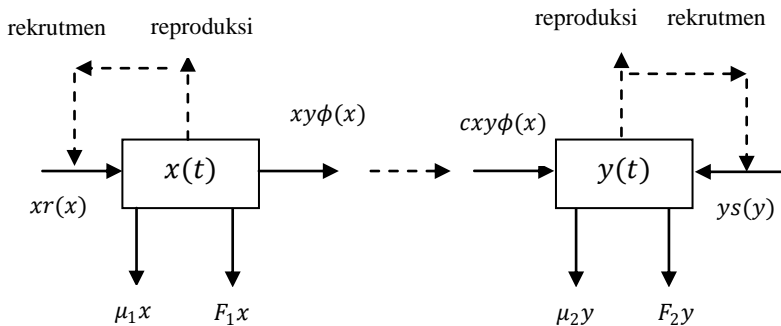
$$f(x, y) = r(x) - y\phi(x) - m_1,$$

$$g(x, y) = s(y) + cx\phi(x) - m_2.$$

dengan $f_x(x, y) < 0$ dan $g_y(x, y) < 0$. Untuk interaksi diasumsikan $f_y(x, y) < 0$ dan $g_x(x, y) \geq 0$, artinya populasi *prey* menurun dengan meningkatnya populasi *predator* dan populasi *predator* dapat meningkat karena pertumbuhan populasi *prey*.

9. Setiap *prey* memiliki peluang yang sama untuk dimangsa dan setiap *predator* memiliki peluang yang sama untuk memangsa.

Untuk lebih mudah memahami dinamika populasi *prey-predator* dengan fungsi respon dan rekrutmen umum, pada Gambar 3.1 ditunjukkan diagram kompartemen.



Gambar 3.1 Diagram kompartemen model (3.1)

Berdasarkan asumsi-asumsi tersebut, model matematika untuk model *predator-prey* dengan fungsi respon dan rekrutmen umum serta dengan pemanenan pada kedua spesies adalah

$$\frac{dx}{dt} = x(t)f(x(t), y(t)) = x(t)[r(x(t)) - y(t)\phi(x(t)) - m_1]$$

$$\frac{dy}{dt} = y(t)f(x(t), y(t)) = y(t)[s(y(t)) + cx(t)\phi(x(t)) - m_2]$$

atau dapat ditulis

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x[r(x) - y\phi(x) - m_1], \\ \frac{dy}{dt} &= y[s(y) + cx\phi(x) - m_2], \end{aligned} \quad (3.1)$$

dengan daerah solusi $\Omega = \{(x, y)/x \geq 0, y \geq 0\}$. Diasumsikan semua parameter bernilai positif.

3.2 Titik Kesetimbangan Model

Titik kesetimbangan model (3.1) dapat diperoleh saat

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0,$$

yaitu

$$x[r(x) - y\phi(x) - m_1] = 0, \quad (3.1a)$$

$$y[s(y) + cx\phi(x) - m_2] = 0. \quad (3.1b)$$

Dari persamaan (3.1a) diperoleh

$$x = 0, \quad (3.2)$$

atau

$$y = \frac{r(x) - m_1}{\phi(x)}. \quad (3.3)$$

Dari persamaan (3.1b) diperoleh

$$y = 0, \quad (3.4)$$

atau

$$x = \frac{m_2 - s(y)}{c\phi(x)}. \quad (3.5)$$

Titik kesetimbangan dapat diperoleh dari kombinasi persamaan (3.2)-(3.5).

Pertama. Kombinasi persamaan (3.2) dengan (3.4) menghasilkan

$$(x, y) = (0, 0).$$

Kedua. Kombinasi persamaan (3.4) dengan (3.3) menghasilkan

$$(x, y) = (r(x) = m_1, 0).$$

Ketiga. Kombinasi persamaan (3.2) dengan (3.5) menghasilkan

$$(x, y) = (0, s(y) = m_2).$$

Keempat. Kombinasi persamaan (3.3) dengan (3.5) menghasilkan

$$y = \frac{r(x) - m_1}{\phi(x(t))}$$

$$cx\phi(x) + s\left(\frac{r(x)-m_1}{\phi(x)}\right) - m_2 = 0.$$

Berdasarkan uraian di atas, model (3.1) memiliki titik kesetimbangan sebagai berikut:

1. $P_0 = (0, 0)$
2. $P_1 = (K, 0)$ dengan $r(K) = m_1$.
3. $P_2 = (0, M)$ dengan $s(M) = m_2$.
4. $P_3 = (x^*, y^*)$ dengan

$$y^* = \frac{r(x^*) - m_1}{\phi(x^*)} \tag{3.6}$$

dan x^* memenuhi persamaan

$$cx^*\phi(x^*) + s\left(\frac{r(x^*) - m_1}{\phi(x^*)}\right) - m_2 = 0. \tag{3.7}$$

3.3 Analisis Syarat Eksistensi

3.3.1 Titik kesetimbangan $P_0 = (0, 0)$

Proposisi 1. Titik P_0 eksis untuk semua nilai parameter.

Bukti. Jelas bahwa untuk semua nilai parameter yang diberikan, titik $P_0 = (0, 0) \in \Omega$

3.3.2 Titik kesetimbangan $P_1 = (K, 0)$ dengan $r(K) = m_1$

Proposisi 2. Titik P_1 eksis jika dan hanya jika $m_1 < r(0)$.

Bukti. Berdasarkan asumsi, diketahui bahwa $r(x)$ bersifat monoton turun atau $r'(x) < 0$. Hal ini mengakibatkan jika $m_1 < r(0)$ maka ada $K > 0$ secara tunggal sedemikian sehingga $r(K) = m_1$. Dengan

demikian, titik kesetimbangan $P_1 = (K, 0)$ eksis jika dan hanya jika $m_1 < r(0)$.

3.3.3 Titik kesetimbangan $P_2 = (0, M)$ dengan $s(M) = m_2$

Proposisi 3. Titik P_2 eksis jika dan hanya jika $m_2 < s(0)$.

Bukti. Dengan cara yang sama pada titik P_1 , berdasarkan asumsi, fungsi $s(y)$ bersifat monoton turun atau $s'(y) < 0$. Hal ini mengakibatkan jika $m_2 < s(0)$ maka ada $M > 0$ secara tunggal sedemikian sehingga $s(M) = m_2$. Dengan demikian, titik kesetimbangan $P_2 = (0, M)$ eksis jika dan hanya jika $m_2 < s(0)$.

3.3.4 Titik kesetimbangan $P_3 = (x^*, y^*)$

Proposisi 4. Titik P_3 eksis jika dan hanya jika (m_1, m_2) memenuhi $m_1 < r(0) - M\phi(0)$ dan $m_2 < s(0)$ atau $s(0) < m_2 < s(0) + cK\phi(K)$ dan $m_1 < r(0)$.

Bukti. Pertama, perhatikan bahwa $r(x)$ bersifat monoton turun atau $\forall x \geq 0 \ r(x) \leq r(0)$. Oleh karena itu, jika $r(0) < m_1$ maka $r(x) - m_1 < 0$ yang mengakibatkan $\frac{r(x)-m_1}{\phi(x)} < 0, \forall x > 0$. Dengan demikian, untuk semua solusi persamaan (3.6), $y^* < 0$ dan akibatnya $(x^*, y^*) \notin \Omega$.

Asumsikan bahwa $r(0) - M\phi(0) < m_1 < r(0)$ dan $m_2 < s(0)$, dimana terdapat $M > 0$ sedemikian sehingga $(0, M) \in \Omega$ adalah titik kesetimbangan yang tunggal seperti yang telah dijelaskan sebelumnya. Kemudian, anggap titik $P_3^* = (x^*, y^*) \in \Omega$ sehingga berdasarkan persamaan (3.7), $s(y^*) < m_2 = s(M)$. Karena $s(y)$ bersifat monoton turun atau $s'(y) < 0$, didapat $M < y^*$, yang artinya

$$M < \frac{r(x^*) - m_1}{\phi(x^*)} = y^*$$

atau dengan kata lain

$$m_1 < r(x^*) - M\phi(x^*).$$

Di sisi lain, berdasarkan asumsi diketahui bahwa $f_x(x, y) = r'(x) - y\phi'(x) < 0$, akibatnya saat $y = M$, $r'(x) - M\phi'(x) < 0$. Jadi, fungsi $h(x) = r(x) - M\phi(x)$ adalah monoton turun dan karena $x^* > 0$,

$$m_1 < r(x^*) - M\phi(x^*) < r(0) - M\phi(0).$$

Jadi, diperoleh $m_1 < r(0) - M\phi(0)$ yang kontradiksi dengan asumsi.

Dengan cara yang sama, asumsikan bahwa $m_1 < r(0)$ dan $s(0) + cK\phi(K) < m_2$. Berdasarkan asumsi tersebut terdapat $K > 0$ sedemikian sehingga $P_1 = (K, 0) \in \Omega$ adalah titik kesetimbangan yang tunggal seperti yang telah dijelaskan sebelumnya. Kemudian, anggap titik $P_3^* = (x^*, y^*) \in \Omega$ maka berdasarkan $y^* = \frac{r(x^*) - m_1}{\phi(x^*)}$, $r(K) = m_1 < r(x^*)$. Karena $r'(x) < 0$, didapat $x^* < K$. Perhatikan persamaan (3.7),

$$cx^*\phi(x^*) + s\left(\frac{r(x^*) - m_1}{\phi(x^*)}\right) = m_2.$$

Di sisi lain, berdasarkan asumsi model, fungsi $x\phi(x)$ meningkat atau monoton naik ketika fungsi $s(y)$ menurun atau monoton turun, artinya $cx^*\phi(x^*) < cK\phi(K)$ dan $s\left(\frac{r(x^*) - m_1}{\phi(x^*)}\right) < s(0)$. Hal ini mengakibatkan

$$m_2 = cx^*\phi(x^*) + s\left(\frac{r(x^*) - m_1}{\phi(x^*)}\right) < cK\phi(K) + s(0).$$

Karena itu, diperoleh $m_2 < cK\phi(K) + s(0)$ yang kontradiksi dengan asumsi.

Selanjutnya, jika diasumsikan bahwa $m_1 < r(0) - M\phi(0)$ dan $m_2 < s(0)$, kemudian K dan M eksis dengan $r(K) = m_1$ dan $s(M) = m_2$. Dari kondisi pertama, diperoleh $M < \frac{r(0) - m_1}{\phi(0)}$ dan akibatnya

$$s\left(\frac{r(0) - m_1}{\phi(0)}\right) < s(M) = m_2.$$

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan $x = 0$ ke ruas kiri persamaan (3.7) diperoleh

$$s\left(\frac{r(0) - m_1}{\phi(0)}\right) - m_2 < 0.$$

Di sisi lain, fungsi $h(x) = r(x) - M\phi(x)$ adalah monoton turun dan $m_1 = r(K)$ sehingga

$$r(K) - M\phi(K) = m_1 - M\phi(K) < m_1 < r(0) - M\phi(0).$$

Akibatnya, terdapat \bar{x} , dengan $0 < \bar{x} < K$, sedemikian sehingga $m_1 = r(\bar{x}) - M\phi(\bar{x})$. Dengan demikian, diperoleh $M = \frac{r(\bar{x}) - m_1}{\phi(\bar{x})}$ sehingga

$$s\left(\frac{r(\bar{x}) - m_1}{\phi(\bar{x})}\right) = s(M) = m_2.$$

Substitusikan $x = \bar{x}$ ke ruas kiri persamaan (3.7) diperoleh

$$c\bar{x}\phi(\bar{x}) + s\left(\frac{r(\bar{x}) - m_1}{\phi(\bar{x})}\right) - m_2 > 0.$$

Oleh karena itu, fungsi ruas kiri persamaan (3.7) bernilai negatif saat $x = 0$ dan positif saat $x = \bar{x}$. Dapat dilihat bahwa fungsi ruas kiri persamaan (3.7) kontinu yang artinya ada x^* dengan $0 < x^* < K$ sedemikian sehingga $cx^*\phi(x^*) + s\left(\frac{r(x^*) - m_1}{\phi(x^*)}\right) - m_2 = 0$. Karena $x^* < K$, $r(x^*) > r(K) = m_1$ akibatnya $y^* = \frac{r(x^*) - m_1}{\phi(x^*)} > 0$.

Terakhir, asumsikan bahwa $s(0) < m_2 < s(0) + cK\phi(K)$ dan $m_1 < r(0)$. Dari kondisi pertama, diperoleh $r(0) - m_1 > 0$ dan pasti $\frac{r(0) - m_1}{\phi(0)} > 0$, sehingga

$$s\left(\frac{r(0) - m_1}{\phi(0)}\right) < s(0) < m_2.$$

Selanjutnya, substitusikan $x = 0$ ke ruas kiri persamaan (3.7) yang menghasilkan

$$s\left(\frac{r(0) - m_1}{\phi(0)}\right) - m_2 < 0.$$

Di sisi lain, karena $m_1 < r(0)$, ada secara tunggal $K > 0$ sedemikian sehingga $r(K) = m_1$ dan jelas bahwa

$$s\left(\frac{r(K) - m_1}{\phi(0)}\right) = s(0).$$

Dengan mensubstitusikan $x = K$ ke ruas kiri persamaan (3.7) diperoleh

$$cK\phi(K) + s(0) - m_2 > 0.$$

Dapat dilihat bahwa fungsi ruas kiri persamaan (3.7) bernilai negatif saat $x = 0$ dan positif saat $x = K$. Karena fungsi ruas kiri persamaan (3.7) bersifat kontinu, berarti terdapat x^* dengan $0 < x^* < K$ sedemikian sehingga $cx^*\phi(x^*) + s\left(\frac{r(x^*) - m_1}{\phi(x^*)}\right) - m_2 = 0$. Karena $x^* < K$, $r(x^*) > r(K) = m_1$ akibatnya $y^* = \frac{r(x^*) - m_1}{\phi(x^*)} > 0$.

Dengan demikian, terbukti bahwa titik P_3 eksis jika dan hanya jika (m_1, m_2) memenuhi $m_1 < r(0) - M\phi(0)$ dan $m_2 < s(0)$ atau $m_1 < r(0)$ dan $s(0) < m_2 < s(0) + cK\phi(K)$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan titik (x^*, y^*) adalah titik kesetimbangan yang tunggal. Asumsikan bahwa terdapat titik (\hat{x}, \hat{y}) dengan $\hat{x}, \hat{y} > 0$. Kemudian x^* dan \hat{x} memenuhi persamaan

$$cx\phi(x) + s\left(\frac{r(x) - m_1}{\phi(x)}\right) - m_2 = 0.$$

Berdasarkan asumsi, semua fungsi di ruas kiri adalah *smooth*, maka terdapat $\tilde{x} > 0$ di antara x^* dan \hat{x} yang memenuhi

$$\left[cx\phi(x) + s \left(\frac{r(x) - m_1}{\phi(x)} \right) - m_2 \right]_{x=\tilde{x}}' = 0$$

atau dengan kata lain

$$\left[c[x\phi(x)]' + s' \left(\frac{r(x) - m_1}{\phi(x)} \right) \left(\frac{r'(x)\phi(x) - \phi'(x)(r(x) - m_1)}{(\phi(x))^2} \right) \right]_{x=\tilde{x}} = 0$$

Di sisi lain, berdasarkan asumsi $[x\phi(x)]' \geq 0$ dan $s' \left(\frac{r(x) - m_1}{\phi(x)} \right) < 0$. Karena x^* dan \tilde{x} memenuhi $r(x^*), r(\hat{x}) > r(K) = m_1$ maka $r(\tilde{x}) > r(K) = m_1$. Secara khusus, faktor kedua dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$\left(\frac{r'(\tilde{x}) - \left(\frac{r(\tilde{x}) - m_1}{\phi(\tilde{x})} \right) \phi'(\tilde{x})}{\phi(\tilde{x})} \right).$$

Karena $f_x(x, y) = r'(x) - y\phi'(x) < 0$ maka faktor kedua selalu bernilai negatif untuk setiap nilai x . Dengan demikian,

$$\left[c[x\phi(x)]' + s' \left(\frac{r(x) - m_1}{\phi(x)} \right) \left(\frac{r'(x)\phi(x) - \phi'(x)(r(x) - m_1)}{(\phi(x))^2} \right) \right]_{x=\tilde{x}} > 0,$$

yang kontradiksi dengan asumsi sehingga asumsi salah, yang artinya $x^* = \hat{x}$. Terbukti (x^*, y^*) adalah titik kesetimbangan yang tunggal.

3.4 Analisis Kestabilan

Model (3.1) merupakan sistem dinamik *autonomous* nonlinear, sehingga untuk mengetahui sifat kestabilan lokal titik kesetimbangan model, dilakukan proses linearisasi di sekitar titik kesetimbangan (x, y) . Berdasarkan proses linearisasi model (3.1) diperoleh matriks Jacobi di titik kesetimbangan (x, y) sebagai berikut.

$$J = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{bmatrix},$$

dengan

$$\begin{aligned}
 j_{11} &= xr'(x) - y(x\phi'(x) + \phi(x)) + r(x) - m_1, \\
 j_{12} &= -x\phi(x), \\
 j_{21} &= cy(x\phi'(x) + \phi(x)), \\
 j_{22} &= ys'(y) + s(y) + cx\phi'(x) - m_2.
 \end{aligned}$$

3.4.1 Kestabilan lokal titik kesetimbangan $P_0 = (0, 0)$

Matriks Jacobi di titik $P_0 = (0,0)$ adalah

$$J(P_0) = \begin{bmatrix} r(0) - m_1 & 0 \\ 0 & s(0) - m_2 \end{bmatrix},$$

dengan akar-akar persamaan karakteristiknya adalah

$$\lambda_1 = r(0) - m_1, \lambda_2 = s(0) - m_2.$$

Berdasarkan akar-akarnya, titik kesetimbangan P_0 bersifat stabil asimtotik lokal jika dan hanya jika $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 < 0$ atau dengan kata lain $r(0) < m_1$ dan $s(0) < m_2$.

3.4.2 Kestabilan lokal titik kesetimbangan $P_1 = (K, 0)$

Matriks Jacobi di titik $P_1 = (K, 0)$ adalah

$$J(P_1) = \begin{bmatrix} Kr'(x)_{x=K} & -K\phi(K) \\ 0 & s(0) + cK\phi(K) - m_2 \end{bmatrix}.$$

Akar-akar persamaan karakteristiknya adalah

$$\lambda_1 = Kr'(x)_{x=K}, \lambda_2 = s(0) + cK\phi(K) - m_2,$$

jika $m_1 < r(0)$ maka $\lambda_1 < 0$. Oleh karena itu, titik kesetimbangan P_1 bersifat stabil asimtotik lokal jika dan hanya jika $m_1 < r(0)$ dan $m_2 > s(0) + cK\phi(K)$.

3.4.3 Kestabilan lokal titik kesetimbangan $P_2 = (0, M)$

Matriks Jacobi di titik $P_2 = (0, M)$ adalah

$$J(P_2) = \begin{bmatrix} r(0) - M\phi(0) - m_1 & 0 \\ cM\phi(0) & Ms'(y)_{y=M} \end{bmatrix}.$$

Akar-akar persamaan karakteristiknya adalah

$$\lambda_1 = r(0) - M\phi(0) - m_1, \lambda_2 = Ms'(y)_{y=M},$$

Jika $m_2 < s(0)$ maka $\lambda_2 < 0$. Oleh karena itu, titik kesetimbangan P_2 bersifat stabil asimtotik lokal jika dan hanya jika $m_2 < s(0)$ dan $m_1 > r(0) - M\phi(0)$.

3.4.4 Kestabilan lokal titik kesetimbangan $P_3 = (x^*, y^*)$

Matriks Jacobi di titik $P_3 = (x^*, y^*)$ adalah

$$J(P_3) = \begin{bmatrix} x^*[r'(x)_{x^*} - y^*\phi'(x)_{x^*}] & -x^*\phi(x^*) \\ cy^*[x\phi(x)]'_{x^*} & y^*s'(y)_{y^*} \end{bmatrix}.$$

Persamaan karakteristik matriks Jacobi $J(P_3)$ adalah

$$(x^*[r'(x)_{x^*} - y^*\phi'(x)_{x^*}] - \lambda)(y^*s'(y)_{y^*} - \lambda) + x^*\phi(x^*)cy^*[x\phi(x)]'_{x^*} = 0.$$

Akar-akar persamaan karakteristiknya adalah

$$\lambda_{1,2} = \frac{(y^*s'(y)_{y^*} + x^*[r'(x)_{x^*} - y^*\phi'(x)_{x^*}] \pm \sqrt{\Delta})}{2} \quad (3.8)$$

dengan

$$\Delta = (y^*s'(y)_{y^*} + x^*[r'(x)_{x^*} - y^*\phi'(x)_{x^*}])^2 - 4x^*y^*[s'(y)_{y^*}(r'(x)_{x^*} - y^*\phi'(x)_{x^*}) + c\phi(x^*)(x\phi(x))'_{x^*}].$$

Berdasarkan asumsi, diketahui bahwa $s'(y) < 0$ untuk semua $y \geq 0$ dan $f_x(x, y) < 0$, yaitu

$$f_x(x, y) = r'(x) - y\phi'(x) < 0.$$

Dengan mensubstitusikan $(x, y) = (x^*, y^*)$ ke kedua fungsi tersebut diperoleh $s'(y)_{y^*} < 0$ dan $r'(x)_{x^*} - y^*\phi'(x)_{x^*} < 0$. Oleh karena itu, faktor pertama pada persamaan (3.8) memenuhi

$$y^*s'(y)_{y^*} + x^*[r'(x)_{x^*} - y^*\phi'(x)_{x^*}] < 0,$$

sehingga terdapat 3 kasus untuk menentukan nilai eigen $\lambda_{1,2}$.

Kasus 1. Untuk nilai $\Delta < 0$. Pada kasus ini, nilai eigen $\lambda_{1,2}$ merupakan bilangan kompleks dengan bagian real negatif.

Kasus 2. Untuk nilai $\Delta = 0$. Pada kasus ini, nilai eigen $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$.

Kasus 3. Untuk nilai $\Delta > 0$. Perhatikan bahwa

$$\lambda_{1,2} = \frac{(y^*s'(y)_{y^*} + x^*[r'(x)_{x^*} - y^*\phi'(x)_{x^*}] \pm \sqrt{\Delta})}{2}$$

dengan

$$\Delta = (y^*s'(y)_{y^*} + x^*[r'(x)_{x^*} - y^*\phi'(x)_{x^*}])^2 - 4x^*y^*[s'(y)_{y^*}(r'(x)_{x^*} - y^*\phi'(x)_{x^*}) + c\phi(x^*)(x\phi(x))'_{x^*}].$$

Misal

$$a = y^*s'(y)_{y^*} + x^*[r'(x)_{x^*} - y^*\phi'(x)_{x^*}] < 0,$$

$$a^2 = (y^*s'(y)_{y^*} + x^*[r'(x)_{x^*} - y^*\phi'(x)_{x^*}])^2 > 0,$$

$b = [s'(y)_{y^*}(r'(x)_{x^*} - y^* \phi'(x)_{x^*}) + c\phi(x^*)(x\phi(x))'_{x^*}] > 0$,
 maka Δ dan $\lambda_{1,2}$ dapat di tulis kembali dalam bentuk

$$\Delta = a^2 - 4x^*y^*b,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4x^*y^*b}}{2} < 0.$$

Karena $\Delta < a^2$ atau $|a| > |\sqrt{\Delta}|$, dan diketahui bahwa $a < 0, \sqrt{\Delta} > 0$, maka

$$\lambda_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4x^*y^*b}}{2} < 0,$$

$$\lambda_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4x^*y^*b}}{2} < 0,$$

sehingga jelas $\lambda_1, \lambda_2 < 0$.

Berdasarkan uraian kasus di atas, nilai eigen memiliki bagian real negatif untuk semua nilai Δ , sehingga dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan $P_3 = (x^*, y^*)$ bersifat stabil asimtotik jika dan hanya jika $P_3 = (x^*, y^*) \in \Omega$ atau eksis.

Berdasarkan uraian sebelumnya, eksistensi dan sifat kestabilan lokal titik kesetimbangan model (3.1) dirangkum pada Tabel 3.1.

Tabel 3.1 Syarat eksistensi dan kestabilan lokal titik kesetimbangan model (3.1)

Titik Kesetimbangan	Syarat Eksistensi	Jenis Kestabilan	Syarat Kestabilan
$P_0 = (0,0)$	-	Stabil asimtotik	$r(0) < m_1$ dan $s(0) < m_2$
$P_1 = (K, 0)$	$m_1 < r(0)$	Stabil asimtotik	$m_2 > s(0) + cK\phi(K)$
$P_2 = (0, M)$	$m_2 < s(0)$	Stabil asimtotik	$m_1 > r(0) - M\phi(0)$
$P_3 = (x^*, y^*)$	$m_1 < r(0) - M\phi(0)$ dan $m_2 < s(0)$ atau $m_1 < r(0)$ dan $s(0) < m_2 < s(0) + cK\phi(K)$	Stabil asimtotik	$m_1 < r(0) - M\phi(0)$ dan $m_2 < s(0)$ atau $m_1 < r(0)$ dan $s(0) < m_2 < s(0) + cK\phi(K)$

3.4.5 Kestabilan global titik kesetimbangan $P_0 = (0, 0)$

Untuk menentukan kestabilan global titik kesetimbangan $P_0 = (0,0)$ digunakan Metode Lyapunov seperti berikut.

Teorema 3.1 Kestabilan global titik kesetimbangan $P_0 = (0,0)$

Jika $m_1 \geq r(0)$ dan $m_2 \geq s(0)$ maka titik kesetimbangan $P_0 = (0,0)$ bersifat stabil asimtotik global.

Bukti. Didefinisikan suatu fungsi Lyapunov $V: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ dengan

$$V(t) = V(x(t), y(t)) = x(t) + y(t)$$

Akan ditunjukkan $V(t)$ merupakan fungsi Lyapunov kuat yang memenuhi kondisi

- i. $V(\vec{x}^*) = 0$,
- ii. $V(\vec{x}) > 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^* \in \Omega$, dan
- iii. $\frac{dV(\vec{x})}{dt} < 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^* \in \Omega$.

Diketahui $P_0 = (0,0)$.

- i. Jelas bahwa saat $P_0 = (0,0)$ diperoleh $V(P_0) = 0$.
- ii. Jelas bahwa saat $x(t) > 0$ dan $y(t) > 0, \forall t > 0, \forall \vec{x} \neq \vec{0}$ diperoleh $V(\vec{x}) = x(t) + y(t) > 0$.
- iii. Turunan dari V adalah

$$\begin{aligned} \frac{dV(\vec{x})}{dt} &= x(r(x) - m_1) + xy\phi(x)(c - 1) \\ &\quad + y(s(y) - m_2) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Berdasarkan asumsi, $r(x)$ dan $s(y)$ adalah fungsi monoton turun atau $r'(x) < 0, \forall x \geq 0$ dan $s'(y) < 0, \forall y \geq 0$ sehingga $r(x) \leq r(0), \forall x \geq 0$ dan $s(y) \leq s(0), \forall y \geq 0$. Diketahui bahwa $m_1 \geq r(0)$ dan $m_2 \geq s(0)$, sehingga $r(x) \leq m_1, \forall x \geq 0$ dan $s(y) \leq m_2, \forall y \geq 0$ atau dengan kata lain $r(x) - m_1 \leq 0, \forall x \geq 0$ dan $s(y) - m_2 \leq 0, \forall y \geq 0$. Oleh karena itu, faktor pertama dan ketiga pada persamaan (3.9) bernilai lebih kecil sama dengan 0.

Di sisi lain, berdasarkan asumsi, diketahui bahwa $0 < c < 1$ dan $\phi(x) > 0$, sehingga faktor kedua pada persamaan (3.9) bernilai lebih kecil dari 0. Dengan demikian, $\frac{dV(\vec{x})}{dt} < 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^* \in \Omega$.

Dengan menggunakan Teorema 2.4 terbukti bahwa terdapat fungsi Lyapunov kuat $V(t)$ sedemikian sehingga titik kesetimbangan $P_0 = (0,0)$ bersifat stabil asimtotik global jika $m_1 \geq r(0)$ dan $m_2 \geq s(0)$.

Berdasarkan uraian syarat eksistensi dan analisis kestabilan, akan dilakukan simulasi numerik untuk beberapa kasus berikut.

- i. Kasus I: jika $m_1 \geq r(0)$ dan $m_2 \geq s(0)$ maka titik kesetimbangan $P_0 = (0,0)$ adalah titik kesetimbangan yang tunggal pada Ω dan bersifat stabil asimtotik global.
- ii. Kasus II: jika $m_1 > r(0)$ dan $m_2 < s(0)$ maka titik kesetimbangan $P_0 = (0,0)$ bersifat tidak stabil dan titik $P_2 = (0, M)$ eksis dan bersifat stabil asimtotik lokal. Namun, titik kesetimbangan $P_1 = (K, 0)$ dan $P_3 = (x^*, y^*)$ tidak eksis.
- iii. Kasus III: jika $m_2 < s(0)$ dan $r(0) - M\phi(0) < m_1 < r(0)$ maka titik kesetimbangan $P_0 = (0,0)$ bersifat tidak stabil, $P_1 = (K, 0)$ eksis tetapi tidak stabil, dan $P_2 = (0, M)$ eksis dan bersifat stabil asimtotik lokal. Pada kasus ini, titik kesetimbangan $P_3 = (x^*, y^*)$ tidak eksis.
- iv. Kasus IV: jika $m_2 < s(0)$ dan $m_1 < r(0) - M\phi(0)$ maka titik kesetimbangan $P_0 = (0,0)$ bersifat tidak stabil, $P_1 = (K, 0)$ dan $P_2 = (0, M)$ eksis tetapi keduanya tidak stabil, dan $P_3 = (x^*, y^*)$ yang bersifat stabil asimtotik lokal.
- v. Kasus V: jika $m_1 < r(0)$ dan $s(0) < m_2 < s(0) + cK\phi(K)$ maka titik kesetimbangan $P_0 = (0,0)$ bersifat tidak stabil, $P_1 = (K, 0)$ eksis tetapi tidak stabil, $P_2 = (0, M)$ tidak eksis, dan $P_3 = (x^*, y^*)$ yang bersifat stabil asimtotik lokal.
- vi. Kasus VI: jika $m_1 < r(0)$ dan $m_2 > s(0) + cK\phi(K)$ maka titik kesetimbangan $P_0 = (0,0)$ bersifat tidak stabil, $P_1 = (K, 0)$ bersifat stabil asimtotik lokal, dan $P_2 = (0, M)$ dan $P_3 = (x^*, y^*)$ tidak eksis.

Dari uraian kasus di atas, terlihat bahwa terdapat perubahan kestabilan titik kesetimbangan antara kasus satu dengan yang lain. Sebagai contoh, titik P_0 bersifat stabil pada Kasus I tetapi tidak stabil pada Kasus II, titik P_2 bersifat stabil pada Kasus III tetapi tidak stabil pada Kasus IV, dan titik P_1 yang bersifat stabil pada Kasus V tetapi tidak stabil pada Kasus VI. Berdasarkan alasan

tersebut, dapat diambil kesimpulan, yaitu terjadi bifurkasi transkritikal dengan nilai bifurkasi $(m_1, m_2) = (r(0), s(0))$.

3.5 Simulasi Numerik

Untuk memberikan ilustrasi hasil analitik, berikut akan dilakukan simulasi numerik. Dalam hal ini, digunakan fungsi respon Holling Tipe II dan fungsi rekrutmen model Beverton-Holt, yaitu $x\phi(x) = \frac{x}{x+30}$, $xr(x) = \frac{15x}{x+10}$ untuk *prey* dan $ys(y) = \frac{5y}{y+10}$. Data yang digunakan adalah berasal dari Orinoco di Colombia, yaitu *Prochilodus mariae* sebagai *prey* dan *Pseudoplatystoma fasciatum* sebagai *predator* (Ladino, dkk., 2014). Berdasarkan data tersebut, diketahui $m_1 = 1.38$, $F_1 = 0.75$, $m_2 = 0.622$, dan $F_2 = 0.4088$. Pada simulasi numerik ini akan diperlihatkan efek laju pemanenan dengan cara memberikan beberapa nilai yang berbeda pada parameter laju pemanenan. Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan *pplane* pada *software* Matlab. Selanjutnya, melakukan perbandingan antara simulasi numerik dengan perhitungan secara analisis yang telah diperoleh.

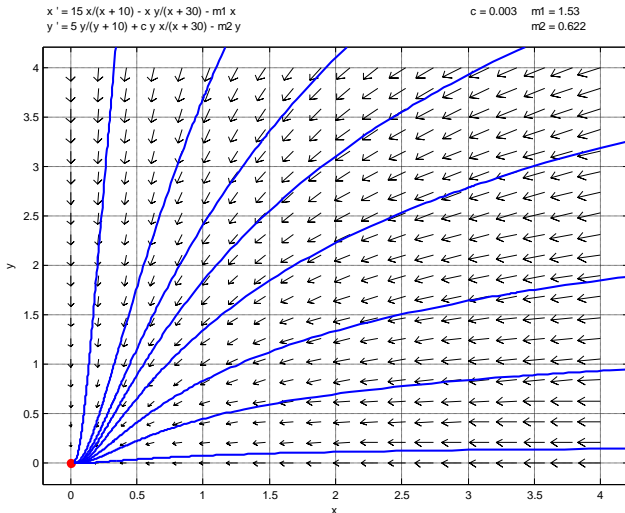
3.5.1 Simulasi numerik 1

Pada simulasi ini digunakan nilai parameter $c = 0.003$, F_1 meningkat 20% dari data awal dan F_2 tetap, yaitu $m_1 = 1.53$ dan $m_2 = 0.622$. Nilai parameter tersebut memenuhi syarat kestabilan global titik kesetimbangan $P_0 = (0,0)$, yaitu

$$m_1 = 1.53 \geq 1.5 = r(0) \text{ dan } m_2 = 0.622 \geq 0.5 = s(0).$$

Dengan nilai parameter di atas, titik $P_1 = (-0.1961, 0)$, titik $P_2 = (0, -1.9614)$, dan $P_3 = (0.2379, -1.9611)$ tidak eksis karena tidak memenuhi syarat eksistensi ketiga titik tersebut.

Perilaku solusi dengan parameter-parameter pada simulasi 1 dapat dilihat pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2 Potret fase sistem (3.1) untuk kestabilan global titik kesetimbangan $P_0 = (0,0)$.

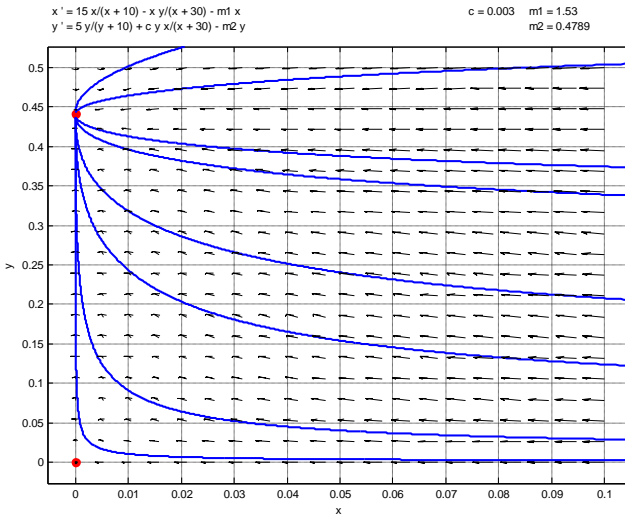
Gambar 3.2 menunjukkan bahwa dengan nilai awal berapapun solusi yang diperoleh menuju titik kesetimbangan $P_0 = (0,0)$. Jadi, titik kesetimbangan $P_0 = (0,0)$ bersifat stabil asimtotik global.

3.5.2 Simulasi numerik 2

Pada simulasi ini digunakan nilai parameter $c = 0.003$, F_1 meningkat 20% dan F_2 menurun 35%, yaitu $m_1 = 1.53$ dan $m_2 = 0.4789$. Nilai parameter tersebut memenuhi syarat eksistensi dan kestabilan lokal titik kesetimbangan $P_2 = (0, M) = (0, 0.4406)$, yaitu

$$m_1 = 1.53 > 1.5 = r(0) \text{ dan } m_2 = 0.4789 < 0.5 = s(0).$$

Namun, titik kesetimbangan $P_0 = (0,0)$ bersifat tidak stabil dan titik kesetimbangan $P_1 = (K, 0) = (-0.1961, 0)$ dan titik kesetimbangan $P_3 = (x^*, y^*) = (-0.2901, 0.4402)$ tidak eksis. Perilaku solusi dengan parameter-parameter pada simulasi 2 dapat dilihat pada Gambar 3.3.



Gambar 3.3 Potret fase sistem (3.1) untuk kestabilan lokal titik kesetimbangan $P_2 = (0, M) = (0, 0.4406)$.

Gambar 3.3 menunjukkan bahwa dengan nilai awal berapapun yang cukup dekat dengan solusi, solusi yang diperoleh menuju titik kesetimbangan $P_2 = (0, M) = (0, 0.4406)$. Jadi, titik kesetimbangan $P_2 = (0, M) = (0, 0.4406)$ bersifat stabil asimtotik.

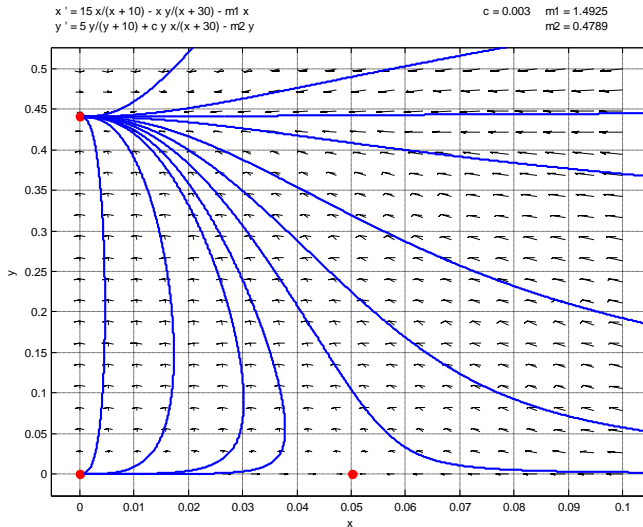
3.5.3 Simulasi numerik 3

Pada simulasi ini digunakan nilai parameter $c = 0.003$, F_1 meningkat 15% dan F_2 menurun 35%, yaitu $m_1 = 1.4925$ dan $m_2 = 0.4789$. Nilai parameter tersebut memenuhi syarat eksis titik kesetimbangan $P_1 = (K, 0) = (0.0503, 0)$ dan titik kesetimbangan $P_2 = (0, M) = (0, 0.4406)$ dan kestabilan lokal titik kesetimbangan $P_2 = (0, M)$ yaitu

$$m_2 < s(0) \text{ dan } r(0) - M\phi(0) < m_1 < r(0) \text{ atau} \\ 0.4789 < 0.5 \text{ dan } 1.4853 < 1.4925 < 1.5.$$

Namun, titik kesetimbangan $P_0 = (0, 0)$ bersifat tidak stabil dan titik kesetimbangan $P_3 = (x^*, y^*) = (-0.0478, 3.8101)$ tidak eksis.

Perilaku solusi dengan parameter-parameter pada simulasi 3 dapat dilihat pada Gambar 3.4.



Gambar 3.4 Potret fase sistem (3.1) untuk kestabilan lokal titik kesetimbangan $P_2 = (0, M) = (0, 0.4406)$.

Gambar 3.4 menunjukkan bahwa dengan nilai awal berapapun yang cukup dekat dengan solusi, solusi yang diperoleh menuju titik kesetimbangan $P_2 = (0, M) = (0, 0.4406)$. Jadi, titik kesetimbangan $P_2 = (0, M) = (0, 0.4406)$ bersifat stabil asimtotik.

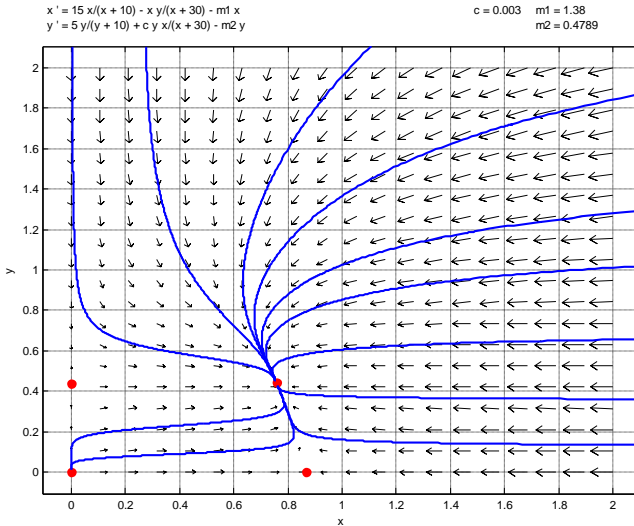
3.5.4 Simulasi numerik 4

Pada simulasi ini digunakan nilai parameter $c = 0.003$, F_1 tetap dan F_2 menurun 35% dari data awal, yaitu $m_1 = 1.38$ dan $m_2 = 0.4789$. Nilai parameter tersebut memenuhi syarat kestabilan lokal titik kesetimbangan $P_3 = (x^*, y^*) = (0.7575, 0.4422)$ yaitu

$$m_2 < s(0) \text{ dan } m_1 < r(0) - M\phi(0) \text{ atau } 0.4789 < 0.5 \text{ dan } 1.38 < 1.4853.$$

Namun, titik kesetimbangan $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (K, 0) = (0.8696, 0)$ dan $P_2 = (0, M) = (0, 0.4406)$ bersifat tidak stabil.

Perilaku solusi dengan parameter-parameter pada simulasi 4 dapat dilihat pada Gambar 3.5.



Gambar 3.5 Potret fase sistem (3.1) untuk kestabilan lokal titik kesetimbangan $P_3 = (x^*, y^*) = (0.7575, 0.4422)$.

Gambar 3.5 menunjukkan bahwa dengan nilai awal berapapun yang cukup dekat dengan solusi, solusi yang diperoleh menuju titik kesetimbangan $P_3 = (x^*, y^*) = (0.7575, 0.4422)$. Jadi, titik kesetimbangan $P_3 = (x^*, y^*) = (0.7575, 0.4422)$ bersifat stabil asimtotik.

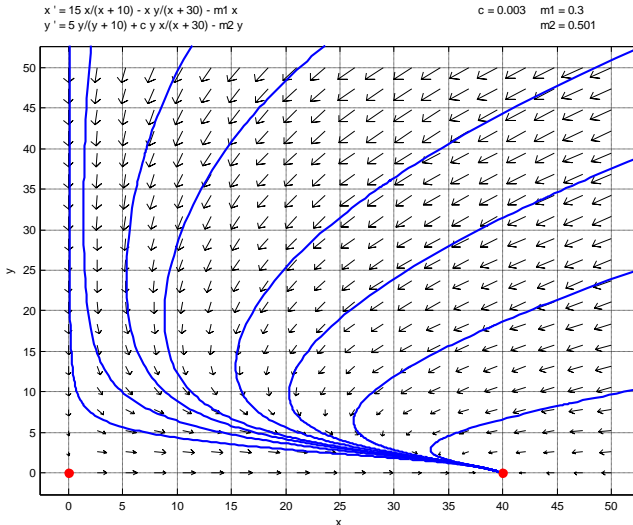
3.5.5 Simulasi numerik 5

Pada simulasi ini digunakan nilai parameter $c = 0.003$, $m_1 = 0.3$ dan F_2 menurun 29.60%, $m_2 = 0.501$. Nilai parameter tersebut memenuhi syarat kestabilan lokal titik kesetimbangan $P_3 = (x^*, y^*) = (39.9660, 0.0143)$, yaitu

$$m_1 < r(0) \text{ dan } s(0) < m_2 < s(0) + cK\phi(K) \text{ atau } 0.3 < 1.5 \text{ dan } 0.5 < 0.501 < 0.5017.$$

Namun, titik kesetimbangan $P_0 = (0,0)$, titik kesetimbangan $P_1 = (K, 0) = (40,0)$ bersifat tidak stabil dan titik kesetimbangan $P_2 = (0, M) = (0, -0.0199)$ tidak eksis.

Perilaku solusi dengan parameter-parameter pada simulasi 5 dapat dilihat pada Gambar 3.6.



Gambar 3.6 Potret fase sistem (3.1) untuk kestabilan lokal titik kesetimbangan $P_3 = (x^*, y^*) = (39.9660, 0.0143)$.

Gambar 3.6 menunjukkan bahwa dengan nilai awal berapapun yang cukup dekat dengan solusi, solusi yang diperoleh menuju titik kesetimbangan $P_3 = (x^*, y^*) = (39.9660, 0.0143)$. Jadi, titik kesetimbangan $P_3 = (x^*, y^*) = (39.9660, 0.0143)$ bersifat stabil asimtotik.

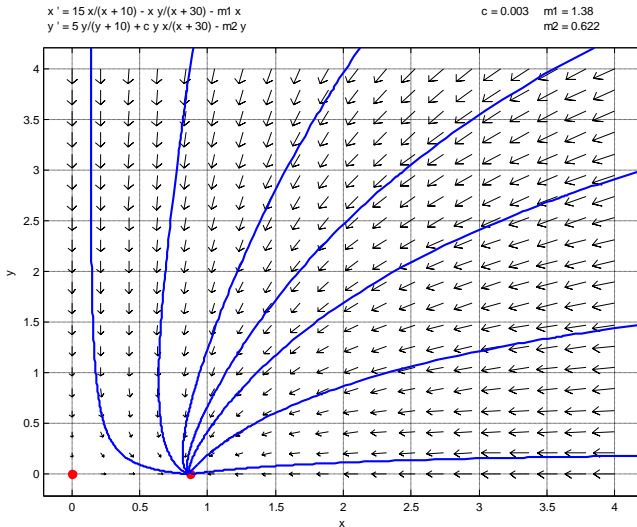
3.5.6 Simulasi numerik 6

Pada simulasi ini digunakan nilai parameter $c = 0.003$ dan data awal, yaitu $m_1 = 1.38$ dan $m_2 = 0.622$. Nilai parameter tersebut memenuhi syarat kestabilan lokal titik kesetimbangan $P_1 = (K, 0)$ yaitu

$$m_1 < r(0) \text{ dan } m_2 > s(0) + cK\phi(K) \text{ atau} \\ 1.38 < 1.5 \text{ dan } 0.622 > 0.5001.$$

Namun, titik kesetimbangan $P_0 = (0,0)$ bersifat tidak stabil dan titik kesetimbangan $P_2 = (0, M) = (0, -1.9614)$ dan titik kesetimbangan $P_3 = (x^*, y^*) = (1.3847, -1.9597)$ tidak eksis.

Perilaku solusi dengan parameter-parameter pada simulasi 6 dapat dilihat pada Gambar 3.7 .



Gambar 3.7 Potret fase sistem (3.1) untuk kestabilan lokal titik kesetimbangan $P_1 = (K, 0) = (0.8696, 0)$.

Gambar 3.7 menunjukkan bahwa dengan nilai awal berapapun yang cukup dekat dengan solusi, solusi yang diperoleh menuju titik kesetimbangan $P_1 = (K, 0) = (0.8696, 0)$. Jadi, titik kesetimbangan $P_1 = (K, 0) = (0.8696, 0)$ bersifat stabil asimtotik.

Berdasarkan uraian sebelumnya, diketahui bahwa titik kepunahan kedua populasi (P_0), titik kepunahan predator (P_1), titik kepunahan prey (P_2), dan titik interior (P_3) bersifat stabil asimtotik dengan syarat masing-masing. Artinya kepunahan populasi dengan kondisi yang demikian mungkin terjadi. Pada simulasi 6 nilai parameter yang digunakan adalah berdasarkan data nyata dan titik kepunahan predator (P_1) bersifat stabil asimtotik, artinya populasi predator dapat punah di waktu tertentu sehingga perlu mengurangi usaha pemanenan pada populasi ini. Pada simulasi 4 dan 5 nilai parameter usaha pemanenan predator dikurangi dan terlihat bahwa titik interior (P_3) bersifat stabil asimtotik, artinya terjadi koeksistensi atau populasi prey dan predator dapat hidup secara berdampingan. Kesimpulan dari uraian di atas adalah untuk menciptakan keseimbangan antara populasi prey dan predator dapat dilakukan dengan mengurangi usaha pemanenan pada populasi predator.