

BAB III PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas konstruksi model *predator-prey* Leslie-Gower dengan perlindungan pada *prey* terinfeksi. Populasi dibagi menjadi tiga subpopulasi, yaitu subpopulasi *prey* rentan, *prey* terinfeksi, dan *predator*. Selanjutnya, dilakukan analisis dinamik pada model yang meliputi penentuan titik kesetimbangan dan kestabilan lokal titik kesetimbangan. Selain itu, dianalisis pula pengaruh perlindungan *prey* terinfeksi terhadap setiap subpopulasi, dan diselidiki terjadinya bifurkasi Hopf pada salah satu titik kesetimbangan, dengan parameter perlindungan sebagai parameter bifurkasi. Pada bagian akhir dilakukan beberapa simulasi numerik untuk mengilustrasikan hasil analisis yang telah diperoleh.

3.1 Konstruksi Model

3.1.1 Model populasi *prey*

Ketika tidak ada *prey* yang terinfeksi, diasumsikan populasi *prey* tumbuh mengikuti model logistik dengan daya dukung lingkungan K dan laju pertumbuhan intrinsik r_1 . Jika total kepadatan populasi *prey* setiap saat dinyatakan dengan $X(t)$, maka laju pertumbuhan populasi *prey* tanpa penyebaran penyakit adalah

$$\frac{dX}{dt} = r_1 X \left(1 - \frac{X}{K}\right).$$

Adanya penyebaran penyakit membagi populasi *prey* menjadi dua sub populasi, yaitu *prey* rentan dan *prey* terinfeksi. Kepadatan populasi *prey* rentan dinyatakan dengan X_s dan kepadatan populasi *prey* terinfeksi dinyatakan dengan X_i . Dengan demikian total kepadatan populasi *prey* setiap saat adalah

$$X(t) = X_s(t) + X_i(t).$$

Laju pertumbuhan populasi *prey* rentan dan *prey* terinfeksi mengikuti beberapa asumsi berikut.

1. Hanya subpopulasi *prey* rentan yang mampu bereproduksi. Laju reproduksi mengikuti model logistik dengan tingkat pertumbuhan r_1 . *Prey* terinfeksi dapat berkurang karena adanya kematian akibat infeksi dengan laju sebesar δ . Dalam memperoleh makanan terdapat kompetisi antara *prey* rentan dan *prey* terinfeksi dengan parameter kompetisi b .
2. Penyakit yang menyebar pada populasi *prey* tidak diturunkan secara genetik melainkan ditularkan melalui interaksi langsung antara *prey* rentan dan *prey* terinfeksi dengan laju transmisi penyakit sebesar β dan *prey* terinfeksi tidak dapat sembuh dari penyakitnya.
3. Populasi *predator* tidak tertular penyakit melalui proses pemangsaan atau proses lainnya.
4. *Predator* mampu membedakan *prey* rentan dan *prey* terinfeksi, sehingga *predator* hanya memangsa *prey* terinfeksi dengan koefisien pemangsaan α . Fungsi respon yang digunakan adalah fungsi respon Holling tipe II.
5. Perlindungan hanya diberikan pada populasi *prey* terinfeksi, sehingga populasi *prey* terinfeksi yang terlindungi terbebas dari predasi.

Berdasarkan asumsi-asumsi tersebut, laju pertumbuhan populasi *prey* rentan dan *prey* terinfeksi adalah

$$\begin{aligned}
 \frac{dX_s}{dt} &= r_1 X_s - b X_s (X_s + X_i) - \beta X_s X_i, \\
 \frac{dX_i}{dt} &= \beta X_s X_i - \frac{\alpha(1-m)X_i Y}{a + (1-m)X_i} - \delta X_i.
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

3.1.2 Model populasi *predator*

Kepadatan populasi *predator* setiap saat dinyatakan dengan $Y(t)$. Laju pertumbuhan populasi *predator* mengikuti model *predator-prey* Leslie-Gower yang dimodifikasi dengan laju pertumbuhan sebesar r_2 dan *carrying capacity* yang bergantung pada sumber daya lingkungan dan kepadatan populasi *prey* terinfeksi yang

tidak terlindungi. Dengan demikian laju pertumbuhan populasi *predator* adalah

$$\frac{dY}{dt} = \left[r_2 - \frac{\gamma Y}{a + (1 - m)X_i} \right] Y. \quad (3.2)$$

3.1.3 Model *predator-prey* Leslie-Gower dengan perlindungan pada *prey* terinfeksi

Berdasarkan persamaan (3.1) dan (3.2) diperoleh model *predator-prey* Leslie-Gower dengan perlindungan pada *prey* terinfeksi sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dX_s}{dt} &= r_1 X_s - b X_s (X_s + X_i) - \beta X_s X_i, \\ \frac{dX_i}{dt} &= \beta X_s X_i - \frac{\alpha(1 - m)X_i Y}{a + (1 - m)X_i} - \delta X_i, \\ \frac{dY}{dt} &= \left(r_2 - \frac{\gamma Y}{a + (1 - m)X_i} \right) Y, \end{aligned} \quad (3.3)$$

dengan syarat awal $X_s(0) \geq 0, X_i(0) \geq 0, Y(0) \geq 0$. Diasumsikan parameter $r_1, r_2, a, b, m, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ bernilai positif dengan $0 < m < 1$.

3.2 Kepositifan Solusi Sistem

Teorema 3.1 Jika pada sistem (3.3) diberikan nilai $X_s(0), X_i(0)$, dan $Y(0)$ bernilai positif maka diperoleh solusi $X_s(t), X_i(t)$, dan $Y(t)$ yang juga positif untuk setiap $t \geq 0$.

Bukti

Persamaan (3.3) dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} \frac{dX_s}{X_s} &= (r_1 - b(X_s + X_i) - \beta X_i) dt, \\ \frac{dX_i}{X_i} &= \left(\beta X_s - \frac{\alpha(1 - m)Y}{a + (1 - m)X_i} - \delta \right) dt, \\ \frac{dY}{Y} &= \left(r_2 - \frac{\gamma Y}{a + (1 - m)X_i} \right) dt. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Selanjutnya diperiksa solusi $X_s(t)$ sebagai berikut. Jika kedua sisi

diintegrasikan terhadap θ pada interval $[0, t]$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{dX_s(\theta)}{X_s(\theta)} &= \int_0^t (r_1 - b(X_s(\theta) + X_i(\theta)) - \beta X_i(\theta)) d\theta \\ \ln X_s(\theta) \Big|_0^t &= \int_0^t (r_1 - b(X_s(\theta) + X_i(\theta)) - \beta X_i(\theta)) d\theta \\ \ln X_s(t) - \ln X_s(0) &= \int_0^t (r_1 - b(X_s(\theta) + X_i(\theta)) - \beta X_i(\theta)) d\theta \\ \ln \frac{X_s(t)}{X_s(0)} &= \int_0^t (r_1 - b(X_s(\theta) + X_i(\theta)) - \beta X_i(\theta)) d\theta \\ \frac{X_s(t)}{X_s(0)} &= \exp \left[\int_0^t (r_1 - b(X_s(\theta) + X_i(\theta)) - \beta X_i(\theta)) d\theta \right] \\ X_s(t) &= X_s(0) \exp \left[\int_0^t (r_1 - b(X_s(\theta) + X_i(\theta)) - \beta X_i(\theta)) d\theta \right]. \end{aligned}$$

Sehingga untuk setiap $t \geq 0$ diperoleh solusi $X_s(t)$ bernilai positif karena $X_s(0) > 0$ dan nilai $e^{\left(\int_0^t (r_1 - b(X_s(\theta) + X_i(\theta)) - \beta X_i(\theta)) d\theta\right)} > 0$.

Dengan cara yang sama untuk solusi $X_i(t)$ dan $Y(t)$ diperoleh

$$\begin{aligned} X_i(t) &= X_i(0) \exp \left[\int_0^t \left(\beta X_i(\theta) - \frac{\alpha(1-m)X_i(\theta)Y(\theta)}{a + (1-m)X_i(\theta)} - \delta \right) d\theta \right] \geq 0, \\ Y(t) &= Y(0) \exp \left[\int_0^t \left(r_2 - \frac{\gamma Y(\theta)}{a + (1-m)X_i(\theta)} \right) d\theta \right] \geq 0. \end{aligned}$$

Terbukti bahwa setiap solusi sistem (3.3) bernilai positif.

3.3 Titik Keseimbangan Model

Titik keseimbangan sistem (3.3) diperoleh ketika $\frac{dX_s}{dt} = \frac{dX_i}{dt} = \frac{dY}{dt} = 0$, yaitu

$$\begin{aligned} X_s (r_1 - b(X_s + X_i) - \beta X_i) &= 0 \\ X_i \left(\beta X_s - \frac{\alpha(1-m)Y}{a + (1-m)X_i} - \delta \right) &= 0 \\ Y \left(r_2 - \frac{\gamma Y}{a + (1-m)X_i} \right) &= 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Solusi persamaan (3.5) secara berturut-turut memenuhi

$$X_s = 0, \tag{3.6}$$

atau

$$r_1 - b(X_s + X_i) - \beta X_i = 0, \quad (3.7)$$

dan

$$X_i = 0, \quad (3.8)$$

atau

$$\beta X_s - \frac{\alpha(1-m)Y}{a + (1-m)X_i} - \delta = 0, \quad (3.9)$$

dan

$$Y = 0, \quad (3.10)$$

atau

$$r_2 - \frac{\gamma Y}{a + (1-m)X_i} = 0. \quad (3.11)$$

Kombinasi persamaan (3.6), (3.8), dan (3.10) menghasilkan titik kesetimbangan trivial $E_0 = (0, 0, 0)$ yang menunjukkan situasi ketika ketiga populasi mengalami kepunahan.

Kombinasi persamaan (3.7), (3.8), dan (3.10) menghasilkan $X_s = \frac{r_1}{b}$, sehingga diperoleh titik kesetimbangan $E_1 = (\frac{r_1}{b}, 0, 0)$ yang menyatakan bahwa hanya populasi *prey* rentan yang bertahan hidup.

Kombinasi persamaan (3.6), (3.8), dan (3.11) menghasilkan $Y = \frac{ar_2}{\gamma}$, sehingga diperoleh titik kesetimbangan $E_2 = (0, 0, \frac{ar_2}{\gamma})$ yang menunjukkan bahwa hanya populasi *predator* yang masih hidup.

Kombinasi persamaan (3.6), (3.9), dan (3.10) menghasilkan nilai $\delta = 0$ yang bertentangan dengan nilai $\delta > 0$. Kombinasi ini tidak menghasilkan titik kesetimbangan.

Kombinasi persamaan (3.6), (3.9), dan (3.11) menghasilkan $Y = -\frac{\delta(a+(1-m)X_i)}{\alpha(1-m)}$ yang bertentangan dengan nilai $Y \geq 0$. Sehingga kombinasi ini tidak menghasilkan titik kesetimbangan.

Kombinasi persamaan (3.7), (3.9), dan (3.10) menghasilkan $X_s = \frac{\delta}{\beta}$. Selanjutnya substitusi nilai $X_s = \frac{\delta}{\beta}$ ke dalam persamaan (3.7) diperoleh $X_i = \frac{\beta r_1 - b\delta}{\beta(b+\beta)}$. Kombinasi ini menghasilkan titik kesetimbangan $E_3 = (\frac{\delta}{\beta}, \frac{\beta r_1 - b\delta}{\beta(b+\beta)}, 0)$ yang eksis jika nilai $r_1 > \frac{b\delta}{\beta}$.

Kombinasi persamaan (3.7), (3.8), dan (3.11) menghasilkan $X_s = \frac{r_1}{b}$ dan $Y = \frac{ar_2}{\gamma}$, sehingga diperoleh titik kesetimbangan $E_4 = (\frac{r_1}{b}, 0, \frac{ar_2}{\gamma})$ yang menunjukkan kepunahan populasi *prey* terinfeksi.

Titik kesetimbangan terakhir diperoleh dari kombinasi persamaan (3.7), (3.9), dan (3.11). Persamaan (3.7) dan (3.11) menghasilkan

$$\begin{aligned} X_s^* &= \frac{r_1 - bX_i^* - \beta X_i^*}{b}, \\ Y^* &= \frac{r_2}{\gamma}(a + (1 - m)X_i^*). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Substitusi nilai X_s dan Y ke persamaan (3.9) menghasilkan

$$\frac{\beta}{b}(r_1 - bX_i^* - \beta X_i^*) - \alpha(1 - m)\frac{r_2}{\gamma} - \delta = 0,$$

yang ekuivalen dengan

$$\frac{\beta r_1}{b} - \frac{\alpha(1 - m)r_2}{\gamma} - \delta - \beta X_i^*(1 + \frac{\beta}{b}) = 0.$$

Akibatnya

$$\begin{aligned} X_i^* &= \frac{(\beta r_1 \gamma - \alpha b(1 - m)r_2 - \delta b \gamma)b}{\beta(b + \beta)b\gamma} \\ &= \frac{\gamma\beta r_1 - b(\alpha r_2(1 - m) + \delta\gamma)}{\gamma\beta(b + \beta)}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Jadi diperoleh titik $E_5(X_s^*, X_i^*, Y^*)$, dengan X_s^*, X_i^* , dan Y^* diberikan pada persamaan (3.12) dan (3.13). Titik kesetimbangan ini memungkinkan ketiga subpopulasi untuk hidup berdampingan. Titik kesetimbangan E_5 eksis jika nilai parameter $r_1 > \frac{b\gamma\delta + \alpha(1 - m)b r_2}{\beta\gamma}$.

Dengan demikian terdapat enam titik kesetimbangan, yaitu $E_0(0, 0, 0)$, $E_1(\frac{r_1}{b}, 0, 0)$, $E_2(0, 0, \frac{\alpha r_2}{\gamma})$, $E_3(\frac{\delta}{\beta}, \frac{\beta r_1 - b\delta}{\beta(b + \beta)}, 0)$, $E_4(\frac{r_1}{b}, 0, \frac{\alpha r_2}{\gamma})$, dan $E_5(X_s^*, X_i^*, Y^*)$.

3.4 Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan

Model (3.3) merupakan sistem *autonomous* non linear sehingga kestabilan lokal titik kesetimbangan model dapat ditentukan melalui proses linearisasi di sekitar titik kesetimbangan yang menghasilkan matriks Jacobi berikut.

$$J = \begin{bmatrix} r_1 - 2bX_s - (b + \beta)X_i & -(b + \beta)X_s & 0 \\ \beta X_i & J_{22} & \frac{-\alpha(1 - m)X_i}{a + (1 - m)X_i} \\ 0 & \frac{\gamma Y^2(1 - m)}{(a + (1 - m)X_i)^2} & r_2 - \frac{2\gamma Y}{a + (1 - m)X_i} \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

dengan $J_{22} = \beta X_s - \frac{\alpha(1-m)Y}{a+(1-m)X_i} + \frac{\alpha+(1-m)^2 X_i Y}{(a+(1-m)X_i)^2} - \delta$.

Matriks Jacobi di titik E_0 adalah

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & r_2 \end{bmatrix}$$

dengan nilai eigen $\lambda_1 = r_1$, $\lambda_2 = -\delta$, dan $\lambda_3 = r_2$. Terdapat nilai eigen yang bernilai positif, sehingga titik kesetimbangan E_0 bersifat tidak stabil pelana.

Jika titik E_1 disubstitusikan ke matriks (3.14) maka diperoleh

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -r_1 & -\frac{r_1}{b}(b + \beta) & 0 \\ 0 & \frac{\beta r_1}{b} - \delta & 0 \\ 0 & 0 & r_2 \end{bmatrix}$$

dengan nilai eigen $\lambda_1 = -r_1$, $\lambda_2 = \frac{\beta r_1}{b} - \delta$, dan $\lambda_3 = r_2$. Terdapat nilai eigen yang bernilai positif, sehingga titik kesetimbangan E_1 bersifat tidak stabil pelana.

Matriks Jacobi di titik kesetimbangan E_2 adalah

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha(1-m)r_2 - \delta & 0 \\ 0 & \frac{r_2^2(1-m)}{\gamma} & -r_2 \end{bmatrix}$$

dengan nilai eigen $\lambda_1 = r_1$, $\lambda_2 = -\left(\frac{\alpha(1-m)r_2}{\gamma} + \delta\right)$, dan $\lambda_3 = -r_2$. Terdapat nilai eigen yang bernilai positif, sehingga titik kesetimbangan E_2 bersifat tidak stabil pelana.

3.4.1 Kestabilan titik kesetimbangan $E_3 \left(\frac{\delta}{\beta}, \frac{\beta r_1 - b\delta}{\beta(b+\beta)}, 0\right)$

Titik kesetimbangan E_3 memenuhi persamaan (3.7) dan (3.9) sehingga matriks Jacobi untuk titik kesetimbangan titik E_3 dapat dinyatakan sebagai

$$J(E_3) = \begin{bmatrix} -bx_s & -(b + \beta)X_s & 0 \\ \beta X_i & 0 & \frac{-\alpha(1-m)X_i}{a+(1-m)X_i} \\ 0 & 0 & r_2 \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen matriks $J(E_3)$ diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $|\lambda I - J(E_3)| = 0$, yaitu

$$|\lambda I - J(E_3)| = \begin{vmatrix} \lambda + bX_s & X_s(b + \beta) & 0 \\ -\beta X_i & \lambda & \frac{\alpha(1-m)X_i}{a+(1-m)X_i} \\ 0 & 0 & \lambda - r_2 \end{vmatrix} = 0$$

Selanjutnya diperoleh persamaan karakteristik

$$(\lambda - r_2)(\lambda(\lambda + bX_s) + (b + \beta)\beta X_s X_i) = 0.$$

Nilai eigen dari matriks $J(E_3)$ adalah $\lambda_1 = r_2$ dan $\lambda_{2,3}$ yang memenuhi persamaan kuadrat

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda + bX_s) + (b + \beta)\beta X_s X_i &= 0 \\ \lambda^2 + bX_s \lambda + \beta(b + \beta)X_s X_i &= 0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

dengan $\lambda_2 + \lambda_3 = bX_s < 0$ dan $\lambda_2 \lambda_3 = \beta(b + \beta)X_s X_i$. Akibatnya $\lambda_{2,3} < 0$ dan $\lambda_1 > 0$. Dengan demikian E_3 bersifat tidak stabil pelana.

3.4.2 Kestabilan titik kesetimbangan $E_4 \left(\frac{r_1}{b}, 0, \frac{ar_2}{\gamma} \right)$

Matriks Jacobi titik kesetimbangan titik E_4 adalah

$$J(E_4) = \begin{bmatrix} -r_1 & \frac{-r_1}{b}(b + \beta) & 0 \\ 0 & \frac{r_1\beta}{b} - \delta - \frac{\alpha(1-m)r_2}{\gamma} & 0 \\ 0 & \frac{r_2^2(1-m)}{\gamma} & -r_2 \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen matriks $J(E_4)$ diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $|\lambda I - J(E_4)| = 0$, yaitu

$$|\lambda I - J(E_4)| = \begin{vmatrix} \lambda + r_1 & \frac{r_1}{b}(b + \beta) & 0 \\ 0 & \lambda - \frac{r_1\beta}{b} + \delta + \frac{\alpha(1-m)r_2}{\gamma} & 0 \\ 0 & \frac{-r_2^2(1-m)}{\gamma} & \lambda + r_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Selanjutnya diperoleh persamaan karakteristik

$$(\lambda + r_1)(\lambda + r_2)\left(\lambda - \frac{r_1\beta}{b} + \delta + \frac{\alpha(1-m)r_2}{\gamma}\right) = 0.$$

Nilai eigen matriks $J(E_4)$ adalah $\lambda_1 = -r_1$, $\lambda_2 = -r_2$ dan $\lambda_3 = \frac{r_1\beta}{b} - \delta - \frac{\alpha(1-m)r_2}{\gamma}$. Titik kesetimbangan E_4 bersifat stabil asimtotik lokal jika $r_1 < \frac{b\gamma\delta + \alpha(1-m)br_2}{\beta\gamma}$. Syarat kestabilan E_4 bertentangan dengan syarat eksistensi titik kesetimbangan E_5 . Oleh karena itu, jika E_4 stabil asimtotik maka titik kesetimbangan E_5 tidak eksis.

3.4.3 Kestabilan titik kesetimbangan $E_5 (X_s^*, X_i^*, Y^*)$

Titik kesetimbangan E_5 memenuhi persamaan (3.7), (3.9), dan (3.11) sehingga matriks Jacobi titik kesetimbangan E_5 dapat disederhanakan menjadi

$$J(E_5) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

dengan,

$$\begin{aligned} a_{11} &= -bX_s < 0, \\ a_{12} &= -(b + \beta)X_s < 0, \\ a_{21} &= \beta X_i > 0, \\ a_{22} &= \frac{\alpha(1-m)^2 X_i Y}{(a+(1-m)X_i)^2} > 0, \\ a_{23} &= \frac{-\alpha(1-m)X_i}{a+(1-m)X_i} < 0, \\ a_{32} &= \frac{\gamma(1-m)Y^2}{(a+(1-m)X_i)^2} > 0, \\ a_{33} &= \frac{-\gamma Y}{a+(1-m)X_i} < 0. \end{aligned}$$

Persamaan karakteristik matriks Jacobi $J(E_5)$ diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $|\lambda I - J(E_5)| = 0$, yaitu

$$|\lambda I - J(E_5)| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & 0 \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ 0 & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

sehingga diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut

$$\lambda^3 + B_1\lambda^2 + B_2\lambda + B_3 = 0, \quad (3.16)$$

dengan

$$B_1 = -a_{33} - a_{22} - a_{11},$$

$$B_2 = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} + a_{11}a_{33} + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$B_3 = -a_{11}a_{22}a_{33} + a_{11}a_{32}a_{23} + a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Persamaan (3.16) sulit untuk diselesaikan, sehingga sifat kestabilan titik E_5 dianalisis dengan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz, yaitu titik kesetimbangan E_5 bersifat stabil asimtotik jika dan hanya jika,

1. $B_1 > 0$,
2. $B_3 > 0$,
3. $B_1B_2 - B_3 > 0$.

Syarat eksistensi dan jenis kestabilan titik kesetimbangan sistem persamaan (3.3) dirangkum pada Tabel (3.1).

Tabel 3.1: Syarat eksistensi dan syarat kestabilan titik kesetimbangan

Titik Kesetimbangan	Syarat Eksistensi	Jenis Kestabilan	Syarat Kestabilan
$E_0(0, 0, 0)$	-	TSP	-
$E_1(\frac{r_1}{b}, 0, 0)$	-	TSP	-
$E_2(0, 0, \frac{ar_2}{\gamma})$	-	TSP	-
$E_3(\frac{\delta}{\beta}, \frac{\beta r_1 - b\delta}{\beta(b+\beta)}, 0)$	$r_1 > \frac{b\delta}{\beta}$	TSP	-
$E_4(\frac{r_1}{b}, 0, \frac{ar_2}{\gamma})$	-	SA	$r_1 < \frac{b\gamma\delta + \alpha(1-m)br_2}{\beta\gamma}$
$E_5(X_s^*, X_i^*, Y^*)$	$r_1 > \frac{b\gamma\delta + \alpha(1-m)br_2}{\beta\gamma}$	SA	$B_3 > 0$ $B_1 > 0$ $B_1B_2 - B_3 > 0$

3.5 Pengaruh Perlindungan Prey Terinfeksi

Pada subbab ini dibahas pengaruh perlindungan pada *prey* terinfeksi terhadap masing-masing kepadatan populasi ketika titik kesetimbangan $E_5(X_s^*, X_i^*, Y^*)$ eksis dan stabil.

Pandang $X_s^* = \frac{r_1 - bX_i - \beta X_i}{b}$, $X_i^* = \frac{\gamma\beta r_1 - b(\alpha r_2(1-m) + \delta\gamma)}{\gamma\beta(b+\beta)}$, dan $Y^* = \frac{r_2}{\gamma}(a + (1-m)X_i)$ sebagai fungsi dari m . Pengaruh m terhadap X_s^* , X_i^* , dan Y^* dapat diselidiki dengan melihat perubahan X_s^* , X_i^* ,

dan Y^* terhadap m , yaitu dengan mengamati nilai $\frac{dX_s^*}{dm}$, $\frac{dX_i^*}{dm}$, dan $\frac{dY^*}{dm}$.

$$\begin{aligned}\frac{dX_s^*}{dm} &= \frac{-ar_2}{\beta\gamma} < 0, \\ \frac{dX_i^*}{dm} &= \frac{b\alpha r_3}{\beta\gamma(b+\beta)} > 0, \\ \frac{dY^*}{dm} &= \frac{-r_2}{\beta\gamma^2(b+\beta)}(\gamma\beta r_1 - b(2\alpha r_2(1-m) + \delta\gamma)),\end{aligned}\tag{3.17}$$

dengan memperhatikan hasil turunan dapat dikatakan bahwa meningkatkan jumlah perlindungan pada *prey* dapat mengurangi kepadatan *prey* rentan, akan tetapi dapat meningkatkan kepadatan *prey* terinfeksi.

Untuk kepadatan populasi *predator* akan meningkat jika $\frac{dY^*}{dm}$ bernilai positif, yaitu ketika nilai $m < 1 - \left(\frac{\gamma(\beta r_1 - \delta)}{2b\alpha r_2}\right)$ dan kepadatan populasi *predator* akan menurun jika $\frac{dY^*}{dm}$ bernilai negatif, yaitu ketika nilai $m > 1 - \left(\frac{\gamma(\beta r_1 - \delta)}{2b\alpha r_2}\right)$. Sehingga dapat dikatakan bahwa meningkatkan perlindungan dalam jumlah yang sedikit akan meningkatkan kepadatan populasi *predator*, sedangkan meningkatkan perlindungan dengan jumlah besar dapat menurunkan tingkat populasi *predator*.

3.6 Bifurkasi Hopf

Pada bagian ini dikaji kemungkinan terjadinya bifurkasi Hopf di titik kesetimbangan E_5 dengan parameter bifurkasi m .

Teorema 3.2 Pada sistem (3.3) terjadi bifurkasi Hopf di titik kesetimbangan E_5 , jika terdapat $m = m_0$ yang memenuhi

1. $B_1(m_0) > 0$,
2. $B_2(m_0) > 0$,
3. $B_1(m_0)B_2(m_0) - B_3(m_0) = 0$,
4. $B_3'(m_0) - (B_1'(m_0)B_2(m_0) + B_1(m_0)B_2'(m_0)) \neq 0$.

Bukti

Kondisi (1) dan (3) sama dengan kondisi (1) dan (3) pada Teorema 2.4. Jika terdapat $m = m_0$ yang memenuhi kondisi (3),

maka

$$B_1 B_2 = B_3. \quad (3.18)$$

Berdasarkan persamaan (3.18), persamaan karakteristik (3.16) dapat dinyatakan sebagai

$$(\lambda^2 + B_2)(\lambda + B_1) = 0. \quad (3.19)$$

Akar-akar persamaan karakteristik (3.19) adalah $\lambda_1(m_0) = \sqrt{-B_2}$, $\lambda_2(m_0) = -\sqrt{-B_2}$, dan $\lambda_3(m_0) = -B_1$. Bifurkasi Hopf dapat terjadi jika terdapat nilai eigen imajiner murni. Kondisi ini terpenuhi jika $B_2(m_0) > 0$. Dengan demikian diperoleh nilai eigen $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{B_2}$. Untuk setiap m , akar persamaan karakteristik secara umum berbentuk

$$\begin{aligned} \lambda_1(m) &= p_1(m) + ip_2(m), \\ \lambda_2(m) &= p_1(m) - ip_2(m), \\ \lambda_3(m) &= -B_1(m). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Untuk membuktikan kondisi (4), substitusi $\lambda_1 = p_1(m) + ip_2(m)$ ke persamaan karakteristik (3.19) sehingga diperoleh

$$(\lambda^2 + B_2)(\lambda + B_1) = \xi_1 + i\xi_2$$

dengan

$$\begin{aligned} \xi_1 &= p_1^3(m) + p_1^2(m)B_1(m) - 3p_1(m)p_2^2(m) \\ &\quad - p_2^2(m)B_1(m) + p_1(m)B_2(m) + B_1(m)B_2(m), \\ &= p_1^3(m) + p_1^2(m)B_1(m) - 3p_1(m)p_2^2(m) \\ &\quad - p_2^2(m)B_1(m) + p_1(m)B_2(m) + B_3(m), \\ \xi_2 &= 3p_1^2(m)p_2(m) + 2p_1(m)p_2(m)B_1(m) - p_2^3(m) \\ &\quad + p_2(m)B_2(m). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Agar persamaan (3.19) terpenuhi, nilai $\xi_1 = 0$ dan $\xi_2 = 0$. Selanjutnya menurunkan persamaan (3.21) terhadap m , sehingga diperoleh hasil turunan sebagai berikut

$$\frac{d\xi_1}{dm} = D_1(m)p_1'(m) - D_2(m)p_2'(m) + D_3(m) = 0, \quad (3.22)$$

$$\frac{d\xi_2}{dm} = D_2(m)p_1'(m) + D_1(m)p_2'(m) + D_4(m) = 0, \quad (3.23)$$

dengan

$$D_1(m) = 3(p_1(m)^2 - p_2^2(m)) + 2B_1(m)p_1(m) + B_2(m),$$

$$D_2(m) = 6p_1(m)p_2(m) + 2B_1(m)p_2(m),$$

$$D_3(m) = B_1'(m)(p_1^2(m) - p_2^2(m)) + B_2'(m)p_1(m) + B_3'(m),$$

$$D_4(m) = 2B_1'(m)p_1(m)p_2(m) + B_2'(m)p_2(m).$$

Selanjutnya mengeliminasi persamaan (3.22) dan (3.23) sehingga menghasilkan solusi

$$p_1' = -\frac{D_1(m)D_3(m) + D_2(m)D_4(m)}{D_1^2(m) + D_2^2(m)}. \quad (3.24)$$

Dengan mengganti nilai m dengan m_0 dan mensubstitusikan $p_1(m_0) = 0$ dan $p_2(m_0) = \sqrt{B_2(m_0)}$ ke dalam persamaan $D_1(m)$, $D_2(m)$, $D_3(m)$ dan $D_4(m)$ diperoleh

$$\begin{aligned} D_1(m_0) &= -2B_2(m_0), \\ D_2(m_0) &= 2B_1(m_0)\sqrt{B_2(m_0)}, \\ D_3(m_0) &= -B_1'(m_0)B_2(m_0) + B_3'(m_0), \\ D_4(m_0) &= B_2'(m_0)\sqrt{B_2(m_0)}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

sehingga

$$p_1' = \frac{B_3'(m_0) - (B_1'(m_0)B_2(m_0) + B_1(m_0)B_2'(m_0))}{2(B_2(m_0) + B_1^2(m_0))}.$$

Jika

$$B_3'(m_0) - (B_1'(m_0)B_2(m_0) + B_1(m_0)B_2'(m_0)) \neq 0$$

maka

$$\frac{d}{dm} \operatorname{Re}(\lambda(m)) \Big|_{m=m_0} = p_1'(m) \neq 0.$$

Hal yang sama berlaku untuk $\lambda_2(m) = p_1(m) - ip_2(m)$, dengan mensubstitusikan $p_1(m_0) = 0$ dan $p_2(m_0) = -\sqrt{B_2(m_0)}$ ke dalam

persamaan $D_1(m)$, $D_2(m)$, $D_3(m)$ dan $D_4(m)$ diperoleh

$$\begin{aligned}
 D_1(m_0) &= -2B_2(m_0), \\
 D_2(m_0) &= 2B_1(m_0)\sqrt{B_2(m_0)}, \\
 D_3(m_0) &= B'_1(m_0)B_2(m_0) + B'_3(m_0), \\
 D_4(m_0) &= B'_2(m_0)\sqrt{B_2(m_0)},
 \end{aligned}
 \tag{3.26}$$

sehingga

$$p'_1 = \frac{B'_3(m_0) - (B'_1(m_0)B_2(m_0) + B_1(m_0)B'_2(m_0))}{2(B_2(m_0) + B_1^2(m_0))}.$$

Jika

$$B'_3(m_0) - (B'_1(m_0)B_2(m_0) + B_1(m_0)B'_2(m_0)) \neq 0$$

maka

$$\frac{d}{dm} Re(\lambda(m)) \Big|_{m=m_0} = p'_1(m) \neq 0.$$

Berdasarkan teorema (3.2) terjadi bifurkasi Hopf di titik kesetimbangan E_5 , jika terdapat $m = m_0$ yang memenuhi

1. $B_1(m_0) > 0$,
2. $B_2(m_0) > 0$,
3. $B'_3(m_0) - (B'_1(m_0)B_2(m_0) + B_1(m_0)B'_2(m_0)) \neq 0$.

3.7 Simulasi Numerik dan Interpretasi Hasil Analisis

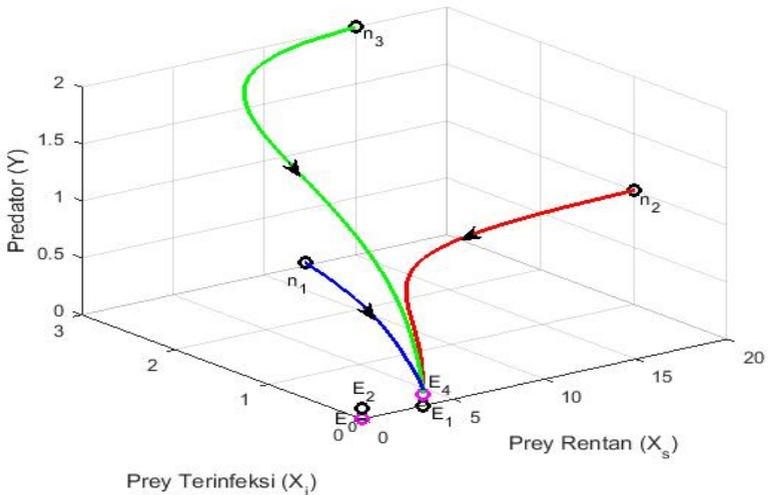
Pada bagian ini disajikan hasil simulasi numerik sistem dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat yang mengacu pada hasil analisis yang disajikan pada Tabel 3.1 dan Teorema 3.2. Selain itu dilakukan pula simulasi yang memperlihatkan pengaruh parameter perlindungan. Dengan demikian ada 3 kelompok simulasi yang dilakukan, yaitu simulasi yang memperlihatkan kestabilan titik kesetimbangan E_4 dan E_5 , simulasi yang memperlihatkan terjadinya bifurkasi Hopf dan simulasi pengaruh parameter perlindungan terhadap setiap kepadatan populasi.

3.7.1 Simulasi numerik kestabilan titik kesetimbangan

Untuk memperlihatkan kestabilan titik kesetimbangan E_4 diambil nilai parameter $r_1 = 1$, $r_2 = 0.2$, $a = 0.2$, $b = 0.3$, $m = 0.42$, $\alpha = 1.4$, $\beta = 0.09$, $\gamma = 0.4$, dan $\delta = 0.6$. Nilai parameter tersebut memenuhi syarat kestabilan lokal titik kesetimbangan $E_4 \left(\frac{r_1}{b}, 0, \frac{ar_2}{\gamma} \right)$, yaitu

$$r_1 < \frac{b\gamma\delta + \alpha(1-m)br_2}{b\gamma} = 3.3533.$$

Dengan nilai parameter tersebut titik kesetimbangan E_5 tidak eksis karena bertentangan dengan syarat eksistensi titik kesetimbangan E_5 pada Tabel (3.1). Selain itu sesuai analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan yang telah dilakukan titik kesetimbangan $E_0(0, 0, 0)$, $E_1(3.3333, 0, 0)$, dan $E_2(0, 0, 0.1000)$ selalu eksis dan bersifat tidak stabil.



Gambar 3.1: Potret fase sistem (3.3) yang menunjukkan kestabilan titik kesetimbangan E_4

Perilaku solusi disajikan dalam potret fase pada Gambar 3.1 yang menunjukkan bahwa orbit solusi yang berawal dari tiga nilai

awal yang berbeda, yaitu $n_1 = (2, 1, 1)$, $n_2 = (20, 1, 1)$, dan $n_3 = (15, 3, 2)$ menuju ke titik kesetimbangan $E_4 = (3.3333, 0, 0.1000)$ dengan nilai eigen sebesar $(-1.0000, -0.2000, -0.7060)$.

Selanjutnya untuk menunjukkan kestabilan titik E_5 dilakukan simulasi numerik dengan nilai parameter yang sama dengan simulasi sebelumnya, namun nilai r_1 diperbesar, yaitu $r_1 = 5.5$ agar syarat eksistensi titik kesetimbangan E_5 terpenuhi. Nilai tersebut memenuhi syarat eksistensi titik kesetimbangan $E_3 \left(\frac{\delta}{\beta}, \frac{\beta r_1 - b\delta}{\beta(b+\beta)}, 0 \right)$ dan $E_5(X_s^*, X_i^*, Y^*)$, yaitu

$$r_1 > \frac{b\delta}{\beta} = 2 > \frac{b\gamma\delta + \alpha(1-m)br_2}{b\gamma} = 3.3533.$$

Parameter tersebut tidak memenuhi syarat kestabilan titik kesetimbangan E_4 , sehingga titik kesetimbangan E_4 bersifat tidak stabil. Nilai parameter yang diberikan juga memenuhi syarat kestabilan lokal titik kesetimbangan E_5 , yaitu

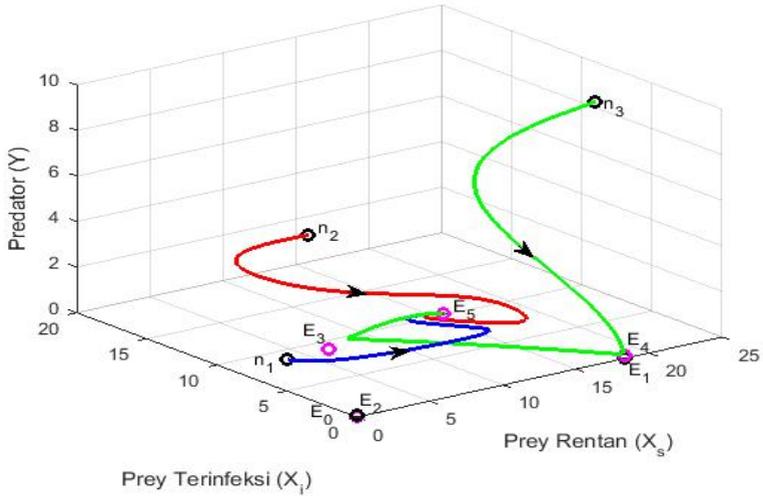
1. $B_1 = 3.1713 > 0$,
2. $B_3 = 0.4319 > 0$,
3. $B_1 B_2 - B_3 = 4.4805 > 0$.

Dengan demikian semua titik kesetimbangan eksis dan hanya titik kesetimbangan E_5 yang stabil asimtotik lokal. Titik kesetimbangan $E_0(0, 0, 0)$, $E_1(18.3333, 0, 0)$, $E_2(0, 0, 0.1)$, $E_3(6.6667, 8.9744, 0)$, dan $E_4(18.3333, 0, 0.1000)$ bersifat tidak stabil pelana.

Gambar 3.2 menunjukkan hasil simulasi numerik dengan enam nilai awal yang berbeda, yaitu $n_1 = (1, 6, 1)$, $n_3 = (11, 15, 3)$, dan $n_5 = (23, 7, 9)$. Terlihat bahwa orbit solusi mengarah ke titik kesetimbangan $E_5(11.1778, 5.5043, 1.6962)$ dan tidak menuju titik kesetimbangan yang lain. Selanjutnya telah ditunjukkan bahwa titik kesetimbangan E_5 bersifat stabil simtotik lokal.

3.7.2 Simulasi numerik pengaruh perlindungan *prey* terinfeksi

Untuk memperlihatkan pengaruh perlindungan pada titik kesetimbangan $E_5(X_s^*, X_i^*, Y^*)$ digunakan parameter yang sama

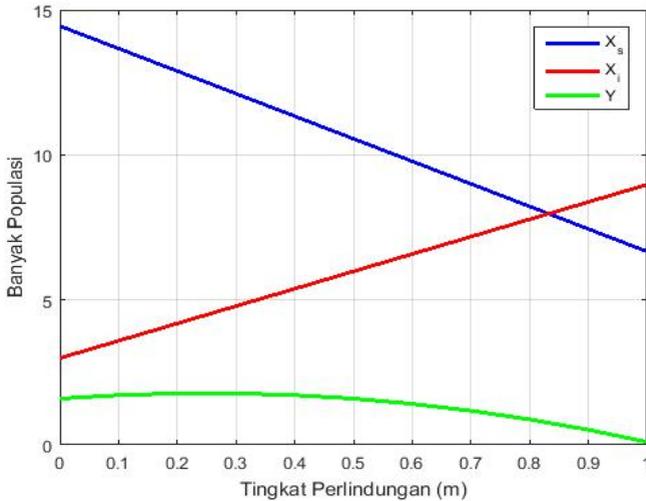


Gambar 3.2: Potret fase sistem (3.3) yang menunjukkan kestabilan titik kesetimbangan E_5

dengan simulasi sebelumnya dengan nilai m berubah pada selang $(0, 1)$. Dengan nilai parameter tersebut diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dX_s^*}{dm} &= \frac{-ar_2}{\beta\gamma} = -7.7778 < 0, \\ \frac{dX_i}{dm} &= \frac{b\alpha r_3}{\beta\gamma(b + \beta)} = 5.9829 > 0, \\ \frac{dY^*}{dm} &= \frac{-r_2}{\beta\gamma^2(b + \beta)} (\gamma\beta r_1 - b(2\alpha r_2(1 - m) + \delta\gamma)). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Untuk kepadatan populasi *predator* meningkat jika $m > 1 - \left(\frac{\gamma(\beta r_1 - \gamma\delta)}{2b\alpha r_2}\right) = 0.25$ dan berkurang jika $m < 1 - \left(\frac{\gamma(\beta r_1 - \gamma\delta)}{2b\alpha r_2}\right) = 0.25$. Gambar 3.3 menunjukkan pengaruh adanya perlindungan di setiap kepadatan populasi. Meningkatkan jumlah perlindungan dapat mengurangi kepadatan populasi *prey* rentan, sedangkan kepadatan populasi *prey* terinfeksi meningkat. Untuk kepadatan populasi *predator* bertambah jika $m \in (0, 0.25)$ dan akan berkurang jika $m \in (0.25, 1.0)$



Gambar 3.3: Pengaruh perlindungan *prey* terinfeksi terhadap setiap kepadatan subpopulasi

3.7.3 Simulasi numerik analisis terjadinya bifurkasi Hopf

Simulasi ini dilakukan untuk memperlihatkan terjadinya bifurkasi Hopf dengan menggunakan nilai parameter yang digunakan sebelumnya, yaitu $r_1 = 5.5$, $r_2 = 0.2$, $a = 0.2$, $b = 0.3$, $m = 0.42$, $\alpha = 1.4$, $\beta = 0.09$, $\gamma = 0.4$, dan $\delta = 0.6$. Penentuan nilai m_0 dilakukan dengan mensubstitusi nilai parameter kecuali nilai m ke dalam persamaan pada Teorema 3.6, yaitu $B_1(m)B_2(m) - B_3(m) = 0$. Digunakan *software Maple* sehingga diperoleh nilai $m_0 = 0.09685283210$. Hasil numerik pemenuhan syarat terjadinya bifurkasi Hopf sebagai berikut

1. $B_1(m_0) = 3.7118 > 0$,
2. $B_2(m_0) = 0.0933 > 0$,
3. $B'_3(m_0) - (B'_1(m_0)B_2(m_0) + B_1(m_0)B'_2(m_0)) = -0.7096891664 \neq 0$.

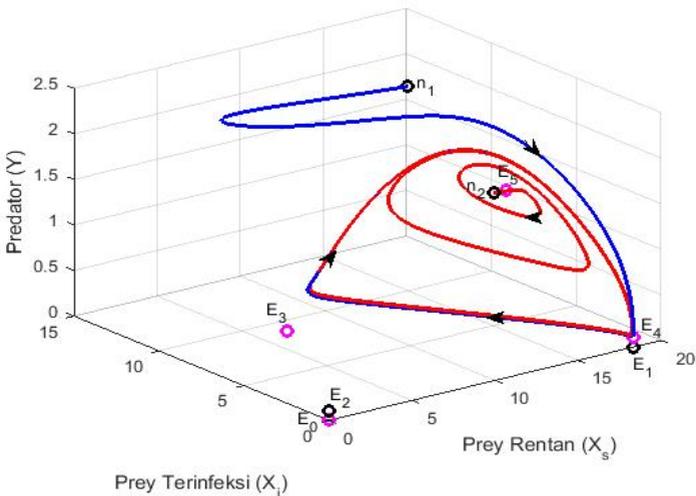
Dengan dua nilai awal yang berbeda $n_1 = (17, 12, 2)$ dan $n_2 = (13, 3, 1.7)$ perilaku solusi di sekitar titik kesetimbangan E_5 disajikan

dalam Gambar 3.4 dan Gambar 3.6.

Jika diambil nilai $m = 0.05 < m_0$ maka berdasarkan syarat kestabilan E_5 ditunjukkan hasil numerik sebagai berikut.

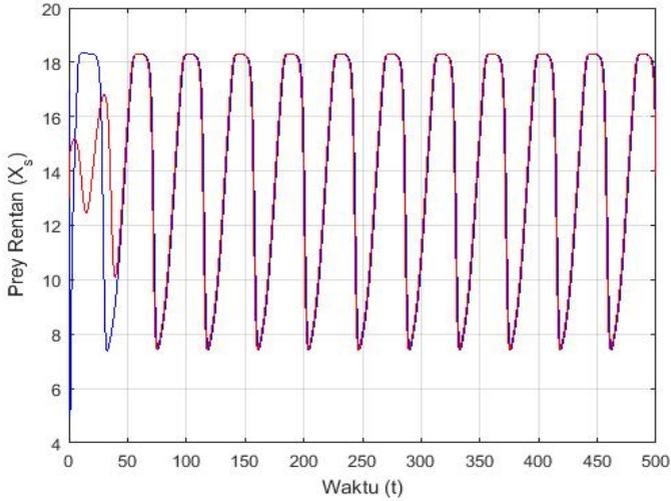
1. $B_1(m_0) = 3.7917 > 0$,
2. $B_3(m_0) = 0.3247 > 0$,
3. $B_1B_2 - B_3 = -0.9644 < 0$.

Terlihat bahwa syarat yang ketiga dari kriteria Routh-Hurwitz kestabilan titik kesetimbangan E_5 tidak terpenuhi karena nilai $B_1B_2 - B_3 < 0$. Hal ini mengakibatkan titik kesetimbangan E_5 bersifat tidak stabil asimtotik. Gambar 3.4 menunjukkan bahwa titik kesetimbangan $E_5(14.0556, 3.2906, 1.6630)$ bersifat tidak stabil karena dijauhi oleh trayektori di sekitarnya dan muncul *limit cycle* yang stabil di sekitar titik kesetimbangan. Gambar 3.5 menunjukkan bahwa solusi $X_s(t)$ berosilasi sampai waktu yang tak terhingga dan tidak menuju ke suatu nilai tertentu.



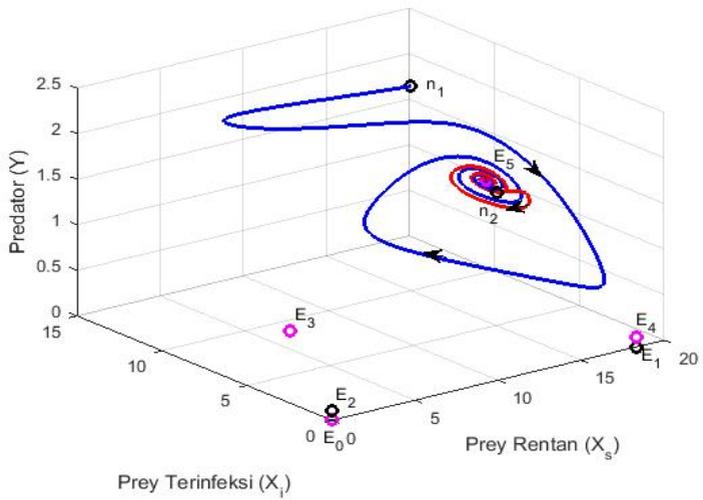
Gambar 3.4: Potret fase untuk $m = 0.05 < m_0$

Pada simulasi berikutnya diambil $m = 0.15 > m_0$. Hasil numerik yang diperlihatkan pada Gambar 3.6 yang menunjukkan

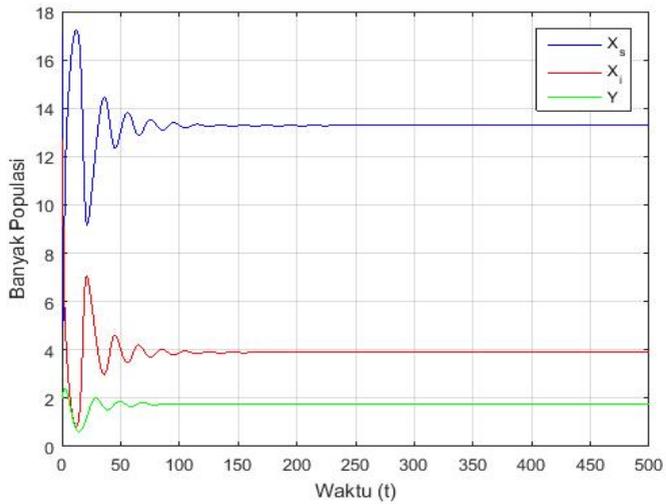


Gambar 3.5: Grafik solusi $X_s(t)$ untuk $m = 0.05$

bahwa titik kesetimbangan $E_5(13.2778, 3.8889, 1.7528)$ bersifat stabil asimtotik. Gambar 3.7 menunjukkan bahwa $X_s(t)$ stabil pada 13.2778 dalam waktu kurang dari 500, dan begitu pula dengan $X_i(t)$ dan $Y(t)$ yang mencapai nilai 3.8889 dan 1.7528 dalam waktu kurang dari 500.



Gambar 3.6: Potret fase untuk $m = 0.15 > m_0$



Gambar 3.7: Grafik solusi $X_s(t)$ untuk $m = 0.15$

