BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada Bab II ini berisi definisi beserta contoh, teorema dan akibat yang menjadi dasar teori yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan pada Bab III.

2.1 Hasil kali Cartesian dan Relasi

Berikut diberikan definisi mengenai hasil kali Cartesian dan relasi berdasarkan Bhattacharya, dkk., 1995.

Definisi 2.1.1 (Hasil kali Cartesian)
Misalkan A dan B adalah himpunan tak kosong. Himpunan semua pasangan terurut (a,b) dimana $a \in A$ dan $b \in B$ merupakan hasil kali Cartesian dari himpunan A dan B yang dinotasikan sebagai berikut.

$$A \times B = \{(a,b) | a \in A, b \in B\}.$$

Definisi 2.1.2 (Relasi)
Misalkan A dan B adalah himpunan tak kosong. jika R adalah himpunan bagian $A \times B$, maka R merupakan relasi dari A ke B.

2.2 Pemetaan, Operasi Biner dan Struktur Aljabar

Berikut diberikan definisi dan contoh mengenai pemetaan, pemetaan injektif, surjektif, bijektif dan operasi biner berdasarkan Lang, 1987 dan Bhattacharya, dkk., 1995.

Definisi 2.2.1 (Pemetaan)
Misalkan A dan B adalah himpunan tak kosong. Pemetaan dari A ke B adalah suatu relasi yang menghubungkan setiap elemen x di A dengan tunggal ke suatu elemen y di B. Pemetaan f dari A ke B dapat dituliskan dalam notasi sebagai berikut :

$$\begin{aligned} f: A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto f(x) = y \end{aligned}$$

Contoh 2.2.2
Diketahui himpunan $A = \{0,1,2,3,4\}$ dan $B = \{0,2,3,4,5,6,7,8\}$. Didefinisikan suatu relasi

$$f: A \longrightarrow B$$
$$x \longmapsto f(x) = 2x.$$

Akan dibuktikan f merupakan pemetaan.

Bukti :
Karena suatu relasi didefinisikan $f(x) = 2x$, sehingga diperoleh $f = \{(0,0), (1,2), (2,4), (3,6), (4,8)\}$. Hal ini menunjukan bahwa untuk setiap x di A tepat memiliki satu pasangan elemen y di B. Jadi, terbukti bahwa f merupakan pemetaan. ■

Definisi 2.2.3 (Pemetaan Injektif, Surjektif dan Bijektif)
Misalkan pemetaan $f: A \longrightarrow B$.

(i) Pemetaan f disebut injektif (into), jika $f(x_1) = f(x_2)$ maka $x_1 = x_2$, untuk setiap $x_1, x_2 \in A$.
(ii) Pemetaan f disebut surjektif (onto), jika untuk setiap $y \in B$, terdapat $x \in A$ sehingga $f(x) = y$.
(iii) Pemetaan f disebut bijektif (korespondensi $1 - 1$) jika f merupakan pemetaan yang injektif dan surjektif.

Contoh 2.2.4
Diberikan $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan real dan diidefinisikan suatu pemetaan

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = x - 20$$

sehingga f merupakan pemetaan bijektif.

Bukti
Ambil sembarang $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, sedemikian sehingga berlaku:

(i) $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 - 20 = x_2 - 20$
$\Longrightarrow x_1 = x_2.$
Jadi, untuk setiap $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ jika $f(x_1) = f(x_2)$ maka $x_1 = x_2$ sehingga f adalah pemetaan injektif.
(ii) Misalkan y adalah sembarang elemen di $\mathbb{R}$. Dikerenakan $y = f(x) = x - 20$, sehingga terdapat $x \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $x = y + 20 \in \mathbb{R}$. Jadi, untuk setiap $y \in \mathbb{R}$ terdapat

$x \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $f(x) = y$. Oleh sebab itu f adalah pemetaan yang surjektif.

Karena f injektif dan juga f surjektif maka f merupakan pemetaan yang bijektif. ■

Definisi 2.2.5 (Operasi Biner)
Misalkan S adalah himpunan tidak kosong. Operasi biner $*$ adalah suatu pemetaan dari $S \times S$ ke S.yang dinotasikan sebagai berikut.

$$* : S \times S \longrightarrow S$$
$$(a, b) \longmapsto * (a, b) = a * b.$$

Contoh 2.2.6
Diberikan himpunan $\mathbb{Z}$ dengan operasi perjumlahan $(+)$. Operasi penjumlahan $(+)$ adalah operasi biner pada $\mathbb{Z}$.

Bukti
Operasi penjumlahan $(+)$ adalah suatu operasi biner pada $\mathbb{Z}$ yang dapat dinyatakan dalam notasi

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$(a, b) \mapsto +(a, b) = a + b.$$

Artinya untuk setiap $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ maka $a + b \in \mathbb{Z}$. Jadi, terbukti bahwa operasi penjumlahan $(+)$ pada $\mathbb{Z}$ adalah operasi biner. ■

Definisi 2.2.7 (Struktur aljabar)
Misalkan H adalah himpunan tidak kosong. H disebut struktur aljabar jika dilengkapi dengan satu operasi biner atau lebih.

2.3 Matriks

Berikut ini akan diberikan definisi dan lemma dari matriks berdasarkan Anton dan Rorres, 2004 dan Grossman, Stanley I, 1994.

Definisi 2.3.1 (Matriks)
Matriks adalah susunan bilangan yang berbentuk persegi panjang. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut disebut entri dari matriks. Ukuran matriks dinyatakan dengan $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$, dimana $\boldsymbol{m}$ menunjukan banyaknya baris dan $\boldsymbol{n}$ menunjukan banyaknya kolom. Entri yang terletak pada baris $\boldsymbol{i}$ dan kolom $\boldsymbol{j}$ di dalam matriks dinyatakan

sebagai a_{ij}. Bentuk umum dari matriks yang berukuran $m \times n$ adalah

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.3.2 (Kesetaraan Matriks)
Dua buah matriks dikatakan setara (*equal*) jika keduanya memiliki ukuran yang sama dan entri-entri yang bersesuaian adalah sama. Secara matematis dapat ditulis, Jika $A = B$ maka $a_{ij} = b_{ij}$ untuk semua i dan j.

Definisi 2.3.3 (Penjumlahan dan Pengurangan Matriks)
Misalkan A dan B masing-masing adalah matriks yang berukuran sama, penjumlahan matriks $A + B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan entri-entri A dan B yang bersesuaian. Secara matematis dapat ditulis, Jika $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ memiliki ukuran yang sama, maka

$$\begin{aligned} A + B &= [a_{ij}] + [b_{ij}] \\ &= [a + b]_{ij} \end{aligned}$$

dengan $a + b = a_{ij} + b_{ij}$.
Dengan cara yang sama berlaku untuk pengurangan matriks.

Lemma 2.3.4
Misalkan A dan B masing-masing adalah matriks berukuran sama, Matriks A dan B berlaku :

i) Hukum komutatif terhadap penjumlahan
ii) Hukum asosiatif terhadap penjumlahan

Bukti

i) Dengan menggunakan Definisi 2.3.3 dan hukum komutatif pada bilangan real, diperoleh

$$\begin{aligned} A + B &= [a_{ij}] + [b_{ij}] \\ &= [a + b]_{ij} \\ &= [b + a]_{ij} \\ &= [b_{ij}] + [a_{ij}] = B + A \end{aligned}$$

ii) Dengan menggunakan Definisi 2.3.3 dan hukum asosiatif pada bilangan real, diperoleh

$$\begin{aligned}(A+B)+C &= \left(\left[a_{ij}\right]+\left[b_{ij}\right]\right)+\left[c_{ij}\right]\\ &= [a+b]_{ij}+\left[c_{ij}\right]\\ &= [a+b+c]_{ij}\\ &= \left[a_{ij}\right]+[b+c]_{ij}\\ &= \left[a_{ij}\right]+\left([b+c]_{ij}\right)\\ &= [a]_{ij}+\left(\left[b_{ij}\right]+\left[c_{ij}\right]\right)\\ &= A+(B+C)\end{aligned}$$

Berdasarkan i) dan ii), terbukti bahwa operasi pada matriks berlaku hukum komutatif dan asosiatif atas penjumlahan.

Definisi 2.3.5 (Perkalian Matriks dengan Skalar)
Misalkan A adalah suatu matriks sembarang dan c adalah skalar. hasil kali cA adalah matriks yang diperoleh dari perkalian setiap entri pada matriks A dengan bilangan c. Matriks cA disebut sebagai kelipatan skalar dari A. Secara matematis dapat ditulis, jika $A=\left[a_{ij}\right]$ maka

$$\begin{aligned}cA &= c\left[a_{ij}\right]\\ &= \left[ca_{ij}\right]\end{aligned}$$

Lemma 2.3.6
Misalkan A, B, C masing-masing adalah matriks sembarang dan untuk setiap skalar $a, b, c \in \mathbb{R}$, berlaku :

i) Hukum distributif kanan terhadap skalar : $(a+b)C = aC + bC$
ii) Hukum distributif kiri terhadap matriks : $c(A+B) = cA + cB$

Bukti

i) Ambil sembarang $a, b \in \mathbb{R}$, dan $C=\left[c_{ij}\right]$. Dengan menggunakan Definisi 2.3.5 dan sifat distributif pada bilangan real, diperoleh :

$$\begin{aligned}(a+b)C &= (a+b)\left[c_{ij}\right]\\ &= a\left[c_{ij}\right]+b\left[c_{ij}\right]\\ &= aC+bC\end{aligned}$$

ii) Ambil sembarang $c \in \mathbb{R}$, $A = [a_{ij}]$ dan $B = [a_{ij}]$. Dengan menggunakan Definisi 2.3.5 dan sifat distributif pada bilangan real, diperoleh :

$$c(A + B) = c([a_{ij}] + [b_{ij}])$$
$$= c[a_{ij}] + c[b_{ij}]$$
$$= cA + cB$$

iii) Ambil sembarang $a, b \in \mathbb{R}$, dan $C = [c_{ij}]$. Dengan menggunakan Definisi 2.3.5, diperoleh :

$$a(bC) = a(b[c_{ij}])$$
$$= a([bc_{ij}])$$
$$= a[bc]_{ij}$$
$$= ab[c_{ij}]$$
$$= (ab)[c_{ij}]$$
$$= (ab)C$$

Berdasarkan i), ii), dan iii) terbukti bahwa operasi pada matriks berlaku hukum distributif kanan terhadap skalar, hukum distributif kiri terhadap matriks, dan $a(bC) = (ab)C$.

Definisi 2.3.7 (Perkalian Matriks)

Misalkan A dan B masing-masing adalah matriks berukuran $m \times p$ dan $p \times n$, hasil kali matriks AB adalah matriks berukuran $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk memperoleh entri baris i dan kolom j dari AB dilakukan dengan menjumlahkan hasil kali entri-entri matriks yang bersesuaian. Secara matematis ditulis $AB = [c_{ij}]$, dimana $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}$.

Lemma 2.3.8

Misalkan $a, b \in \mathbb{R}$ dan A, B, C adalah masing matriks adalah matriks yang ukurannya sedemikian rupa dapat dilakukan operasi berikut.

i) Distributif kiri :$A(B + C) = AB + AC$
ii) Distributif kanan :$(B + C)A = BC + BA$
iii) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

Bukti

i) Untuk menunjukan $A(B + C) = AB + AC$, akan ditunjukan bahwa $A(B + C)$ dan $AB + AC$ memiliki ukuran yang sama dan entri-entri yang bersesuaian adalah setara. Dengan menggunakan Definisi 2.3.3 matriks B dan C harus berukuran sama yaitu $p \times n$ dan menggunakan defini 2.3.7 matriks A harus berukuran $m \times p$ sedemikian sehingga $A(B+C)$ adalah matriks beukuran $m \times n$. Dengan demikian $AB + AC$ adalah matriks yang berukuran $m \times n$.

Misalkan $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, dan $C = [c_{ij}]$ akan ditunjukan bahwa entri-entri yang berseuain dari $A(B+C)$ dan $AB + AC$ adalah setara :

$[A(B+C)]_{ij} = [AB + AC]_{ij}$

Berdasarkan Definisi 2.3.3 diperoleh :

$[A(B+C)]_{ij}$
$= a_{i1}(b_{1j} + c_{1j}) + a_{i2}(b_{2j} + c_{2j}) + \cdots + a_{im}(b_{mj} + c_{mj})$
$= (a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}) + (a_{i1}c_{1j} + a_{i2}c_{2j} + \cdots + a_{im}c_{mj})$
$= [AB]_{ij} + [AC]_{ij}$
$= [AB + AC]_{ij}$
$= AB + AC$

ii) Untuk menunjukan $(B+C)A = BA + CA$, akan ditunjukan bahwa $(B+C)A$ dan $BA + CA$ memiliki ukuran yang sama dan entri-entri yang bersesuaian adalah setara Dengan menggunakan Definisi 2.3.3 matriks B dan C harus berukuran sama yaitu $m \times p$ dan menggunakan defini 2.3.7 matriks A harus berukuran $p \times n$ sedemikian sehingga $(B+C)A$ adalah matriks beukuran $m \times n$. Dengan demikian $BA + CA$ adalah matriks yang berukuran $m \times n$.

Misalkan $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, dan $C = [c_{ij}]$ akan ditunjukan bahwa entri-entri yang bersesuain dari $(B+C)A$ dan $BA + CA$ adalah setara, yaitu :

$$[(B+C)A]_{ij} = [BA + CA]_{ij}$$

Berdasarkan Definisi 2.3.3 diperoleh :

$[(B+C)A]_{ij}$
$= (b_{i1} + c_{i1})a_{1j} + (b_{i2} + c_{i2})a_{2j} + \cdots + (b_{im} + c_{im})a_{mj}$
$= (b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \cdots + b_{im}a_{mj}) + (c_{i1}a_{1j} + c_{i2}c_{2j} + \cdots + c_{im}a_{mj})$

$= [BA]_{ij} + [CA]_{ij}$
$= [BA + CA]_{ij}$
$= BA + CA$

iii) Untuk menunjukan $a(BC) = (aB)C = B(aC)$, akan ditunjukan bahwa $a(BC)$, $(aB)C$ dan $B(aC)$ memiliki ukuran yang sama dan entri-entri yang bersesuaian adalah setara. Dengan menggunakan Definisi 2.3.7 misalkan matriks $B = [b_{ij}]$ adalah matriks berukuran $m \times p$ dan matriks $C = [c_{ij}]$ adalah matriks berukuran $p \times n$ dan a adalah sembarang skalar bilangan real.akan ditunjukan bahwa entri-entri yang bersesuain dengan $a(BC)$, $(aB)C$ dan $B(aC)$ adalah setara yaitu :

$$[a(BC)]_{ij} = [(aB)C]_{ij} = [B(aC)]_{ij}$$

untuk semua nilai i dan j. Berdasarkan Definisi 2.3.5 dan Definisi 2.3.7 diperoleh :

- Untuk kesetaraan matriks $[a(BC)]_{ij} = [(aB)C]_{ij}$

$$\begin{aligned}[a(BC)]_{ij} &= a([b_{ij}][c_{ij}]) \\ &= a(b_{i1}c_{1j} + b_{i2}c_{2j} + \cdots + b_{im}c_{mj}) \\ &= ab_{i1}c_{1j} + ab_{i2}c_{2j} + \cdots + ab_{im}c_{mj} \\ &= (a[b_{ij}])[c_{ij}] \\ &= (aB)_{ij}(C)_{ij} \\ &= [(aB)C]_{ij}\end{aligned}$$

- Untuk kesetaraan matriks $[a(BC)]_{ij} = [B(aC)]_{ij}$

$$\begin{aligned}[a(BC)]_{ij} &= a([b_{ij}][c_{ij}]) \\ &= a(b_{i1}c_{1j} + b_{i2}c_{2j} + \cdots + b_{im}c_{mj}) \\ &= ab_{i1}c_{1j} + ab_{i2}c_{2j} + \cdots + ab_{im}c_{mj} \\ &= b_{i1}ac_{1j} + b_{i2}ac_{2j} + \cdots + b_{im}ac_{mj} \\ &= [b_{ij}](a[c_{ij})] \\ &= [b_{ij}][a(C)_{ij}] \\ &= [B(aC)]_{ij}\end{aligned}$$

Contoh 2.3.9

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$ dan skalar $c = 2 \in \mathbb{R}$, sehingga diperoleh hasil operasi matriks berikut.

i) Penjumlahan matriks A dan B yaitu

$$A + B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

ii) Pengurangan matriks A dan B yaitu

$$A - B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

iii) Perkalian matriks A dan B yaitu

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -10 + 12 & 5 + 9 \\ 2 + 16 & -1 + 12 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & 14 \\ 18 & 13 \end{bmatrix}$$

iv) Perkalian matriks dengan skalar

$$cA = 2 \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

v) Hukum komutatif atas penjumlahan yaitu

$$A + B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 + (-2) & 3 + 1 \\ -1 + 4 & 4 + 3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (-2) + 5 & 1 + 3 \\ 4 + (-1) & 3 + 4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$
$$= B + A$$

vi) Hukum asosiatif atas penjumlahan

$$A + (B + C) = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} \right)$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} -2 + (-1) & 1 + 5 \\ 4 + 2 & 3 - 7 \end{bmatrix} \right)$$
$$= \begin{bmatrix} 5 - 2 + (-1) & 3 + 1 + 5 \\ -1 + 4 + 2 & 4 + 3 - 7 \end{bmatrix}$$
$$= \left(\begin{bmatrix} 5 - 2 & 3 + 1 \\ -1 + 4 & 4 + 3 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$$
$$= (A + B) + C$$

Definisi 2.3.10 (Determinan)
Misalkan A adalah matriks berukuran $m \times n$. Minor dari a_{ij} yang dinotasikan dengan M_{ij} adalah detrminan dari submatriks A yang diperoleh dengan cara mengahapus semua entri pada baris ke-i dan kolom ke-j, sedangkan kofaktor dari a_{ij} yang dinotasikan dengan C_{ij} adalah $(-1)^{i+j} M_{ij}$. Determinan A dinotasikan $\det(A)$, didefinisikan menggunakan:

1) Ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-i
$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{im}C_{im}.$$
2) Ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-j
$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{mj}C_{mj}.$$

Misalkan $A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, determinan dari A adalah
$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$
Misalkan $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$, determinan dari B adalah
$$\det(B) = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}$$
$$= b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{13}b_{22}b_{31}$$
Aturan ini disebut sebagai aturan sarrus, namun hanya berlaku untuk matriks berukuran 2×2 dan 3×3.

Definisi 2.3.11 (Invers Matriks)
Misalkan A adalah matriks berukuran $n \times n$. Jika terdapat matriks A^{-1} sedemikian sehingga $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, dimana I adalah matriks identitas, maka A disebut matriks yang dapat dibalik dan A^{-1} disebut invers dari matriks A.

Definisi 2.3.12 (Transpose Matriks)
Misalkan matrik A adalah matriks berukuran $m \times n$. Transpose dari matriks A adalah matriks berukuran $n \times m$ yang dinotasikan sebagai A^t merupakan matriks yang diperoleh dengan menukar baris dan kolom dari matriks A sehingga kolom pertama dari A^t adalah baris pertama dari A, kolom ke dua dari A^t adalah baris kedua dari A dan seterusnya.

Definisi 2.3.13 (Matriks *Skew* Simetris)
Misalkan matriks A adalah matriks berukuran $n \times n$, matriks A disebut matriks *skew* simetris jika $A^t = -A$ dimana untuk setiap entri-entri dari matriks $a_{ij} = -a_{ji}$.

2.4 Ruang Vektor

Berikut akan diberikan definisi dan contoh ruang vektor berdasarkan Fraleigh, 1994 dan Lang, 1987.

Definisi 2.4.1 (Field)
Misalkan F adalah himpunan tak kosong. F disebut field jika memenuhi kondisi berikut.

(i) F terhadap operasi penjumlahan memenuhi:
   a. tertutup artinya untuk setiap $x, y \in F, x + y \in F$,
   b. asosiatif artinya untuk setiap $x, y, z \in F$ berlaku:
   $$(x + y) + z = x + (y + z),$$
   c. memiliki elemen satuan e_1 artinya untuk setiap $x \in F$ berlaku:
   $$x + e_1 = e_1 + x = x,$$
   d. memiliki invers artinya untuk setiap $x \in F$ terdapat x^{-1} sedemikian sehingga berlaku:
   $$x + x^{-1} = x^{-1} + x = e_1,$$
   e. komutatif artinya untuk setiap $x, y \in F$ berlaku:
   $$x + y = y + x.$$

(ii) F terhadap operasi penggandaan memenuhi:
   a) tertutup artinya untuk setiap $x, y \in F, x \bullet y \in F$,
   b) asosiatif artinya untuk setiap $x, y, z \in F$ berlaku:
   $$(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z),$$
   c) memiliki elemen satuan $e_1$artinya untuk setiap $x \in F$ berlaku:
   $$x \bullet e_1 = e_1 \bullet x = x,$$

d) memiliki invers artinya untuk setiap $x \in F$ dan $x \neq 0$ terdapat x^{-1} sedemikian sehingga berlaku:

$$x \bullet x^{-1} = x^{-1} \bullet x = e_1,$$

e) komutatif artinya untuk setiap $x, y \in F$ berlaku:

$$x \bullet y = y \bullet x.$$

(iii) Untuk setiap $x, y, z \in F$ berlaku hukum distributif sebagai berikut:

$$x \bullet (y + z) = (x \bullet y) + (x \bullet z),$$
$$(x + y) \bullet z = (x \bullet z) + (y \bullet z$$

Contoh 2.4.2

Diberikan $\mathbb{Z}_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$ terhadap operasi penjumlahan $(+)$ dan pergandaan $(\bullet)$. $\mathbb{Z}_5$ adalah field.

Bukti

Akan dibuktikan bahwa $\mathbb{Z}_5$ terhadapat operasi penjumlahan $(+)$ dan pergandaan $(\bullet)$ $\mathbb{Z}_5$ adalah field.
Hasil operasi penjumlahan $(+)$ dan pergandaan $(\bullet)$ pada $\mathbb{Z}_5$ ditunjukan melalui tabel berikut.

Tabel 2.1 Operasi penjumlahan dan Pergandaan pada $\mathbb{Z}_5$

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$

$\bullet$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Berdasarkan Tabel 2.1 dapat diuraikan sebagai berikut.

(i) $\mathbb{Z}_5$ terhadap operasi penjumlahan

a) Tertutup artinya untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_5$, $x + y \in \mathbb{Z}_5$,

b) Asosiatif artinya untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}_5$ berlaku :

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

c) Memiliki elemen satuan $\overline{0}$ artinya untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_5$ berlaku:

$$x + \overline{0} = \overline{0} + x = x,$$

d) Memiliki invers artinya untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_5$ terdapat x^{-1} sedemikian sehingga berlaku:

$$x + x^{-1} = x^{-1} + x = \bar{0} = e_1$$

untuk $x = \bar{0}$ terdapat $x^{-1} = \bar{0}$ sehingga $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$
untuk $x = \bar{1}$ terdapat $x^{-1} = \bar{4}$ sehingga $\bar{1} + \bar{4} = \bar{4} + \bar{1} = \bar{0}$
untuk $x = \bar{2}$ terdapat $x^{-1} = \bar{3}$ sehingga $\bar{2} + \bar{3} = \bar{3} + \bar{2} = \bar{0}$
untuk $x = \bar{3}$ terdapat $x^{-1} = \bar{2}$ sehingga $\bar{3} + \bar{2} = 2 + \bar{3} = \bar{0}$
untuk $x = \bar{4}$ terdapat $x^{-1} = \bar{1}$ sehingga $\bar{4} + \bar{1} = \bar{1} + \bar{4} = \bar{0}$

Dengan demikian invers dari $\bar{0}$ adalah $\bar{0}$, invers dari $\bar{1}$ adalah $\bar{4}$, invers dari $\bar{2}$ adalah $\bar{3}$ dan invers dari $\bar{3}$ adalah $\bar{2}$, dan invers dari $\bar{4}$ adalah $\bar{1}$,

e) Komutatif artinya untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_5$ berlaku :

$$x + y = y + x.$$

(ii) $\mathbb{Z}_5$ terhadap operasi pergandaan

a) Tertutup artinya untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_5$, $x \bullet y \in \mathbb{Z}_5$,

b) Asosiatif artinya untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}_5$ berlaku :

$$(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z),$$

c) Memiliki elemen satuan $\bar{1}$ artinya untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_5$ berlaku:

$$x \bullet \bar{1} = \bar{1} \bullet x = x,$$

d) Untuk setiap $x \neq 0$ dan $x \in \mathbb{Z}_5$ memiliki invers x^{-1} artinya

$$x \bullet x^{-1} = x^{-1} \bullet x = \bar{1} = e_2$$

untuk $x = \bar{1}$ terdapat $x^{-1} = \bar{1}$ sehingga $\bar{1} \bullet \bar{1} = \bar{1} \bullet \bar{1} = \bar{1}$
untuk $x = \bar{2}$ terdapat $x^{-1} = \bar{3}$ sehingga $\bar{2} \bullet \bar{3} = \bar{3} \bullet \bar{2} = \bar{1}$
untuk $x = \bar{3}$ terdapat $x^{-1} = \bar{3}$ sehingga $\bar{3} \bullet \bar{2} = \bar{2} \bullet \bar{3} = \bar{1}$
untuk $x = \bar{4}$ terdapat $x^{-1} = \bar{3}$ sehingga $\bar{4} \bullet \bar{4} = \bar{4} \bullet \bar{4} = \bar{1}$

e) Komutatif artinya untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_5$ berlaku

$$x \bullet y = y \bullet x.$$

(iii) Untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}_5$ berlaku hukum distributif sebagai berikut:

$$x \bullet (y + z) = (x \bullet y) + (x \bullet z),$$
$$(x + y) \bullet z = (x \bullet z) + (y \bullet z).$$

Jadi $\mathbb{Z}_5$ merupakan field. ■

Definisi 2.4.3 (Ruang Vektor)
Suatu ruang vektor V atas F adalah himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar, dimana untuk setiap $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in V, \alpha, \beta \in F$ berlaku $\overline{u} + \overline{v} \in V$, $\alpha\overline{u} \in V$, dan memenuhi kondisi berikut :

(i) $\overline{u} + \overline{v} = \overline{v} + \overline{u}$,
(ii) $(\overline{u} + \overline{v}) + \overline{w} = \overline{u} + (\overline{v} + \overline{w})$
(iii) Terdapat $\overline{0} \in V$ sehingga berlaku $\overline{0} + \overline{u} = \overline{u} + \overline{0} = \overline{u}$,
(iv) Terdapat $-\overline{u} \in V$ sehingga berlaku $\overline{u} + (-\overline{u}) = (-\overline{u}) + \overline{u} = \overline{0}$,
(v) $\alpha(\overline{u} + \overline{v}) = \alpha\overline{u} + \alpha\overline{v}$,
(vi) $(\alpha + \beta)\overline{u} = \alpha\overline{u} + \beta\overline{u}$,
(vii) $(\alpha\beta)\overline{u} = \alpha(\beta\overline{u})$
(viii) $1\overline{u} = \overline{u}$

Contoh 2.4.4
Diberikan himpunan $\mathbb{R}^3 = \{(a, b, c) | a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Akan ditunjukan $\mathbb{R}^3$ adalah ruang vektor atas $\mathbb{R}$.

Bukti
Jelas bahwa $\mathbb{R}$ adalah Field. Ambil sebarang $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ $\overline{c} = (c_1, c_2, c_3)$ untuk setiap $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in \mathbb{R}^3$ dan sembarang skalar $k, m \in \mathbb{R}$ berlaku

$$\begin{aligned}\overline{a} + \overline{b} &= (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \in \mathbb{R}^3,\end{aligned}$$

$$k\overline{a} = k(a_1, a_2, a_3) = (ka_1, ka_2, ka_3) \in \mathbb{R}^3,$$

Dan memenuhi kondisi berikut :

i) $$\begin{aligned}\overline{a} + \overline{b} &= (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \\ &= (b_1 + a_1, b_2 + a_2, b_3 + a_3) \\ &= (b_1, b_2, b_3) + (a_1, a_2, a_3) \\ &= \overline{b} + \overline{a}\end{aligned}$$

ii) $$\begin{aligned}(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} &= \big((a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3)\big) + (c_1, c_2, c_3) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) + (c_1, c_2, c_3) \\ &= ((a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_3, (a_3 + b_3) + c_3) \\ &= (a_1 + b_1 + c_1, a_2 + b_2 + c_2, a_3 + b_3 + c_3) \\ &= (a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2), a_3 + (b_3 + c_3))\end{aligned}$$

$= (a_1, a_2, a_3) + (b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3)$
$= (a_1, a_2, a_3) + ((b_1, b_2, b_3) + (c_1, c_2, c_3))$
$= \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$

iii) Terdapat $\overline{0} = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ sehingga berlaku

$$\overline{0} + \overline{a} = (0,0,0) + (a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2, a_3) = \overline{a}$$

iv) Terdapat $-\overline{a} = (-a_1, -a_2, -a_3) \in \mathbb{R}^3$ sehingga berlaku

$$\begin{aligned} \overline{a} + (-a) &= (a_1, a_2, a_3) + (-a_1, -a_2, -a_3) \\ &= (a_1 - a_1, a_2 - a_2, a_3 - a_3) \\ &= (0,0,0) = \overline{0} \end{aligned}$$

v) $$\begin{aligned} k(\overline{a} + \overline{b}) &= k((a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3)) \\ &= k(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \\ &= (k(a_1 + b_1), k(a_2 + b_2), k(a_3 + b_3)) \\ &= (ka_1 + kb_1, ka_2 + kb_2, ka_3 + kb_3) \\ &= (ka_1, ka_2, ka_3) + (kb_1, kb_2, kb_3) \\ &= k(a_1, a_2, a_3) + k(b_1, b_2, b_3) \\ &= k\overline{a} + k\overline{b} \end{aligned}$$

vi) $$\begin{aligned} (k + m)\overline{a} &= (k + m)(a_1, a_2, a_3) \\ &= ((k + m)a_1, (k + m)a_2, (k + m)a_3) \\ &= (ka_1 + ma_1, ka_2 + ma_2, ka_3 + ma_3) \\ &= (ka_1, ka_2, ka_3) + (ma_1, ma_2, ma_3) \\ &= k(a_1, a_2, a_3) + m(a_1, a_2, a_3) \\ &= k\overline{a} + m\overline{a} \end{aligned}$$

vii) $$\begin{aligned} (km)\overline{a} &= (km)(a_1, a_2, a_3) \\ &= (kma_1, kma_2, kma_3) \\ &= (k(ma_1), k(ma_2), k(ma_3)) \\ &= k(ma_1, ma_2, ma_3) \\ &= k(m(a_1, a_2, a_3)) \\ &= k(m\overline{a}) \end{aligned}$$

viii) $1\overline{a} = 1(a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2, a_3) = \overline{a}$

Berdasarkan uraian diatas terbukti bahwa $\mathbb{R}^3$ adalah ruang vektor atas $\mathbb{R}$. ■

Contoh 2.4.5

Diberikan himpunan

$M_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R} \right\}$. Akan ditunjukan $M_3(\mathbb{R})$ adalah ruang vektor atas $\mathbb{R}$.

Bukti

Jelas bahwa $\mathbb{R}$ adalah Field. Ambil sembarang $A, B, C \in M_3(\mathbb{R})$ yaitu:$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 & i_1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ g_2 & h_2 & i_2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ d_3 & e_3 & f_3 \\ g_3 & h_3 & i_3 \end{bmatrix}$

dan sembarang skalar $k, m \in \mathbb{R}$ berlaku :

$$A + B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 & i_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ g_2 & h_2 & i_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 & c_1 + b_2 \\ d_1 + d_2 & e_1 + e_2 & f_1 + f_2 \\ g_1 + g_2 & h_1 + h_2 & i_1 + i_2 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

$$kA = k \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 & i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ kd_1 & ke_1 & kf_1 \\ kg_1 & kh_1 & ki_1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

dan memenuhi kondisi berikut.

i) $A + B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 & i_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ g_2 & h_2 & i_2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 & c_1 + b_2 \\ d_1 + d_2 & e_1 + e_2 & f_1 + f_2 \\ g_1 + g_2 & h_1 + h_2 & i_1 + i_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_2 + a_1 & b_2 + b_1 & c_2 + b_1 \\ d_2 + d_1 & e_2 + e_1 & f_2 + f_1 \\ g_2 + g_1 & h_2 + h_1 & i_2 + i_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ g_2 & h_2 & i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 & i_1 \end{bmatrix}$$

$$= B + A$$

ii) $(A+B)+C$

$$= \left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 & i_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ g_2 & h_2 & i_2 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ d_3 & e_3 & f_3 \\ g_3 & h_3 & i_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 & c_1 + b_2 \\ d_1 + d_2 & e_1 + e_2 & f_1 + f_2 \\ g_1 + g_2 & h_1 + h_2 & i_1 + i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ d_3 & e_3 & f_3 \\ g_3 & h_3 & i_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + a_3 & b_1 + b_2 + b_3 & c_1 + b_2 + c_3 \\ d_1 + d_2 + d_3 & e_1 + e_2 + e_3 & f_1 + f_2 + f_3 \\ g_1 + g_2 + g_3 & h_1 + h_2 + h_3 & i_1 + i_2 + i_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 & i_1 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} a_2 + a_3 & b_2 + b_3 & b_2 + c_3 \\ d_2 + d_3 & e_2 + e_3 & f_2 + f_3 \\ g_2 + g_3 & h_2 + h_3 & i_2 + i_3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 & i_1 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ g_2 & h_2 & i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ d_3 & e_3 & f_3 \\ g_3 & h_3 & i_3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= A + (B + C)$$

iii) Terdapat $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ sehingga berlaku

$$0 + A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 & i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 & i_1 \end{bmatrix} = A$$

iv) terdapat $-A = \begin{bmatrix} -a_1 & -b_1 & -c_1 \\ -d_1 & -e_1 & -f_1 \\ -g_1 & -h_1 & -i_1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$, sehingga berlaku

$$A + (-A) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 & i_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_1 & -b_1 & -c_1 \\ -d_1 & -e_1 & -f_1 \\ -g_1 & -h_1 & -i_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 - a_1 & b_1 - b_1 & c_1 - c_1 \\ d_1 - d_1 & e_1 - e_1 & f_1 - f_1 \\ g_1 - g_1 & h_1 - h_1 & i_1 - i_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

v) $k(A+B) = kA + kB$ (berdasarkan sifat perkalian matriks dengan skalar)

vi) $(k+m)A = kA + mA$ (berdasarkan hukum distributif kanan terhadap skalar)

vii) $(km)A = k(mA)$ (berdasarkan sifat perkalian matriks dengan skalar)

viii) $1A = 1\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 & i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 & i_1 \end{bmatrix} = A$

Berdasarkan uraian diatas terbukti bahwa

$M_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R} \right\}$ adalah ruang vektor atas $\mathbb{R}$.■

2.5 Pemetaan linear dan Pemetaan Bilinear

Berikut akan diberikan definisi dan contoh mengenai pemetaan linear dan pemetaan bilinear berdasarkan Lang, 1987.

Definisi 2.5.1 (Pemetaan linear)
Misalkan F adalah Field. V, V' adalah ruang-ruang vektor atas F dan diberikan suatu pemetaan

$$g: V \longrightarrow V'$$

Pemetaan g disebut linear jika memenuhi aksioma berikut :

(i) Untuk setiap vektor $\overline{u}, \overline{v} \in V$

$$g(\overline{\boldsymbol{u}} + \overline{\boldsymbol{v}}) = g(\overline{u}) + g(\overline{v})$$

(ii) Untuk setiap $c \in F$ dan $\overline{v} \in V$,

$$g(c\overline{v}) = cg(\overline{v}).$$

Contoh 2.5.2
Diberikan suatu ruang vektor $V = \mathbb{R}^3$ dan $V' = \mathbb{R}^2$ atas $\mathbb{R}$. Didefinisikan suatu pemetaan

$$g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1, x_2)$$

Akan ditunjukan bahwa g adalah pemetaan linear.

Bukti
Ambil sebarang $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^3$ sehingga $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\overline{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

(i) Memperhatikan sifat penjumlahan dua elemen pada $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ sebagai berikut :

$\overline{u} + \overline{v} = (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3),$

$= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + u_3).$

Sehingga diperoleh :

$g(\overline{u} + \overline{v}) = g((u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + u_3)),$

$= (u_1 + v_1, u_2 + v_2),$

$=(u_1, u_2) + (v_1, v_2)$

$= g(\overline{u}) + g(\overline{v}).$

(ii) Memperhatikan sifat perkalian elemen pada $\mathbb{R}^3$ dengan skalar sebagai berikut :

$c\,\overline{v} = c(v_1, v_2, v_3) = (cv_1, cv_2, cv_3),$

Sehingga diperoleh :

$g(c\overline{v}) = g(cv_1, cv_2, cv_3),$

$= (cv_1, cv_2) = c(v_1, v_2) = cg(\overline{v}).$

Berdasarkan (i) dan (ii) maka g adalah suatu pemetaan linear. ■

Definisi 2.5.3 (Pemetaan Bilinear)

Misalkan F adalah Field. U, V, W adalah ruang-ruang vektor atas F dan $c \in F$. Diberikan suatu pemetaan

$$g : U \times V \longrightarrow W$$

Pemetaan g disebut bilinear jika memenuhi aksioma berikut.

(i) Untuk setiap $u \in U$ maka pemetaan $v \longmapsto g(u, v)$ adalah linear, artinya

$$g(u, v_1 + v_2) = g(u, v_1) + g(u, v_2)$$
$$g(u, cv) = cg(u, v).$$

(ii) Untuk setiap $v \in V$ maka pemetaan $u \longmapsto g(u, v)$ adalah linear, artinya

$$g(u_1 + u_2, v) = g(u_1, v) + g(u_2, v)$$
$$g(cu, v) = cg(u, v).$$

Contoh 2.5.4

Didefinisikan sebuah pemetaan dari himpunan vektor kolom $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$ ke $\mathbb{R}$ sebagai berikut:

$$g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(X, Y) \longmapsto g(X, Y) = X^t AY$$

Dimana $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ dan X^t adalah transpose dari X. Akan ditunjukan bahwa g adalah suatu pemetaan bilinear.

Bukti

(i) Ambil sebarang $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ dan $Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ maka diperoleh :

- $g(X, Y+Z) = X^t A(Y+Z)$

$$= [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \right),$$

$$= [x_1 + 4x_2 + 3x_3 \quad 3x_1 + x_2 + 2x_3] \begin{bmatrix} y_1 + z_1 \\ y_2 + z_2 \end{bmatrix}$$

$$= (x_1 + 4x_2 + 3x_3)(y_1 + z_1) + (3x_1 + x_2 + 2x_3)(y_2 + z_2)$$

$$= (x_1 + 4x_2 + 3x_3)(y_1 + z_1) + (3x_1 + x_2 + 2x_3)(y_2 + z_2)$$

$$= (x_1 + 4x_2 + 3x_3)y_1 + (x_1 + 4x_2 + 3x_3)z_1 + (3x_1 + x_2 + 2x_3)y_2 + (3x_1 + x_2 + 2x_3)z_2$$

$$= (x_1 + 4x_2 + 3x_3)y_1 + (3x_1 + x_2 + 2x_3)y_2 + (x_1 + 4x_2 + 3x_3)z_1 + (3x_1 + x_2 + 2x_3)z_2$$

$$= [x_1 + 4x_2 + 3x_3 \quad 3x_1 + x_2 + 2x_3] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + [x_1 + 4x_2 + 3x_3 \quad 3x_1 + x_2 + 2x_3] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$= [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$= X^t AY + X^t AZ,$$

$$= g(X, Y) + g(X, U).$$

- $g(X, cY) = X^t AcY$

$$= [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cy_1 \\ cy_2 \end{bmatrix}$$

$$= [x_1 + 4x_2 + 3x_3 \quad 3x_1 + x_2 + 2x_3] \begin{bmatrix} cy_1 \\ cy_2 \end{bmatrix}$$

$$= [(x_1 + 4x_2 + 3x_3)cy_1 + (3x_1 + x_2 + 2x_3)cy_2]$$
$$= c[(x_1 + 4x_2 + 3x_3)y_1 + (3x_1 + x_2 + 2x_3)y_2]$$
$$= c[x_1 + 4x_2 + 3x_3 \quad 3x_1 + x_2 + 2x_3]\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$
$$= c[x_1 \quad x_2 \quad x_3]\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = cX^tAY$$
$$= cg(X,Y).$$

Jadi, untuk $X \in \mathbb{R}^3$ maka pemetaan $Y \longmapsto g(X,Y)$ adalah linear.

(ii) Ambil sebarang $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ dan $W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ maka diperoleh :

- $g(X+W,Y)$

$$= (X+W)^tAY,$$
$$= \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}\right)^t \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$
$$= \left(\begin{bmatrix} x_1 + w_1 \\ x_2 + w_2 \\ x_3 + w_3 \end{bmatrix}\right)^t \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$
$$= [x_1 + w_1 \quad x_2 + w_2 \quad x_3 + w_3]\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$
$$= \big((x_1 + w_1) + 4(x_2 + w_2) + 3(x_3 + w_3)\big)y_1 + (3(x_1 + w_1) + (x_2 + w_2) + 2(x_3 + w_3))y_2$$
$$= (x_1 + 4x_2 + 3x_3)y_1 + (w_1 + 4w_2 + 3w_3)y_1 + (3x_1 + x_2 + 2x_3)y_2 + (3w_1 + w_2 + 3w_3)y_2$$
$$= (x_1 + 4x_2 + 3x_3)y_1 + (3x_1 + x_2 + 2x_3)y_2 + (w_1 + 4w_2 + 3w_3)y_1 + (3w_1 + w_2 + 3w_3)y_2$$
$$= [x_1 + 4x_2 + 3x_3 \quad 3x_1 + x_2 + 2x_3]\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + [w_1 + 4w_2 + 3w_3 \quad 3w_1 + w_2 + 3w_3]\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$
$$= [x_1 \quad x_2 \quad x_3]\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + [w_1 \quad w_2 \quad w_3]\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$
$$= X^tAY + W^tAY,$$

$$= g(X,Y) + g(W,Y).$$

- $g(cX,W) = (cX)^t AY$

$$= [cx_1 \quad cx_2 \quad cx_3]\begin{bmatrix}1 & 3\\4 & 1\\3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$$
$$= [cx_1 + 4cx_2 + 3cx_3 \quad 3cx_1 + cx_2 + 2cx_3]\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$$
$$= (cx_1 + 4cx_2 + 3cx_3)y_1 + (3cx_1 + cx_2 + 2cx_3)y_2$$
$$= c(x_1 + 4x_2 + 3x_3)y_1 + c(3x_1 + x_2 + 2x_3)y_2$$
$$= c[x_1 + 4x_2 + 3x_3 \quad 3x_1 + x_2 + 2x_3]\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$$
$$= c[x_1 \quad x_2 \quad x_3]\begin{bmatrix}1 & 3\\4 & 1\\3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$$
$$= cX^t AY = cg(X,Y).$$

Jadi, untuk suatu $Y \in \mathbb{R}^2$ maka pemetaan $X \longmapsto g(X,Y)$ adalah linear. Sehingga berdasarkan 1) dan 2) maka g adalah pemetaan bilinear. ■

2.6 Aljabar Lie

Berikut ini akan diberikan definisi *Lie bracket*, identitas jacobi dan Aljabar Lie berdasarkan Hall, Brian,C. 2015 dan Erdmann dan Wildon, 2006.

Definisi 2.6.1 (Lie Bracket)
Misalkan S adalah himpunan tidak kosong dan *Lie bracket* adalah operasi biner pada S yang biasa dinotasikan sebagai berikut :

$$[\bullet,\bullet]: S \times S \longrightarrow S$$
$$(a,b) \longmapsto [a,b]$$

Definisi 2.6.2 (Identitas Jacobi)
Misalkan S adalah himpunan tidak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\times)$. Untuk setiap $x,y,z \in S$ berlaku identitas Jacobi yaitu :

$$(x \times y) \times z + (y \times z) \times x + (z \times x) \times y = 0$$

untuk S adalah ruang vektor atas Field yang dilengkapi dengan Lie *bracket* untuk setiap $x, y, z \in S$ berlaku identitas Jacobi yaitu :

$$\big[[x,y],z\big] + \big[[y,z],x\big] + \big[[z,x],y\big] = 0.$$

Definisi 2.6.3 (Aljabar Lie)

Misalkan F adalah Field dan L adalah ruang vektor atas F yang didefinisikan *Lie bracket* di dalamnya, yang ditulis secara singkat sebagai $(L,[x,y])$. $(L,[x,y])$ adalah aljabar Lie jika memenuhi aksioma berikut :

(i) Memenuhi pemetaan bilinear

(ii) Memenuhi identitas Jacobi,untuk setiap $x, y, z \epsilon L$

$$\big[[x,y],z\big] + \big[[y,z],x\big] + \big[[z,x],y\big] = 0.$$

(iii) Untuk setiap $x \in L$,berlaku:

$$[x,x] = 0$$

Contoh 2.6.4

Diberikan $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan real dan $L = \mathbb{R}^3$ adalah ruang vektor atas $\mathbb{R}$ yang dilengkapi dengan *Lie bracket* dan didefinisikan sebagai berikut :

$$[\bullet,\bullet]: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\left(\overline{a}, \overline{b}\right) \mapsto \left[\overline{a}, \overline{b}\right] = \overline{a} \times \overline{b}$$

Akan ditunjukan bahwa $(\mathbb{R}^3, [a,b])$ merupakan aljabar Lie.

Bukti :

Ambil sebarang $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ dan $\overline{c} = (c_1, c_2, c_3)$ dengan $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in \mathbb{R}^3$ dan $a_i, b_i, c_i, m \in \mathbb{R}$.

1) Pemetaan Bilinear

i) $$\left[\overline{a}, \overline{b} + \overline{c}\right] = (a_1, a_2, a_3) \times (b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3)$$
$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_3 + c_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 \end{vmatrix} k$$

$$= (a_2(b_3 + c_3) - a_3(b_2 + c_2)i - \left(a_1(b_3 + c_3) - a_3(b_1 + c_1)\right)j + \left(a_1(b_2 + c_2) - a_2(b_1 + c_1)\right)k$$

$$= (a_2b_3 + a_2c_3 - a_3b_2 - a_3c_2)i - (a_1b_3 + a_1c_3 - a_3b_1 - a_3c_1)j + (a_1b_2 + a_1c_2 - a_2b_1 - a_2c_1)k$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)i + (a_2c_3 - a_3c_2)i - (a_1b_3 - a_3b_1)j - (a_1c_3 - a_3c_1)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k + (a_1c_2 - a_2c_1)k$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} j - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} k$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} k$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= [\overline{a}, \overline{b}] + [\overline{a}, \overline{c}]$$

ii) $[\overline{a}, m\overline{b}] = (a_1, a_2, a_3) \times (mb_1, mb_2, mb_3)$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ mb_1 & mb_2 & mb_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ mb_2 & mb_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ mb_1 & mb_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ mb_1 & mb_2 \end{vmatrix} k$$

$$= (a_2mb_3 - a_3mb_2)i - (a_1mb_3 - a_3mb_1)j + (a_1mb_2 - a_2mb_1)k$$

$$= m(a_2b_3 - a_3b_2)i - m(a_1b_3 - a_3b_1)j + m(a_1b_2 - a_2b_1)k$$

$$= m((a_2b_3 - a_3b_2)i - (a_1b_3 - a_3b_1)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k)$$

$$= m\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$
$$= m[\overline{a}, \overline{b}].$$

Dengan cara yang sama dengan (i) dan (ii) dapat ditunjukan bahwa $[\overline{a} + \overline{b}, \overline{c}] = [\ \overline{a}, \overline{c}\ ] + [\overline{b}, \overline{c}]$ dan $[m\overline{a}, \overline{b}] = m[\overline{a}, \overline{b}]$. Jadi terbukti bahwa $[a, b]$ memenuhi pemetaan bilinear.

2) Identitas Jacobi

- $[[\overline{a}, \overline{b}], \overline{c}] = [\overline{a} \times \overline{b}, \overline{c}]$

$$= \left[\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \overline{c}\right]$$

$$\begin{aligned}
&= [(a_2b_3 - a_3b_2)i - (a_1b_3 - a_3b_1)j \\
&\qquad +(a_1b_2 - a_2b_1)k, \overline{c}] \\
&= [\big((a_2b_3 - a_3b_2), -(a_1b_3 - a_3b_1), (a_1b_2 - a_2b_1)\big), \overline{c}] \\
&= \big((a_2b_3 - a_3b_2), -(a_1b_3 - a_3b_1), (a_1b_2 - a_2b_1)\big) \\
&\qquad \times (c_1, c_2, c_3)
\end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_2b_3 - a_3b_2 & -a_1b_3 + a_3b_1 & a_1b_2 - a_2b_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= ((-a_1b_3 + a_3b_1)c_3 - (a_1b_2 - a_2b_1)c_2)i - \\
&\quad ((a_2b_3 - a_3b_2)c_3 - (a_1b_2 - a_2b_1)c_1)j + \\
&\quad ((a_2b_3 - a_3b_2)c_2 - (-a_1b_3 + a_3b_1)c_1)k \\
&= (-a_1b_3c_3 + a_3b_1c_3 - a_1b_2c_2 + a_2b_1c_2)i - (a_2b_3c_3 \\
&\qquad - a_3b_2c_3 - a_1b_2c_1 + a_2b_1c_1)j \\
&\qquad + (a_2b_3c_2 - a_3b_2c_2 + a_1b_3c_1 \\
&\qquad - a_3b_1c_1)k
\end{aligned}$$

- $[[\ \overline{b}, \overline{c}\ ], \overline{a}] = [\overline{b} \times \overline{c}, \overline{a}]$

$$= \left[\begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \overline{a}\right]$$

$$\begin{aligned}
&= [((b_2c_3 - b_3c_2)i - (b_1c_3 - b_3c_1)j + (b_1c_2 - \\
&\quad b_2c_1)k), \overline{a}]
\end{aligned}$$

$$= [((b_2c_3 - b_3c_2), (-b_1c_3 + b_3c_1), (b_1c_2 - b_2c_1)), a]$$

$$= (b_2c_3 - b_3c_2), (-b_1c_3 + b_3c_1), (b_1c_2 - b_2c_1) \times (a_1, a_2, a_3)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ (b_2c_3 - b_3c_2) & (-b_1c_3 + b_3c_1) & (b_1c_2 - b_2c_1) \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= \big((-b_1c_3 + b_3c_1)a_3 - (b_1c_2 - b_2c_1)a_2\big)i - ((b_2c_3 - b_3c_2)a_3 - (b_1c_2 - b_2c_1)a_1)j + (b_2c_3 - b_3c_2)a_2 - (-b_1c_3 + b_3c_1)a_1)k$$

$$= (-b_1c_3a_3 + b_3c_1a_3 - b_1c_2a_2 + b_2c_1a_2)i - (b_2c_3a_3 - b_3c_2a_3 - b_1c_2a_1 + b_2c_1a_1)j + (b_2c_3a_2 - b_3c_2a_2 + b_1c_3a_1 - b_3c_1a_1)k$$

- $\left[[\,\overline{c}, \overline{a}\,], \overline{b}\right] = [\overline{c} \times \overline{a}, \overline{b}]$

$$= \left[\begin{vmatrix} i & j & k \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}, \overline{b}\right]$$

$$= [\big((c_2a_3 - c_3a_2)i - (c_1a_3 - c_3a_1)j + (c_1a_2 - c_2a_1)k\big), b]$$

$$= [((c_2a_3 - c_3a_2), -(c_1a_3 - c_3a_1), (c_1a_2 - c_2a_1)), b]$$

$$= (c_2a_3 - c_3a_2), -(c_1a_3 - c_3a_1), (c_1a_2 - c_2a_1) \times (b_1, b_2, b_3)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ c_2a_3 - c_3a_2 & -c_1a_3 + c_3a_1 & c_1a_2 - c_2a_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \big((-c_1a_3 + c_3a_1)b_3 - (c_1a_2 - c_2a_1)b_2\big)i - \big((c_2a_3 - c_3a_2)b_3 - (c_1a_2 - c_2a_1)b_1\big)j + \big((c_2a_3 - c_3a_2)b_2 - (-c_1a_3 + c_3a_1)b_1\big)k$$

$$= (-c_1a_3b_3 + c_3a_1b_3 - c_1a_2b_2 + c_2a_1b_2)i - (c_2a_3b_3 - c_3a_2b_3 - c_1a_2b_1 + c_2a_1b_1)j + (c_2a_3b_2 - c_3a_2b_2 + c_1a_3b_1 - c_3a_1b_1)k$$

Dengan menggunakan sifat komutatif maka diperoleh :

$$\left[[\overline{a},\overline{b}],\overline{c}\right]+\left[[\overline{b},\overline{c}],\overline{a}\right]+\left[[\overline{c},\overline{a}],\overline{b}\right]$$

$$\begin{aligned}
=\ &((-a_1b_3c_3+a_3b_1c_3-a_1b_2c_2+a_2b_1c_2)i-(a_2b_3c_3-a_3b_2c_3\\
&-a_1b_2c_1+a_2b_1c_1)j+(a_2b_3c_2-a_3b_2c_2+a_1b_3c_1\\
&-a_3b_1c_1)k)\\
&+((-b_1c_3a_3+b_3c_1a_3-b_1c_2a_2+b_2c_1a_2)i\\
&-(b_2c_3a_3-b_3c_2a_3-b_1c_2a_1+b_2c_1a_1)j\\
&+(b_2c_3a_2-b_3c_2a_2+b_1c_3a_1-b_3c_1a_1)k)\\
&+((-c_1a_3b_3+c_3a_1b_3-c_1a_2b_2+c_2a_1b_2)i\\
&-(c_2a_3b_3-c_3a_2b_3-c_1a_2b_1+c_2a_1b_1)j\\
&+(c_2a_3b_2-c_3a_2b_2+c_1a_3b_1-c_3a_1b_1)k)\\
=\ &(-a_1b_3c_3+a_3b_1c_3-a_1b_2c_2+a_2b_1c_2-b_1c_3a_3+b_3c_1a_3\\
&-b_1c_2a_2+b_2c_1a_2-c_1a_3b_3+c_3a_1b_3-c_1a_2b_2\\
&+c_2a_1b_2)i-(a_2b_3c_3-a_3b_2c_3-a_1b_2c_1\\
&+a_2b_1c_1+b_2c_3a_3-b_3c_2a_3-b_1c_2a_1+b_2c_1a_1\\
&+c_2a_3b_3-c_3a_2b_3-c_1a_2b_1+c_2a_1b_1)j+(a_2b_3c_2\\
&-a_3b_2c_2+a_1b_3c_1-a_3b_1c_1+b_2c_3a_2-b_3c_2a_2\\
&+b_1c_3a_1-b_3c_1a_1+c_2a_3b_2-c_3a_2b_2+c_1a_3b_1\\
&-c_3a_1b_1)k\\
=\ &0i-0j+0k=\overline{0},
\end{aligned}$$

Jadi terbukti memenuhi identitas Jacobi.

3) $[\,\overline{a},\overline{a}\,]=(a_1,a_2,a_3)\times(a_1,a_2,a_3)$

$$=\begin{vmatrix} i & j & k\\ a_1 & a_2 & a_3\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}$$

$$=(a_2a_3-a_3a_2)i-(a_1a_3-a_3a_1)j+(a_1a_2-a_2a_1)k$$

Karena $a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}$ dan memenuhi sifat komutatif maka $[\,\overline{a},\overline{a}\,]=0i-0j+0k=\overline{0}$. Berdasarkan pembuktian 1, 2 dan 3 maka terbukti bahwa $(\mathbb{R}^3,[\,\overline{a},\overline{b}])$ merupakan aljabar Lie.■

Contoh 2.6.5

Diberikan suatu field $\mathbb{R}$ dan ruang vektor $L=M_2(\mathbb{R})=\left\{\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix} \mid a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$ atas $\mathbb{R}$, didefinisikan Lie *Bracket* sebagai berikut :

$$[\bullet,\bullet]: M_2(\mathbb{R})\times M_2(\mathbb{R})\longrightarrow M_2(\mathbb{R})$$
$$(A,B)\longmapsto [A,B]=AB-BA$$

Akan ditunjukan $(M_2(\mathbb{R}), [\bullet,\bullet])$ adalah aljabar Lie.

Bukti

Jelas bahwa $M_2(\mathbb{R})$ adalah suatu ruang vektor atas F. Akan ditunjukan bahwa $M_2(\mathbb{R})$ adalah aljabar Lie.

Ambil $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$ yaitu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}$ diperoleh :

1) Pemetaan bilinear

(i) $[A, B + C] = A(B + C) - (B + C)A$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}\right) - \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} e+k & f+l \\ g+m & h+n \end{bmatrix}\right) - \left(\begin{bmatrix} e+k & f+l \\ g+m & h+n \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ae+ak+bg+bm & af+al+bh+bn \\ ce+ck+dg+dm & cf+cl+dh+dn \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ea+ka+fc+lc & eb+kb+fd+ld \\ ga+ma+hc+nc & gb+mb+hd+nd \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ak+bm & al+bn \\ ck+dm & cl+dn \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ka+lc & kb+ld \\ ma+nc & mb+nd \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= AB - BA + AC - CA$$

$$= [A, B] + [A, C]$$

(ii) $[A, mB] = A(mB) - (mB)A$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\left(m\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) - \left(m\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= m\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) - m\left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$$

$$= m\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$$

$$= m[AB - BA]$$

$$= m[A, B]$$

Dengan cara yang sama seperti (i) dan (ii) dapat ditunjukan bahwa $[A + B, C] = [A, C] + [B, C]$ dan $[mA, B] = m[A, B]$. Jadi terbukti bahwa $[A, B]$ memenuhi pemetaan bilinear.

2) Identitas Jacobi

- $\left[[A, B], C\right]$

$$= [AB - BA, C]$$

$$= \left[\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right), \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}\right]$$

$$= \left[\left(\begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{bmatrix}\right), \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}\right]$$

$$= \left[\begin{bmatrix} bg - fc & af + bh - eb - fd \\ ce + dg - ga - hc & cf - gb \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} bg - fc & af + bh - eb - fd \\ ce + dg - ga - hc & cf - gb \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} bg - fc & af + bh - eb - fd \\ ce + dg - ga - hc & cf - gb \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} bgk - fck + afm + bhm - ebm - fdm & bgl - fcl + afn + bhn - ebn - fdn \\ cek + dgk - gak - hck + cfm - gbm & cel + dgl - gal - hcl + cfn - gbn \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} kbg - kfc + lce + ldg - lga - lhc & kaf + kbh - keb - kfd + lcf - lgb \\ mbg - mfc + nce + ndg - nga - nhc & maf + mbh - meb - mfd + ncf - ngb \end{bmatrix}$$

- $\left[[B, C], A\right]$

$$= [BC - CB, A]$$

$$= \left[\left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right), \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right]$$

$$= \left[\left(\begin{bmatrix} ek + fm & el + fn \\ gk + hm & gl + hn \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ke + lg & kf + lh \\ me + ng & mf + nh \end{bmatrix}\right), \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right]$$

$$= \left[\begin{bmatrix} fm - lg & el + fn - kf - lh \\ gk + hm - me - ng & gl - mf \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} fm - lg & el + fn - kf - lh \\ gk + hm - me - ng & gl - mf \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} fm - lg & el + fn - kf - lh \\ gk + hm - me - ng & gl - mf \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} fma - lga + elc + fnc - kfc - lhc & fmb - lgb + eld + fnd - kfd - lhd \\ gka + hma - mea - nga + glc - mfc & gkb + hmb - meb - ngb + gld - mfd \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} afm - alg + bgk + bhm - bme - bng & ael + afn - akf - alh + bgl - bmf \\ cfm - clg + dgk + dhm - dme - dng & cel + cfn - ckf - clh + dgl - dmf \end{bmatrix}$$

- $[[C, A], B]$

$$= [CA - AC, B]$$

$$= \left[\left(\begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}\right), \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right]$$

$$= \left[\left(\begin{bmatrix} ka + lc & kb + ld \\ ma + nc & mb + nd \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ak + bm & al + bn \\ ck + dm & cl + dn \end{bmatrix}\right), \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right]$$

$$= \left[\begin{bmatrix} lc - bm & kb + ld - al - bn \\ ma + nc - ck - dm & mb - cl \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} lc - bm & kb + ld - al - bn \\ ma + nc - ck - dm & mb - cl \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} lc - bm & kb + ld - al - bn \\ ma + nc - ck - dm & mb - cl \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} lce - bme + kbg + ldg - alg - bng & lcf - bmf + kbh + ldh - alh - bnh \\ mae + nce - cke - dme + mbg - clg & maf + ncf - ckf - dmf + mbh - clh \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} elc - ebm + fma + fnc - fck - fdm & ekb + eld - eal - ebn + fmb - fcl \\ glc - gbm + hma + hnc - hck - hdm & gkb + gld - gal - gbn + hmb - hcl \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan sifat komutatif maka diperoleh :

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B]$$

$$= \begin{bmatrix} bgk - fck + afm + bhm - ebm - fdm & bgl - fcl + afn + bhn - ebn - fdn \\ cek + dgk - gak - hck + cfm - gbm & cel + dgl - gal - hcl + cfn - gbn \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} kbg - kfc + lce + ldg - lga - lhc & kaf + kbh - keb - kfd + lcf - lgb \\ mbg - mfc + nce + ndg - nga - nhc & maf + mbh - meb - mfd + ncf - ngb \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} fma - lga + elc + fnc - kfc - lhc & fmb - lgb + eld + fnd - kfd - lhd \\ gka + hma - mea - nga + glc - mfc & gkb + hmb - meb - ngb + gld - mfd \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} afm - alg + bgk + bhm - bme - bng & ael + afn - akf - alh + bgl - bmf \\ cfm - clg + dgk + dhm - dme - dng & cel + cfn - ckf - clh + dgl - dmf \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} lce-bme+kbg+ldg-alg-bng & lcf-bmf+kbh+ldh-alh-bnh \\ mae+nce-cke-dme+mbg-clg & maf+ncf-ckf-dmf+mbh-clh \end{bmatrix}$$
$$-\begin{bmatrix} elc-ebm+fma+fnc-fck-fdm & ekb+eld-eal-ebn+fmb-fcl \\ glc-gbm+hma+hnc-hck-hdm & gkb+gld-gal-gbn+hmb-hcl \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3) $$[A,A]=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan pebuktian 1), 2), dan 3) terbukti bahwa $M_2(\mathbb{R})=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} | a,b,c,d \in \mathbb{R}\right\}$ adalah aljabar Lie. ■

Contoh 2.6.6

Diberikan $A=\begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} \end{bmatrix}$ dimana $A,B,C \in M_2(\mathbb{Z}_3)$ dengan skalar $m=\bar{2}\in \mathbb{Z}_3$, didefinisikan Lie *Bracket* sebagai berikut :

$$[\bullet,\bullet]: M_2(\mathbb{Z}_3)\times M_2(\mathbb{Z}_3)\longrightarrow M_2(\mathbb{Z}_3)$$
$$(A,B)\longmapsto [A,B]=AB-BA$$

Akan ditunjukan $(M_2(\mathbb{Z}_3),[\bullet,\bullet])$ adalah aljabar Lie.

Bukti

Jelas bahwa $M_2(\mathbb{Z}_3)$ adalah suatu ruang vektor atas $\mathbb{Z}_3$. Akan ditunjukan bahwa $M_2(\mathbb{Z}_3)$ adalah aljabar Lie.

1) Pemetaan bilinear

(i) Akan dintunjukan bahwa $[A,B+C]=[A,B]+[A,C]$

$[A,B+C]$
$$=A(B+C)-(B+C)A$$
$$=\begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} \end{bmatrix}\right)-\left(\begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$

$[A, B] + [A, C] =$
$= AB - BA + AC - CA$
$= \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} \end{bmatrix} -$
$\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{bmatrix}$
(dengan menggunakan sifat penjumlahan dan pengurangan pada matriks serta hukum komutatif pada bilangan real diperoleh)
$= \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$
terbukti bahwa $[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$.

(ii) $[A, mB]$
$= A(mB) - (mB)A$
$= \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{bmatrix} \left(\bar{2} \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{bmatrix} \right) - \left(\bar{2} \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{0} \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{bmatrix}$

$m[A, B]$
$= m[AB - BA]$
$= \bar{2} \left(\begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{bmatrix} \right)$
$= \bar{2} \left(\begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} \right)$
$= \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{0} \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{bmatrix}$
terbukti bahwa $[A, mB] = [A, B] + [A, C]$.

Dengan cara yang sama seperti (i) dan (ii) dapat ditunjukan bahwa $[A+B,C]=[A,C]+[B,C]$ dan $[mA,B]=m[A,B]$. Jadi terbukti bahwa $[A,B]$ memenuhi pemetaan bilinear.

2) Identitas Jacobi

- $\big[[A,B],C\big]$

$$= [AB-BA,C]$$

$$= \left[\left(\begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{2}\end{bmatrix}\right),\begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{2}\end{bmatrix}\right]$$

$$= \left[\left(\begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{1}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{2}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}\right),\begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{2}\end{bmatrix}\right]$$

$$= \left(\begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{1}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{2}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{2}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{2}\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{1}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{2}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}\right)$$

(hukum distributif kanan pada matriks)

$$= \begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{2}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{2}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{2}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{2}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{bmatrix}$$

- $\big[[B,C],A\big]$

$$= [BC-CB,A]$$

$$= \left[\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{2}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{bmatrix}\right),\begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{2}\end{bmatrix}\right]$$

$$= \left[\left(\begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{2}\\ \bar{1} & \bar{1}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{2}\end{bmatrix}\right),\begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{2}\end{bmatrix}\right]$$

$$= \left(\begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{2}\\ \bar{1} & \bar{1}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{2}\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{2}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{2}\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{2}\\ \bar{1} & \bar{1}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{2}\end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{2}\\ \bar{1} & \bar{1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{2}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{2}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{2}\\ \bar{1} & \bar{1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{2}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{0}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{1}\\ \bar{2} & \bar{1}\end{bmatrix}$$

- $[[C, A], B]$

$= [CA - AC, B]$

$= \left[\left(\begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{2}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{2}\end{bmatrix}\right), \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{bmatrix}\right]$

$= \left[\left(\begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{1}\end{bmatrix}\right), \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{bmatrix}\right]$

$= \left(\begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{1}\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{1}\end{bmatrix}\right)$

(hukum distributif kanan pada matriks)

$= \begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{bmatrix} +$
$\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{1}\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{1}\\ \bar{2} & \bar{1}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{0}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}$

Dengan menggunakan sifat komutatif maka diperoleh :

$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B]$

$= \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{0}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{bmatrix} -$
$\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{1}\\ \bar{2} & \bar{1}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{1}\\ \bar{2} & \bar{1}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{0}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

3) $[A, A] = \begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{2}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{2}\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{1}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{1}\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

Berdasarkan pembuktian 1), 2), dan 3) terbukti bahwa $(M_2(\mathbb{Z}_3), [\bullet,\bullet])$ adalah aljabar Lie. ■

Contoh 2.6.7
Diberikan suatu field $\mathbb{R}$ dan ruang vektor
$L = M_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \middle| a,b,c,d,e,f,g,h,i \in \mathbb{R} \right\}$ atas $\mathbb{R}$,
didefinisikan Lie *Bracket* sebagai berikut :

$$[\bullet,\bullet]: M_3(\mathbb{R}) \times M_3(\mathbb{R}) \longrightarrow M_3(\mathbb{R})$$
$$(A,B) \longmapsto [A,B] = AB - BA$$

Akan ditunjukan $(M_3(\mathbb{R}), [\bullet,\bullet])$ adalah aljabar Lie.

Bukti
Berdasarkan Contoh 2.4.5 $M_3(\mathbb{R})$ adalah suatu ruang vektor atas $\mathbb{R}$.
Akan ditunjukan bahwa $M_3(\mathbb{R})$ adalah aljabar Lie.
Ambil $A, B, C \in M_3(\mathbb{R})$, diperoleh :

1) Pemetaan bilinear
(i) $[A, B + C] = A(B + C) - (B + C)A$
(hukum distributif kiri dan kanan matriks)
$= AB + AC - BA - CA$
$= AB - BA + AC - CA$
$= [A, B] + [A, C]$
(ii) $[A, mB] = A(mB) - (mB)A$
(sifat perkalian matriks dengan skalar)
$= m(AB) - m(BA)$
$= m(AB - BA)$
$= m[A, B]$
(iii) $[A + B, C] = (A + B)C - C(A + B)$
(hukum distributif kiri dan kanan matriks)
$= AC + BC - CA - CB$
$= AC - CA + BC - CB$
$= [A, C] + [B, C]$
(iv) $[mA, B] = (mA)B - B(mA)$
(sifat perkalian matriks dengan skalar)
$= m(AB) - m(BA)$
$= m(AB - BA)$
$= m[A, B]$

2) Identitas Jacobi
   - $\big[[A,B],C\big]+\big[[B,C],A\big]+\big[[C,A],B\big]$
     $=[AB-BA,C]+[BC-CB,A]+[CA-AC,B]$
     $=\big((AB-BA)C-C(AB-BA)\big)+\big((BC-CB)A-A(BC-CB)\big)+\big((CA-AC)B-B(CA-AC)\big)$
     $=ABC-BAC-CAB+CBA+BCA-CBA-ABC+ACB+CAB-ACB-BCA+BAC$
     $=0$
3) $[A,A]=AA-AA=0$

Berdasarkan pebuktian 1), 2), dan 3) terbukti bahwa $M_3(\mathbb{R})=\left\{\begin{bmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix} \middle| a,b,c,d,e,f,g,h,i\in\mathbb{R}\right\}$ adalah aljabar Lie. ■

Contoh 2.6.8
Diberikan suatu field $\mathbb{R}$ dan ruang vektor $L=\mathfrak{n}(3)=\{X=(x_{ij})\in M_3(\mathbb{R})\,|(\forall i\geq j)\;x_{ij}=0\}$ atas $\mathbb{R}$, didefinisikan Lie *bracket*

$$[\bullet,\bullet]:\mathfrak{n}(3)\times\mathfrak{n}(3)\longrightarrow\mathfrak{n}(3)$$
$$(X,Y)\longmapsto[X,Y]=XY-YX$$

Akan ditunjukan $(\mathfrak{n}(3),[\bullet,\bullet])$ adalah aljabar Lie.

Bukti
Jelas bahwa $\mathfrak{n}(3)$ adalah suatu ruang vektor atas $\mathbb{R}$. Akan ditunjukan bahwa $\mathfrak{n}(3)$ adalah aljabar Lie.
Ambil $X,Y,Z\in\mathfrak{n}(3)$ yaitu $X=\begin{bmatrix}0 & a_1 & b_1\\ 0 & 0 & c_1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, $Y=\begin{bmatrix}0 & a_2 & b_2\\ 0 & 0 & c_2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ dan $Z=\begin{bmatrix}0 & a_3 & b_3\\ 0 & 0 & c_3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ diperoleh :

1) Pemetaan bilinear
i) $[X,Y+Z]$
   $=X(Y+Z)-(Y+Z)X$

$$= X\left(\begin{bmatrix}0 & a_2 & b_2\\0 & 0 & c_2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & a_3 & b_3\\0 & 0 & c_3\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right) - \left(\begin{bmatrix}0 & a_2 & b_2\\0 & 0 & c_2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & a_3 & b_3\\0 & 0 & c_3\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)X$$

$$= \begin{bmatrix}0 & a_1 & b_1\\0 & 0 & c_1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & a_2 + a_3 & b_2 + b_3\\0 & 0 & c_2 + c_3\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & a_2 + a_3 & b_2 + b_3\\0 & 0 & c_2 + c_3\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & a_1 & b_1\\0 & 0 & c_1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 0 & a_1c_2 + a_1c_3\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0 & a_2c_1 + a_3c_1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 0 & a_1c_2\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0 & a_1c_3\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0 & a_2c_1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0 & a_3c_1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0 & a_1 & b_1\\0 & 0 & c_1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & a_2 & b_2\\0 & 0 & c_2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & a_1 & b_1\\0 & 0 & c_1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & a_3 & b_3\\0 & 0 & c_3\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & a_2 & b_2\\0 & 0 & c_2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & a_1 & b_1\\0 & 0 & c_1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & a_3 & b_3\\0 & 0 & c_3\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & a_1 & b_1\\0 & 0 & c_1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0 & a_1 & b_1\\0 & 0 & c_1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & a_2 & b_2\\0 & 0 & c_2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & a_2 & b_2\\0 & 0 & c_2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & a_1 & b_1\\0 & 0 & c_1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & a_1 & b_1\\0 & 0 & c_1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & a_3 & b_3\\0 & 0 & c_3\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & a_3 & b_3\\0 & 0 & c_3\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & a_1 & b_1\\0 & 0 & c_1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$= XY - YX + XZ - ZX$$

$$= [X, Y] + [X, Z]$$

ii) $[X, mY]$

$$= X(mY) - (mY)X$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(m \begin{bmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) - \left(m \begin{bmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= m \left(\begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) - m \left(\begin{bmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$
$$= m \left(\begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$
$$= m(XY - YX)$$
$$= m[X, Y]$$

Dengan cara yang sama seperti (i) dan (ii) dapat ditunjukan bahwa $[X + Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z]$ dan $[mX, Y] = m[X, Y]$. Jadi terbukti bahwa $[X, Y]$ memenuhi pemetaan bilinear.

2) Identitas Jacobi

- $\big[[X, Y], Z\big]$

$$= [XY - YX, Z]$$
$$= \left[\begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right]$$
$$= \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & a_1c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_2c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right]$$
$$= \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & a_1c_2 - a_2c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right]$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_1c_2 - a_2c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_1c_2 - a_2c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- $\big[[Y, Z], X\big]$

$$= [YZ - ZY, X]$$

$$= \left[\begin{bmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right]$$

$$= \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & a_2c_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_3c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right]$$

$$= \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & a_2c_3 - a_3c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_2c_3 - a_3c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & a_2c_3 - a_3c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- $\big[[Z, X], Y\big]$

$$= [ZX - XZ, Y]$$

$$= \left[\begin{bmatrix} 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right]$$

$$= \left[\begin{bmatrix}0 & 0 & a_3c_1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0 & a_1c_3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & a_2 & b_2\\ 0 & 0 & c_2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right]$$

$$= \left[\begin{bmatrix}0 & 0 & a_3c_1 - a_1c_3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & a_2 & b_2\\ 0 & 0 & c_2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right]$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 0 & a_3c_1 - a_1c_3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & a_2 & b_2\\ 0 & 0 & c_2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & a_2 & b_2\\ 0 & 0 & c_2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & a_3c_1 - a_1c_3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan sifat komutatif maka diperoleh :

$$\big[[X,Y],Z\big] + \big[[Y,Z],X\big] + \big[[Z,X],Y\big]$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Jadi terbukti memenuhi identitas Jacobi.

3) $[X,X]$

$$= \begin{bmatrix}0 & a_1 & b_1\\ 0 & 0 & c_1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & a_1 & b_1\\ 0 & 0 & c_1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & a_1 & b_1\\ 0 & 0 & c_1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & a_1 & b_1\\ 0 & 0 & c_1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 0 & a_1c_1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0 & a_1c_1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Berdasarkan pembuktian 1), 2), dan 3) terbukti bahwa $(\mathfrak{n}(3), [\bullet,\bullet])$ adalah aljabar Lie. ■

Contoh 2.6.9
Diberikan suatu field $\mathbb{R}$ dan ruang vektor
$L = \mathfrak{so}(3) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) | A^t = -A\}$ atas $\mathbb{R}$, didefinisikan Lie *bracket*

$$[\bullet,\bullet]: \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3) \longrightarrow \mathfrak{so}(3)$$
$$(X, Y) \longmapsto [X, Y] = XY - YX$$

Akan ditunjukan $(\mathfrak{so}(3), [\bullet,\bullet])$ adalah aljabar Lie.

Bukti
Jelas bahwa $\mathfrak{so}(3)$ adalah suatu ruang vektor atas $\mathbb{R}$. Akan ditunjukan bahwa $\mathfrak{so}(3)$ adalah aljabar Lie.
Ambil $A, B, C \in \mathfrak{so}(3)$ yaitu diperoleh :

1) Pemetaan bilinear
   (i) $[A, B + C] = A(B + C) - (B + C)A$
   (hukum distributif kiri dan kanan matriks)
   $= AB + AC - BA - CA$
   $= AB - BA + AC - CA$
   $= [A, B] + [A, C]$
   (ii) $[A, mB] = A(mB) - (mB)A$
   (sifat perkalian matriks dengan skalar)
   $= m(AB) - m(BA)$
   $= m(AB - BA)$
   $= m[A, B]$
   (iii) $[A + B, C] = (A + B)C - C(A + B)$
   (hukum distributif kiri dan kanan matriks)
   $= AC + BC - CA - CB$
   $= AC - CA + BC - CB$
   $= [A, C] + [B, C]$
   (iv) $[mA, B] = (mA)B - B(mA)$
   (sifat perkalian matriks dengan skalar)
   $= m(AB) - m(BA)$
   $= m(AB - BA)$
   $= m[A, B]$
2) Identitas Jacobi
   $\big[[A, B], C\big] + \big[[B, C], A\big] + \big[[C, A], B\big]$
   $= [AB - BA, C] + [BC - CB, A] + [CA - AC, B]$

$= \big((AB - BA)C - C(AB - BA)\big) + \big((BC - CB)A - A(BC - CB)\big) + \big((CA - AC)B - B(CA - AC)\big)$

$= ABC - BAC - CAB + CBA + BCA - CBA - ABC + ACB + CAB - ACB - BCA + BAC = 0$

3) $[A, A] = AA - AA = 0$

Berdasarkan pembuktian 1), 2), dan 3) terbukti bahwa $L = \mathfrak{so}(3) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) | A^t = -A\}$ adalah aljabar Lie.■

2.7 Homomorfisma Aljabar Lie

Berikut akan diberikan definisi homomorfisma, Isomorfisma, dan automorfisma aljabar Lie berdasarkan Hall, Brian,C. 2015.

Definisi 2.7.1 (Homomorfisma)
Misalkan F adalah field. L_1 dan L_2 adalah aljabar Lie atas F. Pemetaan $\varphi: L_1 \to L_2$ adalah homomorfisma aljabar Lie, jika φ merupakan pemetaan linear dan $\varphi([a, b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$ untuk setiap $a, b \in L_1$.

Contoh 2.7.2
Diberikan $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan real dan $L = \mathbb{R}^3$ adalah ruang vektor atas $\mathbb{R}$. Didefinisikan suatu pemetaan

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\left(\overline{a}, \overline{b}\right) \longmapsto \varphi\left(\left[\, \overline{a}, \overline{b}\, \right]\right)$$

Sehingga φ merupakan homomorfisma aljabar Lie.

Bukti
Berdasarkan Contoh 2.6.4 $(\mathbb{R}^{\mathbf{3}}, [\bullet,\bullet])$ adalah aljabar Lie. Akan dibuktikan bahwa suatu pemetaan $\boldsymbol{\varphi}: \mathbb{R}^{\mathbf{3}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ merupakan homomorfisma aljabar Lie. Ambil sembarang $\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$, dengan $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dan $\overline{b} = (b_1, b_2, b_3)$, sedemikian sehingga berlaku :

i) Pemetaan Linear

- $\varphi(\left[\overline{a} + \overline{b}\right]) = \varphi([(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3)]\,)$
$\quad = \varphi([(a_1 + b_1), (a_2 + b_2), (a_3 + b_3)])$
$\quad = (a_1 + b_1), (a_2 + b_2), (a_3 + b_3)$
$\quad = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3)$

$$= \varphi([\,\overline{a}\,]) + \varphi([\,\overline{b}\,])$$

- $\varphi([m\overline{a}\,]) = \varphi([m(a_1, a_2, a_3)])$

$$= \varphi([ma_1, ma_2, ma_3])$$
$$= (ma_1, ma_2, ma_3)$$
$$= m(a_1, a_2, a_3)$$
$$= m\varphi([\,\overline{a}\,])$$

ii) $\varphi\left([\overline{a}, \overline{b}]\right) = \varphi((a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3))$

$$= \varphi\left(\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}\right)$$
$$= \varphi\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k\right)$$
$$= \varphi(a_2 b_3 - a_3 b_2)i - \varphi(a_1 b_3 - a_3 b_1)j + \varphi(a_1 b_2 - a_2 b_1)k$$
$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \varphi\, a_1 & \varphi a_2 & \varphi a_3 \\ \varphi b_1 & \varphi b_2 & \varphi b_3 \end{vmatrix}$$
$$= \varphi(a_1, a_2, a_3) \times \varphi(b_1, b_2, b_3) = [\varphi(\,\overline{a}\,), \varphi(\,\overline{b}\,)]$$

Berdasarkan uraian (i) dan (ii) terbukti bahwa φ adalah homomorfisma Lie aljabar untuk setiap $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{R}^3$.■

Contoh 2.7.3

Diberikan suatu field $\mathbb{R}$ dan ruang vektor $L = \mathfrak{n}(3) = \{X = (x_{ij}) \in M_3(\mathbb{R}) \,|(\forall i \geq j)\; x_{ij} = 0\}$atas $\mathbb{R}$, didefinisikan suatu pemetaan:

$$\varphi : \mathfrak{n}(3) \times \mathfrak{n}(3) \longrightarrow \mathfrak{n}(3)$$
$$(X, Y) \longmapsto \varphi([X, Y])$$

Sehingga φ merupakan homomorfisma aljabar Lie.

Bukti

Berdasarkan Contoh 2.6.8 $(\mathfrak{n}(3), [\bullet,\bullet])$ adalah aljabar Lie. Akan dibuktikan bahwa suatu pemetaan $\varphi : \mathfrak{n}(3) \to \mathfrak{n}(3)$ merupakan homomorfisma aljabar Lie. Ambil sembarang $X, Y \in \mathfrak{n}(3)$ dengan $X = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $Y = \begin{bmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ sedemikian sehingga berlaku :

i) Pemetaan Linear

$$\varphi([X+Y]) = \varphi\left(\left[\begin{bmatrix}0 & a_1 & b_1\\0 & 0 & c_1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & a_2 & b_2\\0 & 0 & c_2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right]\right)$$

$$= \varphi\left(\left[\begin{bmatrix}0 & a_1+a_2 & b_1+b_2\\0 & 0 & c_1+c_2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right]\right)$$

$$= \begin{bmatrix}0 & a_1+a_2 & b_1+b_2\\0 & 0 & c_1+c_2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0 & a_1 & b_1\\0 & 0 & c_1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & a_2 & b_2\\0 & 0 & c_2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$= \varphi([X]) + \varphi([Y])$$

ii) $\varphi([X,Y]) = \varphi(XY - YX)$

$$= \varphi\left(\begin{bmatrix}0 & a_1 & b_1\\0 & 0 & c_1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & a_2 & b_2\\0 & 0 & c_2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & a_2 & b_2\\0 & 0 & c_2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & a_1 & b_1\\0 & 0 & c_1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)$$

$$= \varphi\left(\begin{bmatrix}0 & 0 & a_1c_2\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0 & a_2c_1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)$$

$$= \varphi\begin{bmatrix}0 & 0 & a_1c_2\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} - \varphi\begin{bmatrix}0 & 0 & a_2c_1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$= \varphi\left(\begin{bmatrix}0 & a_1 & b_1\\0 & 0 & c_1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & a_2 & b_2\\0 & 0 & c_2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right) - \varphi\left(\begin{bmatrix}0 & a_2 & b_2\\0 & 0 & c_2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & a_1 & b_1\\0 & 0 & c_1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)$$

$$= [\varphi(XY), \varphi(YX)]$$

Berdasarkan uraian (i) dan (ii) terbukti bahwa φ adalah homomorfisma Lie aljabar untuk setiap $X, Y \in \mathfrak{n}(3)$.■

Contoh 2.7.4
Diberikan field $\mathbb{R}$ dan ruang vektor
$L = \mathfrak{so}(3) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) | A^t = -A\}$ atas $\mathbb{R}$, didefinisikan suatu pemetaan

$$\varphi: \mathfrak{so}(3) \longrightarrow \mathfrak{so}(3)$$
$$(X, Y) \longmapsto \varphi([X, Y])$$

Sehingga φ merupakan homomorfisma aljabar Lie.

Bukti
Berdasarkan Contoh 2.6.9 $(\mathfrak{so}(3), [\bullet,\bullet])$ adalah aljabar Lie. Akan dibuktikan bahwa suatu pemetaan $\varphi: \mathfrak{so}(3) \to \mathfrak{so}(3)$ merupakan homomorfisma aljabar Lie. Ambil sembarang $X, Y \in \mathfrak{so}(3)$ dengan $X = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ -a_1 & 0 & c_1 \\ -b_1 & -c_1 & 0 \end{bmatrix}$ dan $Y = \begin{bmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ -a_2 & 0 & c_2 \\ -b_2 & -c_2 & 0 \end{bmatrix}$ sedemikian sehingga berlaku :

i) Pemetaan Linear

$$\begin{aligned}
\varphi([X+Y]) &= \varphi\left(\left[\begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ -a_1 & 0 & c_1 \\ -b_1 & -c_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ -a_2 & 0 & c_2 \\ -b_2 & -c_2 & 0 \end{bmatrix}\right]\right) \\
&= \varphi\left(\left[\begin{bmatrix} 0 & a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ -a_1 + (-a_2) & 0 & c_1 + c_2 \\ -b_1 + (-b_2) & -c_1 + (-c_2) & 0 \end{bmatrix}\right]\right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ -a_1 + (-a_2) & 0 & c_1 + c_2 \\ -b_1 + (-b_2) & -c_1 + (-c_2) & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ -a_1 & 0 & c_1 \\ -b_1 & -c_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ -a_2 & 0 & c_2 \\ -b_2 & -c_2 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \varphi([X]) + \varphi([Y])
\end{aligned}$$

ii) $\varphi([X, Y]) = \varphi(XY - YX)$

$$= \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ -a_1 & 0 & c_1 \\ -b_1 & -c_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ -a_2 & 0 & c_2 \\ -b_2 & -c_2 & 0 \end{bmatrix}\right.$$

$$
\begin{aligned}
&-\begin{bmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ -a_2 & 0 & c_2 \\ -b_2 & -c_2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ -a_1 & 0 & c_1 \\ -b_1 & -c_1 & 0 \end{bmatrix}\Bigg) \\
&= \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ -a_1 & 0 & c_1 \\ -b_1 & -c_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ -a_2 & 0 & c_2 \\ -b_2 & -c_2 & 0 \end{bmatrix}\right) - \\
&\quad \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ -a_2 & 0 & c_2 \\ -b_2 & -c_2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ -a_1 & 0 & c_1 \\ -b_1 & -c_1 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= [\varphi(XY), \varphi(YX)]
\end{aligned}
$$

Berdasarkan uraian (i) dan (ii) terbukti bahwa φ adalah homomorfisma Lie aljabar untuk setiap $X, Y \in \mathfrak{so}(3)$.■

Definisi 2.7.5 (Isomorfisma)
Misalkan L_1 dan L_2 adalah aljabar Lie atas F dan $\varphi: L_1 \to L_2$ adalah homomorfisma aljabar Lie maka φ disebut isomorfisma jika φ bijektif.

Contoh 2.7.6
Berdasarkan Contoh 2.7.2 telah dibuktikan bahwa $\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ merupakan homomorfisma aljabar Lie. Selain itu φ juga merupakan isomorfisma aljabar Lie.

Bukti
Untuk membuktikan φ merupakan isomorfisma aljabar Lie, cukup dengan menunjukan φ adalah bijektif. Akan ditunjukan bahwa φ adalah bijektif. Ambil sembarang $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d} \in \mathbb{R}^3$, dengan
$\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overline{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\overline{c} = (c_1, c_2, c_3)$ dan
$\overline{d} = (d_1, d_2, d_3)$ sedemikian sehingga memenuhi sifat-sifat berikut ini :

(i) injektif yaitu

$$
\begin{aligned}
&\varphi([\,\overline{a}, \overline{b}\,]) = \varphi([\overline{c}, \overline{d}]) \\
&\Rightarrow \varphi\big((a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3)\big) = \varphi((c_1, c_2, c_3) \times \\
&\qquad\qquad (d_1, d_2, d_3)) \\
&\Rightarrow \varphi\left(\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{vmatrix} i & j & k \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$
$$\Longrightarrow a_1 = c_1, a_2 = c_2, a_3 = c_3, b_1 = d_1, b_2 = d_2, b_3 = d_3$$
$$\Longrightarrow (\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{c}, \overline{d})$$

(ii) surjektif yaitu untuk setiap $[\,\overline{c}, \overline{d}\,] \in \mathbb{R}^3$ terdapat $(\overline{a}, \overline{b}) \in \mathbb{R}^3$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} \varphi([\,\overline{a}, \overline{b}]) &= \varphi\big((a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3)\big) \\ &= \varphi\left(\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}\right) \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= (\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{c}, \overline{d}) \end{aligned}$$

Oleh karena φ homomorfisma aljabar Lie memenuhi (i) dan (ii), sehingga dapat disimpulkan bahwa φ adalah isomorfisma aljabar Lie untuk setiap $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d} \in \mathbb{R}^3$.■

Contoh 2.7.7

Berdasarkan Contoh 2.7.3 telah dibuktikan bahwa φ merupakan homomorfisma aljabar Lie untuk setiap $X, Y \in \mathfrak{n}(3)$. Selain itu φ juga merupakan isomorfisma aljabar Lie.

Bukti

Untuk membuktikan φ merupakan isomorfisma aljabar Lie, cukup dengan menunjukan φ adalah bijektif. Akan ditunjukan bahwa φ adalah bijektif. Ambil sembarang $X, Y, W, Z \in \mathfrak{n}(3)$, yaitu :

$X = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad W = \begin{bmatrix} 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $Z = \begin{bmatrix} 0 & a_4 & b_4 \\ 0 & 0 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ sedemikian sehingga memenuhi sifat-sifat berikut ini :

i) injektif yaitu

$\varphi([X, Y]) = \varphi([W, Z])$

$$\Rightarrow \varphi\left(\begin{bmatrix}0 & a_1 & b_1\\0 & 0 & c_1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & a_2 & b_2\\0 & 0 & c_2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & a_2 & b_2\\0 & 0 & c_2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & a_1 & b_1\\0 & 0 & c_1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)=$$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix}0 & a_3 & b_3\\0 & 0 & c_3\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & a_4 & b_4\\0 & 0 & c_4\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & a_4 & b_4\\0 & 0 & c_4\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & a_3 & b_3\\0 & 0 & c_3\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow \varphi\left(\begin{bmatrix}0 & 0 & a_1c_2\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0 & a_2c_1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)= \varphi\left(\begin{bmatrix}0 & 0 & a_3c_4\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}-\right.$$

$$\left.\begin{bmatrix}0 & 0 & a_4c_3\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}0 & 0 & a_1c_2\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0 & a_2c_1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & a_3c_4\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}-$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & a_4c_3\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}0 & a_1 & b_1\\0 & 0 & c_1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & a_2 & b_2\\0 & 0 & c_2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & a_2 & b_2\\0 & 0 & c_2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & a_1 & b_1\\0 & 0 & c_1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}0 & a_3 & b_3\\0 & 0 & c_3\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & a_4 & b_4\\0 & 0 & c_4\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & a_4 & b_4\\0 & 0 & c_4\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & a_3 & b_3\\0 & 0 & c_3\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow XY - YX = WZ - ZW$

$\Rightarrow X = W, Y = Z$

$\Rightarrow [X,Y] = [W,Z]$

ii) surjektif yaitu untuk setiap $W, Z \in \mathfrak{n}(3)$ terdapat $X, Y \in \mathfrak{n}(3)$ sedemikian sehingga

$\varphi([X,Y])$

$$= \varphi\left(\begin{bmatrix}0 & a_1 & b_1\\0 & 0 & c_1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & a_2 & b_2\\0 & 0 & c_2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & a_2 & b_2\\0 & 0 & c_2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & a_1 & b_1\\0 & 0 & c_1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)$$

$$= \varphi\left(\begin{bmatrix}0 & 0 & a_1c_2\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0 & a_2c_1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 0 & a_1c_2\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0 & a_2c_1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= (X, Y) = (W, Z)$$

Oleh karena φ homomorfisma aljabar Lie memenuhi (i) dan (ii), sehingga dapat disimpulkan bahwa φ adalah isomorfisma aljabar Lie.■

Contoh 2.7.8

Berdasarkan Contoh 2.7.4 telah dibuktikan bahwa $\varphi: \mathfrak{so}(3) \longrightarrow \mathfrak{so}(3)$ merupakan homomorfisma aljabar Lie untuk setiap $X, Y \in \mathfrak{so}(3)$. Selain itu φ juga merupakan isomorfisma aljabar Lie.

Bukti

Untuk membuktikan φ merupakan isomorfisma aljabar Lie, cukup dengan menunjukan φ adalah bijektif. Akan ditunjukan bahwa φ adalah bijektif. Ambil sembarang $X, Y, W, Z \in \mathfrak{so}(3)$, yaitu :

$$X = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ -a_1 & 0 & c_1 \\ -b_1 & -c_1 & 0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ -a_2 & 0 & c_2 \\ -b_2 & -c_2 & 0 \end{bmatrix},$$
$$W = \begin{bmatrix} 0 & a_3 & b_3 \\ -a_3 & 0 & c_3 \\ -b_3 & -c_3 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } Z = \begin{bmatrix} 0 & a_4 & b_4 \\ -a_4 & 0 & c_2 \\ -b_4 & -c_4 & 0 \end{bmatrix}$$

sedemikian sehingga memenuhi sifat-sifat berikut ini :

(i) injektif yaitu

$$\varphi([X, Y]) = \varphi([W, Z])$$
$$\Rightarrow \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ -a_1 & 0 & c_1 \\ -b_1 & -c_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ -a_2 & 0 & c_2 \\ -b_2 & -c_2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ -a_2 & 0 & c_2 \\ -b_2 & -c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ -a_1 & 0 & c_1 \\ -b_1 & -c_1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$
$$= \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & a_3 & b_3 \\ -a_3 & 0 & c_3 \\ -b_3 & -c_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_4 & b_4 \\ -a_4 & 0 & c_2 \\ -b_4 & -c_4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a_4 & b_4 \\ -a_4 & 0 & c_2 \\ -b_4 & -c_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_3 & b_3 \\ -a_3 & 0 & c_3 \\ -b_3 & -c_3 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ -a_1 & 0 & c_1 \\ -b_1 & -c_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ -a_2 & 0 & c_2 \\ -b_2 & -c_2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ -a_2 & 0 & c_2 \\ -b_2 & -c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ -a_1 & 0 & c_1 \\ -b_1 & -c_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a_3 & b_3 \\ -a_3 & 0 & c_3 \\ -b_3 & -c_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_4 & b_4 \\ -a_4 & 0 & c_2 \\ -b_4 & -c_4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a_4 & b_4 \\ -a_4 & 0 & c_2 \\ -b_4 & -c_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_3 & b_3 \\ -a_3 & 0 & c_3 \\ -b_3 & -c_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow XY - YX = WZ - ZW$$

$$\Longrightarrow X = W, Y = Z$$

$$\Longrightarrow [X, Y] = [W, Z]$$

(ii) surjektif yaitu untuk setiap $W, Z \in \mathfrak{so}(3)$ terdapat $X, Y \in \mathfrak{so}(3)$ sedemikian sehingga

$$\varphi([X, Y])$$

$$= \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ -a_1 & 0 & c_1 \\ -b_1 & -c_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ -a_2 & 0 & c_2 \\ -b_2 & -c_2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ -a_2 & 0 & c_2 \\ -b_2 & -c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ -a_1 & 0 & c_1 \\ -b_1 & -c_1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ -a_1 & 0 & c_1 \\ -b_1 & -c_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ -a_2 & 0 & c_2 \\ -b_2 & -c_2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ -a_2 & 0 & c_2 \\ -b_2 & -c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ -a_1 & 0 & c_1 \\ -b_1 & -c_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= (X, Y) = (W, Z)$$

Oleh karena φ homomorfisma aljabar Lie memenuhi (i) dan (ii), sehingga dapat disimpulkan bahwa φ adalah isomorfisma aljabar Lie untuk setiap $X, Y \in \mathfrak{so}(3)$. ■

Definisi 2.7.9 (Automorfisma)
Misalkan L_1 dan L_2 adalah aljabar Lie atas F dan $\varphi: L_1 \to L_2$ adalah automorfisma aljabar Lie jika isomorfisma dari aljabar Lie ke dirinya sendiri.

Contoh 2.7.10
Berdasarkan Contoh 2.7.6 telah dibuktikan bahwa $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ adalah isomorfisma aljabar Lie. selain itu φ juga merupakan automorfisma aljabar Lie.

Bukti
Untuk membuktikan φ adalah automorfisma aljabar Lie, dengan melihat pemetaan pada φ. pada Contoh 2.7.2 didefinisikan pemetaan $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, karena φ adalah isomorfisma aljabar Lie ke dirinya sendiri sehingga jelas φ adalah automorfisma aljabar Lie.■

Contoh 2.7.11
Berdasarkan Contoh 2.7.7 telah dibuktikan bahwa $\varphi: \mathfrak{n}(3) \longrightarrow \mathfrak{n}(3)$. adalah isomorfisma aljabar Lie. selain itu φ juga merupakan automorfisma aljabar Lie.

Bukti
Untuk membuktikan φ adalah automorfisma aljabar Lie, dengan melihat pemetaan pada φ. pada Contoh 2.7.3 didefinisikan pemetaan $\varphi: \mathfrak{n}(3) \longrightarrow \mathfrak{n}(3)$, karena φ adalah isomorfisma aljabar Lie ke dirinya sendiri sehingga jelas φ adalah automorfisma aljabar Lie. ■

Contoh 2.7.12
Berdasarkan Contoh 2.7.8 telah dibuktikan bahwa
$\varphi: \mathfrak{so}(3) \longrightarrow \mathfrak{so}(3)$ adalah isomorfisma aljabar Lie. selain itu φ juga merupakan automorfisma aljabar Lie.

Bukti
Untuk membuktikan φ adalah automorfisma aljabar Lie, dengan melihat pemetaan pada φ. pada Contoh 2.7.4 didefinisikan pemetaan $\varphi: \mathfrak{so}(3) \longrightarrow \mathfrak{so}(3)$ karena φ adalah isomorfisma aljabar Lie ke dirinya sendiri sehingga jelas φ adalah automorfisma aljabar Lie. ■