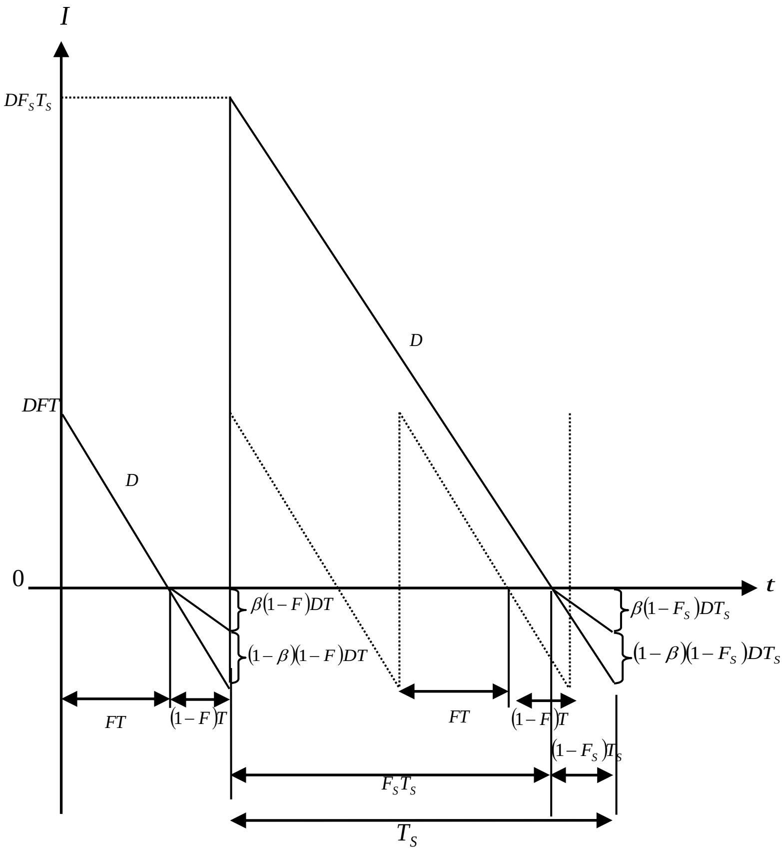
BAB IV
PEMBAHASAN

4.1 Mengidentifikasi dan Mengkonstruksi Model EOQ dengan *Backorder* Parsial dan *Special Sale Price*

Ada dua skenario yang dipertimbangkan dalam pembahasan ini. Terdapat masing-masing dua kemungkinan kasus yang terjadi untuk setiap skenario. Kasus yang pertama adalah memasukkan pesanan spesial hanya untuk satu kali dan yang kedua adalah melakukan pemesanan dengan ukuran normal.

4.1.1 Skenario 1: *Sale Price* Bertepatan dengan Waktu Normal Melakukan Pemesanan

Pada Skenario 1, pabrik atau *supplier* menawarkan pengurangan harga sementara yang tersedia bagi pembeli tepat pada akhir siklus persediaan yang sedang berlangsung. Skenario ini dijelaskan pada Gambar 4.1, di mana waktu penawaran pengurangan harga sementara tersebut ditunjukkan oleh T_S. Jika pembeli memutuskan untuk melakukan pemesanan spesial, maka dilakukan pemesanan dengan kuantitas DF_ST_S yang akan memenuhi permintaan selama F_ST_S dan $\beta(1-F)DT$ untuk memenuhi permintaan yang tidak dipenuhi pada siklus normal sebelumnya. Ketika persediaan tersebut habis, terjadi *stockouts* pada rentang waktu $(1-F_S)T_S$, yang meliputi *backorder* sejumlah $\beta(1-F_S)DT_S$ dan *lost sales* sejumlah $(1-\beta)(1-F_S)DT_S$. Jika pembeli memutuskan melakukan pemesanan dengan ukuran normal, maka akan terdapat pemesanan sebanyak $\left(\frac{T_S}{T^*}\right)$ kali selama T_S, di mana untuk pemesanan pertama pada panjang siklus tersebut mendapatkan harga spesial, yaitu C_S. Berdasarkan uraian di atas, pada bagian ini akan ditentukan total biaya dan fungsi keuntungan untuk masing-masing kasus dan selisih keuntungan antar keduanya (fungsi *extra profit*).



Gambar 4.1 Model EOQ dengan kemungkinan pemesanan ketika *sale price* tersedia pada waktu normal

4.1.1.1 Total biaya

Komponen total biaya persediaan pada model ini sama dengan komponen biaya persediaan model EOQ dengan *backorder* parsial, yaitu biaya pemesanan, biaya pembelian, biaya penyimpanan, biaya *backorder*, dan biaya *lost sales*.

- Kasus 1: Melakukan pemesanan spesial

Pada Gambar 4.1 ditunjukkan pemesanan dengan ukuran Q_S dimasukkan pada akhir siklus yang sedang berlangsung, yaitu T^*. Pada akhir siklus pemesanan spesial (T_S), model pada persediaan ini kembali lagi menjadi model EOQ biasa. Pada biaya pembelian terdapat pembelian sejumlah unit tambahan karena telah terjadi *stockout* sebelum pemesanan normal selanjutnya dilakukan. Hal ini dapat dilihat dari perpotongan antara panjang siklus yang terjadi *stockout* untuk pesanan normal ($(1-F^*)T^*$) dan untuk pesanan spesial ($(1-F_S)T$). Biaya pembelian ini dihargai C karena harga spesial hanya berlaku untuk satu kali pemesanan yang telah dilakukan pada awal T_S. Dengan demikian, didapatkan masing-masing komponen biaya persediaan selama T_S jika melakukan pemesanan spesial pada Skenario 1 sebagai berikut.

a. Biaya pemesanan $= A$.
b. Biaya pembelian $= C_S D\left[F_S T_S + \beta(1-F^*)T^*\right]$
   $+ \beta CD\left[(1-F_S)T_S - (1-F^*)T^*\right]$.
c. Biaya penyimpanan $= \dfrac{h_S D T_S^2 F_S^2}{2}$.
d. Biaya *backorder* $= \dfrac{\beta \pi D(1-F_S)^2 T_S^2}{2}$.
e. Biaya *lost sales* $= g(1-\beta)(1-F_S)DT_S$.

Berdasarkan komponen biaya di atas, didapatkan total biaya untuk kasus pesanan spesial dimasukkan pada Skenario 1 sebagai berikut.

$$CTC_1 = A + C_S D\left[F_S T_S + \beta(1-F^*)T^*\right] + \frac{h_S D T_S^2 F_S^2}{2} + \frac{\beta \pi D(1-F_S)^2 T_S^2}{2} + g(1-\beta)(1-F_S)DT_S + \beta CD\left[(1-F_S)T_S - (1-F^*)T^*\right] \quad (4.1)$$

- Kasus 2: Melakukan pemesanan dengan ukuran normal

Pada kasus ini, pembeli tidak akan melakukan pemesanan spesial dan akan kembali melakukan pemesanan dengan EOQ biasa. Karena tidak ada perubahan biaya pada pemesanan, *backorder*, dan *lost sales*, ketiga biaya tersebut dikalikan $\left(\dfrac{T_S}{T^*}\right)$. Sementara itu, harga beli akan berkurang menjadi hanya C_S untuk pemesanan pertama, dan untuk pemesanan berikutnya akan kembali dengan harga C, sehingga untuk pemesanan selanjutnya biaya pembelian dan penyimpanan akan dikalikan $\left(\frac{T_S}{T^*}-1\right)$.

Berdasarkan Gambar 4.1, didapatkan masing-masing komponen biaya persediaan selama T_S jika tidak melakukan pemesanan spesial pada Skenario 1 sebagai berikut.

a. Biaya pemesanan $=A\left(\frac{T_S}{T^*}\right)$.

b. Biaya pembelian $=C_S DT^*F^*+C_S\beta(1-F^*)DT^*$

$$+\left[CDF^*T^*+C\beta(1-F^*)DT^*\right]\left(\frac{T_S}{T^*}-1\right).$$

c. Biaya penyimpanan $=\frac{h_s DF^{*2}T^{*2}}{2}+\frac{hDF^{*2}T^{*2}}{2}\left(\frac{T_S}{T^*}-1\right)$.

d. Biaya *backorder* $=\frac{\beta\pi D(1-F^*)^2T^{*2}}{2}\left(\frac{T_S}{T^*}\right)$.

e. Biaya *lost sales* $=g(1-\beta)(1-F^*)DT^*\left(\frac{T_S}{T^*}\right)$.

Dengan demikian, didapatkan total biaya untuk kasus tidak melakukan pemesanan spesial pada Skenario 1 sebagai berikut.

$$\begin{aligned}CTC_2 &= A\left(\frac{T_S}{T^*}\right)+C_S DF^*T^*+C_S\beta(1-F^*)DT^*\\ &+\left[CDF^*T^*+C\beta(1-F^*)DT^*\right]\left(\frac{T_S}{T^*}-1\right)+\frac{h_s DF^{*2}T^{*2}}{2}\\ &+\frac{hDF^{*2}T^{*2}}{2}\left(\frac{T_S}{T^*}-1\right)+\left[\frac{\beta\pi D(1-F^*)^2T^{*2}}{2}+g(1-\beta)(1-F^*)DT^*\right]\left(\frac{T_S}{T^*}\right).\end{aligned} \tag{4.2}$$

4.1.1.2 Fungsi keuntungan

- Kasus 1: Melakukan pemesanan spesial

Jika pembeli memutuskan untuk melakukan pemesanan dengan kuantitas spesial, yaitu T_S, maka berdasarkan Gambar 4.1 total pendapatan untuk kasus ini adalah

$$CTR_1 = PDT_S\left[F_S+\beta(1-F_S)\right], \tag{4.3}$$

sehingga dengan menggunakan persamaan (4.1) dan persamaan (4.3) akan didapatkan fungsi keuntungan sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
CTP_S &= CTR_1 - CTC_1 \\
&= PDT_S\left[F_S + \beta(1-F_S)\right] - \left\{ A + C_S D\left[F_S T_S + \beta(1-F^*)T^*\right] + \frac{h_S D T_S^2 F_S^2}{2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\beta\pi D(1-F_S)^2 T_S^2}{2} + g(1-\beta)(1-F_S)DT_S + \beta CD\left[(1-F_S)T_S - (1-F^*)T^*\right] \right\}.
\end{aligned}
$$

Oleh karena $F + \beta(1-F) = 1-(1-\beta)(1-F)$ dan $\pi' = g + P - C$, persamaan di atas dapat disederhanakan dan didapatkan CTP_S untuk Skenario 1 sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
CTP_S &= (P-C)DT_S - \left\{ A + \frac{h_S D T_S^2 F_S^2}{2} + \frac{\beta\pi D(1-F_S)^2 T_S^2}{2} \right. \\
&\quad \left. + \pi'(1-\beta)(1-F_S)DT_S - \left[F_S T_S + \beta C'(1-F^*)T^*\right]C' D \right\}.
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

Rincian perhitungan untuk persamaan (4.4) dapat dilihat di Lampiran 1.

- Kasus 2: Melakukan pemesanan dengan ukuran normal

Jika pembeli memutuskan untuk tidak melakukan pemesanan dengan kuantitas spesial, maka berdasarkan Gambar 4.1 total pendapatan selama T_S dikalikan dengan $\left(\frac{T_S}{T^*}\right)$ sebagai berikut.

$$
CTR_2 = PD\left[F^* T^* + \beta(1-F^*)T^*\right]\left(\frac{T_S}{T^*}\right). \tag{4.6}
$$

Oleh karena itu, dengan menggunakan persamaan (4.2) dan (4.6) total keuntungan untuk rentang waktu T_S adalah.

$$
\begin{aligned}
CTP_n &= CTR_2 - CTC_2 \\
&= PD\left[F^* T^* + \beta(1-F^*)T^*\right]\left(\frac{T_S}{T^*}\right) - \left\{ A\left(\frac{T_S}{T^*}\right) + C_S DF^* T^* + C_S \beta(1-F^*)DT^* \right. \\
&\quad + \left[CDF^* T^* + C\beta(1-F^*)DT^*\right]\left(\frac{T_S}{T^*} - 1\right) + \frac{h_s DF^{*2} T^{*2}}{2} \\
&\quad \left. + \frac{hDF^{*2}T^{*2}}{2}\left(\frac{T_S}{T^*} - 1\right) + \left[\frac{\beta\pi D(1-F^*)^2 T^{*2}}{2} + g(1-\beta)(1-F^*)DT^*\right]\left(\frac{T_S}{T^*}\right) \right\}.
\end{aligned}
$$

Oleh karena $F+\beta(1-F)=1-(1-\beta)(1-F)$ dan $\pi'=g+P-C$, persamaan total keuntungan tersebut dapat disederhanakan dan didapatkan CTP_n untuk Skenario 1 sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
CTP_n = (P-C)DT_S - \Bigg\{ & A\left(\frac{T_S}{T^*}\right) + \frac{(h_S-h)DF^{*2}T^{*2}}{2} + \frac{(hDF^{*2}T^*)T_S}{2} \\
& + \frac{(\beta\pi D(1-F^*)^2T^*)T_S}{2} + \pi'(1-\beta)(1-F)DT_S \\
& - C'DT^*[F^*+\beta(1-F^*)]\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

Rincian perhitungan untuk persamaan (4.7) dapat dilihat di Lampiran 1.

4.1.1.3 Fungsi *extra profit*

Untuk mendapatkan ukuran optimal pada *special order*, ditentukan selisih keuntungan total antara kedua kasus di atas atau yang disebut fungsi *extra profit*, yaitu $CTP_S - CTP_n$, sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
G_1 &= CTP_S - CTP_n \\
&= \left[\frac{A}{T^*} + \frac{hDF^{*2}T^*}{2} + \frac{\beta\pi D(1-F^*)^2T^*}{2} - \pi'(1-\beta)F^*D\right]T_S \\
&\quad + [\pi'(1-\beta)D + C'D]F_ST_S - \left[\frac{D(h_s+\beta\pi)}{2}\right]F_S^2T_S^2 \\
&\quad + [\beta\pi D]F_ST_S^2 - \left[\frac{\beta\pi D}{2}\right]T_S^2 + \frac{(h_s-h)DF^{*2}T^{*2}}{2} + C'DT^* - A.
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

4.1.1.4 Kuantitas pesanan spesial dan maksimum *stockout*

Berdasarkan Gambar 4.1, dapat ditentukan kuantitas pesanan spesial dan *backorder* maksimum adalah sebagai berikut.

$$Q_S = D[F_ST_S + \beta(1-F^*)T^*], \tag{4.9}$$

$$b_S = (1-F_S)DT_S. \tag{4.10}$$

4.1.2 Skenario 2: *Sale Price* Tersedia Saat Tingkat Persediaan Positif

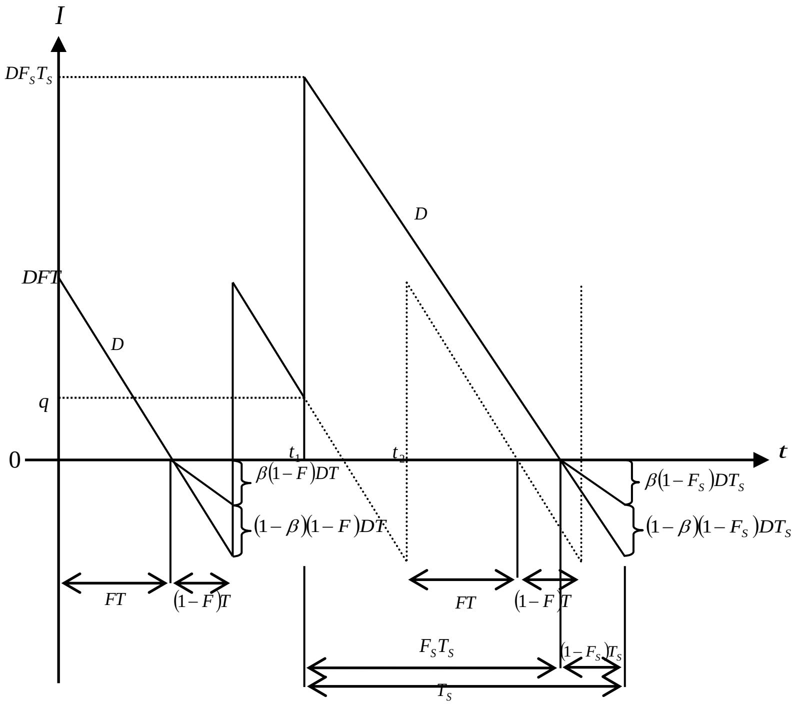
Pada skenario ini, waktu terakhir di mana sebuah pesanan dapat dimasukkan pada harga diskon adalah pada t_1, yaitu pada saat tingkat persediaan adalah $q > 0$. Skenario ini dijelaskan pada Gambar 4.2. Pada t_1 masih terdapat persediaan sebesar q unit yang memiliki panjang waktu $\frac{q}{D}$ dan ketika q habis akan terjadi *stockout* pada panjang waktu $(1-F)T$. Jika pembeli memutuskan untuk melakukan pemesanan spesial, maka dilakukan pemesanan dengan kuantitas $DF_S T_S - q$, di mana masih terdapat biaya penyimpanan dari persediaan sebelumnya dengan harga normal untuk q unit. Jika pembeli memutuskan melakukan pemesanan dengan ukuran normal, maka pemesanan dilakukan pada t_2 dengan panjang waktu $\left(\frac{T_S - (1-F^*)T^* - \frac{q}{D}}{T^*}\right)$. Berdasarkan uraian di atas, pada bagian ini akan ditentukan total biaya dan fungsi keuntungan untuk masing-masing kasus dan selisih keuntungan antar keduanya (fungsi *extra profit*).

4.1.2.1 Total biaya

Komponen total biaya persediaan pada model ini adalah biaya pemesanan, biaya pembelian, biaya penyimpanan, biaya *backorder*, dan biaya *lost sales*.

- Kasus 1: Melakukan pemesanan spesial

Berdasarkan kondisi yang digambarkan pada Gambar 4.2, masih terdapat persediaan sebesar q, sehingga pembeli hanya melakukan pembelian sebanyak $(DF_S T_S - q)$ unit yang mendapatkan harga spesial C_S. Pada biaya pembelian terdapat pembelian tambahan sejumlah unit karena telah terjadi *stockout* sebelum pemesanan normal selanjutnya dilakukan. Hal ini dapat dilihat dari perpotongan antara panjang siklus yang terjadi *stockout* untuk pesanan normal ($(1-F^*)T^*$) dan pesanan spesial ($(1-F_S)T$). Biaya pembelian ini dihargai C karena harga spesial hanya berlaku untuk satu kali pemesanan yang telah dilakukan pada awal T_S. Pada biaya penyimpanan masih terdapat biaya penyimpanan dari persediaan sebelumnya sebesar q dengan harga normal C.



Gambar 4.2 *Sale price* mulai dan berakhir selama tingkat persediaan pada siklus yang sedang berlangsung adalah positif.

Didapatkan masing-masing komponen biaya persediaan selama T_S jika melakukan pemesanan spesial pada Skenario 2 sebagai berikut.

a. Biaya pemesanan $= A$.
b. Biaya pembelian $= C_S\left(DF_S T_S - q\right) + \beta CD\left[\left(1-F_S\right)T_S - \left(1-F^*\right)T^*\right]$.
c. Biaya penyimpanan $= h_S\left(\dfrac{DT_S^2 F_S^2}{2} - \dfrac{q^2}{2D}\right) + \dfrac{hq^2}{2D}$.
d. Biaya *backorder* $= \dfrac{\beta\pi D\left(1-F_S\right)^2 T_S^2}{2}$.
e. Biaya *lost sales* $= g\left(1-\beta\right)\left(1-F_S\right)DT_S$.

Dengan demikian, berdasarkan komponen biaya di atas, didapatkan total biaya untuk kasus pesanan spesial dimasukkan pada Skenario 2 sebagai berikut.

$$\begin{aligned} CTC_1 &= A + C_S\left(DF_S T_S - q\right) + \frac{h_S DT_S^2 F_S^2}{2} + \frac{\left(h - h_S\right)q^2}{2D} \\ &+ \frac{\beta\pi D\left(1 - F_S\right)^2 T_S^2}{2} + g\left(1 - \beta\right)\left(1 - F_S\right)DT_S \\ &+ \beta CD\left[\left(1 - F_S\right)T_S - \left(1 - F^*\right)T^*\right]. \end{aligned} \tag{4.11}$$

- Kasus 2: Melakukan pemesanan dengan ukuran normal

Alternatif untuk memasukkan pesanan spesial pada t_1 adalah memasukkan pesanan normal pada t_2, yaitu waktu yang dijadwalkan berikutnya untuk melakukan pemesanan normal. Karena harga spesial tidak akan tersedia lagi, pesanan tersebut akan dihargai harga normal, C. Pada kasus ini tidak dilakukan pemesanan pada t_1, sehingga tidak terdapat biaya pemesanan dan pembelian sampai dilakukan pemesanan selanjutnya pada t_2. Untuk panjang waktu $\frac{q}{D}$ masih terdapat biaya penyimpanan sebanyak q unit, sedangkan untuk panjang waktu setelahnya, yaitu $\left(1 - F^*\right)T^*$, terdapat biaya *backorder* dan *lost* sales. Oleh karena itu, total biaya selanjutnya yang didapatkan dari pemesanan pada t_2 dikalikan $\left(\frac{T_S - \left(1 - F^*\right)T^* - \frac{q}{D}}{T^*}\right)$, sehingga didapatkan masing-masing komponen biaya persediaan selama T_S jika tidak melakukan pemesanan spesial pada Skenario 2 sebagai berikut.

a. Biaya pemesanan $= A\left(\frac{T_S - \left(1 - F^*\right)T^* - \frac{q}{D}}{T^*}\right)$.

b. Biaya pembelian $= CDT^*\left(F^* + \beta\left(1 - F^*\right)\right)\left(\frac{T_S - \left(1 - F^*\right)T^* - \frac{q}{D}}{T^*}\right)$.

c. Biaya penyimpanan $= \frac{hq^2}{2D} + \frac{hDF^{*2}T^{*2}}{2}\left(\frac{T_S - \left(1 - F^*\right)T^* - \frac{q}{D}}{T^*}\right)$.

d. Biaya *backorder* $= \dfrac{\beta\pi D\left(1-F^*\right)^2 T^{*2}}{2}$

$$+\frac{\beta\pi D\left(1-F^*\right)^2 T^{*2}}{2}\left(\frac{T_S-\left(1-F^*\right)T^*-\frac{q}{D}}{T^*}\right).$$

e. Biaya *lost sales* $= g(1-\beta)\left(1-F^*\right)DT^* +$

$$g(1-\beta)\left(1-F^*\right)DT^*\left(\frac{T_S-\left(1-F^*\right)T^*-\frac{q}{D}}{T^*}\right).$$

Dengan demikian, didapatkan total biaya untuk kasus tidak melakukan pemesanan spesial pada Skenario 2 sebagai berikut.

$$\begin{aligned}CTC_2 &= \left\{\frac{hq^2}{2D}+\frac{\beta\pi D\left(1-F^*\right)^2 T^{*2}}{2}+g(1-\beta)\left(1-F^*\right)DT^*\right\}\\ &+\left\{A+CDT^*\left(F^*+\beta\left(1-F^*\right)\right)+\frac{hDF^{*2}T^{*2}}{2}+\frac{\beta\pi D\left(1-F^*\right)^2 T^{*2}}{2}\right.\\ &\left.+\,g(1-\beta)\left(1-F^*\right)DT^*\right\}\times\left(\frac{T_S-\left(1-F^*\right)T^*-\frac{q}{D}}{T^*}\right).\end{aligned}$$

(4.12)

4.1.2.2 Fungsi keuntungan

- Kasus 1: Melakukan pemesanan spesial

Pada kasus ini dilakukan pemesanan dengan ukuran spesial, sehingga total pendapatan pada kasus ini sebagai berikut.

$$CTR_1 = PDT_S\left(F_S+\beta\left(1-F_S\right)\right). \qquad (4.13)$$

Jika pesanan spesial dimasukkan pada t_1, maka dari persamaan (4.11) dan (4.13) total keuntungan selama siklus T_S diberikan oleh:

$$\begin{aligned}CTP_S &= PDT_S\left(F_S+\beta\left(1-F_S\right)\right)-\left\{A+C_S\left(DF_ST_S-q\right)+\frac{h_S DT_S^2F_S^2}{2}\right.\\ &+\frac{\left(h-h_S\right)q^2}{2D}+\frac{\beta\pi D\left(1-F_S\right)^2T_S^2}{2}+g(1-\beta)\left(1-F_S\right)DT_S\\ &\left.-\,\beta CD\left[\left(1-F_S\right)T_S-\left(1-F^*\right)T^*\right]\right\}.\end{aligned}$$

Setelah dilakukan penyederhanaan secara aljabar, persamaan di atas menjadi

$$CTP_S = -\left\{ A - (\pi' + C')DT_S F_S - C_S q + \frac{h_S DT_S^2 F_S^2}{2} + \frac{(h - h_S)q^2}{2D} \right.$$

$$+ \frac{\beta\pi D(1-F_S)^2 T_S^2}{2} + (\pi' - P + C)DT_S - \pi'\beta(1-F_S)DT_S \qquad (4.14)$$

$$\left. - \beta CD(1-F^*)T^* \right\}.$$

Rincian perhitungan untuk persamaan (4.4) dapat dilihat di Lampiran 2.

- Kasus 2: Melakukan pemesanan dengan ukuran normal

Karena masih terdapat persediaan sejumlah q, pendapatan yang diperoleh pada t_1 adalah Pq, sehingga untuk pemesanan selanjutnya sejumlah ukuran normal yang dilakukan pada t_2 dikalikan $\left(\frac{T_S - (1-F^*)T^* - \frac{q}{D}}{T^*} \right)$. Dengan demikian, total pendapatan pada kasus ini adalah

$$CTR_2 = Pq + \left\{ PDT^*\left(F^* + \beta(1-F^*)\right) \times \left(\frac{T_S - (1-F^*)T^* - \frac{q}{D}}{T^*} \right) \right\}, \quad (4.15)$$

sehingga dari persamaan (4.11) dan (4.14) didapatkan fungsi keuntungan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
CTP_n &= CTR_2 - CTC_2 \\
&= Pq - \left\{ \frac{hq^2}{2D} + \frac{\beta\pi D(1-F^*)T^*}{2} + g(1-\beta)(1-F^*)DT^* \right\} \\
&\quad + \left[PDT^*\left(F^* + \beta(1-F^*)\right) - \left\{ A + CDT^*\left(F^* + \beta(1-F^*)\right) + \frac{hDF^{*2}T^{*2}}{2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\beta\pi D(1-F^*)^2 T^{*2}}{2} + g(1-\beta)(1-F^*)DT^* \right\} \right] \times \left(\frac{T_S - (1-F^*)T^* - \frac{q}{D}}{T^*} \right).
\end{aligned}$$

Setelah dilakukan penyederhanaan, didapatkan CTP_n untuk Skenario 2 sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
CTP_n = Pq - \left\{ \frac{hq^2}{2D} + \frac{\beta\pi D(1-F^*)T^*}{2} + g(1-\beta)(1-F^*)DT^* \right\} \\
+ \left[(P-C)DT_S - \left\{ A\left(\frac{T_S}{T^*}\right) + \frac{\left(hDF^{*2}T^*\right)T_S}{2} + \frac{\left(\beta\pi D(1-F^*)^2 T^*\right)T_S}{2} \right.\right. \\
\left.\left. + \pi'(1-\beta)(1-F^*)DT_S \right\} \right] \qquad (4.16) \\
- \left[(P-C)D - \left\{ \frac{A}{T^*} + \frac{hDF^{*2}T^*}{2} + \frac{\beta\pi D(1-F^*)^2 T^*}{2} \right.\right. \\
\left.\left. + \pi'(1-\beta)(1-F^*)D \right\} \right] \times \left((1-F^*)T^* + \tfrac{q}{D} \right).
\end{aligned}
$$

Rincian perhitungan untuk persamaan (4.4) dapat dilihat di Lampiran 2.

4.1.2.3 Fungsi *extra profit*

Untuk mendapatkan ukuran optimal pada *special order*, ditentukan selisih keuntungan total antara kedua kasus di atas atau *extra profit*, yaitu $CTP_S - CTP_n$, sebagai berikut. Didapatkan selisih keuntungan total antara kedua kasus pada Skenario 2 atau *extra profit* sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
G_2 = \left[\frac{A}{T^*} + \frac{hDF^{*2}T^*}{2} + \frac{\beta\pi D(1-F^*)^2 T^*}{2} - \pi'(1-\beta)F^* D \right] T_S \\
+ \left[\pi'(1-\beta)D + C'D \right] F_S T_S - \left[\frac{D(h_s + \beta\pi)}{2} \right] F_S^2 T_S^2 + [\beta\pi D] F_S T_S^2 \\
- \left[\frac{\beta\pi D}{2} \right] T_S^2 + \left(\left[(P-C)D - \left\{ \frac{A}{T^*} + \frac{hDF^{*2}T^*}{2} \right.\right.\right. \\
\left.\left. + \frac{\beta\pi D(1-F^*)^2 T^*}{2} + \pi'(1-\beta)(1-F^*)D \right\} \right] \left((1-F^*)T^* + \tfrac{q}{D} \right) \qquad (4.17) \\
+ C_S q - Pq + \left\{ \frac{\beta\pi D(1-F^*)^2 T^*}{2} + g(1-\beta)(1-F^*)DT^* \right\} \\
\left. + \frac{h_S q^2}{2D} + \beta CD(1-F^*)T^* - A \right).
\end{aligned}
$$

4.1.2.4 Kuantitas pesanan spesial dan maksimum *stockout*

Berdasarkan Gambar 4.2, karena pada saat penawaran harga spesial masih terdapat persediaan sejumlah q, dapat ditentukan kuantitas pesanan spesial dan *backorder* maksimum sebagai berikut.

$$Q_S = \left[DF_S T_S - q\right], \tag{4.18}$$

$$b_S = \left(1 - F_S\right)DT_S\,. \tag{4.19}$$

4.2 Menentukan Solusi Optimal

Untuk memastikan pemesanan dengan ukuran spesial selama periode T_S, CTP_S harus lebih besar dari CTP_n. Dengan kata lain nilai optimal G_1 dan G_2 harus positif untuk dapat memastikan dilakukannya pemesanan spesial pada periode T_S.

Persamaan G_1 dapat ditulis sebagai berikut

$$G_1 = \alpha_1 T_S + \alpha_2 F_S T_S - \alpha_3 F_S^2 T_S^2 + \alpha_4 F_S T_S^2 - \alpha_5 T_S^2 + \alpha_6^1 \tag{4.20}$$

dengan

$$\alpha_1 = \frac{A}{T^*} + \frac{hDF^{*2}T^*}{2} + \frac{\beta\pi D\left(1 - F^*\right)^2 T^*}{2} - \pi'\left(1 - \beta\right)F^* D\,, \tag{4.21}$$

$$\alpha_2 = \pi'\left(1 - \beta\right)D + C'D\,, \tag{4.22}$$

$$\alpha_3 = \frac{D\left(h_s + \beta\pi\right)}{2}\,, \tag{4.23}$$

$$\alpha_4 = \beta\pi D\,, \tag{4.24}$$

$$\alpha_5 = \frac{\beta\pi D}{2}\,, \tag{4.25}$$

$$\alpha_6^1 = \frac{\left(h_s - h\right)DF^{*2}T^{*2}}{2} + C'DT^* - A\,. \tag{4.26}$$

Nilai optimal, F_S^* dan T_S^*, diperoleh dengan melakukan penurunan parsial pertama fungsi G_1 terhadap masing-masing variabel F_S dan T_S sebagai berikut.

$$\frac{\partial G_1}{\partial F_S} = \alpha_2 T_S - 2\alpha_3 F_S T_S^2 + \alpha_4 T_S^2 = 0$$

$$Ts\left(2\alpha_3 T_S F_S - \alpha_4 T_S - \alpha_2\right) = 0$$

$T_S = 0$ atau $2\alpha_3 T_S F_S - \alpha_4 T_S - \alpha_2 = 0$.

Karena model ini mempertimbangkan siklus pada pemesanan spesial, kondisi yang harus dipenuhi agar mendapatkan solusi optimal adalah $T_S > 0$, sehingga didapatkan

$$2\alpha_3 T_S F_S - \alpha_4 T_S - \alpha_2 = 0$$
$$T_S\left(2\alpha_3 F_S - \alpha_4\right) - \alpha_2 = 0$$
$$T_S = \frac{\alpha_2}{2\alpha_3 F_S - \alpha_4}\ . \tag{4.27}$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial T_S} = \alpha_1 + \alpha_2 F_S - 2\alpha_3 F_S^2 T_S + 2\alpha_4 F_S T_S - 2\alpha_5 T_S = 0$$
$$T_S\left(-2\alpha_3 F_S^2 + 2\alpha_4 F_S - 2\alpha_5\right) + \alpha_1 + \alpha_2 F_S = 0$$
$$T_S = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 F_S}{\left(2\alpha_3 F_S^2 - 2\alpha_4 F_S + 2\alpha_5\right)}\,. \tag{4.28}$$

Dari persamaan (4.29) dan (4.30) didapatkan

$$\frac{\alpha_2}{2\alpha_3 F_S - \alpha_4} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 F_S}{\left(2\alpha_3 F_S^2 - 2\alpha_4 F_S + 2\alpha_5\right)}$$
$$2\alpha_2\alpha_3 F_S^2 - 2\alpha_2\alpha_4 F_S + 2\alpha_2\alpha_5 = 2\alpha_1\alpha_3 F_S - \alpha_1\alpha_4 + 2\alpha_2\alpha_3 F_S^2 - \alpha_2\alpha_4 F_S$$
$$\left(2\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4\right) F_S = \alpha_1\alpha_4 + 2\alpha_2\alpha_5$$
$$F_S = \frac{\alpha_1\alpha_4 + 2\alpha_2\alpha_5}{2\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4}.$$

Diketahui pada persamaan (4.25) dan (4.26) bahwa $\alpha_4 = 2\alpha_5$ sehingga

$$F_S = \frac{\alpha_1\alpha_5 + \alpha_2\alpha_5}{\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_5}\ . \tag{4.29}$$

Dengan memasukkan komponen $\alpha_i\left(i = 1,2,3,4,5\right)$ pada persamaan (4.29) dan persamaan (4.27), didapatkan nilai F_S dan T_S sebagai berikut.

$$F_S^* = \frac{\beta\pi\left[\left(\dfrac{2A}{DT^*} + hF^{*2}T^* + \beta\pi\left(1-F^*\right)^2 T^* - 2\pi'\left(1-\beta\right)F^*\right) + 2\left(\pi'\left(1-\beta\right) + C'\right)\right]}{\left(h_S + \beta\pi\right)\left(\dfrac{2A}{DT^*} + hF^{*2}T^* + \beta\pi\left(1-F^*\right)^2 T^* - 2\pi'\left(1-\beta\right)F^*\right) + 2\beta\pi\left(\pi'\left(1-\beta\right) + C'\right)}\ , \tag{4.30}$$

$$T_S^* = \frac{\pi'(1-\beta)+C'}{(h_S+\beta\pi)F_S^* - \beta\pi} \tag{4.31}$$

Selanjutnya akan ditentukan solusi optimal untuk G_2. Persamaan G_2 dapat ditulis sebagai berikut.

$$G_2 = \alpha_1 T_S + \alpha_2 F_S T_S - \alpha_3 F_S^2 T_S^2 + \alpha_4 F_S T_S^2 - \alpha_5 T_S^2 + \alpha_6^2 \ . \tag{4.32}$$

Dari persamaan (4.8) dan (4.17) dapat dilihat bahwa suku-suku fungsi *extra profit* Skenario 2 sama dengan fungsi *extra profit* Skenario 1 kecuali suku konstantanya, yaitu

$$\begin{aligned} \alpha_6^2 = \Bigg[&(P-C)D - \left\{ \frac{A}{T^*} + \frac{hDF^{*2}T^*}{2} + \frac{\beta\pi D(1-F^*)^2 T^*}{2} \right. \\ &\left. + \pi'(1-\beta)(1-F^*)D \right\} \Bigg] \left((1-F^*)T^* + \tfrac{q}{D} \right) + C_S q - Pq \\ &+ \left\{ \frac{\beta\pi D(1-F^*)^2 T^*}{2} + g(1-\beta)(1-F^*)DT^* \right\} + \frac{h_S q^2}{2D} \\ &+ \beta CD(1-F^*)T^* - A \end{aligned} \ . \tag{4.33}$$

Oleh karena itu, dengan cara yang sama didapatkan nilai F_S dan T_S yang sama untuk fungsi *extra profit* pada Skenario 2 atau G_2 karena hasil penurunan bergantung pada variabel, bukan konstantanya. Syarat solusi optimal dan konveksitas pada kedua skenario juga akan berlaku sama, sehingga pada subbab ini hanya akan ditunjukkan solusi optimal dengan fungsi *extra profit* Skenario 1.

4.2.1 Menentukan syarat kelayakan solusi

Pada model ini ditentukan keuntungan masing-masing kasus setiap skenario dalam panjang waktu T_S, sehingga T_S harus lebih besar dari nol. Selain itu, model ini mempertimbangkan *backorder* parsial, di mana *stockouts* diizinkan untuk dilakukan *backorder*, sehingga $F_S > 0$. Itu artinya jika $F_S = 1$, maka semua permintaan dipenuhi dari persediaan (tidak ada *stockouts)*. Dengan demikian kondisi lain yang harus dipenuhi adalah $0 < F_S \le 1$. Berikut ini akan ditentukan kondisi agar solusi yang didapatkan layak.

1) Kondisi di mana $0 < F_S \le 1$

a) $F_S \le 1$

$F_S = \dfrac{\alpha_1\alpha_5 + \alpha_2\alpha_5}{\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_5} \le 1$ jika hanya jika $\alpha_1\alpha_5 + \alpha_2\alpha_5 \le \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_5$

yang akan bernilai benar jika hanya jika $\alpha_1\alpha_5 \le \alpha_1\alpha_3$.

Dari persamaan (4.23) dan (4.25) didapatkan $\alpha_3 = \alpha_5 + \dfrac{h_S}{2}$,

sehingga

$$\alpha_1\alpha_5 \le \alpha_1\left(\alpha_5 + \frac{h_S}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1\alpha_5 \le \alpha_1\alpha_5 + \frac{h_S\alpha_1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 \le \frac{h_S\alpha_1}{2}$$

yang berarti kondisi di atas dipenuhi oleh $\alpha_1 \ge 0$.

Diketahui dari persamaan (2.8) dan (4.22)

$$\alpha_1 = \frac{A}{T^*} + \frac{hDF^{*2}T^*}{2} + \frac{\beta\pi D\left(1-F^*\right)^2 T^*}{2} - \pi'(1-\beta)F^*D$$
$$= ATC - \pi'(1-\beta)D$$

Pada persamaan (2.13) diketahui bahwa untuk EOQ dengan *backorder* parsial pada tingkat konstan berlaku $ATC = hDF^*T^*$, sehingga

$$hDF^*T^* - \pi'(1-\beta)D \ge 0$$

atau

$$hF^*T^* - \pi'(1-\beta) \ge 0 .$$

Dari persamaan (2.10) diketahui

$$F^* = \frac{(1-\beta)\pi' + \beta\pi T^*}{(h+\beta\pi)T^*}$$

$$F^*T^* = \frac{(1-\beta)\pi' + \beta\pi T^*}{(h+\beta\pi)}$$

sehingga

$$\frac{h\left((1-\beta)\pi' + \beta\pi T^*\right)}{(h+\beta\pi)} - \pi'(1-\beta) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{h(1-\beta)\pi'}{h+\beta\pi} - \pi'(1-\beta) + \frac{\beta h \pi T^*}{h+\beta\pi} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-\beta)\pi'(-\beta\pi)}{h+\beta\pi} + \frac{\beta h \pi T^*}{h+\beta\pi} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\beta)\pi'(-\beta\pi) + \beta h \pi T^* \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \beta\pi\left(hT^* - (1-\beta)\pi'\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow hT^* - (1-\beta)\pi' \geq 0$$

$$\Leftrightarrow hT^* \geq (1-\beta)\pi'$$

$$\Leftrightarrow \left(hT^*\right)^2 \geq \left((1-\beta)\pi'\right)^2.$$

Persamaan (2.11), T^*, disubstitusikan sehingga

$$h^2\left[\frac{2A}{hD}\left(\frac{h+\beta\pi}{\beta\pi}\right) - \frac{\left[(1-\beta)\pi'\right]^2}{\beta h \pi}\right] \geq \left[(1-\beta)\pi'\right]^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2Ah}{D}\left(\frac{h+\beta\pi}{\beta\pi}\right) - \frac{h\left[(1-\beta)\pi'\right]^2}{\beta\pi} \geq \left[(1-\beta)\pi'\right]^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2Ah}{D}\left(\frac{h+\beta\pi}{\beta\pi}\right) \geq \left[(1-\beta)\pi'\right]^2 + \frac{h\left[(1-\beta)\pi'\right]^2}{\beta\pi}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2Ah}{D}\left(\frac{h+\beta\pi}{\beta\pi}\right) \geq \left[(1-\beta)\pi'\right]^2\left(1+\frac{h}{\beta\pi}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2Ah}{D} \geq \left[(1-\beta)\pi'\right]^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{2Ah}{D}} \geq (1-\beta)\pi'$$

$$\Leftrightarrow (1-\beta) \leq \frac{\sqrt{2AhD}}{\pi' D}$$

$$\Leftrightarrow \beta \geq 1 - \frac{\sqrt{2AhD}}{\pi' D} = \beta_1 \ . \qquad (4.34)$$

Dengan demikian $F_S \leq 1$ hanya jika $\beta \geq \beta_1$, di mana kondisi ini sama dengan kondisi β yang diperoleh oleh Pentico dan Drake (2009) sebagai nilai minimum di mana *backorder* parsial pada harga normal adalah optimal.

b) $F_S > 0$

Untuk kondisi yang kedua, F_S harus positif. Dengan demikian, masing-masing penyebut dan pembilang pada persamaan F_S harus positif atau negatif.

Yang pertama akan ditunjukkan kedua penyebut dan pembilang positif. Akan ditentukan kondisi di mana penyebut, yaitu $(\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_5$ adalah positif. Diketahui bahwa persamaan α_5 selalu positif, sehingga harus ditentukan kondisi ketika $\alpha_1 + \alpha_2$ bernilai positif.

Dari persamaan (4.21) dan (4.22) didapatkan sebagai berikut

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 &= \frac{A}{T^*} + \frac{hDF^{*2}T^*}{2} + \frac{\beta\pi D(1-F^*)^2 T^*}{2} - \pi'(1-\beta)F^*D \\ &\quad + \pi'(1-\beta)D + C'D \\ &= ATC + C'D.\end{aligned}$$

Dengan demikian, $\alpha_1 + \alpha_2$ selalu positif.

Selanjutnya akan ditunjukkan kondisi di mana pembilang dari F_S juga positif, sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_5 &= \frac{D(h_S + \beta\pi)}{2}\alpha_1 + \frac{\beta\pi D}{2}\left(\pi'(1-\beta)D + C'D\right) \\ &= \frac{\beta\pi D}{2}\alpha_1 + \frac{Dh_S}{2}\alpha_1 + \frac{\beta\pi D}{2}\left(\pi'(1-\beta)D + C'D\right) \\ &= \frac{\beta\pi D}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{Dh_S}{2}\alpha_1\end{aligned}$$

Seperti kondisi untuk penyebut yang telah ditunjukkan sebelumnya, diketahui bahwa $\alpha_1 + \alpha_2 = ATC + C'D$ dan $\alpha_1 = ATC - \pi'(1-\beta)D$, sehingga

$$\begin{aligned}\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_5 &= \frac{\beta\pi D}{2}(ATC + C'D) + \frac{Dh_S}{2}\left(ATC - \pi'(1-\beta)D\right) \\ &= \left(\frac{\beta\pi D}{2} + \frac{Dh_S}{2}\right)ATC + \frac{\beta\pi C'D^2}{2} - \frac{h_S\pi'(1-\beta)D^2}{2}\end{aligned}$$

Telah diketahui $ATC = hDF^*T^*$, maka

$$\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_5=\left(\frac{\beta\pi D}{2}+\frac{Dh_S}{2}\right)hDF^*T^*+\frac{\beta\pi C'D^2}{2}-\frac{h_S\pi'(1-\beta)D^2}{2}$$
$$=\frac{\beta h\pi D^2F^*T^*}{2}+\frac{h_ShD^2F^*T^*}{2}+\frac{\beta\pi C'D^2}{2}-\frac{h_S\pi'(1-\beta)D^2}{2}$$

Dari persamaan di atas didapatkan

$$\beta\pi hF^*T^*+h_ShF^*T^*+\beta\pi C'-h_S\pi'(1-\beta)>0$$
$$\beta\pi hF^*T^*+(h-iC')hF^*T^*+\beta\pi C'-(h-iC')\pi'(1-\beta)>0$$
$$\beta\pi hF^*T^*+h^2F^*T^*-iC'hF^*T^*+\beta\pi C'-h\pi'(1-\beta)+iC'\pi'(1-\beta)>0$$
$$C'\left[\beta\pi-ihF^*T^*+i\pi'(1-\beta)\right]+\beta\pi hF^*T^*+h^2F^*T^*-h\pi'(1-\beta)>0$$
$$C'>\frac{h[(1-\beta)\pi'-(\beta\pi+h)F^*T^*]}{[\beta\pi-ihF^*T^*+i\pi'(1-\beta)]}=C_1 . \qquad (4.35)$$

Dengan demikian, $F_S>0$ hanya jika $C'>C_1$.

Selanjutnya, ditunjukkan kedua penyebut dan pembilang negatif . Telah ditunjukkan bahwa penyebut selalu positif dan pembilang juga positif hanya jika $C'>C_1$. Oleh sebab itu, tidak mungkin kedua penyebut dan pembilang bernilai negatif.

Dengan demikian, disimpulkan bahwa $0<F_S\le 1$ hanya jika $\beta\ge\beta_1$ dan $C'>C_1$.

2) Kondisi di mana $T_S>0$

Akan ditunjukkan bahwa $T_S>0$, yaitu $\frac{\alpha_2}{2\alpha_3F_S-\alpha_4}>0$.

Berdasarkan definisinya, diketahui bahwa $\alpha_2>0$, sehingga

$$2\alpha_3F_S-\alpha_4>0$$
$$F_S>\frac{\alpha_4}{2\alpha_3}.$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.23) ke dalam ketidaksamaan di atas, akan ditunjukkan sebagai berikut

$$\frac{\alpha_1\alpha_5+\alpha_2\alpha_5}{\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_5}>\frac{\alpha_4}{2\alpha_3}.$$

Karena $\alpha_4=2\alpha_5$, didapatkan

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_5} > \frac{1}{\alpha_3}.$$

Telah ditunjukkan bahwa $\alpha_1 + \alpha_2$ selalu positif. Berdasarkan definisinya, α_3 juga positif. Jika $\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_5$ positif, maka langsung ditunjukkan bahwa ketidaksamaan berlaku.

$$\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 > \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_5$$
$$\alpha_2\alpha_3 > \alpha_2\alpha_5$$
$$\alpha_3 > \alpha_5$$

Berdasarkan persamaan α_3 dan α_5, ketidaksamaan ini bernilai benar. Dengan demikian, jika $\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_5$ positif, T_S positif. Jika $\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_5$ bernilai negatif, maka perkalian silang tersebut membalik arah ketidaksamaan dan menghasilkan $\alpha_3 < \alpha_5$ di mana berdasarkan definisinya adalah tidak mungkin.

Telah ditunjukkan bahwa $\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_5$ positif hanya jika $C' > C_1$. Dengan demikian, kondisi yang harus dipenuhi agar $T_S > 0$ sama dengan kondisi untuk $F_S > 0$, yaitu $C' > C_1$.

4.2.2 Uji konveksitas

Tujuan dilakukan uji konveksitas adalah untuk menjamin solusi yang diperoleh adalah optimal. Secara analitis, apabila sebuah fungsi berbentuk konvek maka mempunyai nilai minimum. Sebaliknya jika fungsi tersebut berupa konkaf, maka fungsi tersebut mempunyai nilai maksimum. Pembahasan pada skripsi ini adalah memaksimalkan fungsi G_1, sehingga harus dibuktikan bahwa fungsi tersebut *strictly concave* (konkaf sempurna).

Dari persamaan fungsi *extra profit* (4.20) dilakukan turunan parsial pertama dan kedua sebagai berikut.

$$\frac{\partial G_1}{\partial F_S} = \alpha_2 T_S - 2\alpha_3 F_S T_S^2 + \alpha_4 T_S^2$$

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial F_S^2} = -2\alpha_3 T_S^2$$

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial F_S \partial T_S} = \alpha_2 - 4\alpha_3 F_S T_S + 2\alpha_4 T_S$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial T_S} = \alpha_1 + \alpha_2 F_S - 2\alpha_3 F_S^2 T_S + 2\alpha_4 F_S T_S - 2\alpha_5 T_S$$

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial T_S^2} = -2\alpha_3 F_S^2 + 2\alpha_4 F_S - 2\alpha_5$$

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial T_S \partial F_S} = \alpha_2 - 4\alpha_3 F_S T_S + 2\alpha_4 T_S$$

Menggunakan matriks Hessian didapatkan

$$\lambda = \begin{bmatrix} T_S & F_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 G_1}{\partial T_S^2} & \dfrac{\partial^2 G_1}{\partial T_S \partial F_S} \\ \dfrac{\partial^2 G_1}{\partial F_S \partial T_S} & \dfrac{\partial^2 G_1}{\partial F_S^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_S \\ F_S \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} T_S & F_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2\alpha_3 F_S^2 + 2\alpha_4 F_S - 2\alpha_5 & \alpha_2 - 4\alpha_3 F_S T_S + 2\alpha_4 T_S \\ \alpha_2 - 4\alpha_3 F_S T_S + 2\alpha_4 T_S & -2\alpha_3 T_S^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_S \\ F_S \end{bmatrix}$$

$$= \Big[-6\alpha_3 F_S^2 T_S^2 + 4\alpha_4 F_S T_S^2 - 2\alpha_5 T_S^2 + \alpha_2 F_S T_S$$
$$+ \left(-6\alpha_3 F_S^2 T_S^2 + 2\alpha_4 F_S T_S^2 + \alpha_2 F_S T_S \right) \Big]$$

$$= -12\alpha_3 F_S^2 T_S^2 + 6\alpha_4 F_S T_S^2 + 2\alpha_2 F_S T_S - 2\alpha_5 T_S^2$$

$$\lambda = 2T_S \left(-6\alpha_3 F_S^2 T_S + 3\alpha_4 F_S T_S + \alpha_2 F_S - \alpha_5 T_S \right) \tag{4.36}$$

Akan ditunjukkan bahwa λ adalah negatif. Dengan mensubstitusikan persamaan (4.27) pada persamaan (4.36), didapatkan

$$\lambda = 2T_S \left(-6\alpha_3 F_S^2 \left(\frac{\alpha_2}{2\alpha_3 F_S - \alpha_4} \right) + \left(3\alpha_4 F_S - \alpha_5 \right) \left(\frac{\alpha_2}{2\alpha_3 F_S - \alpha_4} \right) + \alpha_2 F_S \right)$$

$$= 2T_S \left(\frac{3\alpha_2\alpha_4 F_S - \alpha_2\alpha_5 - 6\alpha_2\alpha_3 F_S^2 + 2\alpha_2\alpha_3 F_S^2 - \alpha_2\alpha_4 F_S}{2\alpha_3 F_S - \alpha_4} \right)$$

$$= 2T_S \left(\frac{2\alpha_2\alpha_4 F_S - \alpha_2\alpha_5 - 4\alpha_2\alpha_3 F_S^2}{2\alpha_3 F_S - \alpha_4} \right)$$

$$
\begin{aligned}
\lambda &= 2T_S\left(\frac{(-2\alpha_2F_S)(2\alpha_3F_S-\alpha_4)-\alpha_2\alpha_5}{2\alpha_3F_S-\alpha_4}\right)\\
&=-2T_S\left(2\alpha_2F_S+\left(\frac{\alpha_2}{2\alpha_3F_S-\alpha_4}\right)\alpha_5\right)\\
&=-2T_S\left(2\alpha_2F_S+T_S\alpha_5\right).
\end{aligned}
$$

Dikarenakan nilai T_S dan F_S adalah non-negatif, jelas bahwa λ bernilai non-positif. Contoh kasus, jika dari data yang digunakan pada Contoh Kasus 2 didapatkan nilai T_S = 2.3014, F_S = 0.8608, α_2 = 800, dan α_5 = 50, kemudian disubstitusikan pada persamaan λ di atas, maka diperoleh hasil sebesar -6,868.988. Dengan demikian, telah terbukti bahwa fungsi *extra profit* G_i adalah konkaf.

4.3 Perhitungan Numerik

Untuk mengilustrasikan aplikasi dari model EOQ dengan *backorder* parsial dan *special sale price,* digunakan contoh numerik dari Taleizadeh dkk. (2012), dengan tambahan beberapa parameter baru yang digunakan dalam model ini.

Tabel 4.1 Data persediaan per tahun

No.	Parameter	Keterangan	Nilai
1	D	Kuantitas permintaan	200
2	A	Biaya pemesanan	\$50/order
3	h	Biaya penyimpanan	\$3/unit
4	π	Biaya *backorder*	\$1/unit
5	π'	Biaya *lost sales*	\$2/unit lost
6	C	Harga beli	\$10/unit
7	C'	Potongan harga beli	\$3/unit
8	P	Harga jual	\$11/unit
9	i	Nilai barang dalam persentase	0.3

Berikut merupakan tiga contoh berdasarkan nilai parameternya.

4.3.1 Contoh kasus tanpa *backorder* parsial dengan $\beta = 0.3$

Dari data pada Tabel 4.1, akan ditentukan jumlah *extra profit* (G_i), jumlah pemesanan optimal untuk pemesanan spesial (Q_S^*), dan jumlah kekurangan persediaan maksimum yang optimal untuk pemesanan spesial (b_S^*). Pada Lampiran 1 ditunjukkan program MATLAB untuk mempermudah perhitungan.

Langkah awal adalah menentukan nilai kritis dari β menggunakan persamaan (4.36) yang merupakan syarat di mana $F_S \leq 1$, sekaligus nilai minimum *backorder* parsial adalah optimal, sebagai berikut.

$$\beta_1 = 0.3876$$

Karena $\beta < \beta_1$, artinya tidak diizinkan adanya kekurangan persediaan ($b_S^* = 0$) dan semua permintaan akan dipenuhi dari persediaan yang ada ($F_S^* = 1$). Oleh karena itu, selanjutnya dapat ditentukan jumlah pemesanan yang optimal (Q_S^*) menggunakan EOQ biasa dengan panjang siklus pesanan spesial pada persamaan (2.4), sebagai berikut.

$$T_S^* = 2.0118$$

$$\begin{aligned} Q_S &= DT_S^* \\ &= 200(2.0118) \\ &= 402.36 \end{aligned}$$

Didapatkan T model EOQ dasar, di mana akan tepat didapatkan jika $F = 1$, menggunakan persamaan (2.9), yaitu.

$$T^* = 0.4082\ ,$$

sehingga dapat ditentukan *extra profit* atau biaya yang dapat dihemat menggunakan selisih persamaan (2.2) dan (2.3) di mana $h_S = 2.1$, sebagai berikut.

$$G = 539.99\ .$$

Jadi, didapatkan *extra profit* yang optimal sebesar \$539.99, sehingga pesanan spesial harus dimasukkan dengan jumlah pemesanan optimal sejumlah 402 unit tanpa mengizinkan adanya *stockout*.

4.3.2 Contoh kasus Skenario 1 dengan $\beta = 0.5$

Dari data pada Tabel 4.1, akan ditentukan jumlah *extra profit* (G_i), jumlah pemesanan optimal untuk pemesanan spesial (Q_S^*), dan jumlah kekurangan persediaan maksimum yang optimal untuk pemesanan spesial (b_S^*). Pada Lampiran 1 ditunjukkan program MATLAB untuk mempermudah perhitungan.

Langkah awal adalah menentukan nilai kritis dari β menggunakan persamaan (4.34) yang merupakan syarat di mana $F_S \le 1$, sekaligus nilai minimum *backorder* parsial adalah optimal, sebagai berikut.

$$\beta_1 = 0.3876$$

Karena $\beta \ge \beta_1$, artinya diizinkan adanya *stockout*, sehingga selanjutnya dapat ditentukan panjang siklus pesanan (T) dan tingkat permintaan yang dipenuhi dari persediaan (F) untuk *backorder* parsial yang optimal menggunakan persamaan (2.10) dan (2.11), yaitu.

$$T^* = 0.7071 \;,$$

$$F^* = 0.5469 \;.$$

Kondisi berikutnya yang harus dipenuhi adalah $C' > C_1$ yang merupakan syarat agar $T_S > 0$ dan $F_S > 0$. Diperoleh nilai C_1 menggunakan persamaan (4.35) sebagai berikut.

$$C_1 = -2.3469 \;.$$

Karena potongan harga beli yang diketahui lebih besar dari C_1, dapat ditentukan nilai T_S dan F_S yang optimal menggunakan persamaan (4.30) dan (4.31), yaitu.

$$F_S^* = 0.8608 \;,$$

$$T_S^* = 2.3014 \;.$$

Pada contoh ini dianggap bahwa $q = 0$ yang artinya persediaan tepat habis saat pesanan spesial dimasukkan, sehingga diperoleh Q_S dan b_S untuk Skenario 1 menggunakan persamaan (4.9) dan (4.10) sebesar

$$Q_S^* = 428.2462 \;,$$

$$b_S^* = 64.0754 \;.$$

Untuk memperoleh *extra profit* atau biaya yang dapat dihemat yang optimal untuk Skenario 1, nilai T dan F serta nilai T_S dan F_S yang optimal disubstitusikan ke dalam persamaan (4.8), sehingga diperoleh

$$G_1 = 533.7849 \ .$$

Jadi, didapatkan *extra profit* yang optimal sebesar \$533.7849, sehingga pesanan spesial harus dimasukkan dengan jumlah pemesanan sejumlah 428 unit dengan maksimum kekurangan persediaan sejumlah 64 unit.

4.3.3 Contoh kasus Skenario 2 dengan $\beta = 0.5$ dan $q = 50$

Pada contoh ini, nilai β yang digunakan sama dengan Contoh kasus Skenario 1, sehingga diperoleh nilai T dan F serta nilai T_S dan F_S optimal yang sama. Hal yang berbeda dari Contoh 2 adalah diketahui bahwa $q = 50$, artinya masih terdapat 50 unit persediaan saat pesanan spesial dimasukkan. Oleh karena itu, untuk memperoleh masing-masing nilai Q_S, b_S, dan *extra profit*, nilai T dan F serta nilai T_S dan F_S yang optimal disubstitusikan ke dalam persamaan (4.17), (4.18), dan (4.19) pada Skenario 2, sehingga diperoleh

$$Q_S = 346.2084 \ ,$$

$$b_S = 64.0754 \ ,$$

$$G_2 = 931.6815 \ .$$

Jadi, didapatkan *extra profit* yang optimal sebesar \$931.6815, sehingga pesanan spesial harus dimasukkan dengan jumlah pemesanan sejumlah 346 unit dengan maksimum kekurangan persediaan sejumlah 64 unit.

4.3.4 Interpretasi perhitungan numerik

Berdasarkan hasil perhitungan numerik ketiga kasus yang diberikan, didapatkan bahwa total biaya yang dihemat (fungsi *extra profit*) dengan melakukan pemesanan sebesar Q_S positif, sehingga dapat diputuskan untuk melakukan pemesanan dengan harga spesial. Untuk kasus pertama, peluang *shortage* yang *backorder* tidak memenuhi syarat kelayakan solusi, sehingga tidak dilakukan *backorder* parsial dan digunakan model EOQ biasa dengan kuantitas pesanan sejumlah 402 unit. Dari kasus kedua dan ketiga, dengan nilai β yang sama didapatkan fungsi *extra profit* untuk kasus ketiga jauh lebih besar dari kasus kedua. Hal ini dikarenakan untuk kasus ketiga masih terdapat persediaan sejumlah q, sehingga hanya dilakukan pemesanan tambahan sebesar $DF_S T_S - q$, tetapi penjualan yang dilakukan adalah untuk seluruh persediaan yang ada termasuk q. Dengan demikian, Skenario 2 merupakan kondisi yang paling menguntungkan bagi pembeli untuk melakukan pemesanan pada penawaran spesial yang diberikan oleh penyalur.