BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas beberapa definisi dan contoh yang mendukung pembuktian dari teorema prinsip kontraksi Banach serta penerapan prinsip kontaksi Banach pada sistem persamaan linear.

3.1 Titik Tetap

Definisi 3.1.1 (Titik Tetap)

Diberikan ruang metrik (X, d) dan suatu pemetaan $f: X \to X$. Titik $x \in X$ disebut titik tetap f jika $x = f(x)$.

***Remark* 3.1.1**

Dari definisi tersebut telah jelas jika setiap pemetaan kontraksi adalah kontinu seragam.

(Siddiqi, 2006)

Contoh 3.1.2

Diberikan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = x^2 - 2$$

Sehingga

$$\begin{aligned} f(x) = x \iff & x^2 - 2 = x \\ \iff & x^2 - x - 2 = 0 \\ \iff & (x-2)(x+1) = 0 \\ \iff & x = 2 \lor x = -1 \end{aligned}$$

Maka $x = 2$ atau $x = -1$ merupakan titik tetap.

3.2 Ruang Banach

Definisi 3.2.1 (Ruang Banach)

Ruang vektor bernorma yang lengkap disebut ruang Banach.

(Siddiqi, 2006)

Contoh 3.2.2

$$\|x_1, x_2\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2)^{\frac{1}{2}}$$

akan dibuktikan $\mathbb{R}^2$ dengan ruang bernorma 2 merupakan ruang Banach.

Penyelesaian :

(i) Akan ditunjukkan $\mathbb{R}^2$ adalah ruang vektor bernorma

a) Ambil sebarang $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$

$v(x_1, x_2) = (|x_1|^2 + |x_2|^2)^{\frac{1}{2}}$

b) Ambil $x_1 = x_2 = 0.$

$$\begin{aligned} v(x_1, x_2) &= (|0|^2 + |0|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

c) Ambil sebarang $a \in K$

$$\begin{aligned} v\big(a(x_1, x_2)\big) &= v(ax_1, ax_2) \\ &= (|ax_1|^2 + |ax_2|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= (|a|^2|x_1|^2 + |a|^2|x_2|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \big(|a|^2(|x_1|^2 + |x_2|^2)\big)^{\frac{1}{2}} \\ &= |a|v(x_1, x_2). \end{aligned}$$

d) Misal

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2), \;\; y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \\ x + y &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \end{aligned}$$

dengan menggunakan pertidaksamaan Minkowski diperoleh

$$\sum_{i=1}^{2} |x_i + y_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{2} |x_i|^2 + \sum_{i=1}^{2} |y_i|^2$$

Dengan aksioma norma $\|x\| = (|x_1|^2 + |x_1|^2)^{\frac{1}{2}}$ pada $\mathbb{R}^2$, sehingga

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= (|x_1 + y_1|^2 + |x_2 + y_2|^2)^{\frac{1}{2}} \\ \left(\sum_{i=1}^{2} |x_i + y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\sum_{i=1}^{2} |x_i|^2 + \sum_{i=1}^{2} |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Sesuai pertidaksamaan Minkowsi diketahui $x = \langle x_i \rangle \in \mathbb{R}^2$ dan $y = \langle y_i \rangle \in \mathbb{R}^2$. Sehingga $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Dari (a), (b), (c), dan (d) maka terbukti bahwa $\mathbb{R}^2$ adalah ruang vektor bernorma.

(ii) Kemudian untuk menunjukkan $\mathbb{R}^2$ adalah ruang Banach, maka akan dibuktikan bahwa setiap barisan Cauchy di $\mathbb{R}^2$ adalah konvergen.

Diketahui $x_n = \langle a_i{}^{(n)} \rangle \in \mathbb{R}^2$ adalah barisan Cauchy. Maka

$$\|x_n + x_m\| = \sum_{i=1}^{2} (|a_i{}^n - a_i{}^m|^2)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \qquad n, m \geq N \qquad (3.1)$$

maka

$$|a_i{}^n - a_i{}^m| < \varepsilon \qquad n, m \geq N. \qquad (3.2)$$

Untuk suatu i yang tetap, dengan menggunakan pertidaksamaan (3.2) maka $\langle a_i{}^{(n)} \rangle$ adalah barisan Cauchy untuk bilangan real sehingga barisan $\langle a_i{}^{(n)} \rangle$ adalah barisan yang konvergen ke a_i, yaitu

$$\lim_{n \to \infty} a_i{}^n = a_i \qquad (3.3)$$

dari persamaan (3.1) diperoleh

$$\sum_{i=1}^{k} |a_i{}^n - a_i{}^m|^2 < \varepsilon^2, \qquad \forall k$$

pilih $m \to \infty$, sehingga

$$\sum_{i=1}^{k} |a_i{}^n - a_i|^2 < \varepsilon^2, \qquad n \geq N$$

selanjutnya pilih $k \to \infty$, diperoleh

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i{}^n - a_i|^2 < \varepsilon^2, \qquad n \geq N$$

sehingga

$$-(x_n - x) = x - x_n \in \mathbb{R}^2$$

di mana $x = (a_1, a_2)$.

Oleh karena itu

$$\|x_n - x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i{}^n - a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon, \qquad n \geq N$$

sehingga $\|x_n - x\| \to 0$ di mana $n \to \infty$. Jadi $\langle x_n \rangle$ konvergen ke $x \in \mathbb{R}^2$.

Dari (i) dan (ii) maka diperoleh kesimpulan bahwa $\mathbb{R}^2$ adalah ruang Banach.

3.3 Pemetaan Kontraksi

Definisi 3.3.1 (Pemetaan Kontraksi)

Diberikan T pemetaan di ruang bernorma X ke dirinya sendiri. T disebut pemetaan kontraksi jika terdapat konstanta k, $0 \leq k < 1$, seperti pada $\|Tx - Ty\| \leq k\|x - y\|, \forall x, y \in X$.

(Siddiqi, 2006)

Contoh 3.3.2

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = x + \frac{1}{x}$$

Bukti

Ambil sebarang $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ sehingga

$$\begin{aligned}
\|f(x_1) - f(x_2)\| &= \left\| x_1 + \frac{1}{x_1} - x_2 - \frac{1}{x_2} \right\| \\
&= \left| x_1 - x_2 + \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} \right| \\
&= \left| x_1 - x_2 - \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} \right| \\
&= \left| (x_1 - x_2)\left(1 - \frac{1}{x_1 x_2}\right) \right| \\
&= \left| \left(\frac{x_1 x_2 - 1}{x_1 x_2}\right)(x_1 - x_2) \right| \\
&\le \left| \frac{x_1 x_2 - 1}{x_1 x_2} \right| |x_1 - x_2| \\
&= k|x_1 - x_2|
\end{aligned}$$

sehingga pasti terdapat $k = \frac{x_1 x_2 - 1}{x_1 x_2}$, dengan $0 \le k < 1$. ■

3.4 Prinsip Kontraksi Banach

Teorema 3.4.1 (Prinsip Kontraksi Banach)

Setiap pemetaan kontraksi T yang didefinisikan pada ruang Banach X ke dirinya sendiri mempunyai titik tetap tunggal $x^* \in X$. Sehingga, jika x_0 merupakan sebarang titik pada X dan barisan $\langle x_n \rangle$ didefinisikan dengan

$$x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, x_3 = Tx_2, \dots, x_n = Tx_{n-1},$$

maka

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x^*$$

dan

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|x_1 - x_0\|. \qquad (3.4)$$

Bukti
1. Eksistensi titik tetap: Diberikan x_0 sebarang titik di X, didefinisikan

$$x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, x_3 = Tx_2, \dots, x_n = Tx_{n-1}, \dots$$

Maka,

$$\begin{aligned}
&x_2 = Tx_1 = T(Tx)_0 = T^2 x_0 \\
&x_3 = Tx_2 = T(Tx)_1 = T(T(Tx))_0 = T^3 x_0 \\
&\dots \\
&x_0 = T^n x_0
\end{aligned}$$

jika $m > n$, dapat dikatakan $m = n + p$, $p = 1, 2, 3, \dots$, maka

$$\begin{aligned}
\|x_{n+p} - x_n\| &= \|T^{n+p} x_0 - T^n x_0\| \\
&= \|T(T^{n+p-1} x_0) - T(T^{n-1} x_0)\| \\
&\leq k\|T^{n+p-1} x_0 - T^{n-1} x_0\|
\end{aligned}$$

karena T adalah pemetaan kontraksi, dengan meneruskan proses sebanyak $n - 1$ kali, diperoleh

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq k^n \|T^p x_0 - x_0\| \qquad (3.5)$$

untuk $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, dan semua p.
Sedemikian sehingga,

$$\begin{aligned}
\|T^p x_0 - x_0\| &= \|T^p x_0 - T^{p-1} x_0 + T^{p-1} x_0 - T^{p-2} x_0 + T^{p-2} x_0 \\
&\quad + \dots + Tx_0 - x_0\| \\
&\leq \|T^p x_0 - T^{p-1} x_0\| + \|T^{p-1} x_0 - T^{p-2} x_0\| + \dots \\
&\quad + \|Tx_0 - x_0\|
\end{aligned}$$

Karena $T^p x_0 = T^{p-1}x_1, T^{p-1}x_0 = T^{p-2}x_1, \dots, Tx_0 = x_1$,

diperoleh

$$\|T^p x_0 - x_0\| \leq \|T^{p-1}x_1 - T^{p-1}x_0\| + \|T^{p-2}x_1 - T^{p-2}x_0\| + \dots + \|x_1 - x_0\|$$

dengan pertidaksamaan (3.5), maka

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq k^n[k^{p-1}\|x_1 - x\| + k^{p-2}\|x_1 - x_0\|$$

$$+ \dots + \|x_1 - x_0\|]$$

$$\leq k^n\|x_1 - x_0\|[1 + k + k^2 + \dots + k^{p-1} + k^p + \dots]$$

untuk $k \geq 0$

$$\Rightarrow \qquad \|x_{n+p} - x_n\| \leq k^n\|x_1 - x_0\| \frac{1}{1-k} \qquad (3.6)$$

karena $\sum_{m=0}^{\infty} k^m$ deret geometri dengan rasio k untuk $0 \leq k < 1$.untuk $n, m = n + p$ menuju ∞, dari pertidaksamaan (3.6), diketahui $\|x_{n+p} - x_n\| \to 0$, sehingga $\langle x_n \rangle$ adalah barisan Cauchy di ruang Banach X. Oleh karena itu, $\langle x_n \rangle$ harus konvergen atau $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$.

Karena T adalah kontinu dan merujuk ***Remark* 3.1.1**, sehingga diperoleh

$$Tx^* = T\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1}$$

(sesuai definisi $\langle x_n \rangle, x_{n+1} = Tx_n$)

$$\Rightarrow \qquad Tx^* = x^* \qquad \text{(limit dari } \langle x_{n+1} \rangle \text{ sama dengan } \langle x_n \rangle)$$

Oleh karena itu, x^* adalah titik tetap dari T.

2. Ketunggalan dari titik tetap :

Diberikan ${x_1}^*$ titik tetap lain dari T.

Maka

$$T{x_1}^* = {x_1}^* \Leftrightarrow \|Tx^* - T{x_1}^*\| \leq k\|x^* - {x_1}^*\|$$

dengan T adalah pemetaan kontraksi. Tetapi,

$$\|Tx^* - T{x_1}^*\| = \|x^* - {x_1}^*\|$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \|x^* - {x_1}^*\| \leq k\|x^* - {x_1}^*\| &\Leftrightarrow \|x^* - {x_1}^*\| = 0 \\ &\Leftrightarrow x^* - {x_1}^* = 0 \\ &\Leftrightarrow x^* = {x_1}^* \end{aligned}$$

Maka terbukti bahwa titik tetap dari T adalah tunggal.

3. Turunan dari pertidaksamaan (3.4) :

Dengan langkah yang sama seperti pada langkah (1), didapatkan

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$$

dan

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \frac{k^n}{1-k}\|x_1 - x_0\|$$

Untuk $p \to \infty$ pada pertidaksamaan di atas, diperoleh

$$\begin{aligned} \lim_{p\to\infty}\|x_{n+p} - x_n\| &\leq \frac{k^n}{1-k}\|x_1 - x_0\| \\ \left\|\left(\lim_{p\to\infty} x_{n+p}\right) - x_n\right\| &\leq \frac{k^n}{1-k}\|x_1 - x_0\| \\ \left\|\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) - x_n\right\| &\leq \frac{k^n}{1-k}\|x_1 - x_0\| \\ \|x^* - x_n\| &\leq \frac{k^n}{1-k}\|x_1 - x_0\| \\ \|x_n - x^*\| &\leq \frac{k^n}{1-k}\|x_1 - x_0\| \end{aligned}$$

Jadi terbukti jika x_0 merupakan sebarang titik pada X dan barisan $\langle x_n \rangle$ maka $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ dan $\|x_n - x^*\| \leq \frac{k^n}{1-k}\|x_1 - x_0\|$

3.5 Penerapan Prinsip Kontraksi Banach

Aplikasi 3.5.1 (Penerapan Prinsip Kontraksi Banach)

Misalkan akan dicari solusi dari sistem persamaan linear berderajat n dengan sebarang $n \epsilon \mathbb{N}$ yaitu

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \tag{3.7}$$

dapat ditulis dalam bentuk matrik $Ax = b$, yaitu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \text{ dan } b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$$

SPL (3.4) dapat ditulis

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = (1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ \dots - a_{1n}x_n + b_1 \\ x_2 = -a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 - a_{23}x_3 - \ \dots - a_{2n}x_n + b_2 \\ x_3 = -a_{31}x_1 - a_{32}x_2 + (1 - a_{33})x_3 - \ \dots - a_{3n}x_n + b_3 \\ \qquad\qquad\qquad \dots \\ x_n = -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - a_{n3}x_3 - \ \dots + (1 - a_{nn})x_n + b_n \end{array}\right\} \tag{3.8}$$

Dengan memisalkan $\beta_{ij} = -a_{ij} + \delta_{ij}$, di mana

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

persamaan (3.8) dapat ditulis dalam bentuk berikut

$$x_i = \sum_{\text{j=i}}^{n} \beta_{ij} x_j + b_i, \ \ i = 1,2,3, \dots, n \tag{3.9}$$

Jika $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, maka persamaan (3.7) dapat ditulis

$$x - Ax + b = x \tag{3.10}$$

Diberikan $Tx = x - Ax + b$. Maka untuk mencari solusi sistem $Ax = b$ ekuivalen dengan mencari titik tetap pada pemetaan T. Maka $Tx - Tx' = (I - A)(x - x')$ dan ditunjukkan T adalah suatu kontraksi yang memungkinkan pada matriks.

Untuk mencari titik tetap tunggal dari T yaitu sebuah solusi tunggal dari persamaan (3.10), maka diterapkan **Teorema 3.4.1**. Persamaan (3.10) memiliki solusi tunggal jika

$$\sum_{j=1}^{n} |\beta_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} |-a_{ij} + \delta_{ij}| \leq k < 1, i = 1,2, \dots, n$$

Untuk $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$,

didapat

$$\|Tx - Tx'\| = \|y - y'\|$$

di mana

$$\begin{aligned} y &= (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \\ y' &= (y'_1, y'_2, \dots, y'_n) \in \mathbb{R}^n \\ y_i &= \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} x_j + b_i \\ y'_i &= \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}' x_j + b_i\,, \qquad i = 1,2,3, \dots, n \end{aligned}$$

maka

$$
\begin{aligned}
\|y - y'\| &= \sup_{1\le i\le n} |y_i - y'_i| \\
&= \sup_{1\le i\le n} \left| \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} x_j + b_i - \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} x'_j - b_i \right| \\
&= \sup_{1\le i\le n} \left| \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} (x_j - x'_j) \right| \\
&\le \sup_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |\beta_{ij}| |x_j - x'_j| \\
&\le \sup_{1\le j\le n} |x_j - x'_j| \sup_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |\beta_{ij}| \\
&\le k \sup_{1\le j\le n} |x_j - x'_j|.
\end{aligned}
$$

Karena $\sum_{\text{j=i}}^{n} |\beta_{ij}| \le k < 1$ untuk $i = 1,2,\dots,n$ dan $\|x - x'\| = \sup_{1\le j\le n} |x_j - x'_j|$, diperoleh $\|Tx - Tx'\| \le k\|x - x'\|$, $0 \le k < 1$, atau dengan kata lain T adalah suatu pemetaan kontraksi.

Contoh 3.5.2
Diberikan sistem persamaan linear

$$
\begin{array}{ccccc}
\frac{3}{2}x_1 & + & x_2 & = & 2 \\
x_2 & + & x_3 & = & 3 \\
x_2 & + & \frac{2}{3}x_3 & = & 1
\end{array}
$$

dapat ditulis dalam bentuk matriks $Ax = b$ di mana

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$x = (x_1, x_2, x_3)^T \text{ dan } b = (2{,}3{,}1)^T,$$

kemudian matriks A diubah menjadi matriks β dengan entri $\sum_{j=i}^{3} -a_{ij} + \delta_{ij}$ di mana

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

sehingga terbentuk matriks

$$\beta = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} + 1 & -1 + 0 & 0 + 0 \\ 0 + 0 & -1 + 1 & -1 + 0 \\ 0 + 0 & -1 + 0 & -\frac{2}{3} + 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Kemudian dicari determinan dari matriks β

$$|\beta| = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \leq k$$

Karena $\sum_{j=i}^{n}\left|\beta_{ij}\right| = \frac{1}{2} \leq k < 1$ maka terbukti matriks A memiliki solusi tunggal. Kemudian dengan menggunakan operasi baris elementer, akan dicari solusi matriks A.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \frac{3}{2} & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \frac{3}{2} & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -2 \end{array}\right]$$ Baris ketiga dikurangi baris kedua

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \frac{3}{2} & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$ Baris ketiga dikalikan -3

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \frac{3}{2} & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$ Baris kedua dikurangi baris ketiga

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$ Baris pertama dikurangi baris kedua

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{10}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$ Baris pertama dikalikan $\frac{2}{3}$

Maka diperoleh suatu solusi tunggal $x = \left(\frac{10}{3}, -3, 6\right)^T$.